

Propagation d'incertitude par réduction de modèle pour un problème couplé de reconstruction osseuse

**D. DUREISSEIX^a, J. YANG^b, B. FAVERJON^{a,b}, N. KESSISSOGLOU^b,
P. SWIDER^c**

a. Université de Lyon, INSA-Lyon, CNRS, LaMCoS UMR5259, France
(David.Dureisseix@insa-lyon.fr)

b. School of Mechanical and Manufacturing Engineering, UNSW Australia

c. Université de Toulouse, CNRS, INP-Toulouse, IMFT UMR 5502, France

Résumé :

Cette communication vise à montrer l'intérêt de l'utilisation d'une réduction de modèle couplée à une technique de morphing pour analyser un problème biomécanique avec une incertitude géométrique pour la reformation osseuse. Une analyse stochastique est réalisée sur le modèle réduit, puis validée et comparée avec une approche de Monte-Carlo. La forme particulière du modèle réduit permet de ne nécessiter qu'une phase de post-processing pour obtenir la loi de probabilité de la quantité d'intérêt étant donnée celle de l'entrée.

Abstract :

This work implements both a reduced order model and a morphing approach to analyze geometrical uncertainty in a biomechanical coupled problem of bone formation. A stochastic analysis is performed on the reduced order model and is validated and compared to the Monte-Carlo approach. The particular form of the reduced model allows this analysis to be performed as a single post-processing step for a given probability law of the entry.

Mots clefs : biomécanique, morphing, méthode de transformation de probabilité, analyse stochastique

1 Introduction

Des modèles numériques sont disponibles pour modéliser la reconstruction osseuse, en particulier autour d'un implant, par exemple [2, 1]. La quantité d'intérêt est la répartition spatiale de la densité osseuse formée au bout de 8 semaines, ce qui n'est qu'une relativement petite partie de la solution numérique complète du modèle multiphysique couplé transitoire de convection-diffusion-réaction. Ce type de modèle phénoménologique fait intervenir de nombreux paramètres (géométrique, comportement matériaux [6], conditions initiales...) dont on ne maîtrise qu'imparfaitement les valeurs, et qui présentent de la variabilité. Il est alors utile de pouvoir procéder à une propagation d'incertitude sur la quantité d'intérêt,

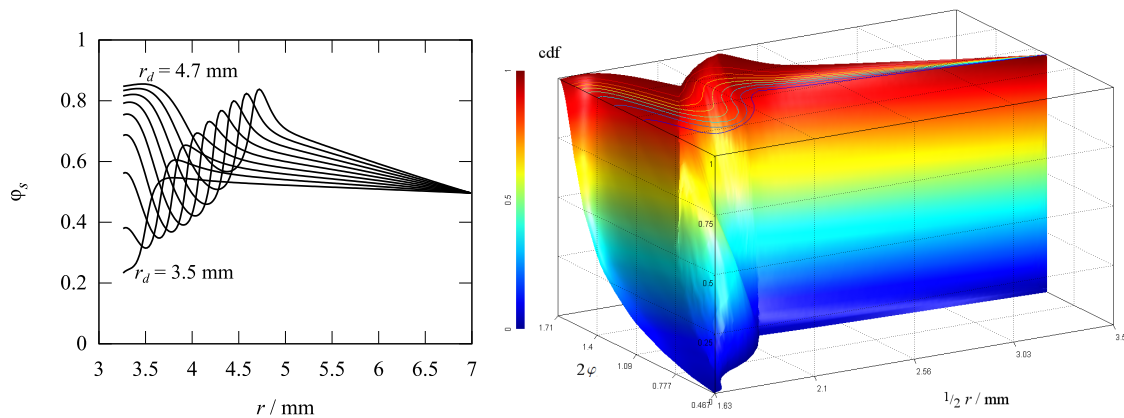


FIGURE 1 – Snapshot des répartitions de densité osseuse (à gauche) et fonction de répartition de probabilité associée (à droite).

pour mieux caractériser ses valeurs, pouvoir prescrire de façon plus robuste, pour identifier un comportement...

Nous nous concentrons ici sur une unique variable aléatoire d'entrée : le rayon de l'alésage réalisé dans l'os pour l'implantation, et nous souhaitons obtenir le maximum d'information sur la quantité d'intérêt (par exemple sa fonction de répartition).

2 Modèle déterministe en boîte noire

Ici, un modèle simple axisymétrique unidimensionnel explicite en différences finies est utilisé comme boîte noire pour le calcul direct. Ce modèle macroscopique phénoménologique comporte comme inconnues : la fraction de phase solide, la vitesse de Darcy de la phase fluide, la concentration de deux constituants biochimiques pour prendre en compte deux mécanismes de formation osseuse (la concentration cellulaire sur la phase solide, et la concentration en facteurs de croissance dans la phase fluide).

Une méthode aisée à implanter mais coûteuse à réaliser est la méthode de Monte-Carlo pour laquelle un jeu de paramètres d'entrée est généré aléatoirement (de façon plus ou moins dédiée aux caractéristiques de l'entrée), la résolution du problème complet pour chacun fournit un jeu de quantité d'intérêt qu'on peut alors analyser de façon statistique. La difficulté réside dans le nombre relativement important de résolutions directes nécessaires. Par exemple, pour la seule quantité moyenne de la sortie, un jeu de 6000 résolutions ne permet d'avoir qu'une précision de l'ordre de 1%.

3 Construction d'un modèle réduit

Les méthodes de réduction de modèle permettent de bâtir un modèle numérique de façon automatique en établissant un lien direct entre l'entrée et la quantité d'intérêt de sortie, sur la base d'un jeu (de taille faible) de réalisations du problème direct (snapshot) [5]. Dans le cas de la paramétrisation géométrique du domaine d'étude, l'utilisation d'un morphing permet d'améliorer la représentabilité du modèle de référence par un modèle réduit approprié. Cette technique sera illustrée dans cette communication : 9 résolutions permettent de déterminer 5 modes qui génèrent avec une bonne qualité l'ensemble des solutions fournies par 6000 résolutions de Monte-Carlo.

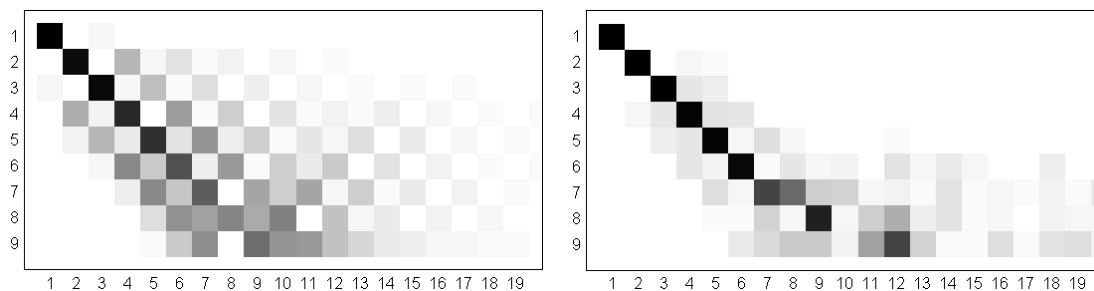


FIGURE 2 – Matrices de MAC des modes spatiaux de densité osseuses réduits, sur les modes du tirage de Monte-Carlo, sans morphing (à gauche) et avec (à droite).

Le faible coût de la résolution d'un modèle réduit peut permettre de réaliser des simulations en temps réel, d'optimiser une solution rapidement, et ici de réaliser un tirage de Monte-Carlo de grande taille, mais à coût réduit. Cependant, l'interpolation vis-à-vis de l'entrée permise dans un modèle réduit va être utilisée ici pour caractériser la sortie sans procéder à un tirage de valeurs d'entrée, mais par un post-traitement de la base générée par le modèle réduit.

4 Une méthode de transformation de probabilité

La fonction de répartition (ou la fonction de densité de probabilité cumulée cdf) de l'entrée étant donnée, sous la forme d'une courbe discrétisée $F(r_d)$ où r_d est la valeur du rayon de l'alésage d'implantation, on cherche à obtenir celle de la sortie $G(\phi, r)$ où le champ de densité osseuse est $\phi(r)$ le long du rayon r . Le modèle réduit fournissant une relation directe du type $\phi = f(r, r_d)$ représentée numériquement (la fonction est discrétisée sur la base du jeu réduit de valeurs d'entrée pour les snapshots), une implantation numérique de la méthode de transformation de probabilité, formellement :

$$G(\varphi, r) = Pr(\phi(r) \leq \varphi) = Pr(f(r, r_d) \leq \varphi) = Pr(f_{|r}(r_d) \leq \varphi) = Pr(r_d \leq f_{|r}^{-1}(-\infty, \varphi])$$

est réalisable assez facilement et à faible coût. La comparaison des résultats obtenus, en terme de moyenne, écart type et intervalle de confiance, avec la méthode de Monte-Carlo de référence sera présentée dans cette communication.

Conclusions

Cette communication montre l'intérêt de l'utilisation d'une réduction de modèle dans le cadre de la propagation d'incertitude. Au delà de la réduction du coût engendrée par ces modèles, on tire parti de la forme directe de dépendance entre l'entrée et la sortie pour produire une fonction de répartition de probabilité (cdf) de la quantité d'intérêt à partir de celle de l'entrée.

Les performances sont comparées vis-à-vis de la méthode de Monte-Carlo. L'étape suivante consiste à prendre en compte plusieurs paramètres aléatoires d'entrée simultanément, et de comparer cette approche à d'autres méthodes comme la décomposition sur chaos polynomial (PCE) [4, 3]. La détermination de la complexité (l'accroissement du coût en fonction du nombre de paramètres) est un point crucial pour ce type d'analyse.

Remerciements. B. Faverjon tient à remercier le Ministère Français de l'Enseignement Supérieur, les Université de Lyon, CNRS, INSA de Lyon et LabEx iMUST pour la bourse de mobilité et le CRCT. Ce travail a pu être réalisé grâce aussi à J. E. Bechtold (Departments of Orthopaedic Surgery, Mechanical and Biomedical Engineering, University of Minnesota USA) et K. Søballe (University Hospital of Aarhus, Denmark).

Références

- [1] D. Ambard, G. Guérin, and P. Swider. A reactive poroelastic model to predict the periprosthetic tissue healing. *European Journal of Computational Mechanics*, 18(1) :131–143, 2009.
- [2] D. Ambard and P. Swider. A predictive mechano-biological model of the bone-implant healing. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 25 :927–937, 2006.
- [3] B. Faverjon and R. Ghanem. Stochastic inversion in acoustic scattering. *Journal of the Acoustical Society of America*, 119(6) :3577–3588, 2006.
- [4] R. G. Ghanem and P. D. Spanos. *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [5] S. Niroomandi, I. Alfaro, E. Cueto, and F. Chinesta. Real-time deformable models of non-linear tissues by model reduction techniques. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 91(3) :223–231, 2008.
- [6] J. Yang, B. Faverjon, D. Dureisseix, P. Swider, and N. Kessissoglou. Analysis of bone-implant healing process with uncertain properties using polynomial chaos expansion. In *43rd International Congress on Noise Control Engineering – Inter.noise 2014*, Melbourne, Australia, 2014.