



**HAL**  
open science

## Typologie d'axiomes pour une logique modale pondérée

Bénédicte Legastelois, Marie-Jeanne Lesot, Adrien Revault d'Allonnes

► **To cite this version:**

Bénédicte Legastelois, Marie-Jeanne Lesot, Adrien Revault d'Allonnes. Typologie d'axiomes pour une logique modale pondérée. Journées d'Intelligence Artificielle Fondamentales, IAF'15, Jun 2015, Rennes, France. hal-01213320

**HAL Id: hal-01213320**

**<https://hal.science/hal-01213320>**

Submitted on 12 Dec 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Typologie d'axiomes pour une logique modale pondérée

B. Legastelois<sup>1</sup> M.-J. Lesot<sup>1</sup> A. Revault d'Allonnes<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, CNRS,  
LIP6 UMR 7606, 4 place Jussieu 75005 Paris

<sup>2</sup> Université Paris 8 - EA 4383 - LIASD, FR-93526, Saint-Denis, France  
Benedicte.Legastelois@lip6.fr

## Résumé

Cet article se place dans le contexte des logiques modales pondérées et étudie la définition d'extensions pondérées des axiomes classiques. Il propose une sémantique reposant sur un comptage relatif des mondes, qui présente l'avantage de fournir des informations permettant de guider la définition des poids. Il discute la notion de valeurs de poids pertinentes, exploitant à la fois la structure des axiomes et leur interprétation sémantique, pour des cadres de Kripke dont la relation vérifie des contraintes comme la réflexivité ou la transitivité par exemple. Il établit une typologie d'axiomes pondérés, selon 4 catégories, dépendant de l'enrichissement apporté à la version classique de l'axiome ainsi que de l'éventuelle équivalence avec les contraintes sur la relation.

## Abstract

In the framework of weighted modal logics, this paper studies the definition of weighted extensions for the classical modal axioms. It discusses the notion of relevant weight values, in a particular weighted Kripke's semantics and exploiting the properties satisfied by the accessibility relation. Different generalisations of the classical axioms are constructed and, from these, a typology of weighted axioms is built, that distinguishes between four types depending on their relations to classic axioms and to the, possibly equivalent, frame conditions.

## 1 Introduction

Les extensions pondérées des logiques modales visent à en accroître l'expressivité et, par exemple, à permettre de raisonner sur des notions affinées comme les croyances graduelles. Elles rendent ainsi possible la représentation et la manipulation de degrés de croyance en des informations, pour déterminer à quel

point on les croit. Cette problématique clé s'inscrit dans le cadre de la représentation de croyances et de la modélisation du raisonnement sur celles-ci, mise en œuvre par exemple dans le cadre de nombreuses applications, notamment basées sur des agents intelligents. Le principe des logiques modales pondérées repose généralement sur l'enrichissement des opérateurs modaux,  $\Box$  et  $\Diamond$ , par l'intégration d'un degré à valeurs entières ou réelles. Les modalités pondérées ainsi proposées sont notées  $\Box_\alpha$  et  $\Diamond_\alpha$ , où  $\alpha$  représente la valeur numérique du degré. Les variantes diffèrent principalement par le cadre théorique auquel les coefficients sont rattachés et leur interprétation, comme détaillé en section 2.

Dans ce cadre, cet article considère les axiomes des logiques modales classiques interprétés comme des règles de manipulation et combinaison des modalités : il en propose des extensions pondérées, établissant des relations entre des formules contenant ces modalités.

Ainsi, l'axiome classique (4), qui s'écrit  $\vdash \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ , établit une implication entre une simple occurrence et une répétition de  $\Box$ . De même, l'axiome (D),  $\vdash \Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ , induit une relation entre les deux opérateurs modaux. Cet article s'intéresse à la transposition de ces axiomes au cas de la logique modale pondérée, afin de proposer des règles de manipulation adaptées aux modalités  $\Box_\alpha$  et  $\Diamond_\alpha$ .

L'article propose d'abord une sémantique pour  $\Box_\alpha$  et  $\Diamond_\alpha$  dans le cadre de la sémantique de Kripke, reposant sur un comptage relatif des mondes, établissant ainsi un relâchement de la quantification universelle de la modalité classique  $\Box$ . Cette sémantique présente l'avantage d'être suffisamment informative pour guider la définition des axiomes pondérés. Ceux-ci sont

établis à partir des axiomes classiques, en remplaçant chaque modalité classique par une modalité pondérée, chacune ayant un poids qui lui est propre. Nous proposons alors une discussion sur les valeurs possibles de ces poids et leurs liens. Ce principe peut par exemple être illustré dans le cas de l'axiome (D) : sa version pondérée s'écrit  $\vdash \Box_\alpha \varphi \rightarrow \Diamond_\beta \varphi$ , la problématique est alors d'établir une valuation pertinente de  $\beta$  dépendant de celle de  $\alpha$ .

Nous proposons de traiter cette problématique selon une approche sémantique, dans le cadre de la sémantique de Kripke étendue proposée. Cette approche permet d'identifier des liens entre les poids en fonction de la relation d'accessibilité et de ses propriétés. Réciproquement, nous nous intéressons ensuite à la caractérisation de la relation dans le cas où l'axiome est vérifié dans un modèle l'utilisant. Ainsi nous considérons la problématique des axiomes pondérés dans le contexte de la théorie de la correspondance. L'objectif n'est cependant pas de construire une axiomatisation à partir de la sémantique proposée pour la modalité pondérée mais d'étudier la transposition des axiomes classiques au cas pondéré, c'est-à-dire la conséquence de l'introduction des pondérations sur règles de manipulation des modalités.

Cet article établit une typologie des axiomes modaux pondérés et distingue quatre catégories selon l'enrichissement apporté par la pondération et les propriétés de la relation sur laquelle se base sa valuation. Le type (I) regroupe les axiomes pour lesquels le relâchement de la modalité classique ne peut pas exploiter les poids tels que définis dans la sémantique proposée. Le type (II) comporte les axiomes dont la variante pondérée préserve la propriété de la relation classiquement associée à l'axiome. Les types (III) et (IV) regroupent les axiomes pondérés pour lesquels la propriété classique doit être enrichie, respectivement avec ou sans conservation de la correspondance.

L'article est organisé comme suit : la section 2 présente une étude comparative de modèles existants pour les logiques modales pondérées. La section 3 présente la sémantique que nous proposons pour les modalités pondérées, qui est exploitée dans la section 4 pour construire les axiomes pondérés. La section 5 présente la typologie résultante des axiomes ainsi établis.

## 2 Modèles existants pour des logiques modales pondérées

Après une présentation des notations utilisées dans cet article, cette section décrit brièvement des extensions pondérées de la logique modale existantes. Les approches basées sur des modifications du modèle de Kripke sont d'abord exposées dans les sections 2.2

et 2.3 : la pondération porte soit sur la relation, soit sur les mondes possibles. La section 2.4 présente ensuite les approches fondées sur un comptage des mondes, qui préservent la définition d'un modèle de Kripke mais modifient la quantification utilisée dans l'interprétation sémantique des modalités classiques.

### 2.1 Notations

Selon la notation usuelle (voir [1] par exemple), un cadre  $F = \langle W, R \rangle$  est un couple composé d'un ensemble non vide  $W$  de mondes possibles et d'une relation binaire d'accessibilité entre les mondes,  $R$ . Un modèle de Kripke  $\mathcal{M} = \langle F, s \rangle$  est un couple composé d'un cadre  $F$  et d'une valuation  $s$  qui, pour chaque monde de  $W$ , affecte une valeur de vérité à tous les atomes.

Étant donné un modèle  $\mathcal{M}$  et un monde  $w$  de  $W$ , on note  $R_w$  l'ensemble des mondes accessibles depuis  $w$  :

$$R_w = \{w' \in W \mid wRw'\} \quad (1)$$

De plus, selon la définition usuelle du symbole de conséquence sémantique  $\models$ , pour toute formule  $\varphi$  nous définissons l'ensemble  $R_w(\varphi)$  des mondes accessibles depuis  $w$  et dans lesquels  $\varphi$  est vraie :

$$R_w(\varphi) = \{w' \in W \mid \mathcal{M}, w' \models \varphi\} \quad (2)$$

L'interprétation des formules  $\Box\varphi$  et  $\Diamond\varphi = \neg\Box\neg\varphi$  est basée sur la quantification, respectivement universelle et existentielle, des mondes accessibles validant  $\varphi$ . En utilisant les notations précédentes, cette interprétation est notée :

$$\mathcal{M}, w \models \Box\varphi \Leftrightarrow \forall w' \in R_w, \mathcal{M}, w' \models \varphi \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow R_w(\varphi) = R_w$$

$$\mathcal{M}, w \models \Diamond\varphi \Leftrightarrow \exists w' \in R_w, \mathcal{M}, w' \models \varphi \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow R_w(\varphi) \neq \emptyset$$

### 2.2 Pondération de la relation d'accessibilité

Un premier ensemble d'extensions pondérées de la logique modale est basé sur une modification des modèles de Kripke : la relation d'accessibilité  $R$  est remplacée par un ensemble de relations indexées  $R^\alpha$ , avec  $\alpha \in [0, 1]$ . Cet ensemble permet de définir les modalités pondérées  $\Box_\alpha$ , respectivement associées à chaque relation  $R^\alpha$ , et interprétées selon les équations (3) et (4). Trois approches sont distinguées selon le cadre formel d'interprétation du degré  $\alpha$ , qui peut être la théorie des probabilités, la théorie des possibilités [17] ou la théorie des sous-ensembles flous [16].

Dans le cas probabiliste [13], l'interprétation associée à la pondération de la relation d'accessibilité repose sur la probabilité d'une transition entre mondes.

La combinaison de poids se fait alors selon les propriétés de la théorie des probabilités.

Dans le cas flou [2], le poids sur la relation représente son intensité, exprimant qu'un monde est *plus ou moins* accessible depuis un autre : il décrit une imprécision quant à l'accessibilité entre les mondes. Il faut noter que de telles relations d'accessibilité imprécises correspondent, dans le formalisme flou, aux  $\alpha$ -coupes d'une relation floue. Elles satisfont donc une propriété d'inclusion : en notant  $R_w^\alpha = \{w' \in W \mid wR^\alpha w'\}$ , on a

$$\forall \alpha, \beta \in [0, 1], w \in W, \text{ si } \alpha \geq \beta, \text{ alors } R_w^\alpha \subseteq R_w^\beta$$

Par conséquent, au niveau logique, les modalités pondérées dans le cas flou vérifient une propriété que nous appelons gradualité décroissante :

$$\forall \alpha, \beta \in [0, 1], \text{ si } \alpha \geq \beta \text{ alors } \models \Box_\alpha \varphi \rightarrow \Box_\beta \varphi \quad (5)$$

L'interprétation floue du degré  $\alpha$  conduit donc à une logique multi-modale dont les modalités sont interdépendantes.

Dans le cas possibiliste [7], le poids sur la relation représente l'incertitude concernant l'accessibilité entre les mondes. Cela revient à exprimer un doute sur l'existence de cette accessibilité tandis que l'imprécision du modèle flou traduit une information sur son intensité. Au contraire du cas flou, l'approche possibiliste [7] induit un ensemble de modalités indépendantes.

### 2.3 Pondération des mondes

Une deuxième catégorie de logiques modales pondérées existantes fait porter la pondération sur les mondes accessibles plutôt que sur la relation. Il faut noter que, par conséquent, les poids ont un effet global sur le modèle : ils ne dépendent pas d'un monde de référence, ni de ses mondes accessibles. Au contraire, une relation pondérée produit un effet local car les poids sont spécifiques à chaque couple de mondes.

Les modèles de pondération possibiliste des mondes [6, 3] enrichissent les modèles de Kripke à l'aide d'une distribution de possibilités [17] sur l'ensemble  $W$ , notée  $\pi$  : les mondes sont alors considérés comme plus ou moins possibles.

$\pi$  peut être généralisée aux formules, en définissant  $\Pi(\varphi) = \max_{w \in W} \{\pi(w) \mid \mathcal{M}, w \models \varphi\}$  [6]. Ce modèle permet essentiellement de généraliser la logique possibiliste et en propose une interprétation épistémique.

La distribution de possibilités  $\pi$  peut aussi être utilisée pour définir la relation d'accessibilité [3] :

$$R_w = \{w' \in W \mid \pi(w) \leq \pi(w')\}$$

La sémantique de  $\Box$  et  $\Diamond$  est alors identique au cas classique, rappelé par les équations (3) et (4), utilisant cette relation d'accessibilité. Par conséquent, la

formule  $\Box\varphi$  est vraie dans un monde  $w$  si et seulement si  $\varphi$  est vraie dans tous les mondes au moins aussi possibles que  $w$ . Il faut souligner que cette extension pondérée de la sémantique de Kripke n'introduit pas de pondération des modalités. On peut également noter que la relation d'accessibilité induite par  $\pi$  est nécessairement anti-symétrique, transitive et réflexive, ce qui contraint l'expressivité des modalités engendrées.

Les poids associés aux mondes peuvent également être considérés à un niveau expressif, reposant sur le sens que l'on veut leur donner et non explicitement sur un formalisme théorique, par exemple sous la forme de degrés d'exceptionnalité [11] : ils estiment à quel point un monde est inhabituel, ou non représentatif. Un degré d'exceptionnalité est alors défini pour chaque formule logique :  $except(\varphi) = \min_{w \in W} \{except(w) \mid \mathcal{M}, w \models \varphi\}$ . L'interprétation de la modalité pondérée induite ne conserve pas la définition classique de l'équation (3) mais est donnée par :

$$\mathcal{M}, w \models \Box_\alpha \varphi \Leftrightarrow except(\neg\varphi) \geq \alpha$$

Selon cette définition, plus la contradiction de  $\varphi$  est exceptionnelle, plus la pondération de  $\Box_\alpha \varphi$  est élevée. On peut souligner deux propriétés qui découlent de cette définition. D'abord, la valeur de vérité d'une formule modale est globale et ne dépend pas du monde de référence  $w$ . En effet,  $\mathcal{M}, w \models \Box_\alpha \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \Box_\alpha \varphi$ . De plus, en raison de l'inégalité sur laquelle la sémantique de  $\Box_\alpha$  s'appuie, les modalités sont dépendantes : plus précisément, la propriété de gradualité décroissante donnée dans l'équation (5) s'applique également pour ce modèle.

### 2.4 Approche par comptage

L'approche par comptage ne propose pas de variante enrichie des cadres de Kripke : ni les mondes possibles, ni la relation d'accessibilité ne sont pondérés mais l'interprétation de la modalité est modifiée [10, 9, 8, 15]. Contrairement aux modèles présentés précédemment, les poids considérés ici sont à valeur entière et notés  $n$ .

L'approche par comptage modifie la quantification de mondes accessibles sur laquelle se base la sémantique classique des modalités. Ainsi, l'interprétation de  $\Diamond_n$  s'appuie sur un durcissement du quantificateur existentiel de l'équation (4) : il n'est plus imposé qu'au moins un monde accessible valide la formule mais qu'au moins  $n$  mondes le fassent. Formellement, cette approche propose d'interpréter la modalité  $\Diamond_n$ , et par dualité  $\Box_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par :

$$\mathcal{M}, w \models \Diamond_n \varphi \Leftrightarrow |R_w(\varphi)| \geq n \quad (6)$$

$$\mathcal{M}, w \models \Box_n \varphi \Leftrightarrow |R_w(\neg\varphi)| < n \quad (7)$$

On peut noter que le poids  $n$  de  $\Box_n$  correspond au nombre maximum de mondes accessibles invalidant la

formule. Par conséquent,  $n$  peut être interprété comme une mesure de contradiction.

Cette définition s'appuie sur un comptage absolu des mondes là où la logique majoritaire [12] s'intéresse à un cas particulier de comptage relatif. Pour celle-ci en effet l'opérateur modal induit exprime qu'une formule est vraie dans plus de la moitié des mondes accessibles. Elle repose donc sur une approche par comptage relatif mais définit des modalités non pondérées. Elle aborde également la question d'une sémantique dans laquelle l'ensemble des mondes  $W$  est infini [12].

Contrairement aux approches décrites dans la section précédente, basées sur une modification des modèles de Kripke, l'approche par comptage est de plus axiomatisée, tant dans le cas absolu que relatif [5, 12] : ces modèles proposent un ensemble de règles de manipulation de la modalité pondérée.

### 3 Sémantique proposée

Cette section présente la sémantique que nous proposons pour une logique modale pondérée, un outil essentiel de l'extension des axiomes au cas pondéré, discutée en sections 4 et 5.

Syntaxiquement, étant donné  $p \in \mathbb{P}$ , l'ensemble des variables propositionnelles, et  $\alpha \in [0, 1]$ , un coefficient numérique, on considère l'ensemble des formules du langage de la logique modale pondérée :

$$F := p \mid \neg F \mid F \wedge F \mid F \vee F \mid F \rightarrow F \mid \Box_\alpha F \mid \Diamond_\alpha F$$

#### 3.1 Définition

La sémantique proposée s'appuie sur le même principe que l'approche par comptage (cf. section 2.4), mais est basée sur un comptage relatif des mondes validants : elle est définie pour un ensemble  $W$  fini selon une interprétation fréquentiste, le cardinal des mondes validants est normalisé. Malgré une limitation aux ensemble finis de mondes, cette normalisation permet d'enrichir l'information portée par la modalité pondérée. Ainsi, la nouvelle modalité et sa sémantique permettent d'établir des variantes pondérées des axiomes classiques, discutées en sections 4 et 5. De plus, l'utilisation de cette proportion induit l'indépendance entre la valeur du poids considéré et la connexité du monde de référence : la valeur de vérité d'une formule  $\Box_\alpha \varphi$  dans un monde  $w$  n'est pas biaisée par la valeur de  $|R_w|$ , le nombre de mondes accessibles depuis  $w$ .

Formellement, nous proposons d'interpréter la modalité pondérée  $\Box_\alpha$ , pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ , par :

$$\begin{cases} \mathcal{M}, w \models \Box_\alpha \varphi \Leftrightarrow \frac{|R_w(\varphi)|}{|R_w|} \geq \alpha & \text{si } R_w \neq \emptyset \\ \mathcal{M}, w \models \Box_\alpha \varphi & \text{sinon} \end{cases} \quad (8)$$

Cette définition relâche le quantificateur universel utilisé pour la modalité classique  $\Box$ , en imposant seulement qu'une proportion de mondes accessibles valident la formule  $\varphi$ , plutôt que l'ensemble de ces mondes.

Par dualité, la modalité  $\Diamond_\alpha$  est interprétée, pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ , par :

$$\begin{cases} \mathcal{M}, w \models \Diamond_\alpha \varphi \Leftrightarrow \frac{|R_w(\varphi)|}{|R_w|} > 1 - \alpha & \text{si } R_w \neq \emptyset \\ \mathcal{M}, w \not\models \Diamond_\alpha \varphi & \text{sinon} \end{cases} \quad (9)$$

La modalité  $\Diamond_\alpha$  nécessite d'avoir plus qu'une proportion  $1 - \alpha$  de mondes accessibles validant la formule  $\varphi$  plutôt qu'au moins un monde accessible. De même que les approches par comptage présentées en section 2.4, cette sémantique induit un durcissement du quantificateur existentiel. On peut noter que plus la valeur de  $\alpha$  est élevée, plus la contrainte sur l'ensemble des mondes validants est faible.

#### 3.2 Propriétés

Cette section présente et discute quelques propriétés satisfaites par la modalité pondérée proposée.

##### Cas limite

La proposition suivante traite les modalités pondérées pour les valeurs aux bornes du domaine de  $\alpha$ . Pour le cas où  $\alpha = 1$ , les modalités pondérées correspondent aux modalités classiques. Pour le cas où  $\alpha = 0$ ,  $\Box_\alpha \varphi$  est une tautologie tandis que  $\Diamond_\alpha \varphi$  est une contradiction. Formellement, pour toute formule  $\varphi$ , on a :

$$\begin{array}{ll} \Box_1 \varphi = \Box \varphi & \Diamond_1 \varphi = \Diamond \varphi \\ \models \Box_0 \varphi & \models \neg \Diamond_0 \varphi \end{array}$$

La preuve de cette proposition découle de façon immédiate des équations (8) et (9) et est donc omise.

Du fait de cette propriété, le cas où  $\alpha = 0$  est considéré comme trivial et non informatif ; il est donc exclu. Cependant, le cas où  $\alpha = 0$  est la seule valeur pour laquelle la formule modale est valide exprime une information importante. En effet, pour un monde  $w \in W$  tel que  $R_w \neq \emptyset$  et  $|R_w(\varphi)|/|R_w| = 0$ , on a  $\mathcal{M}, w \models \Box_1 \neg \varphi$ .

##### Gradualité décroissante

En raison de la transitivité de l'inégalité sur laquelle repose  $\Box_\alpha$ , on a la même relation de gradualité que le modèle de pondération floue de la relation :

**Proposition 2.** *La définition de  $\Box_\alpha$  donnée en équation (8) satisfait la propriété de gradualité décroissante définie dans l'équation (5).*

De même que pour la proposition précédente, la preuve découlant directement de la définition des modalités est omise.

Cette proposition implique que vraie pour un degré, la formule est aussi vraie pour tous les degrés inférieurs. On peut noter que cette propriété apporte une autre justification à l'absence d'information apportée par  $\Box_0$  : s'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\Box_\alpha \varphi$  est satisfait, alors  $\Box_0 \varphi$  l'est aussi, par gradualité. Plus généralement, il apparaît que la valeur la plus informative pour  $\alpha$  est la plus élevée pour laquelle la formule modale est vraie, les valeurs inférieures pouvant en être inférées. Cette propriété est essentielle pour l'établissement des extensions pondérées des axiomes modaux, comme discuté en section 4.

Par dualité, on peut montrer un résultat similaire pour la modalité  $\Diamond_\alpha$ , qui respecte la propriété de gradualité croissante. Aussi, plus la valeur de  $\alpha$  est faible, plus  $\Diamond_\alpha \varphi$  est informative.

### Relations entre $\Box_\alpha$ et $\Diamond_\alpha$

Il faut noter que malgré la relation de dualité préservée entre les deux opérateurs modaux,  $\Box_\alpha \varphi = \neg \Diamond_\alpha \neg \varphi$ , l'équivalence, qui pourrait être attendue, entre  $\Box_\alpha$  et  $\Diamond_{1-\alpha}$  n'est pas garantie. En effet, en raison de la définition de  $\Box_\alpha$  qui se base sur une inégalité large et celle de  $\Diamond_\alpha$  qui se base sur une inégalité stricte, on peut montrer que l'implication n'est vraie que dans un sens. Le cas où  $\alpha = 0$  est traité par la Proposition 1.

### Proposition 3.

$$\forall \alpha \in ]0, 1] \quad \begin{aligned} &\models \Diamond_\alpha \varphi \rightarrow \Box_{1-\alpha} \varphi \\ &\not\models \Box_\alpha \varphi \rightarrow \Diamond_{1-\alpha} \varphi \end{aligned}$$

*Démonstration.* Soit un modèle  $\mathcal{M} = \langle \langle W, R \rangle, s \rangle$  et  $w \in W$ . On sait que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, w \models \Diamond_\alpha \varphi &\Leftrightarrow R_w \neq \emptyset \text{ et } \frac{|R_w(\varphi)|}{|R_w|} > 1 - \alpha \\ &\Rightarrow R_w \neq \emptyset \text{ et } \frac{|R_w(\varphi)|}{|R_w|} \geq 1 - \alpha \\ &\Rightarrow \mathcal{M}, w \models \Box_{1-\alpha} \varphi \end{aligned}$$

En revanche, l'implication  $\Box_\alpha \varphi \rightarrow \Diamond_{1-\alpha} \varphi$  n'est pas une tautologie : on peut le montrer par le contre-exemple de la figure 1. Dans ce modèle de Kripke, on a  $w \models \Box_{2/3} \varphi$  mais  $w \not\models \Diamond_{1/3} \varphi$ , car  $|R_w(\varphi)|/|R_w| = 1/3$  ne satisfait pas l'inégalité stricte. ■

Une autre proposition établit une équivalence entre la modalité classique  $\Diamond$  et  $\Box_\alpha$  :

**Proposition 4.** *Pour tout modèle  $\mathcal{M} = \langle \langle W, R \rangle, s \rangle$  et pour tout monde  $w \in W$ ,*

$$\mathcal{M}, w \models \Diamond_1 \varphi \Leftrightarrow R_w \neq \emptyset \text{ et } \mathcal{M}, w \models \Box_{\frac{1}{|R_w|}} \varphi$$

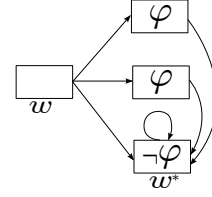


FIGURE 1 – Modèle de Kripke pour prouver la Prop.3, puis le Th. 3 pour  $\alpha = \frac{2}{3}$

*Démonstration.* Soit un modèle  $\mathcal{M} = \langle \langle W, R \rangle, s \rangle$  et  $w \in W$ . On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, w \models \Diamond_1 \varphi &\Leftrightarrow \exists w' \in R_w, \mathcal{M}, w' \models \varphi \\ &\Leftrightarrow R_w \neq \emptyset \text{ et } \frac{|R_w(\varphi)|}{|R_w|} \geq \frac{1}{|R_w|} \end{aligned}$$

■

## 4 Principes de l'extension pondérée des axiomes modaux

Les axiomes de la logique modale classique [1] peuvent être vus comme des règles de manipulation des opérateurs modaux  $\Box$  et  $\Diamond$ . Ils établissent ainsi des relations entre une répétition de modalités, une modalité simple ou une combinaison de modalités.

Nous proposons d'étudier l'extension pondérée de ces axiomes, pour lesquels les modalités contenues dans les formules considérées sont remplacées par des modalités pondérées. Nous obtenons un ensemble de formules modales correspondant à la variante pondérée de chaque axiome et dans lesquelles les modalités portent chacune leur propre poids. Ainsi, l'axiome classique (4) qui s'écrit  $\vdash \Box \varphi \rightarrow \Box \Box \varphi$  conduit à l'extension pondérée  $\Box_\alpha \varphi \rightarrow \Box_\beta \Box_\gamma \varphi$ .

Nous nous intéressons aux dépendances entre les valeurs de ces poids, selon l'approche sémantique basée sur l'interprétation de la modalité pondérée proposée dans la section précédente. La méthode que nous choisissons consiste en l'identification de dépendance entre les poids, soit de façon générique, soit pour des cadres de Kripke dont la relation vérifie certaines propriétés.

Cette section présente les principes de valuation des poids dans les axiomes pondérés, d'abord selon leur structure puis selon des propriétés de la relation du cadre de Kripke.

### 4.1 Contraintes liées à la structure des axiomes

La majorité des axiomes des logiques modales (voir [4] par exemple) prennent la forme d'une implication. Lorsqu'ils sont interprétés comme des composants d'un système d'inférence, ils sont d'autant plus

intéressants que leur prémisse est facile à satisfaire et leur conclusion informative.

En relation avec la propriété de gradualité décroissante établie dans la Proposition 2, ce principe permet de guider l'établissement de poids pertinents pour les axiomes pondérés : la position de la modalité par rapport à l'implication influe sur la définition de valeur pertinente et la structure de l'axiome joue sur celle-ci.

Ainsi, lorsque la modalité  $\Box_\alpha$  est dans la conclusion de l'implication, la valeur de  $\alpha$  doit être maximale. En effet, comme pour toute valeur  $\beta$  inférieure,  $\Box_\beta$  peut en être inférée, la valeur la plus haute est la plus informative.

Au contraire, si  $\Box_\alpha$  est dans la prémisse de l'implication, la valeur de  $\alpha$  la plus pertinente est la valeur minimale : c'est la plus petite valeur qui définit la prémisse la plus facile à satisfaire. En effet, toujours en exploitant la propriété de gradualité décroissante, si  $\Box_\beta\varphi$  est établie pour une valeur de  $\beta$  supérieure à celle de l'axiome, elle en permet l'utilisation par modus ponens avec l'équation (5).

Par dualité, pour l'opérateur  $\Diamond_\alpha$  qui satisfait une propriété de gradualité croissante, la définition de valuation pertinente est inversée : la valeur de  $\alpha$  doit donc être minimale pour  $\Diamond_\alpha$  dans la conclusion, et maximale dans la prémisse.

On peut alors qualifier l'extension pondérée d'enrichissement, relâchement ou altération de l'axiome modal d'origine, selon la position de la modalité pondérée et la valuation du poids : si la pondération de l'axiome est établie pour  $\Box_\alpha$  avec un  $\alpha$  très élevé en conclusion, l'axiome induit est riche car il permet d'inférer des éléments informatifs. Il faut noter que cette configuration n'a d'intérêt que si la prémisse contient elle-même une modalité pondérée : dans le cas contraire, on peut appliquer l'axiome classique concluant à  $\Box_1$ , qui induit  $\Box_\alpha$  par gradualité décroissante.

Lorsque l'axiome pondéré présente une modalité pondérée  $\Box_\alpha$  dans sa prémisse, il peut être considéré comme un relâchement de l'axiome classique correspondant. En effet, il autorise une inférence même lorsque la forte hypothèse  $\Box_1$  n'est pas vérifiée.

Enfin, des variations plus complexes peuvent conduire à un axiome pondéré que l'on peut seulement qualifier d'altération de l'axiome d'origine, comme discuté dans la section 5.

## 4.2 Exploitation des propriétés sur la relation

Un deuxième principe de valuation des poids se base sur la propriété de la relation associée à l'axiome classique dans la théorie de la correspondance [14]. En effet, le point de vue sémantique de l'axiomatisation de la logique modale s'appuie sur des cadres de Kripke dont la relation d'accessibilité satisfait des contraintes

spécifiques, comme la réflexivité ou la transitivité. Or, l'interprétation de la modalité pondérée dépend des mondes accessibles et caractériser la relation permet d'avoir des garanties sur l'ensemble des mondes accessibles. Il est donc pertinent de se baser sur les propriétés de la relation pour valuer les poids.

La première étape de l'interprétation sémantique de l'extension pondérée d'un axiome modal considère des cadres de Kripke satisfaisant la propriété classiquement correspondante. En effet, le cas limite où tous les poids intégrés prennent la valeur 1 impose de préserver le cas classique.

On peut alors évaluer la dépendance entre les valeurs des poids dans l'axiome selon l'hypothèse sur la relation. Ce principe garantit la compatibilité avec le cas limite où tous les poids intégrés valent 1.

Une deuxième étape peut devoir imposer d'autres contraintes sur la relation pour pondérer les axiomes de manière pertinente : il est possible que l'on obtienne un axiome qui n'exclut pas le cas où la modalité de la conclusion est pondérée par  $\alpha = 0$ . Or, comme discuté en section 3.2, cette valeur n'est pas informative.

La modalité  $\Box_\alpha$ , qui propose une interprétation plus expressive que  $\Box$ , est aussi moins informative. En effet, savoir qu'une proportion de mondes accessibles valide la formule ne donne pas d'information sur la validité de cette formule dans tous les mondes considérés. La modalité  $\Box_\alpha$  donne une indication globale et induit une incertitude quant à la validité de la formule dans un monde en particulier. L'approche que nous proposons alors consiste à enrichir l'hypothèse sur la relation afin d'exclure les cadres n'admettant que la valeur nulle.

Enfin, une fois la valuation pertinente établie avec une hypothèse enrichie sur la relation, nous nous intéressons à la proposition inverse : elle consiste à vérifier si, étant donné un axiome pondéré d'après une hypothèse enrichie sur la relation, tous les cadres validant l'axiome satisfont cette hypothèse. Cette étude peut être considérée comme un premier pas vers la définition d'une théorie de la correspondance pondérée.

## 5 Typologie des axiomes pondérés

Cette section présente les résultats obtenus, c'est-à-dire les extensions pondérées des axiomes de la logique modale après application des principes de pondération présentés dans la section précédente. Pour l'interprétation sémantique des modalités, nous utilisons la définition proposée en section 3.

Les axiomes pondérés obtenus sont organisés en quatre types récapitulés dans le tableau 1, numérotés de (I) à (IV) et définis dans la section 5.1 ci-dessous. Les sections suivantes détaillent successivement les quatre types d'axiomes.

## 5.1 Définition des quatre types d'axiomes

Les quatre types d'axiomes identifiés sont définis en fonction du lien entre l'axiome pondéré et les propriétés de la relation :

- (I) Axiomes non pondérés
- (II) Axiomes pondérés avec correspondance classique
- (III) Axiomes pondérés sans correspondance
- (IV) Axiomes pondérés avec correspondance enrichie

Le type (I) regroupe les axiomes pour lesquels le relâchement de la modalité classique ne peut pas exploiter les poids tels que définis dans la sémantique proposée. Le type (II) comporte les axiomes dont la variante pondérée préserve la propriété de la relation classiquement associée à l'axiome. Les types (III) et (IV) regroupent les axiomes pondérés pour lesquels la propriété classique doit être enrichie, et distinguent les cas où la correspondance est, ou non, conservée.

Il faut souligner que, d'un axiome classique, peuvent découler plusieurs extensions pondérées, selon l'hypothèse sur la relation considérée.

Les quatre sections suivantes présentent les quatre types d'axiomes. Pour des raisons de place, un seul exemple est détaillé par type.

### 5.2 Type (I) : axiomes non pondérés

Le premier groupe d'axiomes regroupe les axiomes pour lesquels la seule possibilité de pondération est le cas limite où  $\alpha = 1$  : le relâchement de l'axiome classique ne peut s'appliquer.

Cette catégorie peut être illustrée par l'axiome (M), dont la forme pondérée s'écrit  $\Box_\alpha \varphi \rightarrow \varphi$ . Par compatibilité avec le cas classique, cette formule doit être valide pour  $\alpha = 1$  dans tous les cadres dont la relation est réflexive. Cependant, si  $\Box_\alpha \varphi$  est établi pour  $\alpha < 1$  dans un monde donné, la contrainte de réflexivité ne garantit pas que le monde de référence ne soit pas parmi les mondes accessibles invalidant la formule, on ne peut donc pas établir  $\varphi$ . Formellement, on peut montrer le théorème suivant par construction.

**Théorème 1.**  $\forall \alpha \in [0, 1[$ , il existe un modèle  $\mathcal{M} = \langle \langle W, R \rangle, s \rangle$  avec  $R$  réflexive et  $w \in W$  tel que  $\mathcal{M}, w \models \Box_\alpha \varphi$  mais  $\mathcal{M}, w \not\models \varphi$ .

*Démonstration.* Soit  $\alpha \in [0, 1[$ . Il suffit d'un contre-exemple pour montrer ce théorème. Soit  $F = \langle W, R \rangle$  un cadre contenant  $n$  mondes, où  $n$  est tel que  $n/(n+1) \geq \alpha$  et, étant donné un monde  $w \in W$ ,  $R$  est réflexive et  $R_w = W$ . Soit  $s$  la valuation telle que (i)  $x \models \varphi$  pour tout  $x \in W \setminus \{w\}$  et (ii)  $w \models \neg \varphi$ . On a bien  $w \models \Box_\alpha \varphi$  mais  $w \not\models \varphi$ . ■

	Axiome pondéré	Propriétés de $R$	Type
(K $_\alpha$ )	$\Box_\alpha(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box_\beta \varphi \rightarrow \Box_\gamma \psi)$		(II)
(CD $_\alpha$ )	$\Diamond_\alpha \varphi \rightarrow \Box_{1-\alpha} \varphi$		(IV)
(D $_\alpha$ )	$\Box_\alpha \varphi \rightarrow \Diamond_{1-\alpha+\varepsilon} \varphi$	sérielle	(II)
(M $_\alpha$ )	$\Box_1 \varphi \rightarrow \varphi$	réflexive	(I)
(B $_\alpha$ )	$\varphi \rightarrow \Box_1 \Diamond_1 \varphi$	symétrique	(I)
(□M $_\alpha$ )	$\Box_1(\Box_1 \varphi \rightarrow \varphi)$	shift-réflexive	(I)
(4 $_\alpha$ )	$\Box_\alpha \varphi \rightarrow \Box_1 \Box_\alpha \varphi$	transitive & euclidienne	(III)
(5 $_\alpha$ )	$\Diamond_\alpha \varphi \rightarrow \Box_1 \Diamond_{\alpha+\varepsilon} \varphi$	transitive & euclidienne	(III)
(C4 $_\alpha$ )	$\Box_\alpha \Box_1 \varphi \rightarrow \Box_\alpha \varphi$	dense & shift-réflexive	(IV)
(C4 $_\alpha$ )	$\Box_1 \Box_\beta \varphi \rightarrow \Box_\beta \varphi$	dense & transitive	(IV)
(C4 $_\alpha$ )	$\Box_1 \Box_\beta \varphi \rightarrow \Diamond_1 \varphi$	dense & transitive	(IV)
(C4 $_\alpha$ )	$\Box_\alpha \Box_\beta \varphi \rightarrow \Box_\beta \varphi$	transitive & euclidienne	(IV)

TABLE 1 – Axiomes pondérés obtenus avec l'hypothèse sur la relation associée, pour tout  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ ,  $\varepsilon \in ]0, \alpha]$  et avec  $\gamma = \max(0, \alpha + \beta - 1)$

Un traitement similaire peut être appliqué aux axiomes (B) et (□M), dont les extensions pondérées ne s'appliquent que pour  $\alpha = 1$  (cf. tableau 1).

### 5.3 Type (II) : axiomes pondérés avec correspondance classique

Le deuxième type d'axiomes pondérés relâche l'axiome classique afin d'en donner une version pondérée pour laquelle la valeur des poids peut être inférieure à 1. De plus, la propriété de la relation classiquement associée à l'axiome est conservée et suffit à valuer les poids de manière pertinente. L'axiome classique (K), qui n'impose aucune propriété, illustre cette catégorie :

**Théorème 2.** (K $_\alpha$ )

$\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$

$$\models \Box_\alpha(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box_\beta \varphi \rightarrow \Box_\gamma \psi)$$

avec  $\gamma = \max(0, \alpha + \beta - 1)$

*Démonstration.* Soit  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ , un cadre  $F = \langle W, R \rangle$ , une valuation  $s$  et un monde  $w \in W$ . Si  $R_w = \emptyset$ , alors  $w$  valide trivialement les trois formules modales de (K $_\alpha$ ) et leurs implications. Si  $|R_w| > 0$ , on peut appliquer le modus ponens dans les mondes accessibles qui valident à la fois  $\varphi \rightarrow \psi$  et  $\varphi$ . Aussi on a  $R_w(\varphi \rightarrow \psi) \cap R_w(\varphi) \subseteq R_w(\psi)$ .

Ainsi, par définition du cardinal de l'intersection :  $|R_w(\varphi \rightarrow \psi) \cap R_w(\varphi)| = |R_w(\varphi \rightarrow \psi)| + |R_w(\varphi)| -$



$|R_w(\varphi \rightarrow \psi) \cup R_w(\varphi)|$ . Comme  $|R_w| \geq |R_w(\varphi \rightarrow \psi) \cup R_w(\varphi)|$ , on a :  $|R_w(\psi)| \geq |R_w(\varphi \rightarrow \psi) \cap R_w(\varphi)| \geq |R_w(\varphi \rightarrow \psi)| + |R_w(\varphi)| - |R_w|$ . Donc :  $\frac{|R_w(\psi)|}{|R_w|} \geq \alpha + \beta - 1$ . ■

Une extension pondérée de l'axiome (D) peut être construite de manière similaire lorsque l'on considère des cadres de Kripke à relation sérielle. De plus, on montre réciproquement que, dans tout cadre à relation sérielle,  $(D_\alpha)$  est vérifié. Cette variante pondérée  $(D_\alpha)$ , dont la définition est donnée dans le tableau 1, complète la Proposition 3 qui relie les deux opérateurs modaux  $\Box_\alpha$  et  $\Diamond_\alpha$ .

#### 5.4 Type (III) : axiomes pondérés sans correspondance

Cette section présente les axiomes pour lesquels la propriété de la relation classiquement correspondante doit être enrichie pour définir des poids pertinents.

Elle est illustrée par l'axiome (4) qui s'écrit  $\vdash \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$  et est associé à la transitivité de la relation. La variante pondérée de cet axiome s'écrit sous la forme  $\vdash \Box_\alpha\varphi \rightarrow \Box_\beta\Box_\gamma\varphi$  : la question ici étant de déterminer des valeurs appropriées pour  $\beta$  et  $\gamma$  selon la valeur de  $\alpha$ . On montre que la seule condition de transitivité de la relation ne suffit pas pour établir des valeurs de poids strictement positives :

**Théorème 3.**  $\forall \alpha \in [0, 1[$ , il existe un modèle  $\mathcal{M} = \langle \langle W, R \rangle, s \rangle$  avec  $R$  transitive et un monde  $w \in W$  tel que  $\mathcal{M}, w \models \Box_\alpha\varphi$  et  $\mathcal{M}, w \not\models \Box_1\Box_0\varphi$ .

Il faut noter que, d'après la Proposition 1,  $\Box_1\Box_0\varphi = \Box_1\Box_1\neg\varphi$ , ce qui ne constitue pas une conclusion informative sur  $\varphi$ .

*Démonstration.* La preuve de ce théorème consiste à construire un tel modèle  $\mathcal{M}$ . Étant donné  $\alpha < 1$ , soient  $m, q \in \mathbb{N}^*$  tels que  $\alpha \leq m/(m+q)$ . Soit  $W$  un ensemble de  $1+q+m$  mondes,  $w \in W$ ,  $R$  une relation binaire entre les mondes et  $s$  une valuation telle que (i)  $|R_w(\varphi)| = m$ , (ii)  $|R_w(\neg\varphi)| = q$ , (iii)  $\forall w_p \in R_w(\varphi)$ ,  $\exists w_n \in R_w(\neg\varphi)$  tel que  $w_p R w_n$  et (iv)  $\forall w_n \in R_w(\neg\varphi)$ ,  $w_n R w_n$ . Un tel modèle est illustré par la figure 1 pour  $\alpha = \frac{2}{3}$ , avec  $m = 2$  et  $q = 1$ . Par définition,  $R$  est transitive et on a  $\mathcal{M}, w \models \Box_{m/(m+q)}\varphi$ . Par conséquent, en utilisant la propriété de gradualité décroissante :  $\mathcal{M}, w \models \Box_\alpha\varphi$ .

De plus, comme  $\forall u \in R_w$ ,  $\mathcal{M}, u \models \Box_1\neg\varphi$ , on a  $\mathcal{M}, w \models \Box_1\Box_1\neg\varphi$  : aussi, il n'existe pas de  $\beta$  tel que  $\mathcal{M}, w \models \Box_\beta\Box_\gamma\varphi$  pour  $\gamma > 0$ . ■

Aussi, la transitivité n'est pas une condition suffisante pour avoir des garanties sur les valeurs de  $\beta$

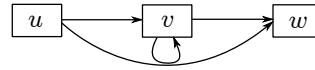


FIGURE 2 – Contre-exemple montrant la non-réciprocité du Théorème 4

et  $\gamma$  : elle n'empêche pas l'existence des mondes notés  $w_n$  dans la preuve ci-dessus et illustrés par  $w^*$  sur la figure 2, que l'on peut appeler mondes « puits ». Il est donc nécessaire d'enrichir l'hypothèse sur la relation en ajoutant une autre contrainte. Le Théorème 4 considère le cas de l'euclidianité, en conservant la transitivité par souci de compatibilité avec le cas classique, obtenu lorsque les poids sont égaux à 1.

**Théorème 4.**  $(4_\alpha)$

$\forall F = \langle W, R \rangle$ ,

$R$  est transitive et euclidienne

$\Rightarrow \forall \alpha \in [0, 1]$ ,  $F \models \Box_\alpha\varphi \rightarrow \Box_1\Box_\alpha\varphi$

*Démonstration.* Cette preuve repose sur le fait que, pour tout cadre  $\langle W, R \rangle$  dont la relation  $R$  est transitive et euclidienne, on a pour tout  $w \in W$  :  $\forall w' \in R_w$ ,  $R_{w'} = R_w$  (preuve omise). Ainsi, pour toute valuation  $s$  et pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ , si  $w \models \Box_\alpha\varphi$ , alors tous les mondes accessibles  $w' \in R_w$  valident aussi  $w' \models \Box_\alpha\varphi$ , c'est-à-dire  $w \models \Box_1\Box_\alpha\varphi$ . ■

Toutefois, la réciproque n'est pas vérifiée : la figure 2 représente un cadre  $F = \langle W, R \rangle$  avec  $W = \{u, v, w\}$ , tel que  $\langle F, s \rangle, x \models \Box_\alpha\varphi \rightarrow \Box_1\Box_\alpha\varphi$  pour toute valuation  $s$  et pour tout monde  $x \in W$  mais  $R$  n'est pas euclidienne.

Il faut souligner que l'axiome établi dans le Théorème 4 est fort : la première modalité en conclusion vaut 1, le degré maximal, et la seconde vaut  $\alpha$ , qui est exactement la valeur affectée à la modalité en prémisses. De ce fait, on ne peut améliorer l'extension pondérée de l'axiome (4) car aucune autre version ne peut être plus forte.

Des résultats identiques, listés dans le Tableau 1 mais non détaillés ici, peuvent être prouvés pour l'extension classique de l'axiome (5) ; il possède la même structure que l'axiome (4), avec un seul opérateur,  $\Diamond_\alpha$ , dans la prémisses et une combinaison des deux modalités dans la conclusion.

#### 5.5 Type (IV) : axiomes pondérés avec correspondance enrichie

Les axiomes pondérés appartenant au type (IV) constituent également des extensions des axiomes classiques pour lesquels la propriété de la relation correspondante doit être enrichie. La différence avec le type

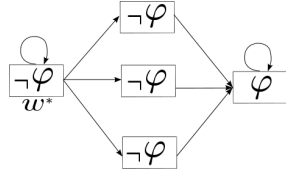


FIGURE 3 – Contre-exemple prouvant le Théorème 5 pour  $\alpha = \frac{3}{4}$

(III) vient du fait que la correspondance entre l'axiome pondéré et l'hypothèse enrichie est établie.

Nous illustrons cette catégorie avec le cas de l'axiome (C4) : son écriture classique est  $\vdash \Box\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$ , et il est associé à la densité de la relation. La version pondérée de cet axiome prend la forme  $\vdash \Box_\alpha\Box_\beta\varphi \rightarrow \Box_\gamma\varphi$ . Comme l'indique le Théorème 5, la densité seule ne suffit pas à garantir des valuations pertinentes pour les poids. Pour toutes les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ , on peut construire un modèle pour lequel  $\gamma = 0$  :

**Théorème 5.**  $\forall \alpha \in [0, 1[, \forall \beta \in [0, 1]$ , il existe un modèle  $\mathcal{M}$  avec  $R$  dense et  $w \in W$  tel que  $\mathcal{M}, w \models \Box_\alpha\Box_\beta\varphi$  et  $\mathcal{M}, w \models \Box_1\neg\varphi$

*Démonstration.* À nouveau, la preuve du théorème se fait par construction d'un tel modèle  $\mathcal{M}$ . Étant donné  $\alpha \in [0, 1[$  et  $\beta \in [0, 1]$ , soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq \alpha/(1-\alpha)$ . Soit  $W$  un ensemble de  $n+2$  mondes,  $w^*$  et  $w'$  deux mondes distincts dans  $W$ ,  $R$  et  $s$  tel que (i)  $\mathcal{M}, w' \models \varphi$ , (ii)  $\forall w \in W \setminus \{w'\}, \mathcal{M}, w \models \neg\varphi$ , (iii)  $R_{w^*} = W \setminus \{w'\}$  et (iv)  $\forall w \in W \setminus \{w^*\}, R_w = \{w'\}$ . Par construction,  $R$  est dense. Un tel contre-exemple est représenté par la Figure 3 pour  $\alpha = 0,75$ .

Alors  $\forall w \in W \setminus \{w^*\}, \mathcal{M}, w \models \Box_1\varphi$ . Ceci implique par gradualité décroissante que  $\mathcal{M}, w \models \Box_\beta\varphi$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} |R_{w^*}(\Box_\beta\varphi)| = n &\Rightarrow \frac{|R_{w^*}(\Box_\beta\varphi)|}{|R_{w^*}|} = \frac{n}{n+1} \geq \alpha \\ &\Rightarrow \mathcal{M}, w^* \models \Box_\alpha\Box_\beta\varphi \end{aligned}$$

Toutefois  $\mathcal{M}, w^* \models \Box_1\neg\varphi$  donc  $\nexists \gamma > 0$  tel que  $\mathcal{M}, w^* \models \Box_\gamma\varphi$ . ■

En conséquence de ce théorème, il est nécessaire d'enrichir l'hypothèse sur la relation afin d'avoir des garanties de positivité sur la valeur de  $\gamma$ . L'ensemble des choix de propriétés ajoutées est résumé dans le Tableau 1. Les quatre extensions pondérées de l'axiome (C4) sont classées par durcissement croissant de l'hypothèse sur la relation. Cette hypothèse influe sur l'informativité de la conclusion et le niveau de contrainte de la prémisse.

Nous donnons la preuve pour la version pondérée la plus forte :

**Théorème 6.** (C4 $_\alpha$ )

$\forall F = \langle W, R \rangle$ ,

$R$  est transitive et euclidienne

$$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in ]0, 1], \beta \in [0, 1], F \models \Box_\alpha\Box_\beta\varphi \rightarrow \Box_\beta\varphi$$

*Démonstration.* Soit  $\langle W, R \rangle$  avec  $R$  transitive et euclidienne, soit un monde  $w \in W$  et  $\alpha, \beta \in ]0, 1]$  ( si  $\beta = 0$  alors  $\Box_\beta\varphi$  est vraie, donc l'implication l'est aussi).

Si  $w \not\models \Box_\alpha\Box_\beta\varphi$ , alors  $w \models \Box_\alpha\Box_\beta\varphi \rightarrow \Box_\beta\varphi$ .

Si  $w \models \Box_\alpha\Box_\beta\varphi$ , alors une proportion  $\alpha$  de mondes accessibles depuis  $w$  valide  $\Box_\beta\varphi$ , soit  $u$  un tel monde, on peut écrire :

$$\frac{|R_u(\varphi)|}{|R_u|} \geq \beta$$

Or, comme  $R$  est transitive et euclidienne, on sait que  $\forall w' \in R_w, R_{w'} = R_w$ . En particulier,  $R_u = R_w$ . On a donc :

$$\frac{|R_w(\varphi)|}{|R_w|} \geq \beta$$

Donc  $w \models \Box_\beta\varphi$ . ■

La réciproque est prouvée par contraposée : si la relation n'est pas transitive et euclidienne, alors l'axiome (C4 $_\alpha$ ) n'est pas valide. Pour cela, nous construisons un cadre de Kripke dont la relation est non transitive ou non euclidienne et nous proposons des valeurs pour  $\alpha$  et  $\beta$  ainsi qu'une valuation telles que l'axiome n'est pas vérifié dans un monde du cadre.

Le principe de cette preuve est illustré par sa première partie : nous montrons que pour tout cadre  $\langle W, R \rangle$ , si la relation  $R$  n'est pas transitive, alors il existe  $\alpha, \beta$  et une valuation telle qu'il existe un monde  $w \in W$  tel que  $w \not\models (C4_\alpha)$ . Formellement,

**Théorème 7.**

$\forall F = \langle W, R \rangle$ ,

$R$  est non transitive

$$\Rightarrow \exists \alpha, \beta \in [0, 1], \exists s, \exists w \in W,$$

$$\langle \langle W, R \rangle, s \rangle, w \not\models \Box_\alpha\Box_\beta\varphi \rightarrow \Box_\beta\varphi$$

*Démonstration.* Soit  $W$  un ensemble fini de mondes et  $R$  une relation non transitive : il existe  $u, v, w \in W$  tels que  $uRv \wedge vRw \wedge \neg uRw$ . Posons  $\alpha = \frac{1}{|R_u|}$ ,  $\beta = \frac{1}{|R_v|}$  et soit  $s$  une valuation telle que (i)  $w \models \varphi$  et (ii)  $\forall x \in W \setminus \{w\}, x \not\models \varphi$ . La figure 4 présente un exemple d'un tel modèle. On a :

- $u \models \Box_1\neg\varphi$  car le seul monde qui valide  $\varphi$  n'est pas accessible à partir de  $u$  :  $w \notin R_u$ . Aussi, en particulier  $u \not\models \Box_\beta\varphi$
- $v \models \Box_\beta\varphi$  car  $w \in R_v$  et  $w \models \varphi$

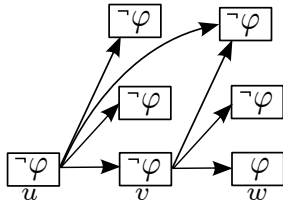


FIGURE 4 – Modèle de Kripke tel que  $R$  est non transitive

—  $u \models \Box_\alpha \Box_\beta \varphi$  car  $v \in R_u$  et  $v \models \Box_\beta \varphi$   
 Donc  $\exists \alpha, \beta$  tels que  $u \models \Box_\alpha \Box_\beta \varphi$  mais  $u \not\models \Box \varphi$ , ce qui implique que  $u \not\models (C4_\alpha)$ . ■

De la même manière, on peut montrer que si la relation n'est pas euclidienne alors il existe un modèle qui ne vérifie pas l'axiome  $(C4_\alpha)$ .

## 6 Conclusion et travaux futurs

Cet article étudie des règles de combinaison entre les opérateurs modaux pondérés, proposant une extension des axiomes classiques de la logique modale. Il établit une typologie des axiomes pondérés, mis en perspective avec la propriété de la relation classiquement associée à chacun des axiomes.

Les perspectives incluent l'étude d'autres types de règles de manipulation, combinant par exemple la modalité et d'autres connecteurs logiques, comme la conjonction et la disjonction. D'autres types de propriétés de la relation peuvent également être considérés : nous avons centré nos propositions sur les plus répandues, il serait intéressant d'en étudier des versions relâchées, comme par exemple une  $\alpha$ -symétrie, afin d'examiner leurs effets sur la valuation des poids d'un axiome pondéré.

La mise en correspondance entre propriétés de la relation et axiomes soulève de façon plus générale les problèmes d'adéquation et de complétude, en regard de l'interprétation proposée des modalités pondérées dans la sémantique de Kripke. Les axiomes de type (III) requièrent à ce titre une étude approfondie.

Les perspectives incluent également une spécification de la logique modale pondérée que nous proposons dans un contexte purement doxastique : d'un point de vue axiomatique, la variante pondérée de l'axiomatique KD45 et ses propriétés peut être considérée à partir des axiomes établis dans cet article. Une telle variante doit fournir des outils de manipulation et de raisonnement à partir de croyances graduelles, pouvant par exemple être mis en œuvre dans des applications basées sur des agents intelligents.

## Références

- [1] P. Blackburn, M. De Rijke, and Y. Venema. *Modal Logic*. Cambridge University Press, 2001.
- [2] F. Bou, F. Esteva, L. Godo, and R. Rodriguez. Characterizing fuzzy modal semantics by fuzzy multimodal systems with crisp accessibility relations. In *Proc. of the Joint 2009 IFSA World Congress and EUSFLAT Conference*, pages 1541–1546, 2009.
- [3] C. Boutilier. Modal logics for qualitative possibility theory. *International Journal of Approximate Reasoning*, 10(2) :173–201, 1994.
- [4] B. F. Chellas. *Modal logic : an introduction*, volume 316. Cambridge Univ Press, 1980.
- [5] F. De Caro. Graded modalities II. *Studia Logica*, 47(2) :1–10, 1988.
- [6] D. Dubois, H. Prade, and S. Schockaert. Stable models in generalized possibilistic logic. In *13th Int. Conf. on the Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, 2012.
- [7] L. Fariñas del Cerro and A. Herzig. A modal analysis of possibility theory. In *Fundamentals of Artificial Intelligence Research*, pages 11–18. Springer, 1991.
- [8] M. Fattorosi-Barnaba and C. Cerrato. Graded modalities III. *Studia Logica*, 47 :99–110, 1988.
- [9] M. Fattorosi-Barnaba and F. De Caro. Graded modalities I. *Studia Logica*, 44(2) :197–221, 1985.
- [10] K. Fine. In so many possible worlds. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 13(4) :516–520, 1972.
- [11] N. Laverny. Logique doxastique graduelle. Technical report, Journées Francophones sur les Modèles Formels de l'Interaction (MFI), 2007.
- [12] E. Pacuit and S. Salame. Majority logic : Axiomatization and completeness. *Studia Logica*, 2006.
- [13] A. Shirazi and E. Amir. Probabilistic modal logic. In *Proc. of AAAI*, volume 7, pages 489–495, 2007.
- [14] J. Van Benthem. *Correspondence theory*. Springer, 1984.
- [15] W. van der Hoek and J.-J. Meyer. *Graded modalities in epistemic logic*. Springer, 1992.
- [16] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8 :338–353, 1965.
- [17] L.A. Zadeh. Fuzzy sets as the basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1 :3–28, 1978.