



HAL
open science

Propriétés structurelles de la VAN équivalent certain des flux futurs

Charlotte Belin, Rémi Gerboud, Julien Vedani

► **To cite this version:**

Charlotte Belin, Rémi Gerboud, Julien Vedani. Propriétés structurelles de la VAN équivalent certain des flux futurs : Application à l'optimisation de l'approche Simulations dans les Simulations en assurance vie. 2015. hal-01208276

HAL Id: hal-01208276

<https://hal.science/hal-01208276>

Preprint submitted on 5 Oct 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Propriétés structurelles de la *VAN équivalent certain* des flux futurs

Application à l'optimisation de l'approche Simulations dans les Simulations en assurance vie

Charlotte BELIN * Remi GERBOUD † Julien VEDANI ‡§

3 août 2015

Abstract

Avec l'implémentation du cadre défini par la directive Solvabilité II, les assureurs ont la possibilité de développer un modèle interne, afin de mieux refléter les spécificités de leurs risques propres, plutôt qu'utiliser une approche plus simplifiée et moins spécifique, la formule standard. En assurance vie, la méthode des Simulations dans les Simulations (SdS) est une première approche à la disposition des opérationnels pour évaluer le capital de solvabilité requis. Cette approche très simulateur permet de disposer d'une distribution complète des fonds propres économiques à un an, sans nécessiter d'hypothèse restrictive. Toutefois, sa complexité algorithmique la rend opérationnellement lourde à implémenter.

L'accélérateur SdS proposé par Devineau et Loisel (2008) permet de réduire le nombre de simulations, à l'aide d'une procédure de sélection *a priori* des scénarios les plus adverses. Toutefois, la sélection est basée sur un critère donné, qui, bien que relativement efficace, peut se révéler simpliste et apparait optimisable. La Valeur Actuelle Nette de marges *forward* est une Valeur Actuelle Nette de marges calculée sur un scénario central, dans lequel toutes les variables financières suivent leur trajectoire espérée. Elle permet d'apporter une information de type *équivalent certain* quant à l'espérance des VAN de marge, les fonds propres économiques.

Cet article, synthèse d'un mémoire d'actuariat réalisé par les auteurs, s'intéresse aux propriétés de cette Valeur Actuelle Nette de marges, dite *forward*, et aux moyens de l'utiliser dans un cadre opérationnel pour accélérer les approches simulateurs de calcul du capital économique en assurance vie.

Mots clés modèle interne, Solvabilité II, Simulations dans les Simulations, accélérateur SdS, VAN forward.

* AXA Corporate Solutions, Email : charlotte.belin@axa-cs.com

† AXA France, Email : remi.gerboud@axa.fr

‡ Milliman Paris, 14 rue Pergolèse, 75116 Paris, France, Email : julien.vedani@milliman.com

§ Université de Lyon, Université de Lyon 1, Institut de Science Financière et d'Assurance, Email : julien.vedani@etu.univ-lyon1.fr

Introduction

Les spécificités de l'activité d'assurance, et notamment l'inversion de son cycle de production, ont créé le besoin d'une réglementation adaptée, dont les missions principales sont la protection des assurés et la stabilité du système financier. Dans ce contexte, la directive européenne Solvabilité I a défini des critères quantitatifs de solvabilité pour tous les acteurs. Les règles de calcul, souvent trop générales, ont rapidement montré leurs limites. C'est pourquoi une nouvelle directive, Solvabilité II, doit être appliquée dès 2016.

Solvabilité II repose sur trois piliers, définissant à la fois des critères quantitatifs et qualitatifs pour garantir la solvabilité des assureurs. En particulier, le capital de solvabilité requis (*solvency capital requirement*, SCR) est le niveau de fonds propres dont doit disposer l'assureur pour éviter la ruine dans 99,5 % des cas sur un horizon d'un an. Celui-ci peut être calculé de deux façons différentes, dont le choix est laissé à la libre appréciation de l'assureur : par la formule standard, ou par un modèle interne, qu'il soit partiel ou total. La formule standard fournit des paramètres et des formules calibrés sur l'ensemble des données du marché. Elle présente l'inconvénient de ne pas prendre en compte fidèlement le profil de risque spécifique de l'assureur. Dans cet article, l'approche considérée est celle d'un modèle interne (complet ou partiel), c'est-à-dire entièrement développé en adéquation avec les risques auxquels est effectivement exposé le portefeuille.

S'agissant du calcul du SCR, la méthode de référence est celle des simulations imbriquées, appelée également méthode des simulations dans les simulations (SdS). Elle consiste en la projection dans l'univers historique de facteurs économiques et financiers reflétant les différents scénarios possibles à l'horizon 1 an. Le bilan de la compagnie est ensuite valorisé, conditionnellement à ces projections primaires, à l'aide de nouvelles simulations, appelées simulations secondaires¹. Les Simulations dans les Simulations (SdS) constituent l'approche la plus précise, mais sa complexité algorithmique la rend difficilement utilisable opérationnellement. C'est pourquoi des méthodes alternatives ont été développées.

Il existe deux grands types d'approches alternatives. Premièrement, les méthodes dites *proxy*, qui reposent sur de nombreuses hypothèses de modélisation mais peuvent fournir de bons résultats, bien qu'approximés. Elles ont l'avantage d'être peu coûteuses en temps de calcul et de produire une distribution complète de la variable d'intérêt (fonds propres économiques) à 1 an. Deuxièmement, les méthodes basées sur la réduction du nombre de simulations qui nécessitent moins d'hypothèses, et donnent des résultats plus précis mais soit elles sont relativement lourdes à mettre en place (comme l'approche de Broadie et al. [10]) soit elles ne permettent d'obtenir qu'une partie (la plus adverse) de la distribution de la variable d'intérêt. L'accélérateur SdS appartient à cette deuxième famille de méthodes, et s'avère très efficace opérationnellement, bien que ne permettant d'obtenir que les valeurs les plus adverses de la distribution empirique recherchée. Il consiste à sélectionner uniquement les scénarios primaires les plus adverses avant de procéder aux projections secondaires, afin de cibler directement le quantile à 0,5 % des fonds propres économiques. Une norme, définie sur l'espace des facteurs de risque, fournit un indicateur d'adversité des scénarios. Nous introduisons, dans ce qui suit, un nouveau critère permettant de mieux sélectionner les scénarios primaires et d'accélérer la convergence de l'accélérateur SdS : la Valeur Actuelle Nette de marges (*VAN*) *forward*.

Cet article débute par un rappel des concepts liés à l'activité d'assurance et aux contrats d'assurance vie épargne, faisant l'objet de l'étude. Puis, le contexte réglementaire et Solvabilité II sont introduits dans la deuxième partie, présentant ainsi le SCR et les notions de solvabilité économique. Ensuite, une revue de littérature concernant les méthodes de calcul du SCR, et en particulier l'accélérateur SdS, est menée dans la troisième partie. Les quatrième et cinquième parties introduisent la notion de *VAN forward* et étudient ses caractéristiques et sa pertinence, en vue d'un couplage avec l'accélérateur SdS. La sixième partie est dédiée à la comparaison des performances de l'accélérateur SdS avec plusieurs critères, dont la *VAN forward*. Enfin, la dernière partie est consacrée au développement d'une méthode bayésienne alternative à l'accélérateur SdS.

1. Pour plus d'informations sur cette méthodologie, voir [18].

1 Approche simulatoire pour le calcul du capital réglementaire en assurance vie

1.1 Avant-propos : contexte réglementaire

Contrairement à la directive Solvabilité I, qui s'adapte aux principes comptables domestiques européens, la réglementation Solvabilité II considère le bilan sous l'angle *économique*, ce qui signifie que ses postes sont évalués à leur valeur de marché. Celle-ci correspond à la somme des flux futurs, actualisés sous une probabilité risque neutre \mathbb{Q} . En particulier, l'univers *market-consistent* permet de valoriser les fonds propres économiques FP_t , sans que l'aversion au risque ne biaise les résultats. On a,

$$FP_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [RA_t | \mathcal{F}_t]$$

où RA représente la somme des résultats futurs actualisés, et \mathcal{F}_t l'ensemble de l'information financière disponible à la date t .

Solvabilité II impose aux assureurs de disposer d'une réserve de fonds propres suffisante pour honorer leurs engagements. Le pilier 1 de la directive fournit des critères quantitatifs précis, et définit notamment le capital économique .

Définition 1.1 *Le Solvency Capital Requirement (SCR), appelé également capital économique, correspond au montant des fonds propres dont doit disposer l'assureur en $t = 0$ pour éviter la ruine économique dans un an avec une probabilité de 99,5 %.*

Le SCR est généralement déterminé à l'aide de la formule suivante (sous certaines hypothèses),

$$SCR = FP_0 - q_{0,5\%}(D(0,1).FP_1)$$

avec FP_0 les fonds propres économiques initiaux de l'assureur, FP_1 ses fonds propres à l'horizon 1 an, $q_{0,5\%}(FP_1)$ le quantile à 99,5% de la distribution associée et $D(0,1)$ le déflateur permettant d'actualiser les flux entre $t = 0$ et $t = 1$.

Le calcul du capital réglementaire repose donc sur la connaissance à la date $t = 0$ de la distribution des fonds propres à horizon 1 an. Le problème posé à l'assureur est *l'absence de formules fermées* permettant de déterminer cette distribution. En effet, il existe des dépendances complexes entre l'actif et le passif du bilan économique de l'assureur. On peut citer, par exemple, le phénomène des rachats dynamiques.

Des modèles ont été développés dans la littérature pour valoriser le portefeuille par formules fermées, mais ceci au prix d'hypothèses restrictives. [24] montrent qu'une approximation du SCR peut être obtenue conditionnellement à la connaissance de caractéristiques liées aux contrats (premiers moments de la distribution des flux de trésorerie, etc.). [9] s'appuient sur ce modèle et obtiennent des formules fermées dans le cas des contrats en euros, pour la valorisation des provisions en *Best Estimate* dans un cadre adapté à l'ORSA.

1.2 L'approche Simulations dans les Simulations

Le capital économique est inconnu à la date de valorisation puisqu'il dépend d'un grand nombre d'événements pouvant intervenir de manière aléatoire dans le futur. Certains de ces événements sont relatifs aux contrats eux-même, comme les rachats, la mortalité, les trajectoires possibles de nombreux indicateurs financiers, tels que des indices action ou des taux. Ils déterminent les valeurs du bilan économique de l'entreprise et sont donc une source d'incertitude. La méthode la plus précise pour estimer le SCR est basée sur la simulation de ces événements multiples et le recalcul complet de l'actif et du passif en vision économique, dans un an.

La première étape de cette méthode nécessite la projection de scénarios économiques (les facteurs de risque) sur un horizon d'un an. Ces projections, appelées "simulations primaires", permettent de développer une grande variété de contextes économiques potentiels à 1 an. Ils sont ensuite utilisés pour

conditionner la projection des flux futurs relatifs aux contrats et l'évolution de leur provision mathématique. Chacune de ces "simulations secondaires" permet de déterminer une VAN en $t = 1$ (VAN_1), correspondant à la valeur actualisée des cash-flows de résultats prospectifs à engranger par l'assureur. Les projections secondaires sont risque-neutres et ont un objectif de valorisation, distinct de l'objectif de réalisme des projections primaires. Leur horizon correspond à celui nécessaire à l'extinction du passif considéré, soit entre 30 et 50 ans en pratique.

Les fonds propres économiques en date $t = 1$ (FP_1) sont obtenus par moyenne des VAN_1 pour chaque simulation primaire p : $FP_1 = \mathbb{E}^Q [VAN_1 | \mathcal{F}_1]$ où \mathcal{F}_1 est la filtration induite par l'information économique disponible en date $t = 1$, et Q est la probabilité de valorisation risque-neutre utilisée.

Ce calcul permet d'obtenir l'ensemble de la distribution de FP_1 , mais requiert un grand nombre de simulations, ce qui est souvent très consommateur en temps de calcul. Cette méthode combinant simulations primaires puis secondaires dans une approche de type Monte-Carlo imbriqué est appelée Simulations dans les Simulations. Elle est très largement développée dans la littérature opérationnelle (voir [18], [7]).

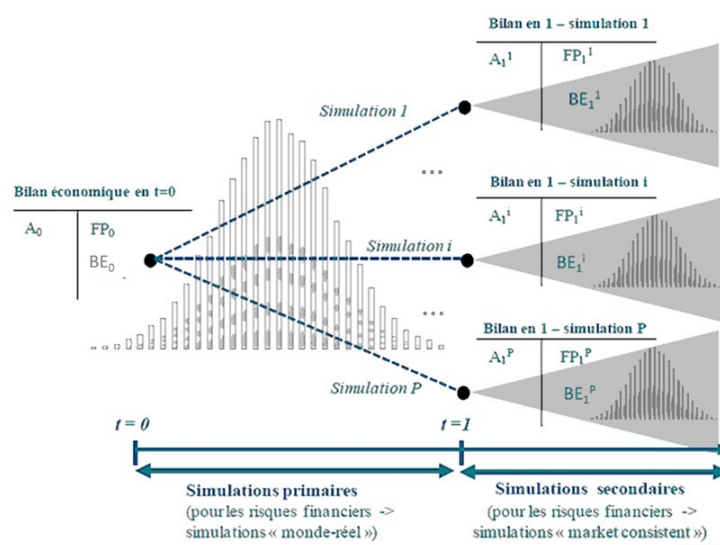


FIGURE 1 – Illustration de l'approche Simulations dans les Simulations (source : Milliman).

2 L'accélérateur SdS

En pratique, le SdS est fortement consommateur en ressources matérielles, humaines ainsi qu'en temps de calcul. De ce fait, plusieurs méthodes alternatives ont été récemment développées pour réduire le temps de calcul induit. Cette étude s'intéresse plus particulièrement à une des approches les plus efficaces, l'accélérateur SdS.

L'accélérateur SdS a été introduit pour la première fois par L. Devineau et S. Loisel (2009).

L'idée principale est la suivante : le calcul du SCR ne requiert pas la connaissance de l'intégralité de la distribution de la variable FP_1 , mais uniquement le quantile à 0.5%. L'accélérateur va donc s'intéresser à la localisation des scénarios primaires les plus adverses, menant aux valeurs de FP_1 les plus faibles. Au lieu de générer l'intégralité des simulations secondaires, seules celles correspondant aux scénarios primaires sélectionnés vont être lancées.

L'adversité d'un scénario est mesurée par une norme sur les facteurs de risque primaires, c'est à dire, dans notre étude, un indice action et le taux d'intérêt. D'autres normes peuvent être utilisées, comme la norme sensibilité qui pondère chaque facteur de risque par son influence sur la variable FP_1 . C'est une version améliorée de la norme standard, permettant d'introduire un impact asymétrique des facteurs de risque.

2.1 Les facteurs de risque

Les simulations primaires consistent en la projection d'indicateurs économiques et financiers suivant des modèles de diffusion choisis : prix de l'action, valeur des taux, etc. Dans la suite, et ceci dans un objectif de simplification, les indicateurs considérés se limitent à l'indice action et à une courbe de taux zéro-coupons, mais ils sont souvent bien plus nombreux dans la réalité.

De ces scénarios sont extraits des *facteurs de risque*, qui synthétisent les informations liées aux simulations et reflètent leur adversité marginale en chaque sous-risque (action / taux). Ces facteurs de risque peuvent être différents des indicateurs projetés, mais leur connaissance permet de reconstituer les indicateurs initiaux. En d'autres termes, ils contiennent la totalité de l'information liée à un scénario donné.

Le choix des facteurs dépend de la méthode utilisée pour la projection. En pratique, plusieurs cas peuvent se présenter.

- Cas 1 : si l'on a accès à l'intégralité du modèle de projection primaire, il est possible de récupérer directement les facteurs de risque. Il s'agit du cas le plus simple, mais pas le plus courant.
- Cas 2 : le plus souvent, l'assureur dispose d'une table de scénarios économiques contenant uniquement les valeurs des indices action et taux pour la date $t = 1$. Il doit alors en déduire les facteurs de risque en inversant les équations des modèles. On appelle ce procédé une *obtention a posteriori*.

L'extraction des facteurs de risque à partir des scénarios primaires peut être réalisée dans l'algorithme de génération des simulations en univers monde-réel (voir L. Devineau et S. Loisel (2009)) toutefois cela peut aussi être réalisé *a posteriori*, connaissant la table des P scénarios historiques utilisée.

Il est ainsi possible de retrouver les facteurs de risque, pour le scénario p , par les formules suivantes, en notant $S(t)^p$ l'indice action associé à la simulation primaire p , en date $t \in \{0; 1\}$ et $ZC(t, m)^p$ le prix zéro-coupon de maturité $m \in \llbracket 1; m_{\max} \rrbracket$, associé à la simulation primaire p , en date $t \in \{0; 1\}$.

$$\varepsilon_1^{a,p} = \frac{1}{\hat{\sigma}^a} \left(\ln \left(\frac{S^p(1)}{S(0)} \right) - \hat{\mu}^a \right) \quad (1)$$

, pour le facteur action, et

$$\varepsilon_1^{ZC,p} = \frac{1}{m_{\max} - 1} \sum_{m=1}^{m_{\max}} \frac{1}{\hat{\sigma}_m^{ZC}} \left(\ln \left(\frac{ZC^p(1, 1+m)}{ZC(0, 1+m)} \right) - \hat{\mu}_m^{ZC} \right) \quad (2)$$

, pour le facteur taux.

On note dans ces formules,

—

$$\begin{aligned} (\sigma^a)^2 &= \mathbb{E} \left[\left(\ln \left(\frac{S(1)}{S(0)} \right) - \mathbb{E} \left[\ln \left(\frac{S(1)}{S(0)} \right) \mid \mathcal{F}_1 \right] \mid \mathcal{F}_1 \right)^2 \right] \\ \Rightarrow \hat{\sigma}^a &= \sqrt{\frac{1}{P-1} \sum_{p=1}^P \left(\ln \left(\frac{S^p(1)}{S(0)} \right) - \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \ln \left(\frac{S^i(1)}{S(0)} \right) \right)^2} \end{aligned} \quad (3)$$

, l'estimateur de la volatilité des log-rendements action entre $t = 0$ et $t = 1$,

—

$$\begin{aligned} \mu^a &= \mathbb{E} \left[\ln \left(\frac{S(1)}{S(0)} \right) \mid \mathcal{F}_1 \right] \\ \Rightarrow \hat{\mu}^a &= \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P \ln \left(\frac{S^p(1)}{S(0)} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

, l'estimateur du log-rendement action moyen entre $t = 0$ et $t = 1$,

$$\begin{aligned}
(\sigma_m^{ZC})^2 &= \mathbb{E} \left[\left(\ln \left(\frac{ZC(1,m+1)}{ZC(1,1)ZC(0,m)} \right) - \mathbb{E} \left[\ln \left(\frac{ZC(1,m+1)}{ZC(1,1)ZC(0,m)} \right) \mid \mathcal{F}_1 \right] \mid \mathcal{F}_1 \right)^2 \right] \\
\Rightarrow \hat{\sigma}_m^{ZC} &= \sqrt{\frac{1}{P-1} \sum_{p=1}^P \left(\ln \left(\frac{ZC^p(1,m+1)}{ZC^p(1,1)ZC(0,m)} \right) - \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \ln \left(\frac{ZC^i(1,m+1)}{ZC^i(1,1)ZC(0,m)} \right) \right)^2} \quad (5)
\end{aligned}$$

, l'estimateur de la volatilité des log-rendements zéro-coupon entre $t = 0$ et $t = 1$, pour la maturité $m \in [1; m_{max} - 1]$,

$$\mu_m^{ZC} = \mathbb{E} \left[\ln \left(\frac{ZC(1,m+1)}{ZC(1,1)ZC(0,m)} \right) \mid \mathcal{F}_1 \right] \quad (6)$$

$$\Rightarrow \hat{\mu}_m^{ZC} = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P \ln \left(\frac{ZC^p(1,m+1)}{ZC^p(1,1)ZC(0,m)} \right) \quad (7)$$

, l'estimateur du log-rendement zéro-coupon moyen entre $t = 0$ et $t = 1$, pour la maturité $m \in [1; m_{max} - 1]$.

Remarque 2.1 La méthode de l'accélérateur SdS, à travers ses modèles de diffusion, repose sur l'hypothèse fondamentale suivante : les facteurs de risque forment un vecteur gaussien dont les marginales sont centrées réduites.

Les facteurs de risque utilisés pour quantifier l'adversité des scénarios forment donc un vecteur gaussien centré réduit $\varepsilon = (\varepsilon_1^a, \varepsilon_1^{ZC})$. Plus précisément, il existe un vecteur pour chaque simulation primaire, et les facteurs de risque forment une matrice de dimension $P \times 2$: $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^P)$.

On remarque qu'une *hausse* du facteur de risque ε^{ZC} correspond à une hausse du prix du zéro-coupon, et donc à une *baisse des taux*.

2.1.1 Sélection des scénarios extrêmes sur la base d'une norme standard

La procédure de sélection des scénarios primaires repose sur la définition de l'adversité pour le portefeuille considéré. Il s'agit de déterminer si celui-ci est exposé à la hausse ou à la baisse des taux, à la baisse de l'indice action, etc.

Intuitivement, il est clair que les scénarios les plus adverses seront ceux pour lesquels les composantes de $\varepsilon^p = (\varepsilon^{a,p}, \varepsilon^{ZC,p})$ prennent des valeurs extrêmes, dont l'orientation est à déterminer. Les scénarios dits "centraux", c'est-à-dire, dont les aléas sont relativement proches de 0 entre les dates $t = 0$ et $t = 1$, ne conduiront pas à des valeurs extrêmes de fonds propres.

L'objectif est donc de déterminer l'intensité du risque ε^p associé à chaque scénario primaire p , afin de procéder à la sélection. Le facteur de risque choisi pour discriminer les scénarios contient l'ensemble de l'information permettant de refléter leur adversité et de prédire la position approximative des fonds propres correspondants dans la distribution finale.

La Figure 2 est basée sur des données réelles obtenues à date du 31/12/2011. Elle représente l'ensemble du nuage $\varepsilon = (\varepsilon^a, \varepsilon^{ZC})$ des P aléas de première période. En noir sont représentés les points correspondant aux fonds propres de la queue de distribution au-delà du quantile à 5 %. Le produit considéré est un produit d'épargne réel avec taux minimum garanti prenant en compte des rachats dynamiques dépendant des taux de rendement d'actifs. L'actif associé au produit est composé d'une poche obligation, d'une poche action, d'une poche immobilier et de cash.

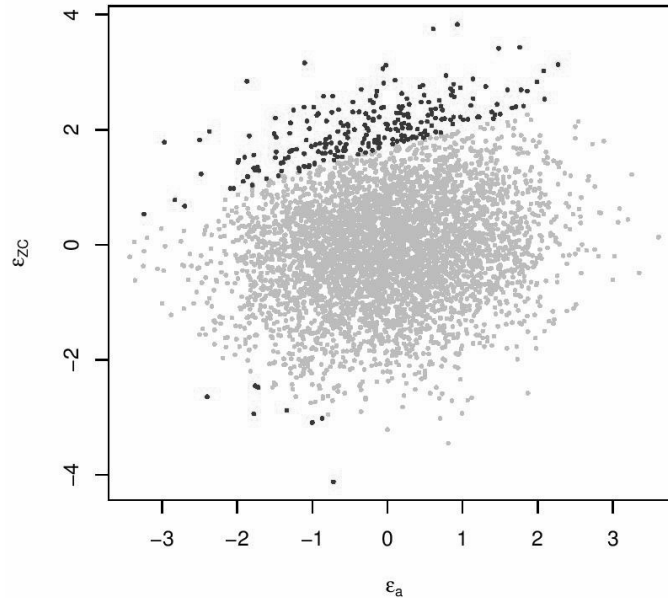


FIGURE 2 – Facteurs de risque primaires ($\varepsilon^a, \varepsilon^{ZC}$).

On remarque que ceux des scénarios les plus adverses sont situés en périphérie du nuage de points. Plus précisément, l'assureur est très exposé à la baisse des taux (hausse du prix zéro-coupon) et peu sensible à un mouvement de l'action (bien que plus exposé à la baisse). En règle générale, un produit d'épargne est plutôt exposé à une hausse des taux (associée à des rachats), et sensible à l'action. Ces observations inhabituelles s'expliquent par le contexte économique au moment de la simulation (historique utilisé). La Figure 2 reprend les données à fin 2011. Or, à cette date, les taux directeurs étaient extrêmement bas. Par conséquent, une baisse supplémentaire des taux est plus à craindre qu'une hausse (ce qui n'est pas le cas en général). Le niveau des taux explique aussi la faible sensibilité au risque action, dans la mesure où une baisse supplémentaire des taux, déjà très bas, a plus de conséquences qu'une baisse de l'action. Les sensibilités des fonds propres aux différents risques sont donc très déséquilibrées dans ce cas.

Remarque 2.2 *Dans toute la suite, et sauf indication contraire, les études utilisent les données issues d'un modèle de gestion Actif-Passif standard à la date du 31/12/2011. Elles sont caractérisées par un nombre de scénarios primaires $P = 5000$, et un nombre de scénarios secondaires $S = 500^2$. C'est pourquoi, on parlera désormais des 25 pires fonds propres, correspondant à la queue de distribution au-delà du quantile à 0,5 % : $\alpha \cdot P = 5000 \cdot 0,5\% = 25$.*

De façon à mettre en évidence la sensibilité de l'adversité à la situation économique, ces données peuvent être comparées à celles de fin 2010 (avec le même générateur). Le nouveau nuage de points est présenté dans la Figure 3.

Avec ces données, les taux de base initiaux sont plus élevés (pour exemple, le taux directeur de la BCE était de 1 % en décembre 2011, contre 1,25 % fin 2010). Ainsi, le contexte économique est relativement plus usuel et l'exposition présente les caractéristiques plus standard pour les assurances vie : exposition à la hausse des taux et à la baisse de l'action, avec des sensibilités équivalentes.

Ces graphiques démontrent que, selon la situation dans laquelle se trouve l'économie au moment de la projection, les adversités seront définies différemment. Elles dépendent de plusieurs paramètres,

2. Ces dimensions simulatoires sont relativement faibles mais fournissent un premier cadre d'expérimentation rapide et pertinent pour notre analyse

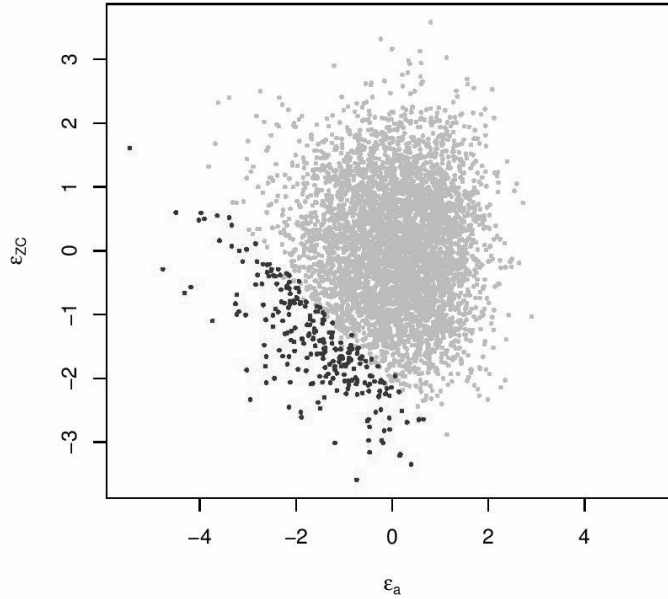


FIGURE 3 – Facteurs de risque primaires $(\varepsilon^a, \varepsilon^{ZC})$.

1. les sensibilités respectives aux taux et à l'action ;
2. l'exposition aux taux : elle peut être à la hausse, à la baisse, ou aux deux, dépendant de la sensibilité du produit au risque de rachat (risque de hausse des taux) comparé au risque lié au versement du taux minimum garanti (risque de baisse des taux) ;
3. l'exposition à l'action est, quant à elle, toujours à la baisse. Cependant, elle peut être faible si la sensibilité au taux devient très importante (comme c'est le cas sur les données de 2011).

Malgré le fait que l'adversité des scénarios dépende de la conjoncture économique, il est clair que les scénarios extrêmes en termes de fonds propres sont systématiquement situés en périphérie du nuage de points. Cela justifie le choix d'une norme comme indicateur d'adversité, car elle évalue la distance d'un scénario donné au scénario "moyen" (situé au centre du nuage). Il s'agit donc d'une mesure de l'extrémité du scénario considéré.

Pour rappel, d'après le chapitre 2.1, le vecteur ε est gaussien, et, par conséquent, la densité de celui-ci s'écrit,

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon}(\varepsilon^a, \varepsilon^{ZC}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{(\varepsilon^a)^2 + (\varepsilon^{ZC})^2 - 2\rho\varepsilon^a\varepsilon^{ZC}}{2(1-\rho^2)}\right) \\ &= K_1 \exp(K_2((\varepsilon^a)^2 + (\varepsilon^{ZC})^2 - 2\rho\varepsilon^a\varepsilon^{ZC})) \end{aligned}$$

,
où K_1 et K_2 sont deux constantes.

La densité des scénarios adverses est faible, car ceux-ci sont définis comme ayant des aléas extrêmes. Cela permet de définir la norme suivante comme mesure d'adversité.

$$\|\varepsilon^a, \varepsilon^{ZC}\| = \sqrt{(\varepsilon^a)^2 + (\varepsilon^{ZC})^2 - 2\rho\varepsilon^a\varepsilon^{ZC}} \quad (8)$$

On reconnaît au passage l'équation d'une ellipse. Plus cette norme est grande, plus le scénario est adverse. On définit alors une zone d'exécution F_h de niveau h , regroupant les scénarios primaires dont la norme est supérieure au seuil h .

$$F_h = \{(\varepsilon^a, \varepsilon^{ZC}) : \|\varepsilon^a, \varepsilon^{ZC}\| \geq h\} \quad (9)$$

où h est un seuil qui dépend du nombre de scénarios que l'on souhaite prendre en compte dans F_h .

La Figure 4 représente les zones d'exécution successives associées à un nombre de points $M = 100$. Elles correspondent aux surfaces entre ellipses, allant de la périphérie vers le centre. À chaque étape, h est calculé de telle sorte que,

$$\text{Card}(F_{h+1}) - \text{Card}(F_h) = 100$$

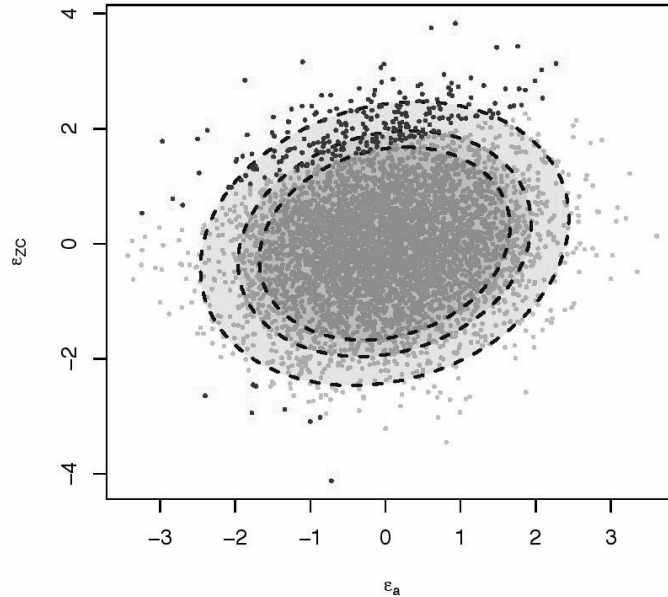


FIGURE 4 – Ellipses de sélection des facteurs de risque primaires $(\varepsilon^a, \varepsilon^{ZC})$ (source : données Milliman).

2.1.2 Sources d'amélioration

L'utilisation de la norme définie dans la partie précédente ne permet pas d'écarter des scénarios extrêmes mais pouvant être bénéfiques pour l'assureur. Une très forte hausse de l'indice action, par exemple, sera considérée comme un scénario adverse, alors qu'il ne l'est pas. En effet, l'assureur est un investisseur institutionnel et ne spéculé donc pas à la baisse sur le marché boursier.

Par conséquent, une amélioration proposée par les auteurs est la définition de régions de non-exécution. Celles-ci définissent un ensemble de scénarios extrêmes ne pouvant conduire *de facto* à des fonds propres faibles, et accélèrent davantage la convergence de l'algorithme. Grâce à cette méthode, le temps de calcul est réduit en moyenne d'un facteur 25.

Une autre amélioration importante concerne le cas des facteurs multiples. En effet, il est possible que les facteurs de risque soient nombreux, mais que l'adversité des scénarios ne soit due qu'à certains d'entre eux. Dans ce cas, les autres facteurs seront des bruits et n'apporteront pas d'information significative,

ralentissant ainsi l'algorithme. Pour pallier ce problème, les auteurs ont introduit la notion de *sensibilité à chaque facteur*. Elle permet de les pondérer et de donner moins de poids à ceux qui impactent peu la valeur des fonds propres.

On définit d'abord le risque pur associé à un facteur de risque. Notons pour cela $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ le vecteur gaussien des n aléas de première période (facteurs de risque).

Soit $\Omega = VV'$ la matrice de variance-covariance du vecteur ε et sa décomposition de Cholesky. Ainsi, $\zeta = V^{-1}\varepsilon$ est un nouveau vecteur gaussien dont les marginales sont indépendantes, et correspond aux risques purs associés à chacun des facteurs de risque de ε .

La norme ajustée à la sensibilité de chaque facteur est alors,

$$\|\varepsilon\|^{\text{sensi}} = \sqrt{s_1 \zeta_1^2 + \dots + s_n \zeta_n^2} \quad (10)$$

où le vecteur (s_1, \dots, s_n) représente les sensibilités des fonds propres aux différents facteurs. Cela permet de sous-pondérer les facteurs peu influents, de façon à ce qu'ils n'aient que peu d'impact sur la norme.

Remarque 2.3 *En pratique, les s_i sont obtenus après avoir appliqué des chocs de même amplitude aux différents facteurs de risque, puis en mesurant l'impact relatif de chacun d'entre eux sur les fonds propres.*

Une norme alternative peut être introduite afin d'affiner les sensibilités précédentes : la norme sensibilité asymétrique. Elle permet de pondérer différemment les facteurs à la hausse et à la baisse. Dans cette étude, les sensibilités sont toujours symétriques pour l'action, mais différentes pour les hausses et les baisses de taux. La nouvelle norme s'écrit :

$$\|\varepsilon\|^{\text{sensi asymétrique}} = \sqrt{s_1 \zeta_1^2 + s_2 \zeta_2^2 \mathbf{1}_{(\zeta_2 \geq 0)} + s_3 \zeta_2^2 \mathbf{1}_{(\zeta_2 < 0)}}$$

avec s_1 , s_2 et s_3 les sensibilités à l'action, la baisse et la hausse des taux respectivement.

2.2 Algorithme

L'algorithme suivi est le suivant,

1. Sélection des M scénarios les plus adverses au sens de la norme choisie. Dans l'article original de L. Devineau et S. Loisel, $M = 4N$, avec $N = 0.5\% \times$ nombre de scénarios primaires.
2. Simulation des scénarios secondaires associés aux scénarios primaires sélectionnés.
3. Sélection des 0.5 % pires valeurs de fonds propres, parmi les M précédents.
4. Sélection des M scénarios les plus adverses suivants, et itération des étapes précédentes jusqu'à ce que le vecteur des 0.5 % pires valeurs se stabilise.

Remarque 2.4 *Le choix de M résulte d'un compromis entre efficacité et précision. Si M est trop élevé, la vitesse de convergence est réduite du fait des nombreuses valeurs de fonds propres à recalculer à chaque étape de l'algorithme. Si M est trop faible, la probabilité de se tromper et de manquer une des vraies valeurs adverses va augmenter et l'algorithme peut converger vers un mauvais vecteur des pires valeurs.*

3 La VAN forward

L'objectif est ici d'étudier un nouvel indicateur d'adversité pour les scénarios primaires, la *VAN forward*. Intuitivement, une *VAN* intègre plus d'informations que la norme sensibilité puisque cette dernière est une mesure marginale qui n'intègre pas les effets croisés entre les risques. De plus une *VAN* donne une information sur la manière dont le modèle ALM réagit conjointement aux différents facteurs de risque. Les effets croisés ne doivent pas être négligés car ils peuvent causer de graves pertes dans des scénarios

de crise (par exemple, lorsqu'une baisse de l'indice action exacerbe l'effet d'un rachat massif). Toutefois, une *VAN* peut aussi se révéler extrêmement volatile car elle intègre une grosse partie du risque lié au scénario secondaire considéré.

La *VAN forward* est une *VAN* particulière, obtenue à l'aide d'un scénario secondaire *déterministe* pour lequel les facteurs de risque (indice action et taux d'intérêt dans notre exemple) suivent respectivement leurs trajectoires espérées ("forward"). Ces trajectoires sont obtenues en capitalisant simplement les indices aux taux *forwards*

$$\forall t \in \llbracket 2, H \rrbracket, \quad {}^f S(t) = {}^f S(t-1) \frac{1}{{}^f ZC(t-1, t)} \quad (11)$$

et

$$\forall t \in \llbracket 2, H \rrbracket, \forall m \in \llbracket 1, m_{\max} \rrbracket, \quad {}^f ZC(t, t+m) = {}^f ZC(t-1, t+m) \frac{1}{{}^f ZC(t-1, t) = \frac{{}^f ZC(1, t+m)}{{}^f ZC(1, t)}} \quad (12)$$

, en notant les valeurs initiales ${}^f S(1) = S(1)$ et ${}^f ZC(1, 1+m) = ZC(1, 1+m)$.

Dans le cas des simulations primaires, les facteurs de risque sont représentés par les aléas associés aux simulations en univers monde-réel $\varepsilon = (\varepsilon_1^a, \varepsilon_1^{ZC})$. Des facteurs de risque peuvent également être définis pour les simulations secondaires. Soit η ces jeux de facteurs secondaires.

Remarque 3.1 *En pratique il existe $H - 1$ facteurs de risque secondaires action et $(H - 1) \cdot m_{\max}$ facteurs de risque secondaires taux.*

En réalité la *VAN* est une fonctionnelle de jeux de facteurs de risque primaire et secondaire,

$$VAN = f(\varepsilon, \eta),$$

et la *VAN forward* est associée à des facteurs de risque secondaires particuliers,

$${}^f VAN = f(\varepsilon, {}^f \eta).$$

Le concept de la *VAN forward* repose sur l'utilisation des diffusions *forward* pour les facteurs de risque lors des simulations secondaires. L'aléa de seconde période et la simulation sont déterministes vue de l'instant $t = 1$.

Ainsi, au lieu de simuler S trajectoires secondaires permettant d'obtenir S valeurs possibles de VAN_1 , *une seule simulation déterministe* est effectuée pour calculer la *VAN forward* en $t = 1$, ${}^f VAN_1$, à partir des trajectoires $(S(t))_{t \in \llbracket 2, H \rrbracket}$ et $(ZC(t, t+m))_{(t, m) \in \llbracket 2, H \rrbracket \times \llbracket 1, m_{\max} \rrbracket}$.

Le scénario *forward* est un scénario *central* donnant une information non bruitée (déterministe), bien qu'imparfaite, sur la valeur probable des fonds propres correspondants. En pratique, on voit que le graphe fonds propres vs. *VAN forward* montre une importante corrélation entre ces deux variables (voir Figure 5), ce qui suggère que la *VAN forward* est un indicateur de l'adversité des scénarios primaires relativement efficace. D'autre part, notons que le calcul des *P VAN forward* (associées à nos P scénarios primaires), ne nécessitant qu'un unique scénario secondaire pour chaque scénario primaire, est très rapide.

La première étape de notre étude est de prouver la supériorité de la *VAN forward* comparé à un tirage (aléatoire) de *VAN* ordinaire, et de quantifier cette différence. Pour cela, proposons une nouvelle manière de visualiser la *VAN*,

$$VAN_1 = FP_1 + \varepsilon$$

où ε est une variable centrée réduite. Cela vient du fait que les fonds propres à 1 an se calculent comme une moyenne de VAN_1 .

Utilisant cette vision plus statistique afin de comparer *VAN* et *VAN forward*, il est possible d'étudier les propriétés structurelles de la *VAN forward*. Nous intuitions en particulier qu'elle représente un scénario

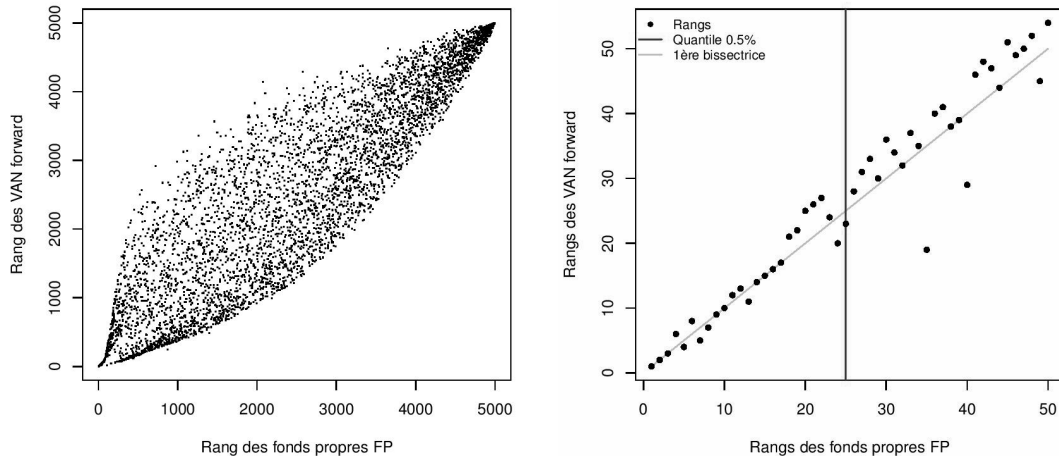


FIGURE 5 – Rangs des *VAN forward* en fonction des rangs des fonds propres (à gauche) et zoom sur la queue basse (à droite).

relativement central. Pour confirmer empiriquement cette hypothèse nous avons implémenté un SdS complet sur un produit d'épargne synthétique, afin de déterminer les distributions conditionnelles (par rapport au réalisé primaire) des *VAN*. Nous obtenons finalement les résultats suivants,

- la forme de la volatilité des *VAN* pour les réalisations les plus adverses des fonds propres (La queue de distribution sur les 30 premiers pourcents) ;
- le quantile de la distribution des *VAN* auquel correspond la *VAN forward*, pour tous les scénarios primaires considérés.

La Figure 6 illustre la position quantile de la *VAN forward* ainsi que la volatilité de la variable de bruit (ε), en fonction de la valeur des fonds propres associée. Elle montre que la *VAN forward* est toujours comprise entre les quantiles à 50 % et à 75 % de la distribution des *VAN*, quelle que soit la valeur des fonds propres économiques associée. Ce résultat tend à confirmer notre première intuition : la *VAN forward* est bien une *VAN* "centrale". De plus, la volatilité décroît *grossièrement* linéairement avec les fonds propres.

Ces résultats, ainsi que la définition ci-dessus, sont ensuite utilisés dans le cadre d'une études statistique. La *VAN* est supposée suivre une loi Gaussienne centrée sur les fonds propres économiques, et avec pour volatilité $\sigma(FP_1)$, une fonction linéaire décroissante de FP_1 . La *VAN forward* est simulée en considérant un bruit modifié ε' , tiré aléatoirement entre les quantiles à 50 % et à 70 % de $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma(FP_1)^2)$. Notons que la volatilité est définie relativement à la valeur des fonds propres associés. Elle correspond à la volatilité de la *VAN*, conditionnellement à la réalisation des facteurs de risque primaires ayant menés à la valeur de FP_1 . Le choix de ce cadre hétéroscédastique est plus général que de considérer une volatilité stable, hypothèse peu réaliste en pratique.

3.1 Probabilité de croisement

Sous l'hypothèse de linéarité pour $\sigma(FP_1)$, il est possible d'évaluer la probabilité pour deux valeurs successives de *VAN*, que les valeurs associées de FP_1 aient un ordre inversé. Moins ce type de "croisement" a de risque d'apparaître, plus l'information fournie par la *VAN* est précise.

La procédure d'estimation se base sur des simulations numériques. Considérant le vecteur des 5000 valeurs de fonds propres en $t = 1$ obtenu par SdS complet, nous simulons $B = 1000$ vecteurs de 5000 *VAN* aléatoires et de *VAN forward*, en utilisant le modèle proposé plus haut ($VAN = FP + \varepsilon$ et ${}^fV AN = FP + \varepsilon'$). Pour chaque simulation, la probabilité de croisement est définie comme la proportion des couples

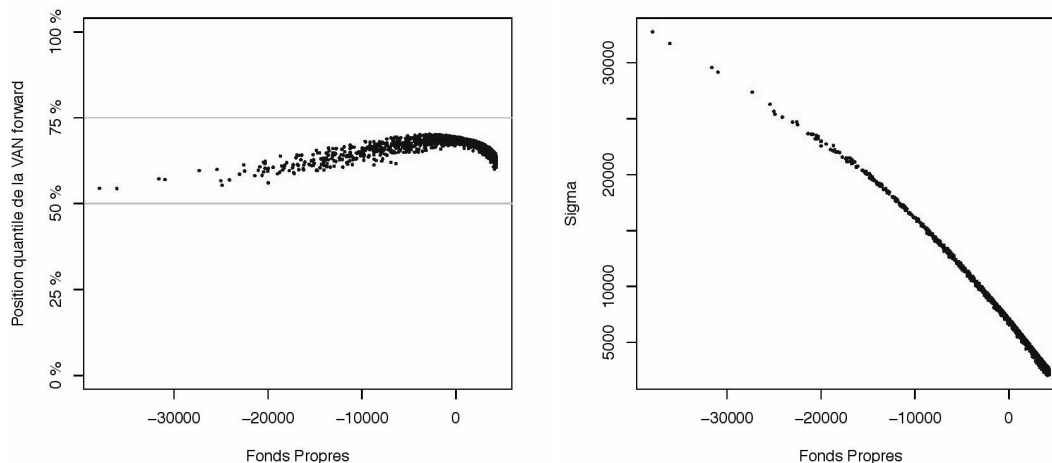


FIGURE 6 – Position quantile de la *VAN forward* (gauche) et volatilité empirique de la *VAN*, conditionnellement à la valeur des fonds propres associée (droite).

de réalisations de *VAN* dont les rangs sont inversés comparé à ceux des fonds propres correspondants.

La Figure 7 représente la probabilité de croisement, dans la queue de distribution à 0.5% de FP_1 , pour la *VAN* ordinaire (en bleu) et pour la *VAN forward* (en rouge). Cette dernière est très intéressante du fait de sa haute corrélation avec la variable FP_1 , mais aussi de par le fait que l'ordre d'adversité est mieux préservé. Dans l'objectif d'appliquer l'accélérateur SdS, la *VAN forward* semble donc être un critère de sélection particulièrement pertinent.

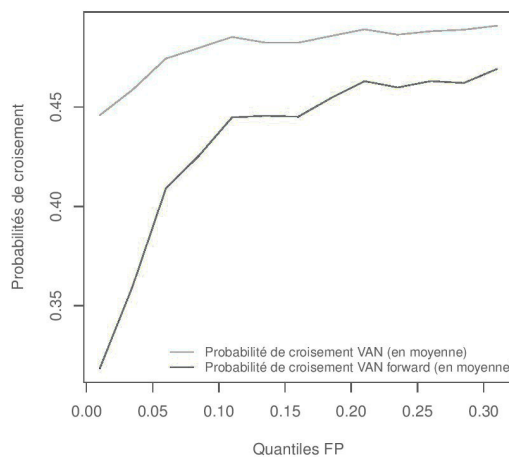


FIGURE 7 – Probabilités de croisement dans la queue de distribution, pour des *VAN* ordinaires (en gris) et pour la *VAN forward* (en noir)

3.2 Complexité algorithmique

La comparaison entre *VAN* ordinaire et *VAN forward* a été réalisée dans la perspective de combiner leurs propriétés à l'algorithme de l'accélérateur SdS. Une nouvelle fois, nous étayons notre réflexion à

l'aide de données empiriques afin d'évaluer la vitesse de convergence de cet outil lorsque la *VAN forward* est utilisée comme critère d'adversité.

Cette mise en œuvre de l'algorithme est similaire à la précédente. À partir de nos B échantillons simulés de *VAN* et de *VAN forward*, nous observons le rang de la *VAN* nécessaire afin que l'algorithme converge (sur les 25 pires valeurs de FP_1). Soit N_{min} ce nombre d'exploration de *VAN* (i.e. de calcul de fonds propres). Grâce aux B simulations, nous obtenons une distribution empirique de N_{min} .

Les étapes de la méthode sont les suivantes, pour une simulation b donnée,

1. Bruitage, de toutes les valeurs FP_1^i par un bruit gaussien de variance définie. On note,

$$\Lambda_b = (VAN_1^{1,b}, \dots, VAN_1^{P,b})$$

le vecteur des variables bruitées, soit, $VAN_1^i \stackrel{\mathcal{L}}{=} FP_1^i + U_i$. Dans le cas de cette étude, on considère, par convention, que les FP_1^i sont triés, c'est-à-dire, $FP_1^1 < FP_1^2 < \dots < FP_1^P$ (les *VAN* ne le sont pas car il peut y avoir des croisements).

2. Observation des rangs de $VAN_1^{1,b}, \dots, VAN_1^{25,b}$ dans le vecteur Λ_b . Le rang de $VAN_1^{i,b}$ correspond au nombre de réalisations de VAN_1 qui doivent être explorées avant de trouver les $i^{\text{ème}}$ pires fonds propres (dans le cas où l'on utiliserait l'algorithme SdS). On peut donc en déduire le nombre minimal de points à prendre en compte dans l'algorithme avant d'obtenir les 25 pires fonds propres (noté N_{min}),

$$N_{min,b} = \max_{i \in [1, 25]} \text{rang}(VAN_1^{i,b}).$$

Plus $N_{min,b}$ est faible, plus l'algorithme sera efficace, car il convergera en peu d'étapes (le bruitage entraîne peu de croisements).

3. Ces étapes sont répétées un grand nombre B de fois, de façon à obtenir une distribution pour la variable N_{min} ,

$$(N_{min,1}, \dots, N_{min,B}).$$

La Figure 8 donne une illustration graphique de ce procédé.

Sur le schéma, les fonds propres triés $FP_1^{(1)}, \dots, FP_1^{(5000)}$ correspondent à $FP_1^1, \dots, FP_1^{5000}$ avec les notations ci-dessus. Le bruitage des fonds propres les plus faibles (notés $FP^{(1)}$ sur la figure et FP_1^1 ci-dessus) donne $VAN_1^{(17)}$, correspondant à VAN_1^1 (*VAN* associée aux fonds propres de rang 1 initialement). Ainsi, l'algorithme SdS devra explorer au moins 17 *VAN* avant de trouver le vecteur $FP_1^{(1)}, \dots, FP_1^{(25)}$.

La Figure 10 donne la distribution empirique de N_{min} pour la *VAN* ordinaire et pour la *VAN forward*, lorsque l'hypothèse sur $\sigma(FP_1)$ est en adéquation avec la réalité observée. On observe, sans surprise, que la *VAN forward* est un critère beaucoup plus efficace que la *VAN* ordinaire. De fait, la distribution de N_{min} pour cette variable est concentrée autour de 27 et n'excède jamais 36. Au contraire, la distribution associée à la *VAN* ordinaire à une queue de distribution épaisse montrant, en particulier, que la probabilité que l'algorithme converge après plus de 2000 calculs de fonds propres n'est pas nulle.

Ces résultats, bien qu'ils reposent sur des hypothèses particulières de modélisation, suggèrent que la *VAN forward* possède des propriétés très intéressantes.

- la distribution de N_{min} montre que la combinaison de cette variable avec l'accélérateur SdS est très efficace, du fait que 30 calculs de FP_1 sont généralement suffisants afin d'obtenir l'intégralité de la queue de distribution à 0.5 % ;
- elle montre aussi que la probabilité de piégeage (l'algorithme converge, mais vers de mauvaises valeurs) est insignifiante. En conséquence, M peut être choisi plus proche de 25, ce qui évite des calculs inutiles au cours de la dernière itération de l'algorithme, qui ne sert qu'à valider la convergence.

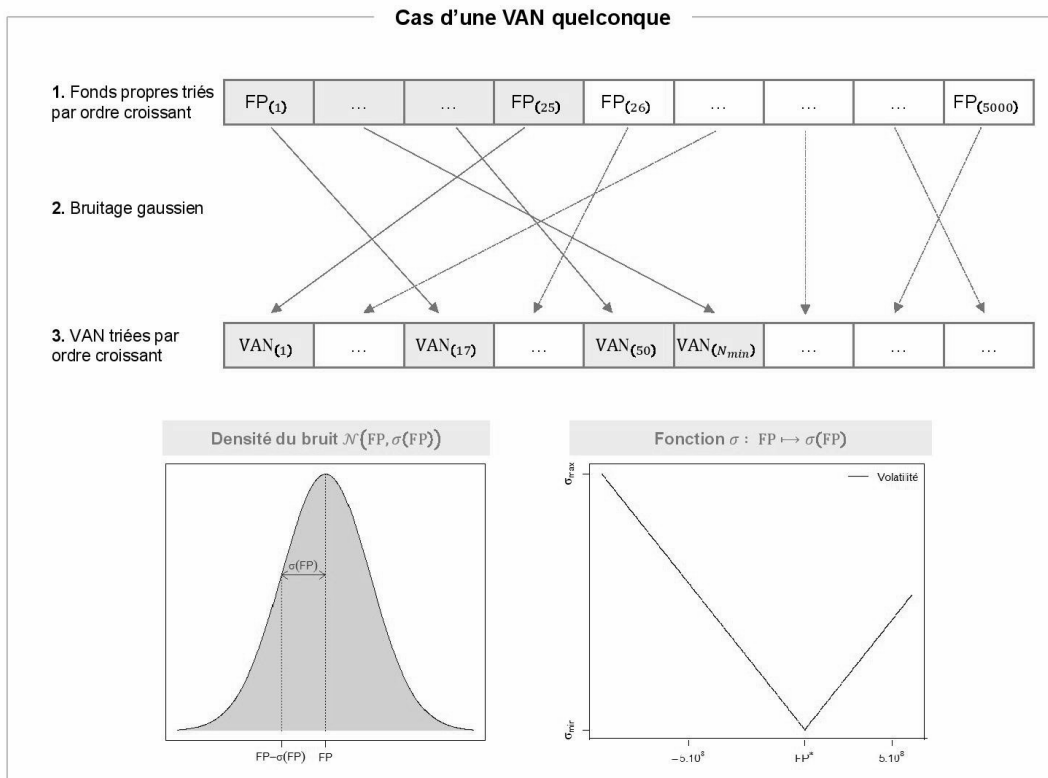


FIGURE 8 – Bruitage de la distribution pour trouver N_{min} dans le cas d'une VAN quelconque.

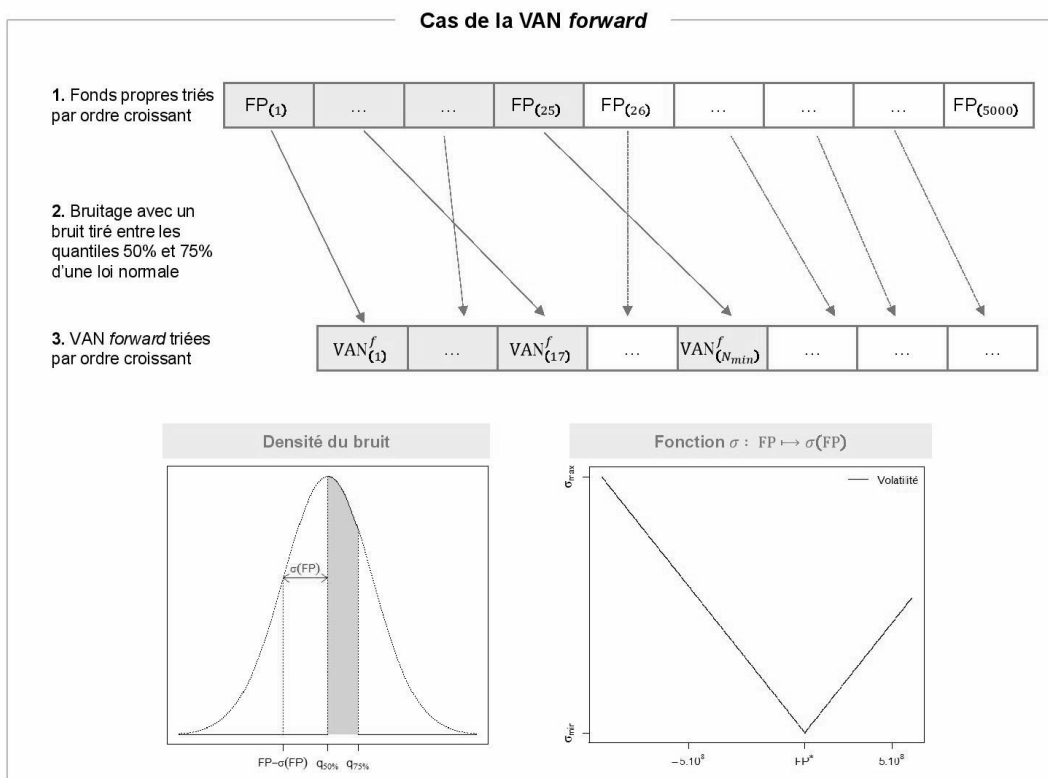


FIGURE 9 – Bruitage de la distribution pour trouver N_{min} dans le cas d'une VAN forward.

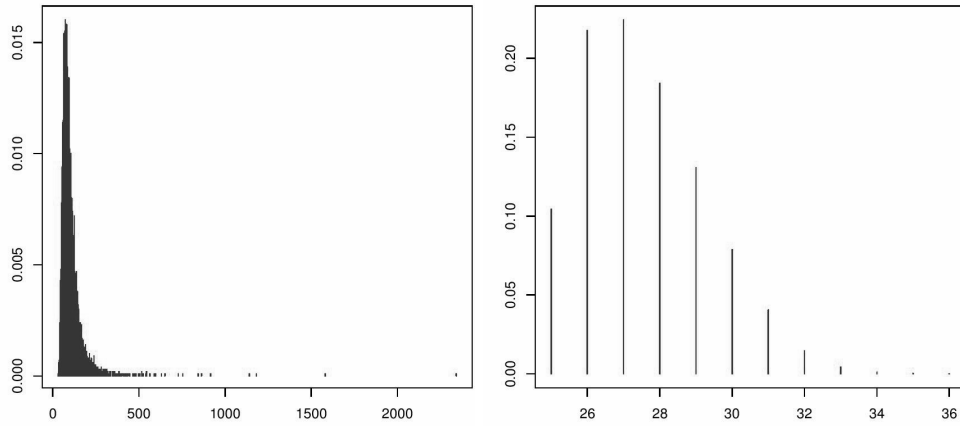


FIGURE 10 – Distribution de N_{min} pour une *VAN* ordinaire (gauche) et pour la *VAN forward* (droite).

3.3 Combiner la *VAN forward* avec l'accélérateur SdS

Les premières analyses numériques ont permis de souligner les bonnes propriétés de la *VAN forward* et suggèrent une bonne efficacité pour le couplage à l'accélérateur SdS. Toutefois, les hypothèses simulatoires sont basées sur les résultats d'un modèle de gestion actif-passif simplifié ce qui, par définition, peut s'avérer éloigné de la réalité. L'objectif de cette sous-section est de confirmer la performance de la *VAN forward* en appliquant l'algorithme à des données obtenues pour un produit d'épargne réel avec taux minimum garanti. Le modèle ALM utilisé permet de modéliser le mécanisme de participation aux bénéfices, ainsi que les comportements de rachats dynamiques des assurés. Il intègre de plus des hypothèses réalistes de rebalancements d'actif. Les données finales consistent en un échantillon de valeurs de FP_1 obtenu par approche SdS, ainsi que l'échantillon des *VAN forward* associées.

L'idée de notre méthode d'accélération est de pallier au manque d'information de la norme sensibilité en utilisant la *VAN forward* comme critère d'adversité dans l'algorithme standard de l'accélérateur SdS. La performance de cette approche est challengée par l'application de l'algorithme en utilisant d'autres critères d'adversité : la norme standard et la norme sensibilité. L'objectif est ainsi de comparer le nombre d'itérations requises pour atteindre la convergence de l'algorithme, lorsque M varie. Les résultats sont présentés dans la Figure 11.

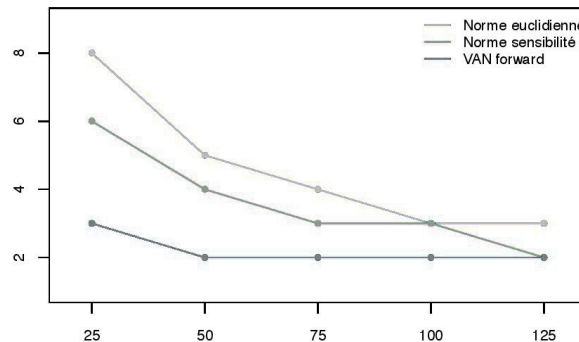


FIGURE 11 – Vitesse des convergences pour différents critères d'adversité

La convergence est effectivement largement accélérée avec la *VAN forward*, ce qui confirme notre intuition concernant ses qualités de prédiction de l'adversité des scénarios primaires. À la vue de cette forte

efficacité, il apparaît pertinent de choisir M plus faible. Au final, le gain en termes de temps de calcul serait fortement significatif.

Toutefois, il convient de noter que, dans notre cadre, seuls des facteurs de niveau (action et taux) sont pris en compte. Si la *VAN forward* semble particulièrement adaptée pour des risques de niveau, ce ne serait pas le cas pour des risques de volatilité. En effet, les mouvements de volatilité (actions et taux) ne peuvent être retranscrits dans un scénario *forward*.

4 Approche Bayésienne

La *VAN forward* est un critère puissant pour mesurer l'adversité d'un scénario primaire. Couplé à l'accélérateur SdS, cet outil permet d'obtenir des résultats bien plus efficaces que ceux obtenus par des critères plus standards. Cela peut s'expliquer par la bonne qualité (toutefois toujours imparfaite) de l'information contenue dans cet indicateur. L'accélérateur SdS permet alors de réduire, de manière significative, le nombre de calculs complets de fonds propres économiques à un an. Cependant, il possède aussi certains défauts. Premièrement, il n'exploite pas totalement la forte corrélation entre les fonds propres et la *VAN forward*, dans les queues de distribution. De plus, sa performance dépend du choix de M . Bien que notre étude statistique puisse aider à faire ce choix, initialiser M reste relativement subjectif et peut fortement impacter la vitesse de convergence.

De plus, une fois ce paramètre défini, l'algorithme explore la liste des scénarios de manière déterministe, jusqu'à ce que la convergence soit atteinte. Un tirage aléatoire, réalisé en exploitant les propriétés de la *VAN forward*, pourrait s'avérer un moyen efficace d'optimiser la vitesse de l'algorithme. Dans cette optique, les approches Bayésiennes se révèlent souvent pertinentes. Les statistiques Bayésiennes se basent sur un *a priori* nécessitant d'être défini. Les études précédentes, concernant les caractéristiques de la *VAN forward*, permettent d'intuiter une information précise afin de définir cet *a priori*.

L'algorithme du recuit simulé semble une alternative particulièrement pertinente à l'accélérateur SdS. Originaire d'une pratique issue de l'industrie de la métallurgie, cette méthodologie permet de minimiser une fonction de coût.

4.1 Optimisation discrète

Dans notre cadre, cette fonction de coût est,

$$FP_1 = \psi({}^fVAN_1),$$

où fVAN_1 est la *VAN forward* en $t = 1$.

La Figure 12 représente cette fonction dans la queue et sur l'ensemble de la distribution des fonds propres. Les conditions nécessaires à l'application de l'algorithme du recuit simulé sont remplies, car la fonction présente de nombreux minima locaux, dus à la corrélation imparfaite des rangs entre les fonds propres et la *VAN forward*.

Tout d'abord, on remarque qu'ici la fonction à minimiser ne peut être évaluée qu'en un nombre fini de points, correspondant aux P scénarios primaires, ou encore aux P *VAN forward* calculées. Le seul *input* est donc le vecteur des P *VAN forward*, trié par ordre croissant. On le note

$$V = \left({}^fVAN_1^{(1)}, \dots, {}^fVAN_1^{(P)} \right),$$

avec $P = 5000$.

L'utilisation d'un algorithme spécifique pour la minimisation de cette fonction est justifiée par le coût lié à son évaluation. En effet, le but est d'estimer la quantité $\psi({}^fVAN_1^{(i)})$ pour un nombre de *VAN forward* aussi faible que possible.

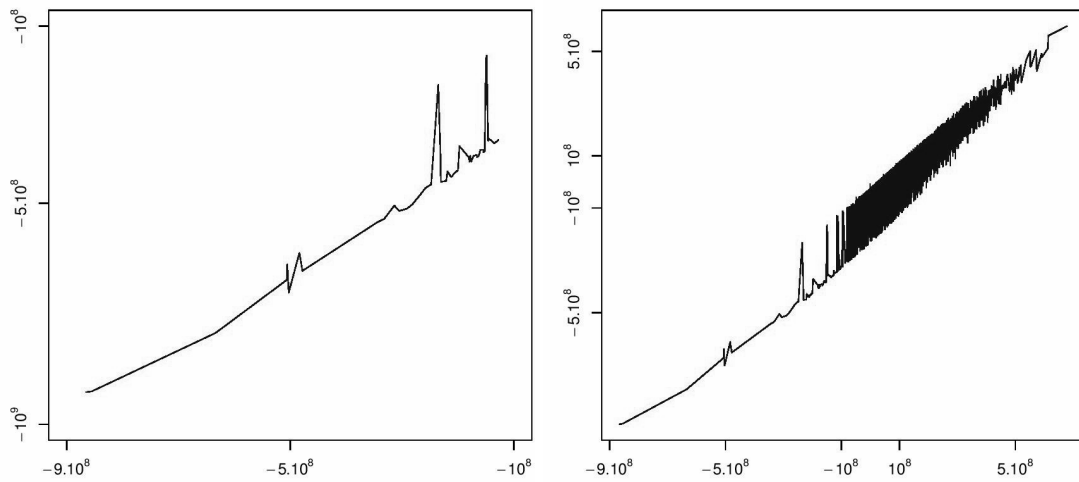


FIGURE 12 – Fonds propres en fonction de la *VAN forward* sur les domaines $[[1, 50]]$ (à gauche) et $[[1, 5000]]$ (à droite).

Dans le cas discret, le bruitage de la variable explicative $fVAN_1$ ne peut pas prendre la forme d'une loi de probabilité continue. Il s'agira, au contraire, de remplacer un bruitage aléatoire continu par le passage d'une *VAN* à une autre au sein du vecteur V . Pour cela, on procède à un *bruitage sur les rangs* des *VAN forward*, et non directement sur leur valeur.

La loi de bruitage est donc discrète, et son choix dépend de la forme attendue des trajectoires d'exploration. Dans le cas du recuit simulé, on souhaite explorer les *VAN forward* voisines avec la plus grande probabilité, c'est à dire de manière à ce que les sauts les plus probables sont d'amplitude faible. Une loi discrète présentant cette caractéristique est la loi binomiale négative $\mathcal{BN}(r, p)$.

La Figure 13 illustre le principe du bruitage sur les 10 points correspondant aux *VAN forward* les plus faibles. Les chiffres en bleu sont les rangs des fonds propres associés. Le bruitage est caractérisé par le passage, dans cet exemple, de la *VAN forward* de rang 3 à celle de rang 6. Il a pour amplitude $R = 3$ et permet de passer des fonds propres de rang 3 aux fonds propres de rang 4.

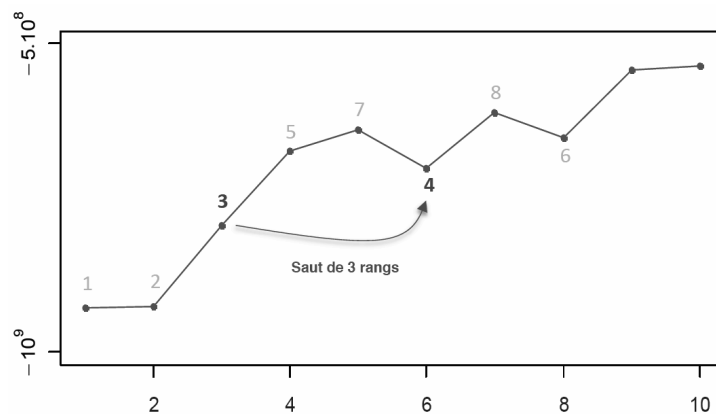


FIGURE 13 – Fonds propres en fonction des 10 premiers rangs de la *VAN forward*.

La variable d'amplitude du saut, permettant à l'algorithme de se déplacer entre deux rangs, constitue l'*a priori* choisi pour la mise en œuvre du recuit simulé.

4.2 Calcul d'un quantile par recuit simulé

L'application d'un tel algorithme au calcul du SCR n'est pas immédiate, dans la mesure où la valeur recherchée est un quantile et non un simple minimum. Cependant, il est possible d'adapter le problème de recherche du quantile à un problème de minimisation standard compatible avec le recuit simulé.

Le principe de la méthode est le suivant,

1. la minimisation de la fonction ψ par recuit simulé sur le vecteur $V = ({}^fVAN_1^{(i)})_{i \in \llbracket 1, P \rrbracket}$ donne :

$$FP_1^{l_1} = \operatorname{argmin}_{x \in V} \psi(x) ;$$

2. le vecteur V est mis à jour en supprimant la *VAN forward* correspondant aux fonds propres $FP_1^{l_1}$, c'est-à-dire, aux fonds propres les plus faibles : on suppose ici que l'algorithme a bien convergé vers le minimum global sur V ;
3. si le recuit simulé a été exécuté 25 fois, alors on arrête, sinon, on retourne à l'étape 1 afin de lancer une nouvelle minimisation de la fonction ψ .

Plus simplement, chercher la valeur de rang 25 dans un vecteur de fonds propres revient à appliquer 25 recuits simulés successifs en supprimant, à l'issue de chacun des algorithmes, la valeur la plus faible trouvée. La Figure 14 illustre le principe de combinaison de recuits simulés consécutifs.

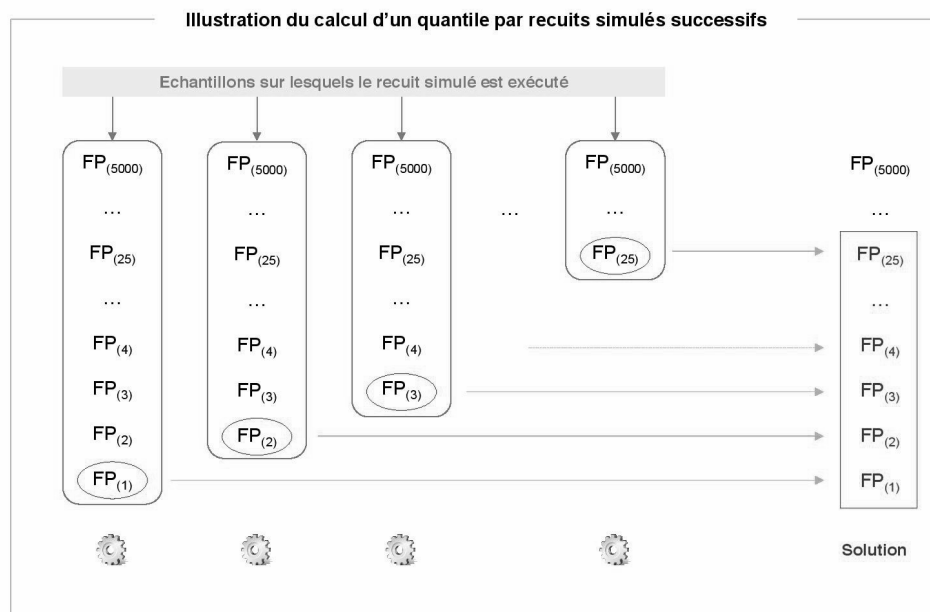


FIGURE 14 – Illustration du calcul d'un quantile par recuits simulés successifs.

Le quantile du vecteur de fonds propres est obtenu par application de l'algorithme 1.

4.3 Résultats

L'algorithme 1 est appliqué au vecteur des *VAN forward* issues des données Milliman, avec les paramètres suivants,

- les paramètres du bruitage de loi binomiale négative sont $r = 1$ et $p = 60 \%$;

Algorithm 1 Algorithme du recuit simulé appliqué au calcul du quantile

Initialiser le rang de départ dans le domaine de définition $r_0 = 1$.

Initialiser la température T_0 .

Initialiser le vecteur des *VAN forward* $V = ({}^fVAN_1^{(1)}, \dots, {}^fVAN_1^{(P)})$

Initialiser le compteur de calcul du nombre de fonds propres $n_{FP} = 0$.

for $k \in \llbracket 1, 25 \rrbracket$ **do**

for $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ **do**

 Modifier aléatoirement r_{i-1} pour obtenir $r_{new} = r_{i-1} + R_i$.

if les fonds propres $\psi({}^fVAN_1^{(r_{new})})$ sont inconnus **then**

 Calculer les fonds propres.

 Mettre à jour le compteur : $n_{FP} = n_{FP} + 1$.

end if

 Calculer $\Delta FP_1 = \psi({}^fVAN_1^{(r_{new})}) - \psi({}^fVAN_1^{(r_{i-1})})$.

 Mettre à jour la température $T_i = \gamma T_{i-1}$.

if $\Delta FP \leq 0$ **then**

$r_i = r_{new}$

else

 Tirer une variable aléatoire $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$.

if $u \leq \pi(T_i, \Delta FP)$ **then**

$r_i = r_{new}$

else

$r_i = r_{i-1}$

end if

end if

end for

 Enregistrement de la solution trouvée : FP_{l_k} .

 Suppression dans V de la *VAN forward* correspondant à FP_{l_k} .

end for

Le quantile à 0,5 % des fonds propres correspond à $FP_{l_{25}}$.

- la température initiale est $T_0 = 2 \cdot 10^8$ et $\gamma = 99 \%$;
- l'algorithme s'arrête après $M = 2000$ itérations.

Il fournit le nombre n_{FP} de fonds propres qui ont dû être calculés pour obtenir les 25 plus faibles valeurs de fonds propres.

La procédure est répétée $N = 1000$ fois, de sorte que l'on dispose d'autant de valeurs pour n_{FP} . On trouve que l'algorithme conduit, en moyenne, au calcul de $\bar{n}_{FP} = 62$ fonds propres. Cela représente un gain moyen de 13 par rapport à l'accélérateur SdS appliqué avec $M = 25$.

De façon à appréhender l'influence du paramètre p sur le coût algorithmique du recuit simulé n_{FP} , on réitère la procédure 100 fois pour différentes valeurs de p ,

$$p \in \{70\%, 50\%, 30\%, 10\%\}.$$

Le critère d'arrêt reste le même. La Figure 15 représente la moyenne sur les 100 simulations du nombre de fonds propres calculé, \bar{n}_{FP} , en fonction de p . Elle confirme l'intuition selon laquelle un p faible entraîne un coût algorithmique conséquent. Il est important de remarquer que l'efficacité de l'algorithme dépend fortement du choix de p .

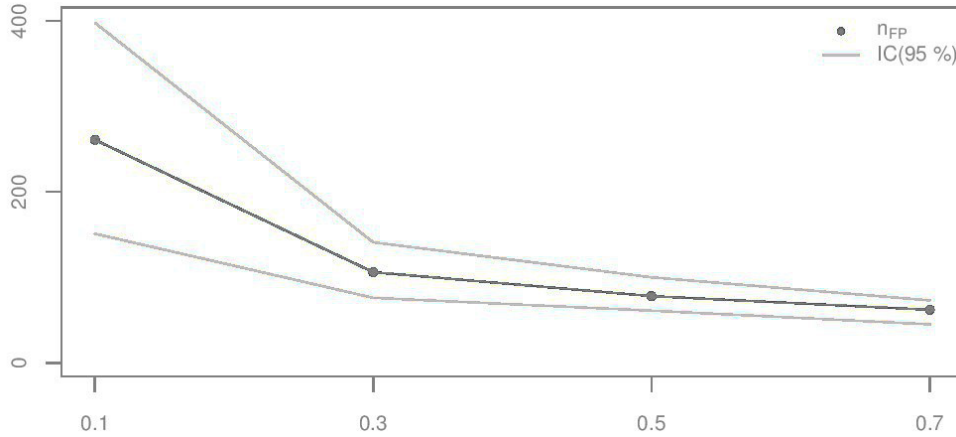


FIGURE 15 – Influence du choix de p sur le nombre moyen de fonds propres calculés \bar{n}_{FP} .

Remarque 4.1 Pour les valeurs de p testées ici, l'algorithme converge pour la quasi-totalité des simulations (plus de 99 %). En revanche, pour $p > 70 \%$, il reste souvent piégé, car l'exploration n'est pas assez profonde. Un compromis doit être trouvé entre la minimisation de n_{FP} et la fiabilité de la convergence. Dans notre cas, la valeur optimale est $p = 70 \%$.

De façon à comparer les performances du recuit simulé pour les différentes normes précédemment étudiées, on applique l'algorithme en remplaçant successivement le vecteur des *VAN forward* par celui des normes standard, sensibilité et sensibilité asymétrique. Pour garantir la comparabilité des simulations, les paramètres de température et le critère d'arrêt sont gardés constants. En revanche, il n'est pas pertinent de prendre un p identique à toutes les normes. À chacune d'entre elles est associée une valeur de p optimale, garantissant à la fois une convergence fiable et un coût raisonnable.

On lance ensuite les trois procédures standard, sensibilité et sensibilité asymétrique, $N = 1000$ fois chacune. Les valeurs de p , du nombre moyen \bar{n}_{FP} de fonds propres calculés et de leur intervalle de confiance à 95 % sont renseignées dans la table 1. L'intervalle de confiance est défini à partir des quantiles empiriques à 2,5 % et 97,5 % de l'échantillon des n_{FP} . La table fait également apparaître les taux de réussite, définis comme les proportions de recuits simulés ayant convergé vers les bonnes valeurs de fonds propres.

Norme	p	n_{FP} moyen	IC _{95%}	Taux de réussite
Norme standard	2 %	927	[600, 1 459]	60,3 %
Norme sensibilité	5 %	425	[283, 660]	95,8 %
Norme sensibilité asymétrique	10 %	242	[166, 351]	99,5 %
VAN <i>forward</i>	70 %	62	[44, 76]	99,7 %

TABLE 1 – Nombre de fonds propres calculés au cours de l’algorithme du recuit simulé, pour différentes normes.

Sans surprise, \bar{n}_{FP} augmente avec la qualité prédictive de la norme, et diminue avec p . On remarque également qu’à budget d’itérations M fixé, la convergence est moins bonne pour la norme standard (60,3 %), que pour la *VAN forward* (99,7 %). On constate également que la largeur des intervalles de confiance augmente lorsque le pouvoir prédictif de la norme diminue. En pratique, plus l’exploration est profonde (p faible), plus le nombre de simulations doit être grand pour permettre la bonne convergence de l’algorithme.

À titre d’illustration, la Figure 16 représente l’évolution de la variable n_{FP} au cours des itérations, et ce pour les quatre normes. Ce résultat est obtenu pour une simulation, et on constate que les n_{FP} sont bien compris dans leurs intervalles de confiance respectifs, présentés dans la table 1. Plus le pouvoir prédictif de la norme est grand, plus n_{FP} se stabilise rapidement, et sur une valeur faible.

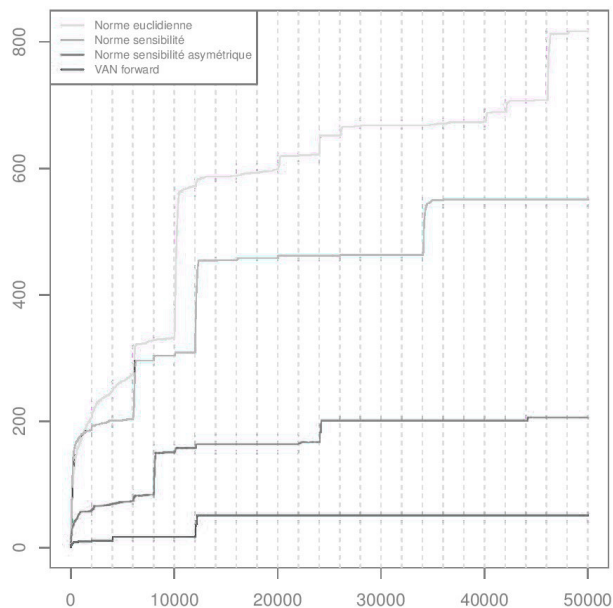


FIGURE 16 – Évolution du nombre de fonds propres calculés n_{FP} au cours des itérations pour le recuit simulé en utilisant la *VAN forward*, la norme sensibilité asymétrique, la norme sensibilité ou la norme standard.

5 Comparaison à l’accélérateur SdS

Si l’on compare les valeurs de \bar{n}_{FP} aux résultats obtenus avec l’accélérateur SdS (100 calculs de fonds propres, en prenant $M = 50$), il apparaît que le recuit simulé est plus performant dans le cas de la *VAN forward*, mais pas pour les autres normes.

Les sauts importants que l’on observe pour certaines normes obligent à choisir une valeur de p assez faible pour que l’exploration soit profonde. Pour la norme standard, par exemple, la distribution du bruitage doit être telle qu’un saut de 122 se produise avec une probabilité non négligeable. Le choix d’un p faible

est donc nécessaire pour converger vers les bonnes valeurs de fonds propres. Dans notre exemple, $p = 2\%$, et $\mathbb{E}[|R|] = 50$. Par conséquent, le nombre de fonds propres calculés à chaque étape de l'algorithme est important.

La faiblesse du recuit simulé, par rapport à l'accélérateur SdS, vient du fait que les fonds propres doivent être découverts dans un ordre précis (des plus faibles aux plus élevés), ce qui nécessite des sauts de rangs plus conséquents que dans le cas où l'ordre n'a pas d'importance (cas de l'accélérateur SdS). Cela n'a que peu d'impact avec la *VAN forward*, puisque les rangs sont presque parfaitement corrélés. En revanche, il est évident que le recuit simulé sera moins adapté pour des normes peu puissantes telles que la norme standard ou la norme sensibilité. On peut d'ailleurs remarquer que, malgré les bonnes propriétés de la norme sensibilité asymétrique, le nombre moyen de fonds propres calculés est de 242, contre 62 pour la *VAN forward*.

L'objectif est de localiser la 25^{ième} pire valeur de FP_1 , et non pas de minimiser la fonction ψ au sens propre. Toutefois, le problème peut être résolu en itérant 25 algorithmes consécutifs. À chaque étape, la plus faible valeur est supprimée de l'échantillon de manière à ce que les 25 pires scénarios soient finalement isolés. Le quantile empirique à 0.5% est alors la 25^{ième} pire valeur, c'est à dire le résultat de la dernière étape simulateur.

Combiné à la *VAN forward*, cet algorithme est très performant, et même supérieur à l'accélérateur SdS. Toutefois il serait moins efficace utilisé avec d'autres normes car l'algorithme requiert une forte corrélation entre le critère et les fonds propres. L'avantage principal de l'accélérateur SdS est qu'il réunit plus aisément les scénarios proches entre eux. Cependant ce processus simulateur est particulièrement bien adapté à notre problème, où il est possible de le combiner à la connaissance d'un indicateur d'adversité efficace, la *VAN forward*.

6 Conclusion

La mise en place d'un modèle interne (complet ou partiel), dans le cadre de Solvabilité II, se heurte à de nombreuses difficultés opérationnelles. En particulier, les simulations imbriquées, théoriquement adaptées pour le calcul du *solvency capital requirement* (SCR), impliquent une complexité algorithmique particulièrement lourde. Des méthodes alternatives ont été développées pour réduire les temps de calcul et améliorer l'efficacité opérationnelle.

L'accélérateur SdS, développé par Devineau et Loisel, repose sur le constat que la détermination du SCR ne requiert la connaissance que du quantile à 0,5 % de la distribution des fonds propres à 1 an. Son fonctionnement est fondé sur l'utilisation d'une norme pour prédire l'adversité des différents scénarios primaires et leur appartenance à ce quantile critique. L'objet de cet article était d'étudier la pertinence de la *VAN forward* et son pouvoir prédictif concernant l'adversité d'un scénario donné.

La *VAN forward* est le résultat d'une projection entièrement déterministe, dans laquelle l'ensemble des variables (taux d'intérêt et indice action) évoluent suivant leur taux *forward*. Ce concept de *forward* est déjà présent dans les problématiques de valorisation de portefeuille, avec la composante "certainty equivalent" dans la *Market Consistent Embedded Value*. Il apparaît comme la meilleure façon de prédire l'évolution d'une variable à partir d'une unique simulation déterministe, et possède un caractère "central" particulièrement intéressant dans le cadre de notre étude. Les études statistiques développées dans cet article ont montré que la *VAN forward* est effectivement centrale, car comprise entre les quantiles 50 % et 75 % de la distribution des *VAN* (cas spécifique de notre portefeuille). Ce résultat traduit une excellente corrélation des rangs entre fonds propres et *VAN forward*, confirmée par des études sur les probabilités de croisement dans les queues, bien plus faibles que pour une *VAN* quelconque. Le choix de cette *VAN* particulière s'avère donc pertinent.

La forte corrélation de la *VAN forward* avec les fonds propres en fait un candidat idéal pour la prévision de l'adversité des scénarios. Son couplage avec l'accélérateur SdS a donc été comparé à l'utilisation

d'autres mesures d'adversité (normes standard et sensibilité). La vitesse de convergence de l'algorithme est très élevée, et représente des gains de facteurs 3 et 2 par rapport aux normes standard et sensibilité respectivement. La qualité prédictive de la *VAN forward* provient de la quantité d'informations contenue, puisqu'elle intègre l'impacts des scénarios primaires sur les modèles ALM, ainsi qu'une partie des effets croisés entre risques. Sa grande force est qu'elle représente un indicateur complet, mais aussi beaucoup plus simple à manipuler qu'une norme lorsque la dimension des facteurs de risque devient grande (ce qui est le cas en pratique).

La dernière partie de l'article a été consacrée à l'élaboration d'une méthode alternative à l'accélérateur SdS, mettant en œuvre la *VAN forward*. Les méthodes d'optimisation bayésiennes trouvent leur application dans des domaines très variés, et s'avèrent souvent efficaces dans la résolution de problèmes complexes. L'adaptation du recuit simulé au problème de la recherche de quantile a donné des résultats très satisfaisants, et a conduit à un coût algorithmique inférieur à celui de l'accélérateur SdS. La forte corrélation entre fonds propres et *VAN forward* rend cette méthode très adaptée, car l'exploration des solutions reste limitée dans l'espace. L'algorithme heuristique développé dans cet article a pourtant l'inconvénient d'être sensible au choix des paramètres, ce qui peut poser des problèmes dans la pratique.

La *VAN forward* est donc un indicateur d'adversité d'une grande puissance, car, premièrement, elle combine les informations primaires et secondaires, ainsi qu'une partie des effets croisés, contrairement aux normes usuelles. Deuxièmement, elle est de dimension 1, et est donc simple à appréhender et à manipuler. Troisièmement, elle est fortement corrélée avec les fonds propres, ce qui lui confère un pouvoir prédictif très supérieur à celui des autres mesures d'adversité.

Il convient de noter, toutefois, que si le cadre de notre étude, considérant uniquement des risques de niveau, est fortement adapté à l'utilisation de cet outil, la prise en compte de risques de volatilité pourrait fournir des résultats relativement peu probants du fait que ces risques ne peuvent être pris en compte dans les scénarios *forwards*, déterministes. Malgré ce point la *VAN forward* s'adapte à un large panel d'études ALM complexes pouvant induire de futurs développements. Ces études vont du calcul de capital économique à des mises en œuvre de type ORSA (en adaptant son calcul à un horizon supérieur à un an) où à des études de sensibilité des fonds propres économiques, adaptées aux problématiques de gestion des risques internes.

Références

- M. Abramowitz. *Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, Incorporated, 1974.
- ACPR. Orientations nationales complémentaires aux spécifications techniques pour l'exercice 2013 de préparation à Solvabilité II. *Autorité de contrôle prudentiel et de résolution*, 2013.
- B. C. Arnold, N. Balakrishnan, and H. N. Nagaraja. *A First Course in Order Statistics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.
- L. Bachelier. Théorie de la spéculation. *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1900.
- N. Balakrishnan and A. Stepanov. A note on the number of observations near an order statistic. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2005.
- D. Bauer, D. Bergmann, and A. Reuss. Solvency II and nested simulations - a Least-Squares Monte Carlo approach. *Ulm University, Georgia State University, IFA Ulm*, 2010.
- D. Bergmann. *Nested simulations in life insurance*. Ulm IFA, 2011.
- P. Bogaert. *Probabilités pour scientifiques et ingénieurs : Introduction au calcul des probabilités*. De Boeck, 2005.
- F. Bonnin, F. Planchet, and M. Juillard. Best estimate calculations of savings contracts by closed formulas. *ISFA - Laboratoire SAF*, 2013.
- M. Broadie, Y. Du, and C. C. Moallemi. Efficient risk estimation via nested sequential simulation. *Management Science*, 2011.

- S. Collier. Modélisation ALM d'un portefeuille de rentes viagères. *Mémoire d'actuariat ISFA - Sogécap*, 2013.
- European Commission. QIS 5 Technical Specifications. *European Insurance and Occupational Authority*, 2010.
- H. A. David and H. N. Nagaraja. *Order Statistics, Third Edition*. Wiley, 2003.
- S. Detroulleau and S. Mouret. Modèle ALM : apport de la logique floue dans la modélisation des comportements. *Mémoire d'actuariat ENSAE ParisTech - Mazars*, 2013.
- L. Devineau. La méthode des simulations dans les simulations. *Slides Milliman, Séminaire Sépia Mise en œuvre d'un modèle actif / passif en assurance-vie : quelles techniques ?*, 2010.
- L. Devineau and M. Chauvigny. Replicating portfolios : calibration techniques for the calculation of the Solvency II economic capital. *Bulletin Français d'Actuariat*, 2011.
- L. Devineau and S. Loisel. Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des "simulations dans les simulations" pour le calcul du capital économique Solvabilité II. *Bulletin Français d'Actuariat*, 2009a.
- L. Devineau and S. Loisel. Risk aggregation in solvency ii : How to converge the approaches of the internal models and those of the standard formula ? *Bulletin Français d'Actuariat*, 2009b.
- EIOPA. Own risk and solvency assessment (ORSA). 2008.
- CFO Forum. Market consistent embedded value principles. 2009.
- J. B. Garnier and A. C. Martial. Optimisation du calcul du capital économique d'une compagnie d'assurance vie par la méthode des simulations dans les simulations. *Mémoire d'actuariat ENSAE ParisTech - Milliman*, 2013.
- P. Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, 2004.
- M. B. Gordy and S. Juneja. Nested simulation in portfolio risk measurement. *Federal Reserve Board*, 2008.
- Q. Guibert, F. Planchet, and M. Juillard. Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes. *Bulletin Français d'Actuariat*, 2010.
- E. Haguët. Mise en place d'indicateurs de suivi du risque dans un cadre d'ORSA Epargne. *Mémoire d'actuariat ENSAE ParisTech - Optimind Winter*, 2013.
- W. K. Hastings. Monte-Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika* 57, 1970.
- M. Hörig and M. Leitschkis. Solvency II proxy modelling via Least Squares Monte Carlo. *Milliman Research Report*, 2012.
- D.S. Johnson, C.R. Aragon, L.A. McGeoch, and C. Schevon. Optimization by simulated annealing : An experimental evaluation : Part I, Graph partitioning. *Operations Research*, 1989.
- D.S. Johnson, C.R. Aragon, L.A. McGeoch, and C. Schevon. Optimization by simulated annealing : An experimental evaluation : Part II, Graph coloring and number partitioning. *Operations Research*, 1991.
- S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt, and M.P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 1983.
- A. Koursaris. A least squares Monte Carlo approach to liability proxy modelling and capital calculation. *Barrie & Hibbert*, 2011a.
- A. Koursaris. A comparison between curve fitting and least squares Monte Carlo techniques. *Barrie & Hibbert*, 2011b.
- A. Koursaris. Improving capital approximation using the curve-fitting approach. *Barrie & Hibbert*, 2011c.

- KPMG. Exemple de mise en place d'un processus ORSA. *Journées de l'Institut des Actuaire*s, 2012.
- F. le Vallois, A. Tosetti, P. Palsky, and B. Paris. *Gestion actif passif en assurance vie : Réglementation, outils, méthodes*. Economica, 2003.
- F. A. Longstaff and E. S. Schwartz. Valuing american options by simulation : A simple least-squares approach. *The Review of Financial Studies*, 2001.
- O. Nteukam and F. Planchet. Stochastic evaluation of life insurance contracts : Model point on asset trajectories and measurement of the error related to aggregation. *Insurance : Mathematics and Economics*, 2012.
- R. J. Serfling. *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. Wiley-Blackwell, 2002.
- S. Černý. Thermodynamical approach to the traveling salesman problem : An efficient simulation algorithm. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1985.
- J. Vedani and L. Devineau. Solvency assessment within the ORSA framework : Issues and quantitative methodologies. *Bulletin Français d'Actuariat*, 2013.
- J. Vedani and F. Ramaharobandro. Continuous compliance : a proxy-based monitoring framework. *Laboratoire de Sciences Actuarielle et Financière*, 2013.
- L. Wasserman. *All of Statistics : A Concise Course in Statistical Inference*. Springer, 2004.
- Optimind Winter. Solvabilité II et les modèles internes : le stochastique au service des modèles internes. *Les dossiers techniques d'information Optimind*, 2007.