



HAL
open science

Faisceaux pervers entiers d'Harris-Taylor

Pascal Boyer

► **To cite this version:**

| Pascal Boyer. Faisceaux pervers entiers d'Harris-Taylor. 2015. hal-01204663v1

HAL Id: hal-01204663

<https://hal.science/hal-01204663v1>

Preprint submitted on 24 Sep 2015 (v1), last revised 29 Mar 2016 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

FAISCEAUX PERVERS ENTIERS D’HARRIS-TAYLOR

par

Boyer Pascal

Résumé. — Dans [9] les auteurs définissent certains $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -systèmes locaux dits d’Harris-Taylor sur les strates ouvertes de Newton d’une variété de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor en une place v de son corps reflex F . Dans [3] nous avons explicité l’extension intermédiaire d’un tel système local et donné ses liens avec le faisceau pervers des cycles évanescents en v de la variété de Shimura. Sur $\overline{\mathbb{Z}}_l$, dans [5], nous avons décrit la p -extension intermédiaire d’un tel système local et montré que les germes de ses faisceaux de cohomologies étaient sans torsion. Le but de ce papier est essentiellement d’expliciter la $p+$ -extension intermédiaire des systèmes locaux d’Harris-Taylor en utilisant la combinatoire, donnée dans [4], de la réduction modulo l d’une représentation de Steinberg généralisée. On donne en outre quelques informations sur les réseaux associés aux filtrations de stratification.

Abstract (Entire perverse sheaves of Harris-Taylor). — In [9], the $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -Harris-Taylor local systems are defined over the open Newton strata of a Kottwitz-Harris-Taylor Shimura variety. The intermediate extension of these local systems is described in [3] and linked with the perverse sheaf of vanishing cycles of the Shimura variety. On $\overline{\mathbb{Z}}_l$, we described in [5], the p -intermediate extension of these local systems and proved that the germs of its cohomology sheaves are free. The principal aim of this paper is to describe the $p+$ -intermediate extension of the Harris-Taylor local system using the combinatorics of [4] on the reduction modulo l of a generalized Steinberg representation. Moreover we give some information about the lattices given by the filtration of stratification.

Table des matières

Introduction.....	2
1. Rappels sur les représentations de $GL_n(K)$	3
1.1. Notations.....	3
1.2. Réduction modulo l	4

Classification mathématique par sujets (2010). — 11F70, 11F80, 11F85, 11G18, 20C08.

Mots clefs. — Variétés de Shimura, cohomologie de torsion, idéal maximal de l’algèbre de Hecke, localisation de la cohomologie, représentation galoisienne.

L’auteur remercie l’ANR pour son soutien dans le cadre du projet PerCoLaTor 14-CE25.

1.3. Réseaux d'induction.....	6
1.4. Complexes d'induction des représentations de Steinberg.....	7
2. Faisceaux pervers d'Harris-Taylor.....	8
2.1. Représentations de $D_{K,d}^\times$	8
2.2. Rappels sur les variétés de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor.....	11
2.3. Filtrations de stratification.....	14
2.4. Extensions p et $p+$ intermédiaires.....	15
3. Retour sur le cas supercuspidal modulo l	20
3.1. Rappels sur le faisceau pervers des cycles évanescents.....	20
3.2. Décomposition supercuspidale.....	21
3.3. Preuve du théorème 2.4.1.....	24
4. Réseaux.....	27
4.1. Construction.....	27
4.2. Cas supercuspidal.....	28
4.3. Cas général.....	30
4.4. Réseaux dans la cohomologie des espaces de Lubin-Tate.....	31
Références.....	33

Introduction

Étant donné un groupe de similitudes G/\mathbb{Q} de signatures $(1, d-1) \times (0, d) \times \cdots \times (0, d)$, on note $X_{\mathcal{I}} = (X_I)_{I \in \mathcal{I}}$ la tour de variétés de Shimura, dite de Kottwitz-Harris-Taylor, associée et définie sur son corps reflex F . On fixe une place v de F au dessus d'un premier p de \mathbb{Q} décomposé dans F , tel que $G(\mathbb{Q}_p)$ est de la forme $\mathbb{Q}_p^\times \times GL_d(F_v) \times \prod_{i=2}^r B_{v_i}^\times$ où $v = v_1, v_2, \dots, v_r$ sont les places de F au dessus de p et où pour $i = 2, \dots, r$, B_{v_i} est un algèbre à division. La variété de Shimura $X_{\mathcal{I}}$ possède alors un modèle sur l'anneau des entiers \mathcal{O}_v du complété F_v du localisé de F en v .

La fibre spéciale géométrique $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}$ admet une stratification de Newton $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}^{\geq h}$ pour $h = 1, \dots, d$, de pure dimension $d-h$. Pour l un nombre premier distinct de p , dans [9], Harris et Taylor construisent des $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -systèmes locaux sur chacune des strates ouvertes $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}^{\leq h}$ associés à une représentation irréductible des inversibles $D_{v,h}^\times$ de l'algèbre à division centrale sur F_v et d'invariant $\frac{1}{h}$. Une telle représentation est, via la correspondance de Jacquet-Langlands, associée à une représentation de Steinberg généralisée $St_t(\pi_v)$ où π_v est une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ avec $h = tg$. On note alors $HT(\pi_v, t)$ le système local de Harris-Taylor associé.

Le thème de ce travail concerne les extensions intermédiaires associée à $HT(\pi_v, t)$. Sur $\overline{\mathbb{Z}}_l$, on dispose de deux t -structures notées p et $p+$ échangées par la dualité de Grothendieck-Verdier et donc de deux notions d'extensions intermédiaires. Dans [5], nous avons montré que pour tout point géométrique $i_z : z \hookrightarrow X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}$, les faisceaux de cohomologies du tiré en arrière par i_z^* de la p -extension intermédiaire de $HT(\pi_v, t)$ étaient sans torsion.

On se propose à présent d'étudier les faisceaux de cohomologies du i_z^* de la p -extension intermédiaire de $HT(\pi_v, t)$, ou ce qui revient au même ceux du $i_z^!$ de la p -extension intermédiaire. L'énoncé fait intervenir la réduction modulo l de la représentation de Steinberg $St_t(\pi_v)$. Rappelons tout d'abord que la réduction modulo l d'une représentation irréductible cuspidale π_v est irréductible et cuspidale mais pas nécessairement supercuspidale. Notre premier résultat concerne ces π_v dont la réduction modulo l est supercuspidale.

Théorème. — *Si la réduction modulo l de π_v est supercuspidale alors les p et p -extensions intermédiaires d'un réseau stable de $HT(\pi_v, t)$ sont égales.*

Dans le cas général, la différence entre les p et p -extensions intermédiaires se décrit explicitement en termes combinatoires sur les congruences entre représentations. À titre d'exemple, nous décrivons la l -torsion de cette différence en utilisant la combinatoire donnée dans [4] sur la réduction modulo l d'une représentation de Steinberg généralisée $St_t(\pi_v)$, cf. le corollaire 2.4.10.

Enfin au §4, on donne des informations sur les réseaux des systèmes locaux d'Harris-Taylor qui apparaissent dans la filtration de stratification du faisceau pervers des cycles évanescents. Par application du théorème de comparaison de Berkovich, on obtient une description, partielle, des réseaux de la cohomologie des espaces de Lubin-Tate à l'aide des réseaux d'induction construit dans [4].

1. Rappels sur les représentations de $GL_n(K)$

1.1. Notations. — Soit K un corps local non archimédien dont le corps résiduel est de cardinal q une puissance de p . On fixe un nombre premier l distinct de p . Les représentations considérées sont à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ ou $\overline{\mathbb{F}}_l$.

1.1.1. Notation. — Une racine carrée $q^{\frac{1}{2}}$ de q dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ étant fixée, pour $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, nous noterons $\pi\{k\}$ la représentation tordue de π de sorte que l'action d'un élément $g \in GL_n(K)$ est donnée par $\pi(g)\nu(\det g)^k$ avec $\nu : \alpha \in K^\times \mapsto q^{-\text{val}(\alpha)}$.

1.1.2. Notation. — Pour $P = MN$ un parabolique de GL_n de Lévi M et de radical unipotent N , on note $\delta_P : P(K) \rightarrow R^\times$ l'application définie par

$$\delta_P(h) = |\det(\text{ad}(h)|_{\text{Lie}N})|^{-1}.$$

Comme nous n'utilisons que les paraboliqes standard, pour une partition $\underline{r} = (0 < r_1 < r_2 < \dots < r_k = d)$ de d , on note $P_{\underline{r}}$ le sous-groupe parabolique de GL_d standard associé au sous-groupe de Levi

$$GL_{r_1}(K) \times GL_{r_2-r_1}(K) \times \dots \times GL_{r_k-r_{k-1}}(K)$$

et $N_{\underline{r}}$ son radical unipotent.

1.1.3. Notation. — Pour π_1 et π_2 des représentations de respectivement $GL_{n_1}(K)$ et $GL_{n_2}(K)$, on désignera $\pi_1 \times \pi_2$ comme l'induite parabolique normalisée

$$\pi_1 \times \pi_2 := \text{ind}_{P_{n_1, n_1+n_2}(K)}^{GL_{n_1+n_2}(K)} \pi_1\{n_2/2\} \otimes \pi_2\{-n_1/2\}.$$

Dans le cas où π_1 et π_2 sont des représentations de $GL_{t_1g}(K)$ et $GL_{t_2g}(K)$, on notera

$$\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2 := \pi_1\{-t_2/2\} \times \pi_2\{t_1/2\},$$

l'entier g étant sous-entendu.

Remarque : les symboles \times et $\overrightarrow{\times}$ sont associatifs, le deuxième étant introduit afin de minimiser l'écriture des torsions.

1.1.4. Définition. — Une représentation irréductible π de $GL_n(K)$ est dite *cuspidale* (resp. *supercuspidale*) si elle n'est pas un sous-quotient (resp. un quotient) d'une induite parabolique propre.

Remarque : contrairement au cas de $\overline{\mathbb{F}}_l$, une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation cuspidale est supercuspidale.

1.1.5. Notation. — Pour $1 \leq g$, on notera $\text{Scusp}_K(g)$ l'ensemble des classes d'équivalences des $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductibles supercuspidales de $GL_g(K)$.

1.1.6. Notation. — Soient g un diviseur de $d = sg$ et π une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(K)$. L'induite parabolique

$$\pi\left\{\frac{1-s}{2}\right\} \times \pi\left\{\frac{3-s}{2}\right\} \times \cdots \times \pi\left\{\frac{s-3}{2}\right\} \times \pi\left\{\frac{s-1}{2}\right\}$$

possède

- un unique quotient irréductible noté $\text{St}_s(\pi)$; c'est une représentation de Steinberg généralisée.
- une unique sous-représentation irréductible notée $\text{Speh}_s(\pi)$; c'est une représentation de Speh généralisée.

Remarque : avec les notations précédentes, l'induite ci-dessus s'écrit plus simplement sous la forme $\pi \overrightarrow{\times} \cdots \overrightarrow{\times} \pi$.

1.2. Réduction modulo l . — On note $e_l(q)$ l'ordre de l'image de q dans \mathbb{F}_l^\times .

1.2.1. Proposition. — (cf. [11] III.5.10) La réduction modulo l d'une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale entière de $GL_g(K)$ est irréductible cuspidale.

1.2.2. Proposition. — ([8] §2.2.3) Soit π une représentation irréductible cuspidale entière dont la réduction modulo l est supercuspidale. Pour tout $s \geq 1$, la réduction modulo l de $\text{Speh}_s(\pi)$ est irréductible.

1.2.3. Définition. — Les représentations irréductibles de la proposition précédentes sont appelées des superSpeh.

1.2.4. Notation. — On notera $\epsilon(\varrho)$ le cardinal de la droite de Zelevinski de ϱ , i.e. de l'ensemble des classes d'équivalence $\{\varrho\{i\} / i \in \mathbb{Z}\}$. On pose suivant [13] p.51,

$$m(\varrho) = \begin{cases} \epsilon(\varrho), & \text{si } \epsilon(\varrho) > 1; \\ l, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque : $\epsilon(\varrho)$ est un diviseur de $e_l(q)$.

1.2.5. Définition. — Étant donné un multi-ensemble $\underline{s} = \{\rho_1^{n_1}, \dots, \rho_r^{n_r}\}$ de représentations cuspidales, on note d'après [13] V.7, $\text{St}(\underline{s})$ l'unique représentation non dégénérée de l'induite

$$\rho(\underline{s}) := \overbrace{\rho_1 \times \dots \times \rho_1}^{n_1} \times \dots \times \overbrace{\rho_r \times \dots \times \rho_r}^{n_r}.$$

Remarque : d'après [13] V.7, toutes les représentations non dégénérées sont de cette forme.

1.2.6. Notation. — Pour ρ une représentation irréductible cuspidale et $s \geq 1$, on note $\underline{s}(\rho)$ le multi-segment $\{\rho, \rho\{1\}, \dots, \rho\{s-1\}\}$ et comme dans [13] V.4, $\text{St}_s(\rho) := \text{St}(\underline{s}(\rho))$.

1.2.7. Proposition. — [13] V.4 Soit ϱ une représentation irréductible cuspidale. La représentation non dégénérée $\text{St}_s(\varrho)$ est cuspidale si et seulement $s = 1$ ou $m(\varrho)l^k$ pour $k \geq 0$.

1.2.8. Notation. — Soit ϱ une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$; on note alors $\varrho_{-1} = \varrho$ et pour tout $i \geq 0$, $\varrho_i = \text{St}_{m(\varrho)l^i}(\varrho)$.

1.2.9. Définition. — D'après [11] III-3.15 et 5.14, toute représentation irréductible cuspidale ρ est de la forme $\text{St}_s(\varrho)$ pour ϱ irréductible supercuspidale et $s = 1$ ou de la forme $m(\varrho)l^k$ avec $k \geq 0$. Dans le cas où ρ n'est pas supercuspidal et donc s de la forme $m(\varrho)l^k$, on dira qu'elle est de ϱ -niveau k .

1.2.10. Notation. — Soit $s \geq 1$ un entier et ϱ une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$. On note $\mathcal{I}_\varrho(s)$ l'ensemble des suites (m_{-1}, m_0, \dots) à valeurs dans \mathbb{N} telles que

$$s = m_{-1} + m(\varrho) \sum_{k=0}^{+\infty} m_k l^k.$$

On munit $\mathcal{I}_\varrho(s)$ de la relation d'ordre suivante :

$$(m_{-1}, m_0, \dots, m_u, 0, \dots) < (n_{-1}, \dots, n_u, 0, \dots) \Leftrightarrow \exists v \geq -1 : n_k = m_k \forall k > v \text{ et } m_v < n_v.$$

1.2.11. Définition. — Pour $\underline{i} = (i_{-1}, i_0, \dots) \in \mathcal{I}_\varrho(s)$, on définit

$$\mathrm{St}_{\underline{i}}(\varrho) := \mathrm{St}_{\underline{i}_{-1}}(\varrho_{-1}) \times \mathrm{St}_{\underline{i}_0}(\varrho_0) \times \dots \times \mathrm{St}_{\underline{i}_u}(\varrho_u)$$

où $i_k = 0$ pour tout $k > u$ et où les ϱ_i sont définis en 1.2.8. On dit que $\mathrm{St}_{\underline{i}}(\varrho)$ est de ϱ -niveau \underline{i} .

Le résultat principal de [4] est la description suivante de la réduction modulo l d'une représentation de Steinberg généralisée.

1.2.12. Théorème. — [4] *Soit π une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale entière de $GL_g(K)$ et ϱ sa réduction modulo l . Dans le groupe de Grothendieck des $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations de $GL_{sg}(K)$, on a l'égalité suivante :*

$$r_l\left(\mathrm{St}_s(\pi)\right) = \sum_{\underline{i} \in \mathcal{I}_\varrho(s)} \mathrm{St}_{\underline{i}}(\varrho).$$

Par ailleurs pour tout $\underline{i} \in \mathcal{I}_\varrho(s)$ et pour tout parabolique P , $J_P\left(\mathrm{St}_{\underline{i}}(\varrho)\right)$ est égal à la somme des constituants irréductibles de ϱ -niveau \underline{i} de $r_l\left(J_P(\mathrm{St}_s(\pi))\right)$.

Remarque : pour $s < m(\varrho)$, la réduction modulo l de $\mathrm{St}_s(\pi)$ est irréductible. En particulier dans le cas banal, i.e. quand $e_l(q) > d$, la réduction modulo l de $\mathrm{St}_s(\pi)$ est irréductible.

1.3. Réseaux d'induction. — Pour π une représentation irréductible cuspidale entière de $GL_g(K)$, comme, d'après 1.2.1, sa réduction modulo l , notée ϱ , est irréductible, on en déduit qu'à isomorphismes près, π possède un unique réseau stable, cf. par exemple [1] proposition 3.3.2 et la remarque qui suit.

1.3.1. Définition. — (cf. [4]) Étant donné un réseau de $\mathrm{St}_t(\pi)$, la surjection (resp. l'injection)

$$\mathrm{St}_t(\pi) \times \pi\{t\} \twoheadrightarrow \mathrm{St}_{t+1}(\pi), \quad \text{resp. } \mathrm{St}_{t+1}(\pi) \hookrightarrow \mathrm{St}_t(\pi\{1\}) \times \pi$$

induit un réseau de $\mathrm{St}_{t+1}(\pi)$ de sorte que par récurrence on dispose d'un réseau $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l, -}(\pi, t)$ (resp. $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l, +}(\pi, t)$) que l'on qualifie de *réseau d'induction*. On note alors

$$RI_{\overline{\mathbb{F}}_l, -}(\pi, t) := RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l, -}(\pi, t) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l, \quad \text{resp. } RI_{\overline{\mathbb{F}}_l, +}(\pi, t) := RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l, +}(\pi, t) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l.$$

1.3.2. Proposition. — (cf. [4] propositions 3.2.2 et 3.2.7) *Pour tout $0 \leq k \leq \lg_\varrho(s)$, il existe une sous-représentation $V_{\varrho, \pm}(s; k)$ de longueur k de $RI_{\overline{\mathbb{F}}_l, \pm}(\overleftarrow{[s-1]_\pi})$*

$$(0) = V_{\varrho, \pm}(s; 0) \subsetneq V_{\varrho, \pm}(s; 1) \subsetneq \dots \subsetneq V_{\varrho, \pm}(s; \lg_\varrho(s)) = RI_{\overline{\mathbb{F}}_l, \pm}(\pi, s),$$

définie de sorte que l'image de $V_{\varrho, -}(s; k)$ (resp. $V_{\varrho, +}(s; k)$) dans le groupe de Grothendieck est telle que tous ses constituants irréductibles sont de ϱ -niveau strictement plus grand (resp. plus petit) que n'importe quel constituant irréductible de $W_{\varrho, -}(s; k) := V_{\varrho, -}(s; \lg_\varrho(s))/V_{\varrho, -}(s; k)$ ((resp. $W_{\varrho, +}(s; k) := V_{\varrho, +}(s; \lg_\varrho(s))/V_{\varrho, +}(s; k)$).

1.3.3. Notation. — Une représentation irréductible ρ étant fixée ainsi qu'un entier s , pour $k \geq 0$ tel que $m(\rho)l^k \leq s$, on note :

- $\underline{\delta}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \mathcal{I}_\rho(s)$ et
- $V_\rho(s, \geq t.\underline{\delta}_k)$ (resp. $V_\rho(s, < t.\underline{\delta}_k)$) désignera le sous-espace $V_{\rho,-}(s, i)$ (resp. $V_{\rho,+}(s, j)$) défini ci-dessus tel que tous les constituants irréductibles de $V_{\rho,-}(s, i)$ (resp. $V_{\rho,+}(s, j)$) sont de ρ -niveau plus grand ou égal (resp. strictement plus petit) à $t.\underline{\delta}_k$.

1.4. Complexes d'induction des représentations de Steinberg. — On fixe une représentation irréductible cuspidale π de $GL_g(K)$ ainsi qu'un entier $s \geq 1$.

1.4.1. Notation. — Pour tout $s \geq 1$, on note $K_\pi(s)^\bullet$ le $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -complexe

$$K_\pi(s)^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i > 0 \text{ ou } i < -s \\ RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\pi, s+i) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{-i}(\pi) & \text{pour } -s \leq i \leq 0, \end{cases}$$

les flèches étant telles que la cohomologie de $K_\pi(s)^\bullet$ ainsi que celle de $K_\rho(s)^\bullet := K_\pi(s)^\bullet \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l$, soient nulle.

Remarque : avec les notations des paragraphes suivants, le complexe précédent s'obtient comme suit. Soit $j_i^{\geq tg} HT_{\Gamma,1}(\pi, t)$ l'extension par zéro d'un système local d'Harris-Taylor. Sa filtration exhaustive de stratification fournit une suite spectrale $E_1^{p,q}$ calculant les germes en un point géométrique de $X_{\overline{\mathbb{Z}}, \overline{s}_v, 1}^{=(t+r)g}$ de ses faisceaux de cohomologie. D'après le résultat principal de [3], en tant que représentation de $GL_{rg}(F_v)$, les termes non nuls de $E_1^{p,q}$ fournissent un complexe isomorphe à $K_\pi(r)^\bullet$, ce qui justifie à posteriori l'existence des flèches annulant la cohomologie de $K_\pi(s)^\bullet$ et $K_\rho(s)^\bullet$.

1.4.2. Définition. — Pour tout $k, t \geq 0$, tels que $m(\rho)l^k t \leq s$, avec les notations de 1.3.3, on note $K_\rho(s, \geq t.\underline{\delta}_k)^\bullet$ (resp. $K_\rho(s, < t.\underline{\delta}_k)^\bullet$) le sous-complexe de $K_\rho(s)$ défini, pour $-s \leq i \leq 0$ par

$$K_\rho(s, \geq t.\underline{\delta}_k)^i = V_\rho(s+i, \geq t.\underline{\delta}_k) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{-i}(\pi);$$

$$\text{resp. } K_\rho(s, < t.\underline{\delta}_k)^i = V_\rho(s+i, < t.\underline{\delta}_k) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{-i}(\pi).$$

1.4.3. Proposition. — La cohomologie $h^i K_\rho(s, < \underline{\delta}_k)^\bullet$ du complexe $K_\rho(s, < \underline{\delta}_k)$ est :

- nulle si $m(\rho)l^k$ ne divise pas s ;
- pour $s = \delta m(\rho)l^k$, elle est nulle si $i \neq -\delta$ et pour $i = -\delta$ isomorphe à $[\overline{\delta - 1}]_{\rho_k}$.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur s quelle que soit ρ ; l'initialisation étant triviale supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $s - 1$ et traitons le cas de s .

Soit u tel que $m(\varrho)l^u \leq s < m(\varrho)l^{u+1}$; pour tout $0 \leq k \leq u$, on note $t_k \geq 1$ tel que $t_k m(\varrho)l^k \leq s < (t_k + 1)m(\varrho)l^k$ et on considère la filtration suivante de $K_\varrho(s)$:

$$\begin{aligned} K_\varrho(s, > t_u \underline{\delta}_u)^\bullet &\subset K_\varrho(s, > (t_u - 1) \underline{\delta}_u)^\bullet \subset \cdots \subset K_\varrho(s, > \underline{\delta}_u)^\bullet \\ &\subset K_\varrho(s, > t_{u-1} \underline{\delta}_{u-1})^\bullet \subset \cdots \subset K_\varrho(s, > \underline{\delta}_{u-1})^\bullet \\ &\cdots \subset K_\varrho(s, > t_0 \underline{\delta}_0)^\bullet \subset \cdots \subset K_\varrho(s, > \underline{\delta}_0)^\bullet \subset K_\varrho(s) \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

On a alors les propriétés suivantes :

— pour $1 \leq k \leq u$, $K_\varrho(s, > t_{k-1} \underline{\delta}_{k-1})^\bullet / K_\varrho(s, > \underline{\delta}_k)$ est le complexe

$$\mathrm{St}_{t_{k-1}}(\rho_{k-1}) \overrightarrow{\times} K_\varrho(s - t_{k-1}m(\varrho)l^{k-1}, < \underline{\delta}_0),$$

dont la cohomologie est, d'après l'hypothèse de récurrence, nulle sauf si $s = t_{k-1}m(\varrho)l^{k-1}$ auquel cas h^0 est le seul h^i non nul, et alors isomorphe à $\mathrm{St}_{t_{k-1}}(\rho_{k-1})$;

— pour $0 \leq k \leq u$ et $1 \leq t < t_k$, le complexe $K_\varrho(s, > t \underline{\delta}_k)^\bullet / K_\varrho(s, > (t+1) \underline{\delta}_k)$ est le complexe

$$\mathrm{St}_t(\rho_k) \overrightarrow{\times} K_\varrho(s - tm(\varrho)l^k, < \underline{\delta}_k),$$

dont la cohomologie est, d'après l'hypothèse de récurrence, nulle sauf si $s - tm(\varrho)l^k$ auquel cas h^{t-t_k} est le seul h^i non nul, et alors isomorphe à $\mathrm{St}_t(\rho_k) \overrightarrow{\times} [\overline{t_k - t - 1}]_{\rho_k}$.

Considérons alors la suite spectrale de cohomologie $E_1^{i,j} = h^{i+j} gr_{-i} \Rightarrow E_\infty^{i+j}$, associée à la filtration 1.4.3; d'après les propriétés précédentes les $E_1^{i,j}$ sont connus par récurrence pour tout $i > 0$ et l'aboutissement E_∞^{i+h} est nul. Par ailleurs les flèches $d_r^{i,j}$ sont déterminées par le complexe $K_\varrho(s)^\bullet$ de sorte que les $E_1^{0,j}$ s'en déduisent.

Concrètement pour $0 \leq k \leq u$ tel que $s = m(\varrho)l^k t_k$, il existe $i_1 < i_2 < \cdots < i_{t_k}$ tels que pour $1 \leq r \leq t_k$,

$$E_1^{i_r, -t_k - i_r + r} = \mathrm{St}_0(\rho_k) \overrightarrow{\times} [\overline{t_k - r - 1}]_{\rho_k}, \quad \underline{0} \in \mathcal{I}_{\rho_k}(r).$$

Par ailleurs comme les flèches $E_1^{i_r, -t_k - i_r + r} \rightarrow E_1^{i_{r+1}, -t_k - i_{r+1} + r + 1}$ sont induites par celles de $K_\varrho(s)^\bullet$, on en déduit, en utilisant l'hypothèse de récurrence, que $E_1^{0, -t_k}$ est isomorphe à $[\overline{t_k - 1}]_{\rho_k}$, d'où le résultat. \square

Remarque : la remarque suivant le corollaire 2.4.9 donne une interprétation faisceautique de ce calcul similaire à celle de $K_\pi(s)^\bullet$.

2. Faisceaux pervers d'Harris-Taylor

2.1. Représentations de $D_{K,d}^\times$. — Pour d un entier strictement positif, $D_{K,d}$ désignera l'algèbre à division centrale sur K d'invariant $\frac{1}{d}$. Rappelons que la correspondance de Jacquet-Langlands locale met en bijection les représentations irréductibles de $D_{K,d}^\times$ avec les représentations irréductibles essentiellement de carré intégrale de $GL_d(K)$. On introduit alors la notation suivante.

2.1.1. Notation. — Pour π une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$ et $t \geq 1$, on note $\pi[t]_D$ la représentation de $D_{K,tg}^\times$ associée à $\text{St}_t(\pi)$ par la correspondance de Jacquet-Langlands.

Soit τ une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible de $D_{K,d}^\times$ que l'on suppose l -entière, i.e. de caractère central l -entier. Quitte à tordre ce caractère central par un caractère non ramifié, on le suppose trivial sur l'uniformisante ϖ et donc τ est une représentation de $D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}$. On note $\mathcal{P}_{K,d}$ le radical de $\mathcal{D}_{K,d}$ et soit

$$1 + \mathcal{P}_{K,d} \subset \mathcal{D}_{K,d}^\times \subset D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}$$

la filtration de quotients successifs $\mathbb{F}_{q^d}^\times$ et $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

On choisit alors un facteur irréductible ζ de $\tau_{1+\mathcal{P}_{K,d}}$; on note N_ζ le normalisateur de sa classe d'isomorphisme dans $D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}$ et soit $\tilde{\zeta}$ son prolongement à N_ζ : en effet $1 + \mathcal{P}_{K,d}$ étant un pro- p -groupe, la dimension de ζ est une puissance de p de sorte que, un p -Sylow de $N_\zeta/(1 + \mathcal{P}_{K,d})$ étant cyclique, ζ admet un prolongement à N_ζ , cf. [12] lemme 1.19.

2.1.2. Proposition. — (cf. [8] proposition 2.3.2)

Il existe un caractère χ tel que

$$\tau \simeq \text{ind}_J^{D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}} \left(\tilde{\zeta}|_J \otimes \chi \right),$$

où J est un sous-groupe de $D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}$ contenant $1 + \mathcal{P}_{K,d}$ la forme $N_\zeta \cap N_\chi$, pour N_χ est le normalisateur de χ vérifiant les points suivants :

- J contient $N_\zeta \cap \mathcal{D}_{K,d}^\times$;
- il existe des entiers f', d', e' de produit égal à d tels que

$$J/(1 + \mathcal{P}_{K,d}) \simeq \mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \rtimes m\mathbb{Z}/e'd'\mathbb{Z},$$

où le générateur de $\mathbb{Z}/e'd'\mathbb{Z}$ agit par le Frobenius relatif à $\mathbb{F}_{q^{f'}}$ et m est un diviseur de d' tel que

$$f'm = [D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z} : \mathcal{D}_{K,d}^\times J]$$

est le cardinal e_τ de la classe d'équivalence inertielle de τ .

- L'abélianisé de $J/(1 + \mathcal{P}_{K,d})$ s'identifie via le morphisme norme, à $\mathbb{F}_{q^{f'm}}^\times \times m\mathbb{Z}/e'd'\mathbb{Z}$.
- La réduction modulo l de τ est de cardinal

$$r_\tau = [N_\zeta \cap N_{r_l(\chi)} : J]$$

et de la forme

$$[\bar{\tau}] + [\bar{\tau}\nu] + \cdots + [\bar{\tau}\nu^{r-1}]$$

pour $\bar{\tau}$ une $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de $D_{K,d}^\times$ et ν le caractère $g \mapsto q^{\text{val} \circ \text{Nrd}(g)}$.

- Une représentation τ' a même réduction modulo l si et seulement si $J' = J$ et $r_l(\chi')$, $r_l(\chi)$ sont conjugués sous $N_\zeta \cap N_{r_l(\chi)}$.

- Le nombre $n(\tau)$ de représentations irréductibles strictement congrues à τ est donnée par la formule $\frac{n(\chi)}{[N_\zeta \cap N_{r_l(\chi)} : J]}$ où $n(\chi)$ est égal à la plus grande puissance de l qui divise $a(\tau) := \frac{d}{e_\tau}(q^{e_\tau} - 1)$.

Remarque : le diviseur e' de d correspond au diviseur s de d tel que τ est de la forme $\pi[s]_D$.

2.1.3. Notation. — Avec les notations précédentes, on notera $g(\bar{\tau}) := \frac{d}{e'} = f'd'$.

Remarque : pour $r_l(\tau)$, rappelons que comme $r_l(\tilde{\zeta}_{lJ})$ est irréductible, $r_l(\tau)$ est de longueur $[N_\zeta \cap N_{r_l(\chi)} : N_\zeta \cap N_\chi]$. En particulier $r_l(\tau)$ est irréductible si et seulement si $N_\chi = N_{r_l(\chi)}$.

2.1.4. Définition. — Soit $\bar{\tau}$ une $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de $D_{K,d}^\times$. On définit

$$\mathcal{C}_{\bar{\tau}} \subset \text{Rep}_{\mathbb{Z}_l^{nr}}^\infty(D_{K,d}^\times)$$

la sous-catégorie pleine formée des objets dont tous les $\mathbb{Z}^{nr}D_{K,d}^\times$ -sous-quotients irréductibles sont isomorphes à un sous-quotient de $\bar{\tau}|_{\mathcal{D}_{K,d}^\times}$.

2.1.5. Proposition. — (cf. [7] §B.2)

Soit $P_{\bar{\tau}^0}$ une enveloppe projective de $\bar{\tau}^0$ dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_l^{nr}}^\infty(D_{K,d}^\times)$. Alors la sous-catégorie $\mathcal{C}_{\bar{\tau}}$ est facteur direct dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_l^{nr}}^\infty(D_{K,d}^\times)$ pro-engendrée par l'induite $P_{\bar{\tau}} := \text{ind}_{D_{K,d}^\times}^{D_{K,d}^\times}(P_{\bar{\tau}^0})$.

2.1.6. Notation. — On notera $\mathcal{R}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(h)$ l'ensemble des classes d'équivalence des $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles de $D_{v,h}^\times$.

2.1.7. Définition. — Ainsi toute \mathbb{Z}_l^{nr} -représentation $V_{\mathbb{Z}_l^{nr}}$ de $D_{K,d}^\times$ se décompose en une somme directe

$$V_{\mathbb{Z}_l^{nr}} \simeq \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(d)} V_{\mathbb{Z}_l^{nr}, \bar{\tau}}$$

où $V_{\mathbb{Z}_l^{nr}, \bar{\tau}}$ est un objet de $\mathcal{C}_{\bar{\tau}}$, i.e. tous ses sous-quotients irréductibles sont isomorphes à un sous-quotient de $\bar{\tau}|_{\mathcal{D}_{K,d}^\times}$.

2.1.8. Théorème. — (cf. [8] 3.1.4) Il existe une bijection

$$\left\{ \bar{\mathbb{F}}_l\text{-représentations superspeh de } GL_d(K) \right\} \simeq \left\{ \bar{\mathbb{F}}_l\text{-représentations irréductibles de } D_{K,d}^\times \right\}$$

compatible à la réduction modulo l au sens suivant :

- soit ρ une $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible supercuspidale de $GL_g(K)$ avec $d = sg$;
- soit π un $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -relèvement de ρ .

Alors la réduction modulo l de $\pi[s]_D$ est irréductible et correspond via la bijection ci-dessus à la superspeh $\text{Speh}_s(\rho)$.

2.1.9. Définition. — On dira d'une $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation de $D_{K,d}^\times$ qu'elle est de type ρ si tous ses constituants irréductibles sont, via la bijection précédente, image d'une superSpeh associée à ρ . On notera

$$\mathcal{C}(\rho, d)$$

l'ensemble des classes d'équivalences de ces $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles de $D_{v,d}^\times$ associées à ρ .

2.2. Rappels sur les variétés de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor. — Rappelons que l et p désignent deux nombres premiers distincts. Soit $F = F^+E$ un corps CM avec E/\mathbb{Q} quadratique imaginaire, dont on fixe un plongement réel $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$ et tel que l est non ramifié dans E . Pour v une place de F , on notera F_v le complété du localisé de F en v , \mathcal{O}_v son anneau des entiers de F_v , ϖ_v une uniformisante et q_v le cardinal du corps résiduel $\kappa(v) = \mathcal{O}_v/(\varpi_v)$.

2.2.1. Notation. — On note encore ν le caractère de F_v^\times défini par $\alpha \mapsto q_v^{-\text{val}(\alpha)}$.

Soit B une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 telle qu'en toute place x de F , B_x est soit décomposée soit une algèbre à division et on suppose B munie d'une involution de seconde espèce $*$ telle que $*|_F$ est la conjugaison complexe c . Pour $\beta \in B^{*=-1}$, on note \sharp_β l'involution $x \mapsto x^\sharp_\beta = \beta x^* \beta^{-1}$ et G/\mathbb{Q} le groupe de similitudes, noté G_τ dans [9], défini pour toute \mathbb{Q} -algèbre R par

$$G(R) \simeq \{(\lambda, g) \in R^\times \times (B^{op} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \text{ tel que } gg^\sharp_\beta = \lambda\}$$

avec $B^{op} = B \otimes_{F,c} F$. Si x est une place de \mathbb{Q} décomposée $x = yy^c$ dans E alors

$$G(\mathbb{Q}_x) \simeq (B_y^{op})^\times \times \mathbb{Q}_x^\times \simeq \mathbb{Q}_x^\times \times \prod_{z_i} (B_{z_i}^{op})^\times,$$

où, en identifiant les places de F^+ au dessus de x avec les places de F au dessus de y , $x = \prod_i z_i$ dans F^+ .

Dans [9], les auteurs justifient l'existence d'un G comme ci-dessus tel qu'en outre :

— si x est une place de \mathbb{Q} qui n'est pas décomposée dans E alors $G(\mathbb{Q}_x)$ est quasi-déployé ;

— les invariants de $G(\mathbb{R})$ sont $(1, d-1)$ pour le plongement τ et $(0, d)$ pour les autres.

On fixe à présent un nombre premier $p = uv^c$ décomposé dans E tel qu'il existe une place v de F au dessus de u telle que

$$(B_v^{op})^\times \simeq GL_d(F_v),$$

et on note abusivement

$$G(\mathbb{A}^{\infty, v}) = G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times \prod_{\substack{w|p \\ w \neq v}} (B_w^{op})^\times.$$

Pour tout sous-groupe compact U^p de $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ et $m = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, on pose

$$U^v(m) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=2}^r \text{Ker}\left(\mathcal{O}_{B_{v_i}}^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_{B_{v_i}}/\mathcal{P}_{v_i}^{m_i})^\times\right).$$

2.2.2. Notation. — Soit \mathcal{I} l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts « assez petits »⁽¹⁾ de $G(\mathbb{A}^\infty)$, de la forme $U^v(m)K_v$. Pour un tel $I \in \mathcal{I}$, on note

$$X_I \longrightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_v$$

la variété de Shimura de [9] dite de Kottwitz-Harris-Taylor associée à G .

Remarque : X_I est un schéma projectif sur $\text{Spec } \mathcal{O}_v$ tel que $(X_I)_{I \in \mathcal{I}}$ forme un système projectif dont les morphismes de transition sont finis et plats. Quand $m_1 = m'_1$ alors $X_{U^p(m)} \longrightarrow X_{U^p(m')}$ est étale. Ce système projectif est par ailleurs muni d'une action de $G(\mathbb{A}^\infty) \times \mathbb{Z}$ telle que l'action d'un élément w_v du groupe de Weil W_v de F_v est donnée par celle de $-\deg(w_v) \in \mathbb{Z}$, où $\deg = \text{val} \circ \text{Art}^{-1}$ où $\text{Art}^{-1} : W_v^{ab} \simeq F_v^\times$ est l'isomorphisme d'Artin qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes.

2.2.3. Notations. — (cf. [3] §1.3) Pour $I \in \mathcal{I}$, on note :

- X_{I, s_v} la fibre spéciale de X_I en v et $X_{I, \bar{s}_v} := X_{I, s_v} \times \text{Spec } \bar{\mathbb{F}}_p$ la fibre spéciale géométrique.
- Pour tout $1 \leq h \leq d$, $X_{I, \bar{s}_v}^{\geq h}$ (resp. $X_{I, \bar{s}_v}^{=h}$) désigne la strate fermée (resp. ouverte) de Newton de hauteur h , i.e. le sous-schéma dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate en chacun de ses points géométriques est de rang $\geq h$ (resp. égal à h).

Remarque : pour tout $1 \leq h \leq d$, la strate de Newton de hauteur h est de pure dimension $d-h$. La strate ouverte est en outre « géométriquement induite » au sens où il existe un système projectif $X_{\bar{\mathcal{I}}, \bar{s}_v, 1}^{=h}$ de sous-schémas fermés de $X_{\bar{\mathcal{I}}, \bar{s}_v}^{=h}$ muni d'une action par correspondance de $P_{h,d}(F_v)$ tel que

$$X_{\bar{\mathcal{I}}, \bar{s}_v}^{=h} = X_{\bar{\mathcal{I}}, \bar{s}_v, 1}^{=h} \times_{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v).$$

2.2.4. Notations. — Nous utiliserons les notations suivantes :

$$i^h : X_{\bar{\mathcal{I}}, \bar{s}}^{\geq h} \hookrightarrow X_{\bar{\mathcal{I}}, \bar{s}}^{\geq 1}, \quad j^{\geq h} : X_{\bar{\mathcal{I}}, \bar{s}}^{=h} \hookrightarrow X_{\bar{\mathcal{I}}, \bar{s}}^{\geq h}$$

ainsi que $j^{=h} = i^h j^{\geq h}$.

Rappelons que dans [9], les auteurs, via les variétés d'Igusa de première et seconde espèce, associent à toute représentation ρ_v de l'ordre maximal $\mathcal{D}_{v,h}^\times$ de $D_{v,h}^\times$, un système

1. tel qu'il existe une place x pour laquelle la projection de U^v sur $G(\mathbb{Q}_x)$ ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité, cf. [9] bas de la page 90

local $\mathcal{F}(\rho_v)_1$ sur $X_{\mathcal{L}, \bar{s}_v, 1}^{\bar{h}}$ dont on note $\mathcal{F}(\rho_v)$ la version « induite » sur $X_{\mathcal{L}, \bar{s}_v}^{\bar{h}}$. D'après [3] §1.4.2, le système local $\mathcal{F}(\rho_v)_1$ est muni d'une action par correspondances de

$$G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times P_{h,d}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times \mathbb{Z}$$

qui d'après [9] p.136, se factorise par $G^{(h)}(\mathbb{A}^\infty)/\mathcal{D}_{F_v, h}^\times$ via

$$(g^{\infty, p}, g_{p,0}, c, g_v, g_{v_i}, k) \mapsto (g^{p, \infty}, g_{p,0} q^{k-v(\det g_v^c)}, g_v^{et}, g_{v_i}, \delta). \quad (2.2.4)$$

où

- $G^{(h)}(\mathbb{A}^\infty) := G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times GL_{d-h}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times D_{F_v, h}^\times$,
- $g_v = \begin{pmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{pmatrix}$ et
- $\delta \in D_{v, h}^\times$ est tel que $v(\text{rn}(\delta)) = k + v(\det g_v^c)$.

Remarque : on prendra l'habitude d'identifier $D_{v, h}^\times/\mathcal{D}_{v, h}^\times$ avec \mathbb{Z} via la norme réduite.

2.2.5. Notations. — Pour π_v une $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et $t \geq 1$, on note $\mathcal{F}_{\bar{\mathbb{Q}}_l}(\pi_v, t)$ le $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -système local sur $X_{\mathcal{L}, \bar{s}}^{\bar{t}g}$ associé à $\pi_v[t]_D$. Si Γ est un réseau stable de $\pi_v[t]_D$, on notera $\mathcal{F}_\Gamma(\pi_v, t)$ le $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -système local associé et dans le cas où l'on ne souhaite pas mentionner le réseau considéré, on écrira simplement $\mathcal{F}(\pi_v, t)$. En ce qui concerne les faisceaux pervers, on note

$$HT_\Gamma(\pi_v, t) := \mathcal{F}_\Gamma(\pi_v, t)[d - tg]$$

et pour Π une représentation de $GL_{tg}(F_v)$,

$$HT_\Gamma(\pi_v, t, \Pi)$$

désignera le faisceau pervers $HT_\Gamma(\pi_v, t) \otimes \Pi$ où l'action du facteur $GL_{tg}(F_v)$ du Levi de $P_{tg, d}(F_v)$ agit diagonalement sur $HT_\Gamma(\pi_v, t)$ et sur Π . À nouveau les versions sans Γ signifient que l'on ne s'intéresse pas au réseau stable considéré. On utilisera aussi les notations $HT_{\Gamma, 1}(\pi_v, t)$, $HT_{\Gamma, 1}(\pi_v, t, \chi)$ pour les versions non induites.

Remarque : dans [3], on notait simplement $HT(\pi_v, \Pi)$ pour $HT(\pi_v, t, \Pi)$. Avec ces notations on a $HT(\pi_v, t) = HT(\pi_v, t, \mathbb{1}_{tg})$ où $\mathbb{1}_{tg}$ désigne la représentation triviale de $GL_{tg}(F_v)$.

2.2.6. Définition. — Un $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -système local \mathcal{L} sur $X_{\mathcal{L}, \bar{s}}^{\bar{h}}$ sera dit de type ρ , pour ρ une $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible supercuspidale de $GL_g(F_v)$ avec $g|h$, si \mathcal{L} est libre et $\mathcal{L} \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{Q}}_l$ est une somme directe de systèmes locaux de la forme $\mathcal{F}(\pi_v, t)$ où $r_l(\pi_v[t]_D)$ est de type ρ au sens de la définition 2.1.9.

2.3. Filtrations de stratification. — Rappelons que pour X un \mathbb{F}_p -schéma et $\Lambda = \mathbb{Q}_l, \bar{\mathbb{Z}}_l, \bar{\mathbb{F}}_l$, la t -structure usuelle sur la catégorie dérivée $D_c^b(X, \Lambda)$ est définie par :

$$\begin{aligned} A \in {}^pD^{\leq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, h^k i_x^* A = 0, \forall k > -\dim \overline{\{x\}} \\ A \in {}^pD^{\geq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, h^k i_x^! A = 0, \forall k < -\dim \overline{\{x\}} \end{aligned}$$

où $i_x : \text{Spec } \kappa(x) \hookrightarrow X$. On note alors ${}^p\mathcal{C}(X, \Lambda)$ le cœur de cette t -structure : c'est une catégorie abélienne noethérienne et Λ -linéaire.

2.3.1. Notation. — Les foncteurs cohomologiques associés à la t -structure perverse ci-avant seront notés ${}^p\mathcal{H}^i$.

Pour Λ un corps, cette t -structure est autoduale pour la dualité de Verdier. Pour $\Lambda = \bar{\mathbb{Z}}_l$, on peut munir la catégorie abélienne $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -linéaire ${}^p\mathcal{C}(X, \Lambda)$ d'une théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ où \mathcal{T} (resp. \mathcal{F}) est la sous-catégorie pleine des objets de torsion T (resp. libres F), i.e. tels que $l^N 1_T$ est nul pour N assez grand (resp. $l.1_F$ est un monomorphisme).

2.3.2. Définition. — Soit

$$\begin{aligned} {}^+\mathcal{D}^{\leq 0}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l) &:= \{A \in \mathcal{D}^{\leq 1}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l) : {}^p h^1(A) \in \mathcal{T}\} \\ {}^+\mathcal{D}^{\geq 0}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l) &:= \{A \in \mathcal{D}^{\geq 0}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l) : {}^p h^0(A) \in \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

la t -structure duale de cœur ${}^+\mathcal{C}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l)$ muni de sa théorie de torsion $(\mathcal{F}, \mathcal{T}[-1])$ « duale » de celle de ${}^p\mathcal{C}(X, \bar{\mathbb{Z}}_l)$.

2.3.3. Définition. — (cf. [6] §1.3) Soit $\mathcal{F}(X, \Lambda) := {}^p\mathcal{C}(X, \Lambda) \cap {}^p{}^+\mathcal{C}(X, \Lambda)$ la catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers « libres » sur X à coefficients dans Λ . On identifiera aussi $\mathcal{F}(F, \Lambda)$ avec son image dans $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ via le foncteur $i_* = i_! = i_{!*}$.

Rappelons qu'un morphisme $f : L \rightarrow L'$ de $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ est dit *strict* et si la flèche canonique $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f \rightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f$ est un isomorphisme. Pour $L \in \mathcal{F}(X, \Lambda)$, on considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} & & L & & \\ & \nearrow \text{can}_{!,L} & & \searrow \text{can}_{*,L} & \\ {}^p j_! j^* L & \dashrightarrow & {}^p j_{!*} j^* L & \xrightarrow{+} & {}^p j_! j^* L & \hookrightarrow & {}^p j_* j^* L \end{array}$$

où la ligne du bas est la factorisation canonique de ${}^p j_! j^* L \rightarrow {}^p j_* j^* L$ et les flèches $\text{can}_{!,L}$ et $\text{can}_{*,L}$ données par adjonction. Rappelons que les flèches aux extrémités de la ligne du bas, sont strictes et que la flèche du milieu est un bimorphisme, i.e. un monomorphisme et un épimorphisme.

Soit X un schéma muni d'une stratification $\mathfrak{S} = \{X = X^{\geq 1} \supset X^{\geq 2} \supset \dots \supset X^{\geq e}\}$, pour tout $1 \leq h < e$, on notera $X^{1 \leq h} := X^{\geq 1} - X^{\geq h+1}$ ainsi que $j^{1 \leq h} : X^{1 \leq h} \hookrightarrow X^{\geq 1}$ et $i^h : X^{\geq h} \hookrightarrow X^{\geq 1}$. On utilisera aussi $j^{\geq h} : X^{=h} := X^{\geq h} - X^{\geq h+1} \hookrightarrow X^{\geq h}$ et $j^{=h} = i^h \circ j^{\geq h}$.

On dit d'un faisceau pervers P qu'il est à support dans $X^{\geq h}$, si h est le plus petit entier $1 \leq r \leq d$ tel que $j^{-r,*}P$ est non nul.

2.3.4. Définition. — Pour L un objet de $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ et $1 \leq r \leq e - 1$, soit

$$\mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L) := \mathrm{Im}_{\mathcal{F}}\left(j_{!}^{1 \leq r} j^{1 \leq r,*}L \longrightarrow L\right).$$

D'après [6] §2.2, on munit ainsi tout objet L de $\mathcal{F}(X, \Lambda)$ d'une filtration dite de stratification

$$0 = \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^0(L) \subset \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^1(L) \subset \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^2(L) \cdots \subset \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{e-1}(L) \subset \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^e(L) = L,$$

dont tous les gradués sont libres. Dualement, cf. [6] §2.6, on définit

$$\mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},*}^{-r}(L) = \mathrm{Ker}_{\mathcal{F}}\left(\mathrm{can}_{*,L} : L \longrightarrow {}^p j_*^{1 \leq r} j^{1 \leq r,*}L\right)$$

de façon à obtenir une filtration

$$0 = \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},*}^{-e}(L) \subset \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},*}^{-e+1}(L) \subset \cdots \subset \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},*}^0(L) = L$$

dont on note $\mathrm{gr}_{\mathfrak{S},*}^{-r}(L)$ les gradués, qui par construction sont libres.

Dans [6] proposition 2.3.3, on construit de façon fonctorielle la filtration \mathfrak{S} -exhaustive de stratification de tout objet L de $\mathcal{F}(X, \Lambda)$

$$0 = \mathrm{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-2^{e-1}}(L) \subset \mathrm{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-2^{e-1}+1}(L) \subset \cdots \subset \mathrm{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L) \subset \cdots \subset \mathrm{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{2^{e-1}-1}(L) = L.$$

La construction duale $\mathrm{Fill}_{\mathfrak{S},*}^{\bullet}(L)$ est donnée à la définition 2.3.5 de loc. cit.

2.4. Extensions p et $p+$ intermédiaires. — Pour $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte, avec U d'égale dimension h , et \mathcal{L} un système local sur U , on dispose de deux notions d'extensions intermédiaires

$${}^p j_{!*}\mathcal{L}[h] \quad \text{et} \quad {}^{p+} j_{!*}\mathcal{L}[h].$$

Dans [5], pour z un point géométrique de $X_{\overline{L}, \overline{s}_v}^{\leq h}$ et i_z l'injection correspondante, on montre que $\mathcal{H}^i i_z^* \left({}^p j_{!*}^{\geq tg} HT_{\Gamma}(\pi_v, t) \right)$ est sans torsion et donc, d'après [3],

- nul si h n'est pas de la forme $(t + \delta)g \leq d$ pour $\delta \geq 0$,
- pour $h = (t + \delta)g$, le germe est nul si $i \neq (t + \delta)g - d - \delta$ et
- sinon, pour $i = (t + \delta)g - d - \delta$, il est isomorphe au germe en z de

$$HT(\pi_v, t + \delta, \mathbb{1}_{tg} \overrightarrow{\times} \mathbb{1}_{\delta g})[tg - d] \otimes \Xi^{\delta \frac{g-1}{2}}.$$

On s'intéresse à présent aux $\mathcal{H}^i i_z^* \left({}^{p+} j_{!*}^{\geq tg} HT_{\Gamma}(\pi_v, t) \right)$ ou ce qui revient au même par dualité, aux $\mathcal{H}^i i_z^! \left({}^p j_{!*}^{\geq tg} HT_{\Gamma}(\pi_v, t) \right)$. Le premier résultat concerne le cas où la représentation irréductible cuspidale possède une réduction modulo l supercuspidale.

2.4.1. Théorème. — Soit π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ telle que sa réduction modulo l est supercuspidale alors pour tout $1 \leq t \leq s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$, et pour tout réseau stable Γ de $\pi_v[t]_D$, on a

$${}^p j_{!*}^{\geq tg} HT_{\Gamma}(\pi_v, t) \simeq {}^{p+} j_{!*}^{\geq tg} HT_{\Gamma}(\pi_v, t).$$

Remarque : comme la réduction modulo l de $\pi_v[t]_D$ est irréductible, l'indépendance relativement au réseau Γ considéré est immédiate.

2.4.2. Corollaire. — Soit z un point géométrique de $X_{\bar{\mathbb{Z}}, \bar{s}_v, 1}^{\bar{h}}$. Alors le germe en z du i -ème faisceau de cohomologie $\mathcal{H}^i j_{!*}^{\geq tg} HT_{\bar{\mathbb{F}}_l, 1}(\pi_v, t)$ est nul si (h, i) n'est pas de la forme $((t+r)g, (t+r)g - d - r)$ et sinon, en tant que représentation de $GL_{rg}(F_v) \times \mathbb{Z}$, il est isomorphe à $r_l(\text{Speh}_r(\pi_v)) \otimes \Xi^{r \frac{g-1}{2}}$.

Démonstration. — D'après le théorème précédent on a

$$\mathbb{F}({}^p j_{!*}^{\geq tg} HT_{\Gamma, 1}(\pi_v, t)) \simeq j_{!*}^{\geq tg} \mathbb{F} HT_{\Gamma, 1}(\pi_v, t).$$

L'affirmation découle alors directement du résultat principal de [5] selon lequel les germes des faisceaux de cohomologie de ${}^p j_{!*}^{\geq tg} HT_{\Gamma, 1}(\pi_v, t)$ sont sans torsion. □

La preuve du théorème ci-dessus sera donnée dans la section suivante. Dans le reste de ce paragraphe, nous allons montrer comment, à partir du théorème précédent, on peut résoudre le cas général. Considérons donc un système local $\mathcal{F}(\pi_v, t)$ avec π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ dont la réduction modulo l n'est plus nécessairement supercuspidale. Rappelons le triangle distingué, cf. [10] 2.42-2.46,

$${}^p j_{!*}^{\geq tg} HT_{\Gamma}(\pi_v, t) \rightarrow {}^{p+} j_{!*}^{\geq tg} HT_{\Gamma}(\pi_v, t) \rightarrow {}^p i_*^{tg+1} h_{tors}^0 i^{tg+1, *} j_*^{\geq tg} HT_{\Gamma}(\pi_v, t) \rightsquigarrow$$

Le but de ce paragraphe est d'expliciter la l -torsion de ${}^p i_*^{tg+1} h_{tors}^0 i^{tg+1, *} j_*^{\geq tg} HT_{\Gamma}(\pi_v, t)$. Pour ce faire nous utiliserons le foncteur $\mathbb{F}(-)$ de réduction modulaire $\bar{\mathbb{F}}_l \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} (-)$. Rappelons que ce dernier ne commute pas aux foncteurs de troncations et que d'après les équations 2.54-2.61 de [10], on a

$$\mathbb{F} {}^p j_{!*} \rightarrow {}^p j_{!*} \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{H}^{-1} \mathbb{F} {}^p i_* {}^p \mathcal{H}_{tors}^0 i^* j_* [1] \rightsquigarrow$$

$${}^p j_{!*} \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F} {}^{p+} j_{!*} \rightarrow \mathcal{H}^0 \mathbb{F} {}^p i_* {}^p \mathcal{H}_{tors}^0 i^* j_* \rightsquigarrow$$

En revanche, dans le cas où ${}^p j_{!} = {}^{p+} j_{!}$, i.e. en utilisant

$${}^p j_{!} \rightarrow {}^{p+} j_{!} \rightarrow {}^p i_* \mathcal{H}_{tors}^{-1} i^* j_* [1] \rightsquigarrow$$

quand ${}^p i_* \mathcal{H}^{-1} i^* j_*$ est libre, alors le triangle distingué

$$\mathbb{F} {}^p j_{!} \rightarrow {}^p j_{!} \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{H}^{-1} \mathbb{F} {}^p i_* {}^p \mathcal{H}_{tors}^{-1} i^* j_* [2] \rightsquigarrow$$

nous donne que \mathbb{F} et ${}^p j_{!}$ commutent. Nous allons utiliser cette propriété avec les $j^{\geq tg}$. Commençons tout d'abord par quelques notations :

- ϱ_{-1} désignera une $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible supercuspidale de $GL_g(F_v)$ et on notera aussi $g_{-1} := g$.
- Pour tout $u \geq 0$, selon les notations de 1.2.8, on note $\varrho_u = \text{St}_{m(\varrho_{-1})l^u}(\varrho_{-1})$ la représentation irréductible cuspidale de $GL_{g_u}(F_v)$ avec $g_u = gm(\varrho_{-1})l^u$.
- Pour tout $u \geq -1$, on se fixe une représentation irréductible cuspidale π_u de $GL_{g_u}(F_v)$ dont la réduction modulo l est isomorphe à ϱ_u et
- pour tout $t \geq 1$, on note

$$\overline{\tau}_{u,t} := r_l(\pi_u[t]_D).$$

- Enfin on notera $s_u := \lfloor \frac{d}{g_u} \rfloor$.

2.4.3. Proposition. — (cf. la proposition 2.1.2)

La représentation $\overline{\tau}_{-1,t}$ est irréductible et pour $u \geq 0$ on a l'égalité suivante dans le groupe de Grothendieck

$$\overline{\tau}_{u,t} = l^u \sum_{i=0}^{m(\varrho_{-1})-1} \overline{\tau}_{-1,tm(\varrho_{-1})l^u \mathcal{V}^i}. \quad (2.4.4)$$

Remarque : avec les notations de 1.2.4, dans le cas où $\epsilon(\varrho_{-1}) = 1$, la formule (2.4.4) s'écrit $\overline{\tau}_{u,t} = l^{u+1} \overline{\tau}_{-1,u,t}$.

2.4.5. Notation. — On note

$$\Xi : \frac{1}{2}\mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_l^\times$$

est le caractère défini par $\Xi(\frac{1}{2}) = q^{1/2}$.

Remarque : on rappelle que pour tout $1 \leq h \leq d$, la notation $\mathbf{1}_h$ désigne la représentation triviale de $GL_h(F_v)$.

2.4.6. Proposition. — Avec les notations de la proposition 1.3.2, on a l'égalité suivante dans le groupe de Grothendieck correspondant

$$\mathbb{F}\left({}^p j_{!*}^{\geq tg_u} HT(\pi_u, t)\right) = m(\varrho_{-1})l^u \sum_{r=0}^{s-tm(\varrho_{-1})l^u} j_{!*}^{\geq tg_u + rg_{-1}} \mathbb{F}\left(HT(\pi_{-1}, r + tm(\varrho_{-1})l^u, \mathbf{1}_{tg_u} \overrightarrow{\times} V_{\varrho_{-1}}(r, < \underline{\delta}_u)) \otimes \Xi^{r \frac{g_{-1}-1}{2}}\right)$$

Démonstration. — Les cas où $tg_u \geq d$ étant triviaux, on raisonne par récurrence en supposant le résultat acquis pour tout $t < t'$ et on traite le cas de t . L'idée est de partir de la commutation entre \mathbb{F} et les $j_i^{\geq tg}$:

$$\mathbb{F}\left(j_i^{\geq tg_u} HT(\pi_u, t)\right) = \sum_{r=0}^{s_u-t} \mathbb{F}\left({}^p j_{!*}^{\geq (t+r)g_u} HT(\pi_u, t+r, \mathbf{1}_{tg_u} \overrightarrow{\times} \text{St}_r(\pi_u)) \otimes \Xi^{\frac{r(g_u-1)}{2}}\right).$$

En posant $t(u) = tm(\varrho_{-1})l^u$ et $s(u) = s_um(\varrho_{-1})l^u$, on a aussi

$$\mathbb{F}\left(j_{!}^{\geq t(u)g^{-1}} HT(\pi_{-1}, t(u))\right) = \sum_{r=0}^{s(u)-t(u)} \mathbb{F}\left({}^p j_{!*}^{\geq (t(u)+r)g^{-1}} HT(\pi_{-1}, t(u) + r, \mathbb{1}_{t(u)g^{-1}} \overrightarrow{\times} \text{St}_r(\pi_{-1})) \otimes \Xi^{\frac{r(g-1-1)}{2}}\right). \quad (2.4.7)$$

Comme $j^{\geq tg_u}$ est affine alors

$$\mathbb{F} j_{!}^{\geq tg_u} HT(\pi_u, t) = j_{!}^{\geq tg_u} \mathbb{F} HT(\pi_u, t) = m(\varrho_{-1})l^u j_{!}^{\geq t(u)g^{-1}} HT(r_l(\pi_{-1}), t(u)).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient après un rapide calcul

$$\sum_{r=1}^{s_u-t} \mathbb{F}\left({}^p j_{!*}^{\geq (t+r)g_u} HT(\pi_u, t+r, \mathbb{1}_{t g_u} \overrightarrow{\times} \text{St}_r(\pi_u))\right) \otimes \Xi^{\frac{r(g_u-1)}{2}} = \sum_{r=1}^{s(u)-t(u)} \mathbb{F}\left({}^p j_{!*}^{\geq (t(u)+r)g^{-1}} HT(\pi_{-1}, t(u) + r, \mathbb{1}_{t(u)g^{-1}} \overrightarrow{\times} V_{\varrho_{-1}}(r, \geq \underline{\delta}_u)) \otimes \Xi^{\frac{r(g-1-1)}{2}}\right) \quad (2.4.8)$$

En soustrayant (2.4.8) à (2.4.7), on obtient le résultat. \square

2.4.9. Corollaire. — *Toute filtration croissante du faisceau pervers $\mathbb{F}\left({}^p j_{!*}^{\geq tg_u} HT(\pi_u, t)\right)$ est telle que ses gradués sont des facteurs directs de*

$$j_{!*}^{\geq tg_u + rg^{-1}} \mathbb{F}\left(HT(\pi_{-1}, r + tm(\varrho_{-1})l^u, \mathbb{1}_{t g_u} \overrightarrow{\times} V_{\varrho_{-1}}(r, < \underline{\delta}_u)) \otimes \Xi^{r \frac{g-1-1}{2}}\right).$$

En outre ces gradués sont rangés dans l'ordre croissant de la dimension de leur support.

Démonstration. — D'après [5], les faisceaux de cohomologie de ${}^p j_{!*}^{\geq tg_u} HT(\pi_u, t)$ sont sans torsion de sorte que les faisceaux de cohomologie de $\mathbb{F}\left({}^p j_{!*}^{\geq tg_u} HT(\pi_u, t)\right)$ sont la réduction modulo l de ceux de ${}^p j_{!*}^{\geq tg_u} HT(\pi_u, t)$. À une filtration croissante de $\mathbb{F}\left({}^p j_{!*}^{\geq tg_u} HT(\pi_u, t)\right)$ est associée une suite spectrale calculant les faisceaux de cohomologie de $\mathbb{F}\left({}^p j_{!*}^{\geq tg_u} HT(\pi_u, t)\right)$ à partir de ceux de ses gradués. Ainsi en utilisant le corollaire 2.4.2, le raisonnement de la proposition 3.3.5 de [6], impose alors, très simplement, que les gradués sont nécessairement rangés dans l'ordre croissant de la dimension de leur support. \square

Remarque : le germe en un point géométrique de $X_{\mathcal{L}, \bar{s}_v, 1}^{\text{sg}}$ de la suite spectrale calculant les germes des faisceaux de cohomologie de $\mathbb{F}\left({}^p j_{!*}^{\geq tg_u} HT(\pi_u, t)\right)$ à partir de ceux de sa filtration de stratification exhaustive, fournit le complexe $K_{\varrho}(s, \geq t \cdot \underline{\delta}_u)^i$ de la définition 1.4.2. On retrouve à nouveau⁽²⁾ que les faisceaux de cohomologie de ${}^p j_{!*}^{\geq tg_u} HT(\pi_u, t)$ sont sans torsion.

2. Notez bien que nous n'obtenons pas ainsi une nouvelle preuve de la liberté de ces faisceaux de cohomologie puisqu'on utilisera cette propriété au paragraphe suivant pour démontrer le théorème 2.4.1.

2.4.10. Corollaire. — Avec les notations précédentes, la torsion de la fibre de $\mathcal{H}^i\left({}^{p+}j^{\geq tg_u} HT(\pi_u, t)\right)$ en un point géométrique de $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}^=h$ est

— nulle si i n'est pas de la forme $tg_u - d + \delta g_{-1} - r$ avec $0 \leq \delta \leq \frac{d-tg_u}{g_{-1}}$, $0 \leq r \leq \delta$ et $h = tg_u + \delta g_{-1}$.

— Pour $i = tg_u - d + \delta g_{-1} - r$ et $h = tg_u + \delta g_{-1}$, la réduction modulo l de la torsion de cette fibre est, dans le groupe de Grothendieck correspondant, égale à celle de $HT(\pi_{-1}, \delta + tm(\varrho_{-1})l^u, \mathbb{1}_{tg_u} \overrightarrow{\times} \Pi(u, \delta, r))[tg_u + \delta g_{-1} - d] \otimes \Xi^{\delta \frac{g_{-1}-1}{2}}$ où

$$\Pi(u, \delta, r) = \sum_{k=0}^r (-1)^k \left(V_{\varrho_{-1}}(\delta - r + k, < \underline{\delta}_u) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{r-k}(\pi_{-1}) \right) - L(\delta, r),$$

où $L(\delta, r)$ est non nul si et seulement si $(\delta, r) = (m(\varrho_{-1})l^u k, k)$ auquel cas $L(m(\varrho_{-1})l^u k, k) = r_l(\text{Speh}_k(\pi_u))$.

Remarque : le terme $L(\delta, r)$ correspond à la réduction modulo l de la partie libre des faisceaux de cohomologie.

Démonstration. — De la suite exacte courte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \left(\mathcal{H}^i \left({}^{p+}j^{\geq tg_u} HT(\pi_u, t) \right) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \overline{\mathbb{F}}_l \right) &\longrightarrow \mathcal{H}^i \left(\mathbb{F} \left({}^{p+}j_{l*}^{\geq tg_u} HT(\pi_u, t) \right) \right) \\ &\longrightarrow \left(\mathcal{H}^{i+1} \left({}^{p+}j_{l*}^{\geq tg_u} HT(\pi_u, t) \right) \right) [l] \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

où $[l]$ désigne la l -torsion, on est dans un premier temps ramené à calculer le terme du milieu.

2.4.11. Lemme. — Les fibres en un point géométrique de $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}^=h$ de $\mathcal{H}^i\left(\mathbb{F} \left({}^{p+}j_{l*}^{\geq tg_u} HT(\pi_u, t) \right)\right)$ sont

— nulles si i n'est pas de la forme $tg_u - d + \delta g_{-1} - r$ avec $0 \leq \delta \leq \frac{d-tg_u}{g_{-1}}$, $0 \leq r \leq \delta$ et $h = tg_u + \delta g_{-1}$.

— Pour $i = tg_u - d + \delta g_{-1} - r$ et $h = tg_u + \delta g_{-1}$, cette fibre est égale à celle de $HT(\pi_{-1}, \delta + tm(\varrho_{-1})l^u, \mathbb{1}_{tg_u} \overrightarrow{\times} \Pi(u, \delta, r))[tg_u + \delta g_{-1} - d] \otimes \Xi^{\delta \frac{g_{-1}-1}{2}}$ où

$$\Pi(u, \delta, r) = \left(V_{\varrho_{-1}}(\delta - r, < \underline{\delta}_u) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_r(\pi_{-1}) \right).$$

Démonstration. — Par dualité, du corollaire précédent, $\mathbb{F}\left({}^{p+}j_{l*}^{\geq tg_u} HT(\pi_u, t)\right)$ admet une filtration dont les gradués sont les

$$j_{l*}^{\geq tg_u + rg_{-1}} \mathbb{F} \left(HT \left(\pi_{-1}, r + tm(\varrho_{-1})l^u, \mathbb{1}_{tg_u} \overrightarrow{\times} V_{\varrho_{-1}}(r, < \underline{\delta}_u) \right) \otimes \Xi^{r \frac{g_{-1}-1}{2}} \right).$$

rangés dans l'ordre décroissant de la dimension de leur support. Du corollaire 2.4.2, on en déduit que la suite spectrale dont les termes $E_1^{p,q}$ sont les faisceaux de cohomologie de ces gradués et qui converge vers les faisceaux de cohomologie de $\mathbb{F}\left({}^{p+}j_{l*}^{\geq tg_u} HT(\pi_u, t)\right)$, dégénère en E_1 . □

Le premier tiret du corollaire découle alors de la suite exacte courte précédente et du lemme ci-dessus. En ce qui concerne le deuxième tiret, on va raisonner par récurrence sur r de 0 à δ . Pour $r = 0$, le résultat découle directement

- du lemme précédent en invoquant la nullité, pour tout faisceau pervers, de la fibre en un point géométrique z de $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}^{-tg_u + \delta g_{-1}}$ du faisceau de cohomologie de degré $tg_u - d + \delta g_{-1} + 1$,
- et du calcul de la partie libre du faisceau de cohomologie concerné.

Supposons le résultat acquis jusqu'au rang $r - 1$ et traitons le cas de r . De la suite exacte courte (2.4.10), le calcul de la réduction modulo l de la torsion de $\mathcal{H}^{tg_u - d + \delta g_{-1} - r}{}^{p+}j^{\geq tg_u} HT(\pi_u, t)$ s'obtient en prenant l'expression, donnée dans le lemme précédent, de $\mathcal{H}^{tg_u - d + \delta g_{-1} - r}(\mathbb{F}^{p+}j_{!*}^{\geq tg_u} HT(\pi_u, t))$ et en lui retranchant

- la réduction modulo l de la partie libre de $\mathcal{H}^{tg_u - d + \delta g_{-1} - r}{}^{p+}j^{\geq tg_u} HT(\pi_u, t)$,
 - ainsi que la réduction modulo l de la l -torsion de $\mathcal{H}^{tg_u - d + \delta g_{-1} - (r-1)}{}^{p+}j^{\geq tg_u} HT(\pi_u, t)$,
- ce qui conduit à la formule proposée. □

Remarque : l'étude de la torsion d'ordre supérieure découlerait selon le même schéma de démonstration, de l'étude de la réduction modulo l^n des représentations irréductibles de $GL_d(F_v)$ et $D_{v,d}^\times$.

3. Retour sur le cas supercuspidal modulo l

3.1. Rappels sur le faisceau pervers des cycles évanescents. — Pour $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_l, \overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{\mathbb{F}}_l$ et pour tout $I \in \mathcal{I}$, les faisceaux pervers des cycles évanescents $R\Psi_{\overline{\eta}_v, I}(\Lambda)[d-1](\frac{d-1}{2})$ sur $X_{I, \bar{s}}$ définissent un W_v -faisceau pervers de Hecke, au sens de la définition 1.3.6 de [3], que l'on note $\Psi_{\mathcal{I}, \Lambda}$.

Remarque : dans le cas où $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_l$, on notera simplement $\Psi_{\mathcal{I}}$.

Rappelons, cf. [3] §2.4, que la restriction $(\Psi_{\mathcal{I}, \Lambda})|_{X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v} = h}$ du faisceau pervers des cycles évanescents à la strate $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v} = h$, est munie d'une action de

$$(D_{v,h}^\times)^0 := \text{Ker}(\text{val} \circ \text{rn} : D_{v,h}^\times \rightarrow \mathbb{Z})$$

et de $\varpi_v^{\mathbb{Z}}$ que l'on voit plongé dans $F_v^\times \subset D_{v,h}^\times$.

3.1.1. Proposition. — (cf. [9] proposition IV.2.2 et le §2.4 de [3])

On a un isomorphisme⁽³⁾ $G(\mathbb{A}^{\infty, v}) \times P_{h,d}(F_v) \times W_v$ -équivariant

$$\text{ind}_{(D_{v,h}^\times)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v,h}^\times} \left(\mathcal{H}^{h-d-i} \Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l} \right) |_{X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v} = h} \simeq \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h)} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l, \bar{1}_h}(\mathcal{U}_{\bar{\tau}}^{h-1-i}),$$

3. Noter le décalage $[d-1]$ dans la définition de $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Z}}_l}$.

où $\mathcal{U}_{\bar{\tau}}^{\bullet}$ est défini en 4.4.1.

Pour l'essentiel la preuve du théorème 2.4.1 repose sur les propositions 2.1.1 et 2.2.1 de [5]. Afin de les formuler, introduisons quelques notations.

3.1.2. Notation. — Pour $\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(h)$, on notera $\mathcal{L}_{\bar{\mathbb{Z}}_l, \bar{\Gamma}_h}(\bar{\tau})$ pour $\mathcal{L}_{\bar{\mathbb{Z}}_l, \bar{\Gamma}_h}(\mathcal{U}_{\bar{\tau}}^{h-1})$ et $\mathcal{L}_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\bar{\tau})$ pour la version induite.

3.1.3. Définition. — Pour $\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(h)$, soit $\text{Loc}(\bar{\tau})$ le plus petit ensemble de systèmes locaux sur les strates de Newton ouvertes $X_{\bar{\mathcal{I}}, \bar{s}}^{=h'}$ pour $h' \geq h$, tel que

- $\text{Loc}(\bar{\tau})$ contient les $\mathcal{L}_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\bar{\tau})$;
- il est stable par le processus suivant : pour $\mathcal{L} \simeq i_*^h \mathcal{L}' \in \text{Loc}(\bar{\tau})$ avec \mathcal{L}' un système local sur $X_{\bar{\mathcal{I}}, \bar{s}}^{=h}$ et un épimorphisme strict $j_!^{=h} \mathcal{L}[d-h] \rightarrow F$ de noyau P_F , les systèmes locaux de la filtration de stratification exhaustive de P_F appartiennent à $\text{Loc}(\bar{\tau})$.
- si $\mathcal{L}_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \in \text{Loc}(\bar{\tau})$ alors tout réseau stable de $\mathcal{L}_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{Q}}_l$ appartient aussi à $\text{Loc}(\bar{\tau})$.

Pour tout $h' \geq h$, on notera aussi $\text{Loc}(\bar{\tau}, h')$ le sous-ensemble de $\text{Loc}(\bar{\tau})$ constitué des systèmes locaux \mathcal{L} dont le support est un ouvert de $X_{\bar{\mathcal{I}}, \bar{s}_v}^{=h'}$.

3.1.4. Proposition. — (cf. [5] proposition 2.1.1) Pour tout $\mathcal{L} \in \text{Loc}(h', \bar{\tau})$, les gradués de la filtration exhaustive de stratification de $j_!^{=h'} \mathcal{L}[d-h']$ sont de la forme

$${}^p j_!^{=h'+\delta} \mathcal{L}_{\delta}[d-h'-\delta]$$

avec $\mathcal{L}_{\delta} \in \text{Loc}(h'+\delta, \bar{\tau})$.

Considérons à présent la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}}$:

$$0 = \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^0(\Psi_{\mathcal{I}}) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^1(\Psi_{\mathcal{I}}) \subset \cdots \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^d(\Psi_{\mathcal{I}}) = \Psi_{\mathcal{I}}.$$

3.1.5. Proposition. — (cf. [5] proposition 2.2.1) Pour tout $1 \leq h \leq d$, le conoyau du morphisme d'adjonction

$$j_!^{=h} j^{=h,*} \left(\Psi_{\mathcal{I}} / \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^{h-1}(\Psi_{\mathcal{I}}) \right) \longrightarrow \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^h(\Psi_{\mathcal{I}}) / \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^{h-1}(\Psi_{\mathcal{I}})$$

est libre.

3.2. Décomposition supercuspidale. — D'après le théorème 2.1.8, toute $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de $D_{v,d}^{\times}$ est associée à une $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible supercuspidale ρ de $GL_g(F_v)$ pour g un diviseur de $d = sg$. Ainsi la décomposition de la proposition 3.1.1 se raffine en une décomposition

$$\text{ind}_{(D_{v,h}^{\times})^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v,h}^{\times}} \left(h^i \Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l} \right) \Big|_{X_{\bar{\mathcal{I}}, \bar{s}, 1}^{=h}} \simeq \bigoplus_{g|h} \bigoplus_{\rho \in \text{Scusp}_v(g)} \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{C}(\rho, h)} \mathcal{F}_{\bar{\mathbb{Z}}_l, 1}(\rho_{v, \bar{\tau}}, i)$$

où selon la notation 1.1.5, $\text{Scusp}_v(g)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence des $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles supercuspidales de $GL_g(F_v)$ et, cf. 2.1.9, $\mathcal{C}(\rho, h)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalences des $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles de $D_{v,h}^\times$ associées à ρ via la bijection du théorème 2.1.8.

3.2.1. Définition. — Pour $\rho \in \text{Scusp}_v(g)$, on note

$$\text{Loc}(\rho) = \bigcup_{h=1}^d \bigcup_{\bar{\tau} \in \mathcal{C}(\rho, h)} \text{Loc}(\bar{\tau}).$$

Remarque : la réunion sur h ne porte en fait que sur les multiples de g .

On dira d'un $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -système local \mathcal{L} sans torsion qu'il est de type ρ si tous les constituants irréductibles de $\mathcal{L} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l$ sont dans $\text{Loc}(\rho)$. Un $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -faisceau pervers libre P est dit de type ρ si les constituants irréductibles de $P \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ sont des extensions intermédiaires de systèmes locaux entiers de type ρ au sens précédent.

3.2.2. Proposition. — *Il existe une décomposition*

$$\Psi_{\mathcal{I}} \simeq \bigoplus_{1 \leq g \leq d} \bigoplus_{\rho \in \text{Scusp}_v(g)} \Psi_{\mathcal{I}, \rho}$$

où pour tout $\rho \in \text{Scusp}_v(g)$, le faisceau pervers libre $\Psi_{\mathcal{I}, \rho}$ est de type ρ .

Démonstration. — On reprend la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}}$

$$0 = \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^0(\Psi_{\mathcal{I}}) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^1(\Psi_{\mathcal{I}}) \subset \cdots \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^d(\Psi_{\mathcal{I}}) = \Psi_{\mathcal{I}}$$

et on raisonne par récurrence sur r de 0 à d en supposant qu'une telle décomposition existe pour $\text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^r(\Psi_{\mathcal{I}})$. Le cas de $r = 0$ étant clair, supposons le résultat acquis pour $r - 1$ et montrons le pour r . On note $\text{gr}_{\mathfrak{S}, !}^r(\Psi_{\mathcal{I}})$ le quotient $\text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^r(\Psi_{\mathcal{I}}) / \text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I}})$ dont on rappelle que d'après [5] il est isomorphe à ${}^p h^0 i^{r,*} \Psi_{\mathcal{I}}$. Une formulation équivalente de la proposition 3.1.5 consiste à dire que le morphisme d'adjonction

$$j_!^{\leq r} j^{=r,*} \text{gr}_{\mathfrak{S}, !}^r(\Psi_{\mathcal{I}}) \longrightarrow \text{gr}_{\mathfrak{S}, !}^r(\Psi_{\mathcal{I}})$$

est surjectif dans ${}^p \mathcal{C}$. On écrit

$$j^{=r,*} \text{gr}_{\mathfrak{S}, !}^r(\Psi_{\mathcal{I}}) \simeq \bigoplus_{g|r} \bigoplus_{\rho \in \text{Scusp}_v(g)} \mathcal{L}_{r, \rho},$$

où $\mathcal{L}_{r, \rho}$ est un système local sur la strate $X_{\overline{\mathbb{Z}}_l, s}^{\leq r}$ de type ρ au sens précédent. On peut ainsi écrire

$$\text{gr}_{\mathfrak{S}, !}^r(\Psi_{\mathcal{I}}) \simeq \bigoplus_{g|r} \bigoplus_{\rho \in \text{Scusp}_v(g)} \text{gr}_{\mathfrak{S}, !, \rho}^r(\Psi_{\mathcal{I}})$$

avec $j_!^{\geq r} \mathcal{L}_{r, \rho}[d - r] \rightarrow \text{gr}_{\mathfrak{S}, !, \rho}^r(\Psi_{\mathcal{I}})$ dans ${}^p \mathcal{C}$. Ainsi d'après la proposition 3.1.4, $\text{gr}_{\mathfrak{S}, !, \rho}^r(\Psi_{\mathcal{I}})$ est un faisceau pervers libre de type ρ ; en outre il admet une filtration dont les gradués sont des ${}^p j_{!*}^{\geq r'}$ extensions intermédiaires de certains systèmes locaux de type ρ .

3.2.3. Lemme. — Soient ρ et ρ' deux $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles cuspidales distinctes dans respectivement $\mathrm{Scusp}_v(g)$ et $\mathrm{Scusp}_v(g')$. Soit P un p -faisceau pervers sans torsion tel que

$$0 \rightarrow A' \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow 0$$

où :

- il existe h et h' ainsi que deux systèmes locaux \mathcal{L} et \mathcal{L}' sur respectivement $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{S}}}^{\leq h}$ et $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{S}}}^{\leq h'}$ respectivement de type ρ et ρ' , tels que
- A (resp. A') est isomorphe à ${}^p j_{!*}^{\leq h} \mathcal{L}[d-h]$; (resp. ${}^p j_{!*}^{\leq h'} \mathcal{L}'[d-h']$).

Alors $P \simeq A \oplus A'$.

Démonstration. — Le cas $h = h'$ découle de la proposition 2.1.5. Supposons pour commencer que $h > h'$ de sorte que $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{S}}}^{\geq h} \subset X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{S}}}^{\geq h'}$ et traitons tout d'abord le cas où les coefficients sont $\overline{\mathbb{Q}}_l$. La flèche d'adjonction

$$P \rightarrow j_*^{\leq h'} j^{h', *}_{!*} P$$

a, puisque tous les constituants irréductibles de $j_*^{\leq h'} j^{h', *}_{!*} P$ sont de type ρ' , pour image A' d'où le résultat. Revenons aux coefficients $\overline{\mathbb{Z}}_l$ et considérons la t -structure \tilde{p} obtenue en recollant

- la t structure usuelle p , cf. le début du §2.3, sur l'ouvert $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{S}}}^{\geq h'} - X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{S}}}^{\geq h}$ avec
- la t -structure $p[-1]$ sur $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{S}}}^{\geq h}$ où p est encore la t -structure usuelle.

Notons alors que $A[-1]$ est \tilde{p} -pervers ainsi que A' puisque

$${}^p j_{!*}^{\leq h'} \mathcal{L}'[d-h'] = i_*^{\leq h'} \tilde{p} j_!^{\leq h'} \left({}^p j_{!*}^{\leq h'} \mathcal{L}'[d-h'] \right)$$

où

$$j^{h' \leq h} : X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{S}}}^{\geq h'} - X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{S}}}^{\geq h} \hookrightarrow X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{S}}}^{\geq h'} \quad \text{et} \quad j^{h' \sim h} : X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{S}}}^{\leq h'} \hookrightarrow X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{S}}}^{\geq h'} - X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{S}}}^{\geq h}.$$

Ainsi P définit une flèche $A[-1] \rightarrow A'$ de \tilde{p} -faisceaux pervers dont l'image est, d'après le cas de $\overline{\mathbb{Q}}_l$, contenue dans la torsion de $\tilde{p} j_!^{\leq h'} \left({}^p j_{!*}^{\leq h'} \mathcal{L}'[d-h'] \right)$ laquelle est donc à support dans $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{S}}}^{\geq h+1}$. On conclut en notant que toute flèche de ${}^p j_{!*}^{\geq h} \mathcal{L}[d-h]$ dans un faisceau pervers à support dans $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{S}}}^{\geq h+1}$ est nulle.

Considérons à présent le cas $h < h'$. Pour les coefficients $\overline{\mathbb{Q}}_l$, l'image du morphisme d'adjonction

$$j_!^{\leq h} j^{h, *}_{!*} P \rightarrow P$$

est, pour la même raison que précédemment, isomorphe à A d'où le résultat. Pour les coefficients $\overline{\mathbb{Z}}_l$, considérons la t -structure \tilde{p} obtenue en recollant celle usuelle p sur $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{S}}}^{\geq h'} - X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{S}}}^{\geq h}$ avec la t -structure $p[1]$ sur $X_{\overline{\mathcal{I}}, \overline{\mathcal{S}}}^{\geq h}$ où p est encore la t -structure usuelle. L'extension P définit alors une flèche entre \tilde{p} faisceaux pervers $A \rightarrow A'[1]$ où

$$A \simeq {}^p j_{!*}^{\leq h} \mathcal{L}[d-h] \simeq i_*^{\leq h} \tilde{p} j_!^{\leq h'} \left({}^p j_{!*}^{\leq h'} \mathcal{L}[d-h] \right)$$

est un faisceau pervers sans torsion. Ainsi la nullité de cette flèche découle du cas des coefficients $\overline{\mathbb{Q}}_l$. \square

Considérons alors

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I}}) & \longrightarrow & \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(\Psi_{\mathcal{I}}) & \longrightarrow & \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^r(\Psi_{\mathcal{I}}) \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{1 \leq g \leq d} \bigoplus_{\rho \in \mathrm{Scusp}_v(g)} \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I}}) & \longrightarrow & P_{\rho_0} & \dashrightarrow & \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{r,\rho_0}(\Psi_{\mathcal{I}}) \longrightarrow 0
\end{array}$$

D'après les propositions 3.1.4 et 3.1.5, $\mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{r,\rho_0}(\Psi_{\mathcal{I}})$ admet une filtration dont les gradués sont sans torsion et isomorphes à des p -extensions intermédiaires de systèmes locaux de type ρ_0 . De même pour tout ρ , le faisceau pervers $\mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I}})$ admet une filtration dont les gradués sont sans torsion et isomorphes à des p -extensions intermédiaires de systèmes locaux de type ρ . Il résulte alors du lemme précédent que P_{ρ_0} s'écrit comme une somme directe

$$P_{\rho_0} \simeq \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(\Psi_{\mathcal{I}}) \oplus \bigoplus_{\rho \neq \rho_0} \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I}}).$$

En répétant le raisonnement précédent pour tous les ρ , on en déduit le résultat. \square

3.3. Preuve du théorème 2.4.1. — Commençons par le lemme suivant.

3.3.1. Lemme. — *Pour tout $1 \leq h \leq d$ et pour tout $\rho \in \mathrm{Scusp}_v(g)$, les p et $p+$ extensions intermédiaires de $j^{1 \leq h,*} \Psi_{\mathcal{I},\rho}$ sont les mêmes, i.e.*

$${}^p j_{!*}^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} \Psi_{\mathcal{I},\rho} = {}^{p+} j_{!*}^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} \Psi_{\mathcal{I},\rho}.$$

Démonstration. — Rappelons que le morphisme d'adjonction

$${}^{p+} j_{!*}^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} \Psi_{\mathcal{I},\rho} \longrightarrow \Psi_{\mathcal{I},\rho}$$

a pour image dans ${}^p \mathcal{C}$, le faisceau pervers $\mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^h(\Psi_{\mathcal{I}})$ et pour conoyau ${}^p h^0 i^{h+1,*} \Psi_{\mathcal{I},\rho}$. D'après [5] ce dernier est libre ce qui nous fournit une surjection

$$\mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^h(\Psi_{\mathcal{I},\rho}) \twoheadrightarrow {}^p j_{!*}^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} \Psi_{\mathcal{I},\rho}$$

puisque le noyau du morphisme d'adjonction précédent est à support dans $X_{\overline{\mathcal{I}},\overline{s}}^{\geq h+1}$. Soit alors le poussé en avant P

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^h(\Psi_{\mathcal{I},\rho}) & \longrightarrow & \Psi_{\mathcal{I},\rho} & \longrightarrow & \Psi_{\mathcal{I},\rho} / \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^h(\Psi_{\mathcal{I}}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & {}^p j_{!*}^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} \Psi_{\mathcal{I},\rho} & \dashrightarrow & P & \longrightarrow & \Psi_{\mathcal{I},\rho} / \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^h(\Psi_{\mathcal{I},\rho}) \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Notons que $j^{1\leq h,*}\Psi_{\mathcal{I},\rho} \simeq j^{1\leq h,*}P$ et comme le noyau de $\Psi_{\mathcal{I},\rho} \rightarrow P$ est à support dans $X_{\bar{\mathcal{I}},\bar{s}}^{\geq h+1}$, alors pour tout $\delta > 0$ on a

$${}^p\mathcal{H}^\delta i^{h+1,!}\Psi_{\mathcal{I},\rho} \simeq {}^p\mathcal{H}^\delta i^{h+1,!}P.$$

Rappelons, cf. [6], que pour tout faisceau pervers Q sans torsion, le conoyau du morphisme d'adjonction $Q \rightarrow j_*j^*Q$ est isomorphe à ${}^p\mathcal{H}^1 i^!Q$. On en déduit ainsi que

- $j_*^{1\leq h} j^{1\leq h,*}P \simeq j_*^{1\leq h} j^{1\leq h,*}\Psi_{\mathcal{I},\rho}$ et
- les conoyaux des morphismes d'adjonction

$$P \rightarrow j_*^{1\leq h} j^{1\leq h,*}P \quad \text{et} \quad \Psi_{\mathcal{I},\rho} \rightarrow j_*^{1\leq h} j^{1\leq h,*}\Psi_{\mathcal{I},\rho}$$

sont isomorphes.

On obtient ainsi une surjection dans ${}^p\mathcal{C}$

$$P \rightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,h}(\Psi_{\mathcal{I},\rho}),$$

où on rappelle que $\text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,h}(\Psi_{\mathcal{I},\rho}) := \text{Coim}_{\mathcal{F}}(\Psi_{\mathcal{I},\rho} \rightarrow {}^p j_*^{1\leq h} j^{1\leq h,*}\Psi_{\mathcal{I},\rho})$ est la cofiltration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I},\rho}$. Comme le socle de $P \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{Q}}_l$ ne contient aucun faisceau pervers à support dans $X_{\bar{\mathcal{I}},\bar{s}}^{\geq h+1}$, on en déduit que la surjection précédente est aussi injective et donc

$$P \simeq \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,h}(\Psi_{\mathcal{I},\rho}).$$

Or la surjection dans ${}^p\mathcal{C}$, $\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^h(\Psi_{\mathcal{I},\rho}) \rightarrow {}^p j_{!*}^{1\leq h} j^{1\leq h,*}\Psi_{\mathcal{I},\rho}$, se dualise en une injection dans ${}^{p+}\mathcal{C}$

$${}^{p+} j_{!*}^{1\leq h} j^{1\leq h,*}\Psi_{\mathcal{I},\rho} \hookrightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,h}(\Psi_{\mathcal{I},\rho})$$

i.e. en une injection dans ${}^p\mathcal{C}$ dont le conoyau est sans torsion. On se retrouve alors dans la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & {}^p j_{!*}^{1\leq h} j^{1\leq h,*}\Psi_{\mathcal{I},\rho} & \longrightarrow & \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,h}(\Psi_{\mathcal{I},\rho}) & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \\ & & & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & {}^{p+} j_{!*}^{1\leq h} j^{1\leq h,*}\Psi_{\mathcal{I},\rho} & \longrightarrow & \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,h}(\Psi_{\mathcal{I},\rho}) & \longrightarrow & Z' \longrightarrow 0 \end{array}$$

où Z et Z' sont des faisceaux pervers sans torsion à support dans $X_{\bar{\mathcal{I}},\bar{s}}^{\geq h+1}$. Comme il n'y a pas de flèche non nulle entre ${}^{p+} j_{!*}^{1\leq h} j^{1\leq h,*}\Psi_{\mathcal{I},\rho}$ et un faisceau pervers sans torsion à support dans $X_{\bar{\mathcal{I}},\bar{s}}^{\geq h+1}$, on obtient alors une flèche de

$${}^{p+} j_{!*}^{1\leq h} j^{1\leq h,*}\Psi_{\mathcal{I},\rho} \longrightarrow {}^p j_{!*}^{1\leq h} j^{1\leq h,*}\Psi_{\mathcal{I},\rho}$$

lesquels sont alors isomorphes comme annoncé. \square

Revenons à présent à la preuve du théorème 2.4.1. Soit $\rho \in \text{Scusp}_v(g)$ de sorte que $j^{=g,*}\Psi_{\mathcal{I},\rho} \simeq \mathcal{L}_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\bar{\tau})$ où on a posé $\bar{\tau}$ la réduction modulo l de $\pi_v[1]_D$ pour π_v dont la réduction modulo l est ρ . La filtration de stratification exhaustive de $\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^g(\Psi_{\mathcal{I},\rho})$ fournit, d'après [3], des faisceaux localement constant notés $\mathcal{L}(\bar{\tau}, t) \in \text{Loc}(\bar{\tau}, tg)$ pour tout $1 \leq t \leq \frac{d}{g}$. D'après

les propositions 3.1.4 et 3.1.5, les gradués de cette filtration sont les ${}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{L}(\bar{\tau}, t)[d - tg]$. Pour $1 \leq t \leq \frac{d}{g}$ fixé, on peut ainsi écrire

$$0 \rightarrow A_\rho(t) \rightarrow \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^g(\Psi_{\mathcal{I},\rho}) \rightarrow B_\rho(t) \rightarrow 0$$

où $A_\rho(t) \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{Q}}_l$ rassemble les constituants irréductibles de $\mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},\rho}^1(\Psi_{\mathcal{I}}) \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{Q}}_l$ à support dans $X_{\bar{\mathcal{I}},\bar{s}}^{\geq tg+1}$. On a en outre la suite exacte courte

$$0 \rightarrow A_\rho(t) \rightarrow \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\rho}) \rightarrow {}^p j_{!*}^{1 \leq tg} j^{1 \leq tg,*} \Psi_{\mathcal{I},\rho} \rightarrow 0,$$

et donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_\rho(t) & \longrightarrow & \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^1(\Psi_{\mathcal{I},\rho}) & \longrightarrow & B_\rho(t) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_\rho(t) & \longrightarrow & \mathrm{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\rho}) & \longrightarrow & {}^p j_{!*}^{1 \leq tg} j^{1 \leq tg,*} \Psi_{\mathcal{I},\rho} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & Q & \xlongequal{\quad\quad\quad} & Q & & \end{array}$$

Le composé des monomorphismes stricts

$${}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{L}(\bar{\tau}, t)[d - tg] \hookrightarrow B_\rho(t) \hookrightarrow {}^p j_{!*}^{1 \leq tg} j^{1 \leq tg,*} \Psi_{\mathcal{I},\rho}$$

fournit un monomorphisme strict

$${}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{L}(\bar{\tau}, t)[d - tg] \hookrightarrow {}^p j_{!*}^{1 \leq tg} j^{1 \leq tg,*} \Psi_{\mathcal{I},\rho} = {}^{p+} j_{!*}^{1 \leq tg} j^{1 \leq tg,*} \Psi_{\mathcal{I},\rho},$$

qui se factorise par le monomorphisme strict

$${}^{p+} j_{!*}^{-tg} \mathcal{L}(\bar{\tau}, t)[d - tg] \hookrightarrow {}^p j_{!*}^{1 \leq tg} j^{1 \leq tg,*} \Psi_{\mathcal{I},\rho}$$

pour fournir un monomorphisme strict

$${}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{L}(\bar{\tau}, t)[d - tg] \hookrightarrow {}^{p+} j_{!*}^{-tg} \mathcal{L}(\bar{\tau}, t)[d - tg],$$

qui est donc un isomorphisme.

Pour en arriver finalement aux systèmes locaux d'Harris-Taylor du théorème 2.4.1, rappelons que

$$\mathcal{L}(\bar{\tau}, t)[d - tg] \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\pi_v / r_l(\pi_v) \simeq \rho} HT(\pi_v, t, \mathrm{St}_t(\pi_v)).$$

Pour π_v dont la réduction modulo l est ρ , le $\bar{\mathbb{Z}}_l$ -faisceau localement constant $\mathcal{L}(\bar{\tau}, t)$ découpe un réseau stable $HT_\Gamma(\pi_v, t)$ de $HT(\pi_v, t)$ avec

$$0 \rightarrow HT_\Gamma(\pi_v, t) \rightarrow \mathcal{L}(\bar{\tau}, t)[d - tg] \rightarrow \mathcal{L}(\rho, t)^{\pi_v}[d - tg] \rightarrow 0$$

où $\mathcal{L}(\rho, t)^{\pi_v}$ est un faisceau localement constant sans torsion. Le raisonnement précédent nous fournit des monomorphismes stricts ${}^p j_{!*}^{-tg} HT_\Gamma(\pi_v, t, \mathrm{St}_t(\pi_v)) \hookrightarrow B_\rho(t)$ ainsi que

${}^p j_{!*}^{-tg} HT_{\Gamma}(\pi_v, t, \text{St}_t(\pi_v)) \hookrightarrow {}^p j_{!*}^{1 \leq tg} j^{1 \leq tg, *} \Psi_{\mathcal{I}, \rho}$ et ${}^{p+} j_{!*}^{-tg} HT_{\Gamma}(\pi_v, t, \text{St}_t(\pi_v)) \hookrightarrow {}^{p+} j_{!*}^{1 \leq tg} j^{1 \leq tg, *} \Psi_{\mathcal{I}, \rho}$
et donc finalement

$${}^p j_{!*}^{-tg} HT_{\Gamma}(\pi_v, t, \text{St}_t(\pi_v)) = {}^{p+} j_{!*}^{-tg} HT_{\Gamma}(\pi_v, t, \text{St}_t(\pi_v)).$$

On en déduit alors que ${}^p \mathcal{H}_{tors}^0 i^{tg+1, *} j_*^{-tg} HT_{\Gamma}(\pi_v, t, \text{St}_t(\pi_v))$ est nul, ce qui clairement ne dépend pas du réseau Γ , ni de la représentation « infinitésimale » $\text{St}_t(\pi_v)$, d'où le résultat.

4. Réseaux

Le but de ce paragraphe est de donner des informations sur les réseaux associés aux faisceaux pervers d'Harris-Taylor découpés par le faisceau pervers des cycles évanescents.

4.1. Construction. — Soit $1 \leq g \leq d$ et $\rho \in \text{Scusp}_v(g)$: on note comme précédemment $\bar{\tau}$ la réduction modulo l de $\pi_v[1]_D$ pour π_v cuspidale dont la réduction modulo l est ρ .

4.1.1. Notation. — Avec les notations du §1.2, soient $s(\rho)$ la plus grande puissance de l divisant $\frac{d}{m(\rho)g}$ et

$$g_{-1}(\rho) = g \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq i \leq s(\rho), \quad g_i(\rho) = m(\rho)l^i g.$$

4.1.2. Proposition. — (cf. [8] proposition 2.3.2) Avec les notations de 2.1.9, soient $\bar{\tau} \in \mathcal{C}(\rho, d)$ et $\tau' \in \mathcal{C}_{\bar{\tau}}$ une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible entière, cf. la définition 2.1.4. Il existe alors un unique entier $-1 \leq i \leq s(\rho)$, ainsi qu'une représentation irréductible cuspidale π_i de $GL_{g_i(\rho)}(F_v)$ dont la réduction modulo l est isomorphe à ρ_i , cf. la notation 1.2.8, tels que $\tau' \simeq \pi_i[\frac{d}{g_i(\rho)}]_D$.

4.1.3. Définition. — Avec les notations de la proposition précédente, τ' (resp. un sous-quotient irréductible de la réduction modulo l de τ') sera dit de $\bar{\tau}$ -type i .

4.1.4. Notation. — On note $\text{Scusp}_i(\rho)$ l'ensemble des classes d'équivalences des $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentations irréductibles entières cuspidales de $\bar{\tau}$ -type i .

Soit alors comme dans la proposition 3.2.2, $\Psi_{\mathcal{I}, \rho}$ le facteur associé de $\Psi_{\mathcal{I}}$ et $\text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}^{\bullet}(\Psi_{\mathcal{I}, \rho})$ sa filtration de stratification. Rappelons que les gradués $\text{gr}_{\mathfrak{S}, !}^k(\Psi_{\mathcal{I}, \rho})$ non nuls sont $k = tg$ pour $t = 1, \dots, s := \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$. Pour tout $1 \leq t \leq s$, le faisceau pervers $\text{gr}_{\mathfrak{S}, !}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \rho})$ est à support dans $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}^{\geq tg}$ avec

$$\text{ind}_{(D_{v, tg}^{\times})^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v, tg}^{\times}} \left(j^{=tg, *} \text{gr}_{\mathfrak{S}, !}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \rho}) \right) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\substack{i=-1 \\ g_i(\bar{\tau})|tg}}^{s(\bar{\tau})} \bigoplus_{\pi_v \in \text{Scusp}_i(\rho)} HT(\pi_v, \text{St}_{t_i}(\pi_v)) \otimes L_g(\pi_v) \left(-\frac{t_i - 1}{2} \right),$$

où $t_i = \frac{tg}{g_i(\bar{\tau})} = \frac{t}{m(\bar{\tau})l^i}$. Considérons alors la $\bar{\tau}$ -filtration naïve de

$$\text{Fil}_{\rho, s(\rho), \overline{\mathbb{Q}}_l}(\Psi, tg) \subset \dots \subset \text{Fil}_{\rho, -1, \overline{\mathbb{Q}}_l}(\Psi, tg) = j^{=tg, *} \text{gr}_{\mathfrak{S}, !}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I}, \rho}) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$$

où

$$\mathrm{ind}_{(D_{v,tg}^\times)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v,tg}^\times} \left(\mathrm{Fil}_{\rho,k,\overline{\mathbb{Q}}_l}(\Psi, tg) \right) := \bigoplus_{\substack{i=k \\ g_i(\rho)|tg}}^{s(\rho)} \bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Scusp}_i(\rho)} HT(\pi_v, \mathrm{St}_{t_i}(\pi_v)) \otimes L_g(\pi_v) \left(-\frac{t_i - 1}{2} \right).$$

ainsi que la filtration associée de $j^{=tg,*} \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\rho})$

$$\mathrm{Fil}_{\rho,k}(\Psi, tg) := \mathrm{Fil}_{\rho,k,\overline{\mathbb{Q}}_l}(\Psi, tg) \cap \mathrm{ind}_{(D_{v,tg}^\times)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v,tg}^\times} \left(j^{=tg,*} \mathrm{gr}_{\mathfrak{S},!}^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\rho}) \right).$$

Pour $k = -1, \dots, s(\rho)$, les gradués $\mathrm{gr}_{\rho,k}(\Psi, tg)$ associés sont alors sans torsion et de ρ -type k . On filtre à nouveau chacun de ses gradués en séparant, sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, les différents $\pi_v \in \mathrm{Scusp}_k(\rho)$ et on note

$$\mathrm{Fil}_{\rho,\pi_v}(\Psi, tg)$$

la filtration ainsi obtenue.

Remarque : comme le laisse supposer la notation, nous verrons que les réseaux obtenus ne dépendent pas de l'ordre choisi pour les π_v à l'intérieur de $\mathrm{Scusp}_k(\rho)$.

On note ainsi $\mathrm{gr}_{\rho,\pi_v}(\Psi, tg)$ les gradués de sorte que $\mathrm{ind}_{(D_{v,tg}^\times)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v,tg}^\times} \left(\mathrm{gr}_{\rho,\pi_v}(\Psi, tg) \right)$ est un système local $\Gamma_{GDW}(\pi_v, t_i)$ où $t_i g_i(\rho) = tg$ avec

$$\Gamma_{GDW}(\pi_v, t_i) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \mathrm{St}_{t_i}(\pi_v) \otimes \pi_v[t_i]_D \otimes L_{g_i(\bar{\tau})}(\pi_v).$$

4.2. Cas supercuspidal. — Avec les notations précédentes, on fixe $\pi_v \in \mathrm{Scusp}_{-1}(\rho)$.

4.2.1. Proposition. — *Pour tout $1 \leq t \leq s$, le système local $\Gamma_{GDW}(\pi_v, t)$ est isomorphe à un produit tensoriel*

$$\Gamma_{GDW}(\pi_v, t) \simeq \Gamma_G(\pi_v, t) \otimes \Gamma_D(\pi_v, t) \otimes \Gamma_W(\pi_v, t)$$

de réseaux de respectivement $GL_{t_g}(F_v)$, $D_{v,tg(\rho)}^\times$ et de W_v tels que :

- $\Gamma_G(\pi_v, t)$ est isomorphe au réseau d'induction $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l,+}(\pi_v, t)$ de la définition 1.3.1 ;
- $\Gamma_D(\pi_v, t)$ (resp. $\Gamma_W(\pi_v, t)$) est l'unique, à isomorphisme près, réseau stable de $\pi_v[t]_D$ (resp. de $L_g(\pi_v)$).

Démonstration. — Notons tout d'abord que pour $t = 1$, la réduction modulo l de π_v (resp. $\pi_v[1]_D$ et $L_g(\pi_v)$) est irréductible de sorte que tous ses réseaux stables sont isomorphes. Il en est donc de même pour $\pi_v \otimes \pi_v[1]_D \otimes L_g(\pi_v)$ d'où le résultat.

Avec les notations de 2.2.5, considérons à présent la filtration de stratification exhaustive de $j_!^{=g} \mathcal{F}_{\Gamma_D(\pi_v,1)}(\pi_v, 1)[d-g] \otimes \Gamma_G(\pi_v, 1) \otimes \Gamma_W(\pi_v, 1)$, dont on note $\mathrm{grr}_{\mathfrak{S},!}^r(\pi_v, 1)$ les gradués. D'après [6], ces gradués sont nuls sauf ceux d'indice $r = r_g - 2^{d-1} \delta_k(g)$ pour $k = 0, \dots, s-1$, où $r_1 = 0$ et pour $g > 1$, $r_g = 2^{d-2} + \dots + 2^{d-g}$, et $\delta_k(g) = \sum_{i=1}^k 2^{-ig}$ pour $k > 0$ et $\delta_0 = 0$. Pour ces r , on a

$$\mathrm{grr}_{\mathfrak{S},!}^{r_g - 2^{d-1} \delta_k(g)}(\pi_v, 1) \simeq j_{!*}^{=(1+k)g} \mathcal{F}_{\Gamma_D(\pi_v,k+1)}[d-(k+1)g] \otimes \Gamma_G(\pi_v) \overrightarrow{\times} \Gamma_G(\mathrm{St}_k(\pi_v)) \otimes \Gamma_W(\pi_v, 1) \otimes \Xi^{-k/2}.$$

Remarque : comme noté précédemment, la réduction modulo l de $\pi_v[k+1]_D$ étant irréductible, il n'y a, à isomorphisme près, qu'un unique réseau stable de $\pi_v[k+1]_D$.

4.2.2. Proposition. — *Le réseau $\Gamma_G(\text{St}_k(\pi_v))$ défini ci-dessus, est le réseau d'induction $RI_{\mathbb{Z}_l, -}(\pi_v, k)$ du §1.3.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur k . Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $k-1$ et considérons la suite spectrale calculant les germes en un point géométrique de $X_{\mathcal{I}, \bar{s}_v}^{-kg}$ des faisceaux de cohomologie de

$$\text{ind}_{(D_{v, tg}^\times)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v, tg}^\times} \left(j_!^{-g} \mathcal{F}_{\Gamma_D(\pi_v, 1)}(\pi_v, 1)[d-g] \otimes \Gamma_G(\pi_v, 1) \otimes \Gamma_W(\pi_v, 1) \right)$$

à partir de ceux de ses gradués $\text{gr}^r(\pi_v, 1)$. D'après [5], les termes en E_1 sont sans torsion de sorte que d'après [3], on a une surjection

$$\Gamma_G(\pi_v, 1) \xrightarrow{\times} RI_{\mathbb{Z}_l, -}(\pi_v, k-1) \xrightarrow{\times} \pi_v \twoheadrightarrow \Gamma_G(\pi_v, 1) \xrightarrow{\times} \Gamma_G(\text{St}_k(\pi_v)),$$

d'où le résultat d'après 1.3.1. □

D'après [5], on a une surjection stricte

$$j_!^{-g} j^{=g, *} \text{gr}_{\mathfrak{S}, !}^g(\Psi_{\mathcal{I}, \rho}) \twoheadrightarrow \text{gr}_{\mathfrak{S}, !}^g(\Psi_{\mathcal{I}, \rho})$$

qui permet de définir

$$\begin{array}{ccc} j_!^{-g} j^{=g, *} \text{gr}_{\mathfrak{S}, !}^g(\Psi_{\mathcal{I}, \rho}) & \longrightarrow & \text{gr}_{\mathfrak{S}, !}^g(\Psi_{\mathcal{I}, \rho}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ j_!^{-g} \text{gr}_{\rho, \pi_v}(\Psi, g) & \dashrightarrow & \text{gr}_{\mathfrak{S}, !, \pi_v}^g(\Psi_{\mathcal{I}, \rho}). \end{array}$$

Par ailleurs comme $\text{Fil}_{\rho, 0}(\Psi, g)$ est nul, $j_!^{-g} \text{gr}_{\rho, \pi_v}(\Psi, g)$ est un facteur direct de $j_!^{-g} j^{=g, *} \text{gr}_{\mathfrak{S}, !}^g(\Psi_{\mathcal{I}, \rho})$ dont l'image dans $\text{gr}_{\mathfrak{S}, !}^g(\Psi_{\mathcal{I}, \rho})$ fournit un relèvement de $\text{gr}_{\mathfrak{S}, !, \pi_v}^g(\Psi_{\mathcal{I}, \rho})$ qui en est donc un facteur direct.

4.2.3. Corollaire. — *Les gradués de la filtration de stratification exhaustive de $\text{gr}_{\mathfrak{S}, !, \pi_v}^g(\Psi_{\mathcal{I}, \rho})$ sont les ${}^p j_!^{-kg} \mathcal{F}_!(\rho, \pi_v, k)$ pour $k = 1, \dots, s$ avec*

$$\text{ind}_{(D_{v, kg}^\times)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v, kg}^\times} \left(\mathcal{F}_!(\rho, \pi_v, k) \right) \simeq \mathcal{F}_{\Gamma_D(\pi_v, k)} \otimes RI_{\mathbb{Z}_l, -}(\pi_v, k-1) \otimes \Gamma_W(\pi_v, 1).$$

Par dualité, les gradués de la filtration exhaustive de stratification du gradué $\text{gr}_{\mathfrak{S}, *, \pi_v}^{-g}(\Psi_{\mathcal{I}, \rho})$ sont les ${}^{p+} j_!^{-kg} \mathcal{F}_*(\rho, \pi_v, k)$ où

$$\text{ind}_{(D_{v, kg}^\times)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v, kg}^\times} \left(\mathcal{F}_*(\rho, \pi_v, k) \right) \simeq \mathcal{F}_{\Gamma_D(\pi_v, k)} \otimes RI_{\mathbb{Z}_l, +}(\pi_v, k-1) \otimes \Gamma_W(\pi_v, 1).$$

Le résultat découle alors directement du lemme suivant. □

4.2.4. Lemme. — Avec les notations précédentes, le système local $\mathrm{gr}_{\rho, \pi_v}(\Psi, tg)$ est isomorphe à $\mathcal{F}_*(\rho, \pi_v, k)$.

Démonstration. — La surjection stricte $\Psi_{\mathcal{I}, \rho} \rightarrow \mathrm{CoFil}_{g, *}(\Psi_{\mathcal{I}, \rho})$ fournit une surjection stricte $j^{1 \leq tg, *} \Psi_{\mathcal{I}, \rho} \rightarrow \mathcal{F}_*(\rho, \pi_v, k)$: notons K_1 son noyau. Par construction, on a une surjection stricte $j^{1 \leq tg, *} \Psi_{\mathcal{I}, \rho} \rightarrow \mathrm{gr}_{\rho, \pi_v}(\Psi, tg)$. L'image de K_1 par cette dernière surjection est nulle, car nulle sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ d'après [3] puisque les constituants irréductibles sont différents : on obtient ainsi l'isomorphisme de l'énoncé. \square

4.3. Cas général. — Considérons à présent $\pi_v \in \mathrm{Scusp}_i(\rho)$. Dans le cas où $i > -1$, la réduction modulo l de $\pi_v[1]_D$ (resp. de $L_{g_i(\rho)}(\pi_v)$) n'est pas irréductible de sorte qu'il possède des réseaux stables non isomorphes. Dans ce paragraphe nous n'allons pas donner de détails sur ces réseaux, mais plutôt nous concentrer sur ceux de $\mathrm{St}_{t_i}(\pi_v)$ où on note $t_i = \frac{tg}{g_i(\rho)}$.

4.3.1. Proposition. — Avec les notations précédentes, le système local $\Gamma_{GDW}(\pi_v, t_i)$, considéré comme muni d'une action de $GL_{tg}(F_v)$, est une somme directe d'un nombre fini de fois du réseau $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l, +}(\pi_v, t_i)$.

Démonstration. — Le cas $t_i = 1$ découle simplement du fait que, la réduction modulo l de π_v étant irréductible, à isomorphisme près il n'y a qu'un réseau stable de π_v . On raisonne ensuite comme dans le paragraphe précédent en se concentrant tout d'abord sur $j_1^{=g_i(\rho)} \mathcal{F}_{\Gamma_{GDW}(\pi_v, 1)}[d - g_i(\rho)]$. Les arguments de la proposition 4.2.2 nous permettent d'obtenir que les réseaux associés à $\mathrm{St}_{t_i}(\pi_v)$ sont les $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l, -}(\pi_v, t_i)$.

Par dualité on obtient alors un quotient libre Q_* de $j^{1 \leq tg, *} \Psi_{\mathcal{I}, \rho}$ tel que

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_*(\rho, \pi_v, t_i)[d - tg] \rightarrow Q_* \rightarrow Q'_* \rightarrow 0$$

où

- Q'_* est libre, tous les constituants irréductibles de $Q'_* \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ étant de ρ -type strictement plus petit que i : en effet ces constituants proviennent des $\mathrm{Fil}_{\mathfrak{S}, *}^{-k}(\Psi_{\mathcal{I}, \rho})$ pour $k < g_i(\rho)$ et ne font donc intervenir que des ρ -type $< i$.
- $\mathcal{F}_*(\rho, \pi_v, t_i)$ est un système local libre sur $X_{\mathcal{I}, \overline{s}_v}^{-=tg}$ isomorphe, en tant que $GL_{tg}(F_v)$ -module, à une somme directe finie des réseaux $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l, -}(\mathrm{St}_{t_i}(\pi_v))$.

De même en utilisant la filtration $\mathrm{Fil}_{\mathfrak{S}, !}(\Psi_{\mathcal{I}, \rho})$, on obtient un quotient $Q_!$ de $j^{1 \leq tg, *} \Psi_{\mathcal{I}, \rho}$ tel que

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_{\Gamma_{GDW}(\pi_v, t_i)}[d - tg] \rightarrow Q_! \rightarrow Q'_! \rightarrow 0$$

où $Q'_!$ est libre, tous les constituants irréductibles de $Q'_! \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ étant, par construction, de ρ -type strictement plus petit que i . On en déduit alors une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_*(\rho, \pi_v, t_i) \rightarrow \mathcal{F}_{\Gamma_{GDW}(\pi_v, t_i)} \rightarrow T \rightarrow 0$$

où T est de torsion tel que, modulo l , tous ses constituants sont de ρ -type strictement plus petit que i . La nullité de T découle alors du théorème 1.2.12. \square

Remarque : dans [3] les constituants irréductibles de $\Psi_{\mathcal{I}, \overline{\mathbb{Q}}_l}$ sont les faisceaux pervers d'Harris-Taylor $\mathcal{P}(\pi_v, t)(-\frac{s-1-2k}{2})$ indexés par les classes d'équivalence inertielles des représentations irréductibles cuspidales de $GL_g(F_v)$ pour $1 \leq g \leq d$ et $1 \leq t \leq s = \frac{d}{g}$ et $k = 0, 1, \dots, s-1$. Ceux pour $k = 0$ et $s-1$ seront dits « extrémaux ». Ainsi les arguments précédents, utilisant la filtration $\text{Fil}_{\mathfrak{S}, !}$ et $\text{Fil}_{\mathfrak{S}, *}$ nous ont donc permis de préciser les réseaux stables des systèmes locaux d'Harris-Taylor « extrémaux ». Selon le même procédé et en utilisant le résultat principal de [5], on peut aisément déterminer tous les réseaux stables des systèmes locaux d'Harris-Taylor obtenus lors de la filtration de stratification exhaustive $\text{Fill}_{\mathfrak{S}, !}^{\bullet}(\Psi_{\mathcal{I}, \rho})$. Par dualité on obtient alors ceux de $\text{Fill}_{\mathfrak{S}, *}^{\bullet}(\Psi_{\mathcal{I}, \rho})$. On remarque en particulier qu'en général les réseaux obtenus ne sont pas les mêmes sauf le cas notable des systèmes locaux « extrémaux ».

4.4. Réseaux dans la cohomologie des espaces de Lubin-Tate. — Soit $\Sigma_{v,d}$ le \mathcal{O}_v -module de Barsotti-Tate formel sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ de hauteur d , cf. [9] §II. Le foncteur qui à une \mathcal{O}_v -algèbre locale artinienne de corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}_p$ associe l'ensemble des classes d'isomorphismes des déformations par quasi-isogénies sur R de $\Sigma_{v,d}$ munies d'une structure de niveau n est pro-représentable par un schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,d,n}$. On notera sans chapeau les fibres génériques de Berkovich de ces espaces ; ce sont donc des \widehat{F}_v^{nr} -espaces analytiques au sens de [2] et on note $\mathcal{M}_{LT,n}^{d/F_v} := \mathcal{M}_{LT,d,n} \widehat{\otimes}_{\widehat{F}_v^{nr}} \widehat{F}_v$.

Le groupe $D_{v,d}^{\times}$ agit par quasi-isogénies sur $\Sigma_{v,d}$ tandis que pour tout $n \geq 1$, on a une action naturelle de $GL_d(\mathcal{O}_v/\mathcal{M}_v^n)$ sur les structures de niveau et donc sur $\mathcal{M}_{LT,n}^{d/K}$. Cette dernière action se prolonge en une action de $GL_d(F_v)$ sur la limite projective

$$\varprojlim_n \mathcal{M}_{LT,n}^{d/K}$$

de sorte que l'action de $GL_d(F_v) \times D_{v,d}^{\times}$ se factorise par $(GL_d(F_v) \times D_{v,d}^{\times})/F_v^{\times}$ où F_v^{\times} est plongé diagonalement.

4.4.1. Définition. — On note, d'après Berkovich, $\mathcal{U}_{v,\Lambda,d,n}^i := H_c^i(\mathcal{M}_{LT,n}^{d/F_v}, \Lambda)$ et on pose

$$\mathcal{U}_{v,\Lambda,d}^i = \varinjlim_n \mathcal{U}_{v,\Lambda,d,n}^i.$$

Considérant $\mathcal{U}_{K,\overline{\mathbb{Z}}_l,d}^i$ comme une représentation de $D_{K,d}^{\times}$, on pose, d'après 2.1.5, pour $\bar{\tau}$ une $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de $D_{v,d}^{\times}$, $\mathcal{U}_{\bar{\tau}}^i := \mathcal{U}_{K,\overline{\mathbb{Z}}_l,d,\bar{\tau}}^i$.

Remarque : d'après le théorème 2.1.8, il existe une unique $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible supercuspidale ρ de $GL_g(F_v)$ telle que $\bar{\tau} \in \mathcal{C}(\rho, d)$ au sens de la définition 2.1.9.

Rappelons que d'après [5], les \mathcal{U}_τ^i sont sans torsion. et que d'après le théorème de comparaison de Berkovich, ils s'obtiennent comme l'induite $\text{ind}_{(D_{v,d}^\times)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v,d}^\times}$ du germe en un point supersingulier de $\mathcal{H}^i \Psi_{\mathcal{I},\rho}$. D'après [5], la suite spectrale calculant les faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{I},\tau}$ à partir de ceux de sa filtration $\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}(\Psi_{\mathcal{I},\rho})$ dégénère en E_2 , les termes en E_1 et E_2 étant sans torsion. Les filtrations considérés précédemment sur $\Psi_{\mathcal{I},\rho}$ fournissent, à travers la suite spectrale ci-avant, tout d'abord la $\bar{\tau}$ -filtration naïve

$$\text{Fil}_{\bar{\tau},s(\bar{\tau})}(\mathcal{U}^i) \subset \cdots \subset \text{Fil}_{\bar{\tau},-1}(\mathcal{U}^i)$$

puis $\text{Fil}_{\bar{\tau},\pi_v}(\mathcal{U}^i)$ indexée par les $\pi_v \in \text{Scusp}_i(\rho)$. D'après [6], sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, le germe en un point supersingulier de $\mathcal{H}^i \Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Q}}_l,\pi_v}$ s'obtient comme à partir du germe de $\mathcal{H}^i \text{gr}_{\mathfrak{S},!}^{s-i}$ comme le noyau de la flèche

$$\mathcal{H}^i j_{!*}^{h=j=h,*} \text{gr}_{\mathfrak{S},!}^{s-i} \longrightarrow \mathcal{H}^{i+1} P$$

où P est un des gradués de la filtration exhaustive de stratification de $\text{gr}_{\mathfrak{S},!}^{s-i}$ que l'on ne souhaite pas préciser ici (cf. [6]) et tel que

$$\text{ind}_{(D_{v,d}^\times)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v,d}^\times} \left(\mathcal{H}^i P_{\pi_v} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \right) \simeq \left(\text{St}_{s-i+1}(\pi_v) \overrightarrow{\text{Speh}}_{i-1}(\pi_v) \right) \otimes \pi_v[s]_D \otimes L_g(\pi_v).$$

Ainsi de la proposition 4.2.1, on en déduit la proposition suivante.

4.4.2. Proposition. — Pour $\pi_v \in \text{Scusp}_{-1}(\rho)$ et $0 \leq j \leq s-1$, le $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -module libre $\mathcal{U}_{\pi_v}^j$ est de la forme

$$RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l,+}(\pi_v, s-j, j) \otimes \Gamma_D \otimes \Gamma_W$$

où Γ_D (resp. Γ_W) est l'unique, à isomorphisme près, réseau stable de $\pi_v[s]_D$ (resp. de $L_g(\pi_v)$) et $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l,+}(\pi_v, s-j, j)$ est le réseau de l'unique sous-espace irréductible de $\text{St}_{s-j}(\pi_v) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_j(\pi_v)$ défini par

$$RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l,+}(s-j, j) \hookrightarrow RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l,+}(\pi_v, s-j) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_j(\pi_v).$$

Remarque : on rappelle que la réduction de $\text{Speh}_j(\pi_v)$ étant irréductible, il possède, à isomorphisme près, un unique réseau stable. Par définition l'inclusion ci-dessus est bien évidemment stricte.

En ce qui concerne le cas général où $\pi_v \in \text{Scusp}_i(\rho)$ avec $i > -1$, de la proposition 4.3.1, on en déduit.

4.4.3. Proposition. — Soit i tel que $g_i(\rho)$ divise sg ; on note $s_i(\rho)$ le quotient. Pour $\pi_v \in \text{Scusp}_i(\bar{\tau})$ et $0 \leq j \leq s_i(\rho)$, en tant que $GL_d(F_v)$ -représentation, $\mathcal{U}_{\pi_v}^j$ est une somme directe finie de représentation $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l,+}(\pi_v, s_i(\rho) - j, j)$.

Références

- [1] J. Bellaïche. À propos d'un lemme de Ribet. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 109 :45–62, 2003.
- [2] V.G. Berkovich. Étale cohomology for non-archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 78 :5–161, 1993.
- [3] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.
- [4] P. Boyer. Réseaux d'induction des représentations elliptiques de Lubin-Tate. *Journal of Algebra*, 336, issue 1 :28–52, 2011.
- [5] P. Boyer. La cohomologie des espaces de lubin-tate est libre. *soumis*, 2013.
- [6] P. Boyer. Filtrations de stratification de quelques variétés de shimura simples. *Bulletin de la SMF*, 142, fascicule 4, 2014.
- [7] J.-F. Dat. Théorie de Lubin-Tate non-abélienne l -entière. *Duke Math. J.* 161 (6), pages 951–1010, 2012.
- [8] J.-F. Dat. Un cas simple de correspondance de Jacquet-Langlands modulo l . *Proc. London Math. Soc.* 104, pages 690–727, 2012.
- [9] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [10] D. Juteau. Decomposition numbers for perverse sheaves. *Annales de l'Institut Fourier*, 59 (3), pages 1177–1229, 2009.
- [11] M.-F. Vignéras. *Représentations l -modulaires d'un groupe réductif p -adique avec $l \neq p$* , volume 137 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.
- [12] M.-F. Vignéras. À propos d'une conjecture de Langlands modulaire. In *Finite reductive groups (Luminy, 1994)*, volume 141 of *Progr. Math.*, pages 415–452. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.
- [13] M.-F. Vignéras. Induced R -representations of p -adic reductive groups. *Selecta Math. (N.S.)*, 4(4) :549–623, 1998.