



HAL
open science

Sur les extensions intermédiaires des systèmes locaux d'Harris-Taylor

Pascal Boyer

► **To cite this version:**

Pascal Boyer. Sur les extensions intermédiaires des systèmes locaux d'Harris-Taylor. 2015. hal-01204663v2

HAL Id: hal-01204663

<https://hal.science/hal-01204663v2>

Preprint submitted on 29 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR LES EXTENSIONS INTERMÉDIAIRES DES SYSTÈMES LOCAUX D’HARRIS-TAYLOR

par

Boyer Pascal

Résumé. — Dans le contexte des variétés de Shimura unitaires simples étudiées par Harris et Taylor, nous avons construit dans [5] deux filtrations du faisceau pervers des cycles évanescents. Les gradués de la première sont les p -extensions intermédiaires de certains systèmes locaux dits d’Harris-Taylor tandis que ceux de la seconde, obtenue par dualité, sont les $p+$ -extensions intermédiaires. Dans ce papier nous décrivons la différence entre ces p et $p+$ extensions intermédiaires. Précisément nous montrons que lorsque le système local d’Harris-Taylor est associé à une représentation irréductible cuspidale dont la réduction modulo l est supercuspidale, ces extensions intermédiaires sont les mêmes. Dans le cas où la réduction modulo l n’est que cuspidale nous décrivons la l -torsion de leur différence.

Abstract (On intermediate extensions of Harris-Taylor’s local systems)

In the geometric situation of some simple unitary Shimura varieties studied by Harris and Taylor, we have built in [5] two filtrations of the perverse sheaf of vanishing cycles. The graduate of the first are the p -intermediate extension of some local Harris-Taylor’s local systems, while for the second, obtained by duality, they are the $p+$ -intermediate extensions. In this work, we describe the difference between these p and $p+$ intermediate extension. Precisely, we show, in the case where the local system is associated to an irreducible cuspidal representation whose reduction modulo l is supercuspidal, that the two intermediate extensions are the same. Otherwise, if the reduction modulo l is just cuspidal, we describe the l -torsion of their difference.

Introduction

Cet article s’inscrit dans un programme visant à prouver le lemme d’Ihara pour $U(n, 1)$. Avant d’en décrire les résultats principaux, détaillons la stratégie de ce programme dont le lecteur trouvera plus de détails dans cf. [4].

Classification mathématique par sujets (2010). — 14G22, 14G35, 11G09, 11G35, 11R39, 14L05, 11G45, 11Fxx.

Mots clefs. — Variétés de Shimura, modules formels, correspondances de Langlands, correspondances de Jacquet-Langlands, faisceaux pervers, cycles évanescents, filtration de monodromie, conjecture de monodromie-poids.

- La première étape consiste à traduire l'énoncé du lemme d'Ihara en un énoncé similaire portant sur la cohomologie d'une variété de Shimura unitaire de type Kottwitz-Harris-Taylor.
- Pour étudier la $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -cohomologie de ces variétés de Shimura, on utilise la suite spectrale des cycles évanescents en une place $p \neq l$. Le faisceau pervers des cycles évanescents est découpé sur $\overline{\mathbb{Z}}_l$ en termes de versions entières des extensions intermédiaires des systèmes locaux d'Harris-Taylor. On est alors amené à contrôler la torsion dans la cohomologie de ces $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -systèmes locaux d'Harris-Taylor.
- La torsion de la cohomologie de toute la variété de Shimura est plus facilement contrôlable car on peut la calculer en utilisant une place annexe quelconque, en particulier où il y a bonne réduction. Quitte à localiser en un idéal maximal bien choisi d'une algèbre de Hecke, on montre dans [7] que la cohomologie est concentrée en degré médian et sans torsion.
- Dans [5] nous avons construit deux filtrations du faisceau pervers des cycles évanescents, les gradués de la première s'identifiant aux p -extensions intermédiaires des systèmes locaux d'Harris-Taylor alors que ceux de la seconde, obtenue par dualité, sont les $p+$ -extensions intermédiaires.
- En utilisant que les strates de Newton sont affines et que la cohomologie de la variété de Shimura, après localisation, est sans torsion, il n'est pas trop difficile de contrôler la cohomologie de ces p -extensions intermédiaires avant le degré médian. La dualité de Verdier permet alors d'obtenir que la cohomologie des $p+$ -extensions intermédiaires est aussi sans torsion en degré supérieur au degré médian, de sorte que, dans le cas où les p et $p+$ extensions intermédiaires coïncident, on obtient la nullité de la torsion en tout degré.

Le but de ce travail est ainsi de comprendre la différence entre ces deux versions p et $p+$ des faisceaux pervers d'Harris-Taylor. Le résultat principal donné au théorème 1.3.3, est qu'elles sont égales lorsque la représentation irréductible cuspidale associée au système local possède une réduction modulo l qui est supercuspidale. En revanche dans le cas où cette réduction modulo l est simplement cuspidale, ces deux extensions intermédiaires sont distinctes et on en décrit la l -torsion de leur quotient au §3 à l'aide de la description de la réduction modulo l des représentations de Steinberg décrites dans [3]. Nous verrons dans [4] que cette description est suffisante pour contrôler la torsion en tout degré.

En ce qui concerne l'organisation du papier, on commence par des rappels sur la géométrie §1.1 et sur les systèmes locaux d'Harris-Taylor, §1.2, puis on énonce le résultat principal, théorème 1.3.3. Pour simplifier la démonstration, on commence, proposition 2.2.1, par découper $\Psi_{\mathcal{I}}$ selon les $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles supercuspidales d'un $GL_g(F_v)$ pour $1 \leq g \leq d$, cf. la définition A.3.7 et le théorème A.3.6 de l'appendice. Au §3, nous étudions enfin le cas non supercuspidal en décrivant, proposition 3.2.4, la l -torsion du quotient entre les $p+$ et p versions des faisceaux pervers d'Harris-Taylor. Nous finissons en décrivant les faisceaux de cohomologie de la réduction modulo l d'un faisceau pervers d'Harris-Taylor, lesquels sont connus d'après le résultat principal de [5] : en effet dans le cas non supercuspidal, la filtration de stratification exhaustive de celui-ci, donnée par la

proposition 3.2.4, fournit une suite spectrale reflétée par les complexes dits d'induction du §3.3.

Table des matières

Introduction.....	1
1. Faisceaux pervers d'Harris-Taylor entiers.....	3
1.1. Rappels sur quelques variétés de Shimura unitaires.....	3
1.2. Systèmes locaux d'Harris-Taylor.....	5
1.3. Énoncé dans le cas supercuspidal.....	6
2. Sur le faisceau pervers des cycles proches.....	8
2.1. Rappels.....	8
2.2. Décomposition supercuspidale.....	10
2.3. Preuve de la proposition 1.3.4.....	13
3. Extensions intermédiaires : cas non supercuspidal.....	16
3.1. Réseaux d'induction d'après [3].....	16
3.2. Réduction modulo l d'un faisceau pervers d'Harris-Taylor.....	17
3.3. Complexes d'induction des représentations de Steinberg.....	19
Appendice A. Rappels sur les représentations.....	21
A.1. de $GL_n(K)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$	21
A.2. de $GL_d(K)$ mod l	22
A.3. de $D_{K,d}^\times$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ et leurs relèvements.....	24
Références.....	27

1. Faisceaux pervers d'Harris-Taylor entiers

1.1. Rappels sur quelques variétés de Shimura unitaires. — Soit $F = F^+E$ un corps CM avec E/\mathbb{Q} quadratique imaginaire, dont on fixe un plongement réel $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$.

1.1.1. Notation. — Pour toute place finie w de F , on note F_w le complété de F en cette place, \mathcal{O}_w son anneau des entiers d'idéal maximal \mathcal{P}_w et de corps résiduel $\kappa(w)$.

Soit B une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 telle qu'en toute place x de F , B_x est soit décomposée soit une algèbre à division et on suppose B munie d'une involution de seconde espèce $*$ telle que $*|_F$ est la conjugaison complexe c . Pour $\beta \in B^{*-1}$, on note \sharp_β l'involution $x \mapsto x^\sharp_\beta = \beta x^* \beta^{-1}$ et G/\mathbb{Q} le groupe de similitudes, noté G_τ dans [10], défini pour toute \mathbb{Q} -algèbre R par

$$G(R) \simeq \{(\lambda, g) \in R^\times \times (B^{op} \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \text{ tel que } gg^\sharp_\beta = \lambda\}$$

avec $B^{op} = B \otimes_{F,c} F$. Dans [10], les auteurs justifient l'existence de G comme ci-dessus tel qu'en outre

— les signatures de $G(\mathbb{R})$ sont $(1, d-1)$ pour le plongement τ et $(0, d)$ pour les autres ;

— pour $p = u^c u$ décomposé dans E ,

$$G(\mathbb{Q}_p) \simeq (\mathbb{Q}_p)^\times \times \prod_{i=1}^r (B_{v_i}^{op})^\times$$

où $v = v_1, v_2, \dots, v_r$ sont les places de F au dessus de la place u de E .

Pour tout sous-groupe compact U^p de $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ et $m = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, on pose

$$U^p(m) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=1}^r \text{Ker}(\mathcal{O}_{B_{v_i}}^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_{B_{v_i}}/\mathcal{P}_{v_i}^{m_i})^\times)$$

1.1.2. Notation. — On note \mathcal{I} l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts $U^p(m)$ tels qu'il existe une place x pour laquelle la projection de U^p sur $G(\mathbb{Q}_x)$ ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité, cf. [10] bas de la page 90. Pour m comme ci-dessus, on a une application

$$m_1 : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{N}.$$

1.1.3. Définition. — Pour tout $I \in \mathcal{I}$, on note $X_I \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_v \llcorner$ la variété de Shimura associée à $G \gg$ construite dans [10] et $X_{\mathcal{I}} = (X_I)_{I \in \mathcal{I}}$ le schéma de Hecke relativement au groupe $G(\mathbb{A}^\infty)$, au sens de [2]

Remarque : les morphismes de restriction du niveau $r_{J,I} : X_J \rightarrow X_I$ sont finis et plats. et même étales quand $m_1(J) = m_1(I)$.

1.1.4. Notations. — (cf. [2] §1.3) Pour $I \in \mathcal{I}$, on note :

- $X_{I,s}$ la fibre spéciale de X_I et $X_{I,\bar{s}} := X_{I,s} \times \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_p$ la fibre spéciale géométrique.
- Pour tout $1 \leq h \leq d$, $X_{I,\bar{s}}^{\geq h}$ (resp. $X_{I,\bar{s}}^{=h}$) désigne la strate fermée (resp. ouverte) de Newton de hauteur h , i.e. le sous-schéma dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate en chacun de ses points géométriques est de rang $\geq h$ (resp. égal à h).
- On notera aussi $X_{I,\bar{s}}^{\geq 0} := X_I$.

Remarque : pour tout $1 \leq h \leq d$, la strate de Newton de hauteur h est de pure dimension $d - h$; le système projectif associé définit alors un schéma de Hecke $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h}$ (resp. $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{=h}$) pour $\mathbb{G} = G(\mathbb{A}^\infty)$, cf. [10] III.4.4, lisse dans le cas de bonne réduction, i.e. quand $m_1 = 0$.

1.1.5. Notations. — Nous utiliserons les notations suivantes :

$$i^h : X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq 1}, \quad j^{\geq h} : X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{=h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h}$$

ainsi que $j^{=h} := i^h \circ j^{\geq h}$.

1.2. Systèmes locaux d'Harris-Taylor. —

1.2.1. Notation. — Pour tout $h \geq 1$, on note $D_{v,h}$ l'algèbre à division centrale sur F_v d'invariant $1/h$.

1.2.2. Définition. — Pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et $t \geq 1$, on note $\pi_v[t]_D$ la représentation de $D_{v,tg}^\times$ associée à $\text{St}_t(\pi_v)$ par la correspondance de Jacquet-Langlands.

Remarque : toute représentation irréductible de $D_{v,h}^\times$ est de la forme $\pi_v[t]_D$ pour $h = tg$.

1.2.3. Définition. — Dans [10], les auteurs, via les variétés d'Igusa de première et seconde espèce, associent à toute représentation ρ_v de l'ordre maximal $\mathcal{D}_{v,h}^\times$ de $D_{v,h}^\times$, un système local $\mathcal{L}(\rho_v)$ sur $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\bar{h}}$.

1.2.4. Notation. — Pour π_v une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et $t \geq 1$, on note $\mathcal{L}(\pi_v, t)$ le $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -système local sur $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\bar{t}g}$ associé à la restriction de $\pi_v[t]_D$ à $\mathcal{D}_{v,tg}^\times$. Si Γ est un réseau stable de $\pi_v[t]_D$, on notera

$$\mathcal{L}_\Gamma(\pi_v, t)$$

le $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -système local associé.

1.2.5. Définition. — Un $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -système local \mathcal{L} sur $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\bar{h}}$ sera dit de type ϱ , pour ϱ une $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible supercuspidale de $GL_g(F_v)$ avec $g|h$, si \mathcal{L} est libre et $\mathcal{L} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ est une somme directe de systèmes locaux $\mathcal{L}(\rho_v)$ où ρ_v est une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation de $\mathcal{D}_{v,h}^\times$ de type ϱ au sens de la définition A.3.7.

Rappelons, cf. [2], qu'un système local d'Harris-Taylor \mathcal{L} sur $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\bar{h}}$ est induit, i.e.

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}_1 \times_{P_{h,d}(F_v)} GL_d(F_v),$$

où

— $X_{\mathcal{I},\bar{s},1}^{\bar{h}}$ est une réunion de composantes irréductibles de $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\bar{h}}$ munie d'une action du parabolique standard $P_{h,d}(F_v)$ de Levi $GL_h(F_v) \times GL_{d-h}(F_v)$,

— \mathcal{L}_1 est la restriction de \mathcal{L} à la strate $X_{\mathcal{I},\bar{s},1}^{\bar{h}}$.

Le système local \mathcal{L}_1 est muni, cf. [2] §1.4.2, d'une action de $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times P_{h,d}(F_v) \times \mathbb{Z}$ tel que le sous-groupe unipotent de $P_{h,d}(F_v)$ agit trivialement alors que l'action du facteur $GL_h(F_v)$ de son Levi agit via $\text{val} \circ \det : GL_h(F_v) \rightarrow \mathbb{Z}$.

1.2.6. Notation. — Pour Π_t une représentation de $GL_h(F_v)$, on introduit alors

$$HT(\pi_v, \Pi_t)(n) := \mathcal{L}(\pi_v, t)[d - tg] \otimes \Pi_t \otimes \Xi^{\frac{tg-d+n}{2}} \otimes \mathbb{L}(\pi_v)$$

où \mathbb{L}^\vee est la correspondance Langlands sur F_v ,

$$\Xi : \frac{1}{2}\mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_l^\times$$

est définie par $\Xi(\frac{1}{2}) = q^{1/2}$ et

- $GL_h(F_v)$ agit diagonalement sur Π_t et sur $\mathcal{L}(\pi_v, t) \otimes \Xi^{\frac{tg-d+n}{2}}$ via son quotient $GL_h(F_v) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$,
- le groupe de Weil W_v en v agit diagonalement sur $\mathbb{L}(\pi_v)$ et le facteur $\Xi^{\frac{tg-d+n}{2}}$ via l'application $\deg : W_v \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ qui envoie les frobenius géométriques sur 1.

Une $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -version entière sera notée $HT_\Gamma(\pi_v, \Pi_t)(n)$ où Γ désigne un réseau stable, par forcément sous la forme d'un produit tensoriel.

Remarque : on rappelle que π'_v est inertiuellement équivalente à π_v si et seulement s'il existe un caractère $\zeta : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ tel que $\pi'_v \simeq \pi_v \otimes (\zeta \circ \text{val} \circ \det)$. Les faisceaux pervers $HT(\pi_v, \Pi_t)(n)$ ne dépendent que de la classe d'équivalence inertielle de π_v et sont de la forme

$$HT(\pi_v, \Pi_t)(n) = e_{\pi_v} \mathcal{HT}(\pi_v, \Pi_t)(n)$$

où $\mathcal{HT}(\pi_v, \Pi_t)(n)$ est un faisceau pervers irréductible.

1.3. Énoncé dans le cas supercuspidal. — Rappelons que pour X un \mathbb{F}_p -schéma et $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_l, \overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{\mathbb{F}}_l$, la t -structure usuelle sur la catégorie dérivée $D_c^b(X, \Lambda)$ est définie par :

$$\begin{aligned} A \in {}^pD^{\leq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{H}^k i_x^* A = 0, \forall k > -\dim \overline{\{x\}} \\ A \in {}^pD^{\geq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{H}^k i_x^! A = 0, \forall k < -\dim \overline{\{x\}} \end{aligned}$$

où $i_x : \text{Spec } \kappa(x) \hookrightarrow X$ et \mathcal{H}^k désigne le k -ième faisceau de cohomologie. On note alors ${}^p\mathcal{C}(X, \Lambda)$ le cœur de cette t -structure : c'est une catégorie abélienne noethérienne et Λ -linéaire.

1.3.1. Notation. — Les foncteurs cohomologiques associés à la t -structure perverse ci-avant seront notés ${}^p\mathcal{H}^i$.

Pour Λ un corps, cette t -structure est autoduale pour la dualité de Verdier. Pour $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_l$, on peut munir la catégorie abélienne $\overline{\mathbb{Z}}_l$ -linéaire ${}^p\mathcal{C}(X, \Lambda)$ d'une théorie de torsion $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ où \mathcal{T} (resp. \mathcal{F}) est la sous-catégorie pleine des objets de torsion T (resp. libres F), i.e. tels que $l^N 1_T$ est nul pour N assez grand (resp. $l.1_F$ est un monomorphisme).

1.3.2. Définition. — Soit

$$\begin{aligned} {}^p\mathcal{D}^{\leq 0}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l) &:= \{A \in {}^p\mathcal{D}^{\leq 1}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l) : {}^p\mathcal{H}^1(A) \in \mathcal{T}\} \\ {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l) &:= \{A \in {}^p\mathcal{D}^{\geq 0}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l) : {}^p\mathcal{H}^0(A) \in \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

la t -structure duale de cœur ${}^p\mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ muni de sa théorie de torsion $(\mathcal{F}, \mathcal{T}[-1])$ « duale » de celle de ${}^p\mathcal{C}(X, \overline{\mathbb{Z}}_l)$.

Remarque : d'après [6] §1.3, la sous-catégorie pleine \mathcal{F} de ${}^p\mathcal{C}(X, \Lambda)$ est quasi-abélienne, i.e. elle admet des noyaux, images, conoyaux et coimages mais la flèche naturelle

$$\text{Coim}_{\mathcal{F}} f \rightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f$$

de la coimage vers l'image, n'est pas nécessairement un isomorphisme : si c'est le cas on dit que le morphisme f est *strict*. Pour $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte, on dispose en outre de deux notions d'extensions intermédiaires

$${}^p j_{!*} \quad \text{et} \quad {}^{p+} j_{!*}.$$

Le résultat principal que nous allons montrer est donné par le théorème suivant.

1.3.3. Théorème. — *Soit π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ telle que sa réduction modulo l est supercuspidale alors pour tout $1 \leq t \leq s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$, et pour tout réseau stable Γ de $\pi_v[t]_D$, on a*

$${}^p j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{L}_{\Gamma}(\pi_v, t)[d - tg] \simeq {}^{p+} j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{L}_{\Gamma}(\pi_v, t)[d - tg].$$

Remarque : comme la réduction modulo l de $\pi_v[t]_D$ est irréductible, l'indépendance relativement au réseau Γ considéré est immédiate. Cependant la preuve de ce résultat passe par un énoncé similaire portant sur les systèmes locaux $HT_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n)$ où le réseau est donné par le faisceau pervers des cycles évanescents. Précisément nous prouverons la proposition suivante.

1.3.4. Proposition. — *Soit π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ telle que sa réduction modulo l est supercuspidale. Alors pour tout $1 \leq t \leq s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$ il existe une représentation Π_t de $GL_{tg}(F_v)$, un entier n ainsi qu'un réseau stable Γ de $\mathcal{HT}(\pi_v, \Pi_t)(n)$ tel que*

$${}^p j_{!*}^{\leq tg} \mathcal{HT}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n) \simeq {}^{p+} j_{!*}^{\leq tg} \mathcal{HT}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n).$$

Le théorème découle alors du lemme suivant en considérant le réseau produit tensoriel, i.e. la propriété de la proposition précédente, ne dépend pas de Π_t ou de n mais seulement d'une structure entière quelconque du système local $\mathcal{L}(\pi_v, t)$.

1.3.5. Lemme. — *S'il existe un réseau stable Γ de $\mathcal{HT}(\pi_v, \Pi_t)(n)$ tel que la proposition précédente est valable, alors le résultat est valable pour tout réseau stable Γ' de $\mathcal{HT}(\pi_v, \Pi_t)(n)$.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur t de d à s . Le cas $t = s$ découle des égalités

$${}^p j_{!*}^{\leq sg} \mathcal{HT}_{\Gamma'}(\pi_v, \Pi_t)(n) = j_{!*}^{\leq sg} \mathcal{HT}_{\Gamma'}(\pi_v, \Pi_t)(n) = j_{*}^{\leq sg} \mathcal{HT}_{\Gamma'}(\pi_v, \Pi_t)(n) = {}^{p+} j_{!*}^{\leq sg} \mathcal{HT}_{\Gamma'}(\pi_v, \Pi_t)(n).$$

Supposons alors le résultat acquis jusqu'au rang $t + 1$. D'après [11], on a les triangles distingués

$${}^p j_{!*}^{\leq tg} \mathcal{HT}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n) \longrightarrow {}^{p+} j_{!*}^{\leq tg} \mathcal{HT}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n) \longrightarrow i_*^{tg} {}^p \mathcal{H}_{\text{tor}}^0 i^{tg,*} j_*^{\leq tg} \mathcal{HT}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n)[1] \rightsquigarrow$$

ainsi que pour le foncteur $\mathbb{F} := - \otimes_{\mathbb{Z}_l}^{\mathbb{L}} \overline{\mathbb{F}}_l$

$$\mathbb{F}^p j_{!*}^{\leq tg} \mathcal{HT}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n) \longrightarrow j_{!*}^{\leq tg} \mathbb{F} \mathcal{HT}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n) \longrightarrow {}^p \mathcal{H}^0 \mathbb{F} \left(i_*^{tg} {}^p \mathcal{H}_{\text{tor}}^0 i^{tg,*} j_*^{\leq tg} \mathcal{HT}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n) \right) \rightsquigarrow$$

de sorte que l'égalité des extensions intermédiaires pour Γ' revient à demander que $\mathbb{F}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{H}\mathcal{T}_{\Gamma'}(\pi_v, \Pi_t)(n) \simeq j_{!*}^{-tg} \mathbb{F} \mathcal{H}\mathcal{T}_{\Gamma'}(\pi_v, \Pi_t)(n)$. Rappelons la suite exacte courte

$$0 \rightarrow i_*^{tg} p \mathcal{H}^{-1} i^{tg,*} j_*^{-tg} \mathbb{F} \mathcal{H}\mathcal{T}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n) \longrightarrow j_!^{-tg} \mathbb{F} \mathcal{H}\mathcal{T}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n) \longrightarrow j_{!*}^{-tg} \mathbb{F} \mathcal{H}\mathcal{T}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n) \rightarrow 0.$$

Comme $j^{\geq tg}$ est affine, les foncteurs $j_!^{-tg}$, j_*^{-tg} sont exacts tout comme $i^{tg,*}$ et i_*^{tg} . Ainsi le foncteur \mathbb{F} commute avec ceux-ci et comme la torsion de ${}^p \mathcal{H}^0 i^{tg,*} j_*^{-tg} \mathcal{H}\mathcal{T}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n)$ est nulle alors

$$i_*^{tg} p \mathcal{H}^{-1} i^{tg,*} j_*^{-tg} \mathbb{F} \mathcal{H}\mathcal{T}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n) \simeq \mathbb{F} \left(i_*^{tg} p \mathcal{H}^{-1} i^{tg,*} j_*^{-tg} \mathcal{H}\mathcal{T}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n) \right).$$

Comme ${}^p \mathcal{H}^{-1} i^{tg,*} j_*^{-tg} = {}^p \mathcal{H}^{-1} i^{tg,*} j_{!*}^{-tg}$ et que $j_{!*}^{-tg} \mathbb{F} \mathcal{H}\mathcal{T}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n)$ est semi-simple en tant que faisceau, on en déduit que, dans le groupe de Grothendieck, $\left[i_*^{tg} p \mathcal{H}^{-1} i^{tg,*} j_*^{-tg} \mathbb{F} \mathcal{H}\mathcal{T}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n) \right]$ ne dépend pas du réseau Γ . Du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F} \left(i_*^{tg} p \mathcal{H}^{-1} i^{tg,*} j_*^{-tg} \mathcal{H}\mathcal{T}_{\Gamma'}(\pi_v, \Pi_t)(n) \right) & \hookrightarrow & \mathbb{F} \left(j_!^{-tg} \mathcal{H}\mathcal{T}_{\Gamma'}(\pi_v, \Pi_t)(n) \right) & \twoheadrightarrow & \mathbb{F} \left(j_{!*}^{-tg} \mathcal{H}\mathcal{T}_{\Gamma'}(\pi_v, \Pi_t)(n) \right) \\ & & \parallel & & \\ i_*^{tg} p \mathcal{H}^{-1} i^{tg,*} j_*^{-tg} \mathbb{F} \mathcal{H}\mathcal{T}_{\Gamma'}(\pi_v, \Pi_t)(n) & \hookrightarrow & j_!^{-tg} \mathbb{F} \mathcal{H}\mathcal{T}_{\Gamma'}(\pi_v, \Pi_t)(n) & \twoheadrightarrow & j_{!*}^{-tg} \mathbb{F} \mathcal{H}\mathcal{T}_{\Gamma'}(\pi_v, \Pi_t)(n) \end{array}$$

on remarque qu'il suffit alors de montrer que $\left[\mathbb{F} \left(i_*^{tg} p \mathcal{H}^{-1} i^{tg,*} j_*^{-tg} \mathcal{H}\mathcal{T}_{\Gamma'}(\pi_v, \Pi_t)(n) \right) \right]$ ne dépend pas de Γ' .

D'après [2] le faisceau pervers libre $i_*^{tg} p \mathcal{H}^{-1} i^{tg,*} j_*^{-tg} \mathcal{H}\mathcal{T}_{\Gamma'}(\pi_v, \Pi_t)(n)$ est, sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, extension de faisceaux pervers de la forme $j_{!*}^{-t'g} \mathcal{H}\mathcal{T}(\pi_v, \Pi_{t'})(n')$, lesquels sur $\overline{\mathbb{Z}}_l$, d'après l'hypothèse de récurrence, ne possèdent qu'une notion d'extension intermédiaire. Ainsi donc leur image par \mathbb{F} est $j_{!*}^{-t'g} \mathbb{F} \mathcal{H}\mathcal{T}(\pi_v, \Pi_{t'})(n')$ qui ne dépend pas, dans le groupe de Grothendieck, du réseau stable associé. Moralité l'image dans le groupe de Grothendieck de $\mathbb{F} \left(i_*^{tg} p \mathcal{H}^{-1} i^{tg,*} j_*^{-tg} \mathcal{H}\mathcal{T}_{\Gamma'}(\pi_v, \Pi_t)(n) \right)$ est indépendante de Γ' , d'où le résultat. \square

2. Sur le faisceau pervers des cycles proches

2.1. Rappels. — Pour $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_l, \overline{\mathbb{Z}}_l, \overline{\mathbb{F}}_l$ et pour tout $I \in \mathcal{I}$, les faisceaux pervers des cycles évanescents $R\Psi_{\eta_{v,I}}(\Lambda)[d-1] \binom{d-1}{2}$ sur $X_{I,\bar{s}}$ définissent un W_v -faisceau pervers de Hecke, au sens de la définition 1.3.6 de [2], que l'on note $\Psi_{\mathcal{I},\Lambda}$.

Remarque : dans le cas où $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_l$, on notera simplement $\Psi_{\mathcal{I}}$.

Rappelons, cf. [2] §2.4, que la restriction $\left(\Psi_{\mathcal{I},\Lambda} \right)_{|X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\overline{h}}}$ du faisceau pervers des cycles proches à la strate $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\overline{h}}$, est munie d'une action de $(D_{v,h}^{\times})^0 := \text{Ker} \left(\text{val orn} : D_{v,h}^{\times} \longrightarrow \mathbb{Z} \right)$ et de $\varpi_v^{\mathbb{Z}}$ que l'on voit plongé dans $F_v^{\times} \subset D_{v,h}^{\times}$.

2.1.1. Proposition. — (cf. [10] proposition IV.2.2 et le §2.4 de [2])
On a un isomorphisme $G(\mathbb{A}^{\infty, v}) \times P_{h, d-h}(F_v) \times W_v$ -équivariant⁽¹⁾

$$\operatorname{ind}_{(D_{v,h}^{\times})^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v,h}^{\times}} \left(\mathcal{H}^{h-d-i} \Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l} \right) \Big|_{X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\leq h}} \simeq \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(h)} \mathcal{L}_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\mathcal{U}_{\bar{\tau}, \mathbb{N}}^{h-1-i})$$

où $\mathcal{L}_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\mathcal{U}_{\bar{\tau}, \mathbb{N}}^{h-1})$ est le système local de la définition 1.2.3 associé à la $D_{v,h}^{\times}$ -représentation⁽²⁾
 $\mathcal{U}_{\bar{\tau}, \mathbb{N}}^{\bullet} = \varinjlim \mathcal{U}_{\bar{\tau}, n}^{\bullet}$ où $\mathcal{U}_{\bar{\tau}, n}^{\bullet}$ est le $\bar{\tau}$ -facteur isotypique de la $D_{v,h}^{\times}$ -représentation admissible
 $\mathcal{U}_n^{\bullet} := H^{\bullet}(\mathcal{M}_{LT, n}^{h/F_v}, \bar{\mathbb{Z}}_l)$ obtenue comme la cohomologie de la fibre générique géométrique

$$\mathcal{M}_{LT, n}^{h/F_v} := \mathcal{M}_{LT, h, n} \hat{\otimes}_{\hat{F}_v} \hat{F}_v$$

du schéma formel de Lubin-Tate représentant les classes d'isomorphismes des déformations par quasi-isogénies du \mathcal{O}_v -module formel de hauteur h et de dimension 1.

2.1.2. Notation. — Pour $\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(h)$, on notera $\mathcal{L}_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\bar{\tau})$ pour $\mathcal{L}_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\mathcal{U}_{\bar{\tau}, \mathbb{N}}^{h-1})$.

2.1.3. Définition. — Soit ϱ une $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible supercuspidale de $GL_g(F_v)$. On note alors $\operatorname{Loc}(\varrho)$ le plus petit ensemble de systèmes locaux sur les strates de Newton ouvertes $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\leq tg}$ pour $1 \leq tg \leq d$ tel que

- pour tout $\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(h, \varrho)$, $\operatorname{Loc}(\varrho)$ contient les $\mathcal{L}_{\bar{\mathbb{Z}}_l}(\bar{\tau})$;
- il est stable par le processus suivant : pour $\mathcal{L} \in \operatorname{Loc}(\varrho)$ un système local sur $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\leq h}$ et un épimorphisme strict $j_1^{\leq h} \mathcal{L}[d-h] \rightarrow F$ de noyau P_F , les systèmes locaux de la filtration de stratification exhaustive de P_F appartiennent à $\operatorname{Loc}(\varrho)$.
- si $\mathcal{L} \in \operatorname{Loc}(\varrho)$ alors tout réseau stable de $\mathcal{L} \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{Q}}_l$ appartient aussi à $\operatorname{Loc}(\varrho)$.

Remarque : en particulier $\operatorname{Loc}(\varrho)$ contient tous les systèmes locaux d'Harris-Taylor entiers $\mathcal{L}_{\Gamma}(\pi_v, t)$ où, cf. A.3.10, $\pi_v \in \operatorname{Scusp}_i(\varrho)$ avec $-1 \leq i \leq s(\varrho) = \frac{d}{g(\varrho)}$.

2.1.4. Proposition. — (cf. [5] proposition 2.3.7)

Soit $\mathcal{L} \in \operatorname{Loc}(\varrho)$ à support dans $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{\leq h}$ et soit $P_{\mathcal{L}}$ le noyau de $j_1^{\leq h} \mathcal{L}[d-h] \rightarrow {}^p j_{1,*}^{\leq h} \mathcal{L}[d-h]$.
On note h' minimal tel que $j^{\leq h', * } P_{\mathcal{L}}$ est non nul alors le morphisme d'adjonction

$$j_1^{\leq h'} j^{\leq h', * } P_{\mathcal{L}} \longrightarrow P_{\mathcal{L}}$$

est surjectif dans ${}^p \mathcal{C}$.

On note $X^{1 \leq h} := X^{\geq 1} - X^{\geq h+1}$ et $j^{1 \leq h} : X^{1 \leq h} \hookrightarrow X^{\geq 1}$. On définit alors

$$0 = \operatorname{Fil}_!^0(\Psi_{\mathcal{I}}) \subset \operatorname{Fil}_!^1(\Psi_{\mathcal{I}}) \subset \cdots \subset \operatorname{Fil}_!^d(\Psi_{\mathcal{I}}) = \Psi_{\mathcal{I}}$$

1. Noter le décalage $[d-1]$ dans la définition de $\Psi_{\mathcal{I}, \bar{\mathbb{Z}}_l}$.

2. La correspondance entre le système indexé par \mathcal{I} et \mathbb{N} est donnée par l'application m_1 de 1.1.2.

la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}}$ au sens de [6], où pour L est un faisceau pervers libre on note, pour tout $1 \leq h \leq d$,

$$\mathrm{Fil}_!^h(L) := \mathrm{Im}_{\mathcal{F}} \left({}^{p+}j_!^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} L \longrightarrow L \right),$$

autrement dit $\mathrm{Fil}_!^h(L)/\mathrm{Fil}_!^{h-1}(L)$ est l'image dans \mathcal{F} du morphisme d'adjonction

$$j_!^{=h} j^{=h,*} \left(L/\mathrm{Fil}_!^{h-1}(L) \right) \longrightarrow L/\mathrm{Fil}_!^{h-1}(L)$$

Le résultat principal de [5], rappelé dans la proposition suivante, est que, pour $L = \Psi_{\mathcal{I}}$, ces images dans \mathcal{F} sont égales aux mêmes coimages.

2.1.5. Proposition. — (cf. [5] proposition 2.4.5)

La filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}}$ est saturée, i.e. pour tout $1 \leq h \leq d$, le conoyau du morphisme d'adjonction

$$j_!^{=h} j^{=h,*} \left(\Psi_{\mathcal{I}}/\mathrm{Fil}_!^{h-1}(\Psi_{\mathcal{I}}) \right) \longrightarrow \mathrm{Fil}_!^h(\Psi_{\mathcal{I},\bar{\tau}})/\mathrm{Fil}_!^{h-1}(\Psi_{\mathcal{I},\bar{\tau}})$$

est libre.

Remarque : selon [6], on peut considérer la cofiltration de stratification

$$\Psi_{\mathcal{I}} = \mathrm{CoFil}_{*,d}(\Psi_{\mathcal{I}}) \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_{*,d-1}(\Psi_{\mathcal{I}}) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_{*,1}(\Psi_{\mathcal{I}}) \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_{*,0}(\Psi_{\mathcal{I}}) = 0$$

où, cf. [6] proposition 2.2.5, pour tout faisceau pervers libre L et $1 \leq h \leq d$, on note

$$\mathrm{CoFil}_{*,h}(L) = \mathrm{Coim}_{\mathcal{F}} \left(L \longrightarrow {}^p j_*^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} L \right),$$

autrement dit $\mathrm{Ker} \left(\mathrm{CoFil}_{*,h}(L) \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_{*,h-1}(L) \right)$ est le noyau dans \mathcal{F} de

$$\mathrm{Ker} \left(L \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_{*,h-1}(L) \right) \longrightarrow j_*^{=h} j^{=h,*} \left(\mathrm{Ker} \left(L \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_{*,h-1}(L) \right) \right).$$

Le dual de la proposition précédente est que, pour $L = \Psi_{\mathcal{I}}$, ce noyau dans ${}^p\mathcal{C}$ est aussi un noyau dans ${}^{p+}\mathcal{C}$.

2.2. Décomposition supercuspidale. — D'après le théorème A.3.6, toute $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de $D_{v,d}^\times$ est associée à une $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible supercuspidale ϱ de $GL_g(F_v)$ pour g un diviseur de $d = sg$. Ainsi la décomposition de la proposition 2.1.1 se raffine en une décomposition, cf. la formule A.3.9

$$\mathrm{ind}_{(D_{v,h}^\times)^0 \varpi_v^{\mathbb{Z}}}^{D_{v,h}^\times} \left(\mathcal{H}^{h-d-i} \Psi_{\mathcal{I},\overline{\mathbb{Z}}_l} \right) \Big|_{X_{\overline{\mathbb{Z}}_l}^{=h}} \simeq \bigoplus_{g|h} \bigoplus_{\varrho \in \mathrm{Scusp}_{F_v}(g)} \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(h,\varrho)} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(\mathcal{U}_{\bar{\tau},\mathbb{N}}^{h-1-i}).$$

Le but de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant.

2.2.1. Proposition. — *Il existe une décomposition*

$$\Psi_{\mathcal{I}} \simeq \bigoplus_{1 \leq g \leq d} \bigoplus_{\varrho \in \text{Scusp}_{F_v}(g)} \Psi_{\mathcal{I}, \varrho}$$

où pour tout $\varrho \in \text{Scusp}_{F_v}(g)$, le facteur direct $\Psi_{\mathcal{I}, \varrho}$ est de type ϱ au sens de la définition 1.2.5.

Démonstration. — On reprend la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I}}$

$$0 = \text{Fil}_!^0(\Psi_{\mathcal{I}}) \subset \text{Fil}_!^1(\Psi_{\mathcal{I}}) \subset \cdots \subset \text{Fil}_!^d(\Psi_{\mathcal{I}}) = \Psi_{\mathcal{I}}$$

et on raisonne par récurrence sur r de 0 à d en supposant qu'une telle décomposition existe pour $\text{Fil}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}})$. Le cas de $r = 0$ étant clair, supposons le résultat acquis pour $r - 1$ et montrons le pour r . On note $\text{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}})$ le quotient $\text{Fil}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}})/\text{Fil}_!^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I}})$ dont on rappelle que d'après [5] il est isomorphe à ${}^p\mathcal{H}^0 i^{r,*} \Psi_{\mathcal{I}}$. D'après la proposition 2.1.5, le morphisme d'adjonction

$$j_!^{-r} j^{=r,*} \text{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}}) \longrightarrow \text{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}})$$

est surjectif dans ${}^p\mathcal{C}$ avec

$$j_!^{-r,*} \text{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}}) \simeq \bigoplus_{g|r} \bigoplus_{\varrho \in \text{Scusp}_{F_v}(g)} \mathcal{L}_{r, \varrho},$$

où $\mathcal{L}_{r, \varrho}$ est un système local sur la strate $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{=r}$ de type ϱ au sens de 1.2.5. On peut ainsi écrire

$$\text{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{I}}) \simeq \bigoplus_{g|r} \bigoplus_{\varrho \in \text{Scusp}_{F_v}(g)} \text{gr}_{!, \varrho}^r(\Psi_{\mathcal{I}})$$

avec $j_!^{-r} \mathcal{L}_{r, \varrho}[d - r] \twoheadrightarrow \text{gr}_{!, \varrho}^r(\Psi_{\mathcal{I}})$ dans ${}^p\mathcal{C}$. En outre d'après la proposition 2.1.4, $\text{gr}_{!, \varrho}^r(\Psi_{\mathcal{I}})$ admet une filtration dont les gradués sont des ${}^p j_{!*}^{=r'}$ extensions intermédiaires de certains systèmes locaux de type ϱ au sens de A.2.9, i.e. $\text{gr}_{!, \varrho}^r(\Psi_{\mathcal{I}})$ est un faisceau pervers de type ϱ .

2.2.2. Lemme. — *Soient*

- des $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles supercuspidales non isomorphes ϱ et ϱ' ,
- $\bar{\tau}$ et $\bar{\tau}'$ des $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles respectivement de type ϱ et ϱ' au sens de la définition A.3.7 et
- P un p -faisceau pervers sans torsion tel que

$$0 \rightarrow A' \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow 0$$

où :

- il existe h et h' ainsi que deux systèmes locaux \mathcal{L} et \mathcal{L}' sur respectivement $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{=h}$ et $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}^{=h'}$, respectivement de type ϱ et ϱ' , tels que
- A (resp. A') est isomorphe à ${}^p j_{!*}^{=h} \mathcal{L}[d - h]$; (resp. ${}^p j_{!*}^{=h'} \mathcal{L}'[d - h']$).

Alors $P \simeq A \oplus A'$.

Démonstration. — Le cas $h = h'$ découle de la proposition A.3.4. Supposons pour commencer que $h > h'$ de sorte que $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h} \subset X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h'}$ et traitons tout d'abord le cas où les coefficients sont $\overline{\mathbb{Q}}_l$. La flèche d'adjonction

$$P \longrightarrow j_*^{-h'} j^{=h',*} P$$

a, d'après [2], pour image A' d'où le résultat. Revenons aux coefficients $\overline{\mathbb{Z}}_l$ et considérons la t -structure \tilde{p} obtenue en recollant

- la t structure usuelle p , cf. le début du §1.3, sur l'ouvert $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h'} - X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h}$ avec
- la t -structure $p[-1]$ sur $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h}$ où p est encore la t -structure usuelle.

Notons alors que $A[-1]$ est \tilde{p} -pervers ainsi que A' puisque

$${}^p j_{!*}^{\geq h'} \mathcal{L}'[d-h] = \tilde{p} j_{!*}^{h' \leq h} \left({}^p j_{!*}^{h' \rightsquigarrow h} \mathcal{L}'[d-h] \right)$$

où

$$j^{h' \leq h} : X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h'} - X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h'} \quad \text{et} \quad j^{h' \rightsquigarrow h} : X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h'} \hookrightarrow X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h'} - X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h}.$$

Ainsi P définit une flèche $A[-1] \longrightarrow A'$ de \tilde{p} -faisceaux pervers dont l'image est, d'après le cas de $\overline{\mathbb{Q}}_l$, contenue dans la torsion de $i_*^{h'} \tilde{p} j_{!*}^{h' \leq h} \left({}^p j_{!*}^{h' \rightsquigarrow h} \mathcal{L}'[d-h] \right)$ laquelle est donc à support dans $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h+1}$. On conclut en notant que toute flèche de ${}^p j_{!*}^{\geq h} \mathcal{L}[d-h]$ dans un faisceau pervers à support dans $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h+1}$ est nulle.

Considérons à présent le cas $h < h'$. Pour les coefficients $\overline{\mathbb{Q}}_l$, l'image du morphisme d'adjonction

$$j_{!*}^{=h} j^{=h,*} P \longrightarrow P$$

est, d'après [2], isomorphe à A d'où le résultat. Pour les coefficients $\overline{\mathbb{Z}}_l$, considérons la t -structure \tilde{p} obtenue en recollant celle usuelle p sur $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h} - X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h'}$ avec la t -structure $p[1]$ sur $X_{\mathcal{I},\bar{s}}^{\geq h'}$ où p est encore la t -structure usuelle. L'extension P définit alors une flèche entre \tilde{p} faisceaux pervers $A \longrightarrow A'[1]$ où

$$A \simeq {}^p j_{!*}^{=h} \mathcal{L}[d-h] \simeq i_*^{h'} \tilde{p} j_{!*}^{h \leq h'} \left({}^p j_{!*}^{h \rightsquigarrow h'} \mathcal{L}[d-h] \right)$$

est un faisceau pervers sans torsion. Ainsi la nullité de cette flèche découle du cas des coefficients $\overline{\mathbb{Q}}_l$ traité précédemment. \square

Considérons alors

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Fil}_1^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I}}) & \longrightarrow & \text{Fil}_1^r(\Psi_{\mathcal{I}}) & \longrightarrow & \text{gr}_1^r(\Psi_{\mathcal{I}}) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{1 \leq g \leq d} \bigoplus_{\varrho \in \text{Scusp}_v(g)} \text{Fil}_{1,\varrho}^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I}}) & \longrightarrow & P_{\varrho_0} & \dashrightarrow & \text{gr}_{1,\varrho_0}^r(\Psi_{\mathcal{I}}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

D'après les propositions 2.1.4 et 2.1.5, $\text{gr}_{1,\varrho_0}^r(\Psi_{\mathcal{I}})$ admet une filtration dont les gradués sont sans torsion et isomorphes à des p -extensions intermédiaires de systèmes locaux de type ϱ_0 . De même pour tout ϱ , le faisceau pervers $\text{Fil}_{1,\bar{\tau}}^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I}})$ admet une filtration dont les gradués

sont sans torsion et isomorphes à des p -extensions intermédiaires de systèmes locaux de type ϱ . Il résulte alors du lemme précédent que P_{ϱ_0} s'écrit comme une somme directe

$$P_{\varrho_0} \simeq \mathrm{Fil}_{!,\varrho_0}^r(\Psi_{\mathcal{I}}) \oplus \bigoplus_{\varrho \neq \varrho_0} \mathrm{Fil}_{!,\varrho}^{r-1}(\Psi_{\mathcal{I}}).$$

En répétant le raisonnement précédent pour tous les ϱ , on en déduit le résultat. \square

2.3. Preuve de la proposition 1.3.4. — Commençons par le lemme suivant.

2.3.1. Lemme. — *Pour tout $1 \leq h \leq d$ et pour tout ϱ , les p et $p+$ extensions intermédiaires de $j^{1 \leq h,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho}$ sont les mêmes, i.e.*

$${}^p j_{!*}^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho} = {}^{p+} j_{!*}^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho}.$$

Démonstration. — Rappelons que le morphisme d'adjonction

$${}^{p+} j_{!*}^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho} \longrightarrow \Psi_{\mathcal{I},\varrho}$$

a pour image dans ${}^p \mathcal{C}$, le faisceau pervers $\mathrm{Fil}_{!}^h(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})$ et pour conoyau ${}^p \mathcal{H}^0 i^{h+1,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho}$. D'après [5] ce dernier est libre ce qui nous fournit une surjection

$$\mathrm{Fil}_{!}^h(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) \twoheadrightarrow {}^p j_{!*}^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho}$$

puisque le noyau du morphisme d'adjonction précédent est à support dans $X_{\overline{\mathcal{I},\overline{s}}}^{\geq h+1}$. Soit alors le poussé en avant P

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Fil}_{!}^h(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) & \longrightarrow & \Psi_{\mathcal{I},\varrho} & \longrightarrow & \Psi_{\mathcal{I},\varrho} / \mathrm{Fil}_{!}^h(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & {}^p j_{!*}^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho} & \dashrightarrow & P & \longrightarrow & \Psi_{\mathcal{I},\varrho} / \mathrm{Fil}_{!}^h(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Notons que $j^{1 \leq h,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho} \simeq j^{1 \leq h,*} P$ et comme le noyau de $\Psi_{\mathcal{I},\varrho} \twoheadrightarrow P$ est à support dans $X_{\overline{\mathcal{I},\overline{s}}}^{\geq h+1}$, alors pour tout $\delta > 0$ on a

$${}^p \mathcal{H}^{\delta} i^{h+1,!} \Psi_{\mathcal{I},\varrho} \simeq {}^p \mathcal{H}^{\delta} i^{h+1,!} P.$$

Rappelons, cf. par exemple [6], que pour tout faisceau pervers Q sans torsion, le conoyau du morphisme d'adjonction $Q \longrightarrow j_* j^* Q$ est isomorphe à ${}^p \mathcal{H}^1 i^! Q$. On en déduit ainsi que

- $j_*^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} P \simeq j_*^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho}$ et
- les conoyaux des morphismes d'adjonction

$$P \longrightarrow j_*^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} P \quad \text{et} \quad \Psi_{\mathcal{I},\varrho} \longrightarrow j_*^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho}$$

sont isomorphes.

On obtient ainsi une surjection dans ${}^p\mathcal{C}$

$$P \twoheadrightarrow \mathrm{CoFil}_{!,h}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}),$$

où on rappelle que $\mathrm{CoFil}_{!,\bullet}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})$ est la cofiltration de stratification de $\Psi_{\mathcal{I},\varrho}$ de la fin du §2.1. Comme le socle de $P \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ ne contient aucun faisceau pervers à support dans $X_{\overline{\mathcal{I},\overline{s}}}^{\geq h+1}$, on en déduit que la surjection précédente est aussi injective et donc

$$P \simeq \mathrm{CoFil}_{!,h}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}).$$

Or dans ${}^p\mathcal{C}(X_{\overline{\mathcal{I},\overline{s}}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$, la surjection $\mathrm{Fil}_!^h(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) \twoheadrightarrow {}^p j_{!*}^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho}$, se dualise dans ${}^{p+}\mathcal{C}(X_{\overline{\mathcal{I},\overline{s}}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ en une injection

$${}^{p+} j_{!*}^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho} \hookrightarrow \mathrm{CoFil}_{!,h}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})$$

i.e. en une injection dans ${}^p\mathcal{C}(X_{\overline{\mathcal{I},\overline{s}}}, \overline{\mathbb{Z}}_l)$ dont le conoyau est sans torsion. On se retrouve alors dans la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & {}^p j_{!*}^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho} & \longrightarrow & \mathrm{CoFil}_{!,h}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \\ & & & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & {}^{p+} j_{!*}^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho} & \longrightarrow & \mathrm{CoFil}_{!,h}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) & \longrightarrow & Z' \longrightarrow 0 \end{array}$$

où Z et Z' sont des faisceaux pervers sans torsion à support dans $X_{\overline{\mathcal{I},\overline{s}}}^{\geq h+1}$. Comme il n'y a pas de flèche non nulle entre ${}^{p+} j_{!*}^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho}$ et un faisceau pervers sans torsion à support dans $X_{\overline{\mathcal{I},\overline{s}}}^{\geq h+1}$, on obtient alors une flèche de

$${}^{p+} j_{!*}^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho} \longrightarrow {}^p j_{!*}^{1 \leq h} j^{1 \leq h,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho}$$

lesquels sont alors isomorphes comme annoncé. \square

Revenons à présent à la preuve de la proposition 1.3.4. Pour ϱ fixé, $g := g(\varrho)$ est l'indice g' minimal tel que $j^{=g',*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho}$ est non nul. Avec la notation 2.1.2, on a alors

$$j^{\geq g,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \bigoplus_{\overline{\tau} \in \mathcal{R}_{\overline{\mathbb{Z}}_l}(g,\varrho)} \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\overline{\tau}).$$

Les gradués de la filtration de stratification exhaustive de $\mathrm{Fil}_!^g(\Psi_{\mathcal{I},\varrho})$ sont, d'après les propositions 2.1.4 et 2.1.5, et avec les notations de la fin du §1.2, de la forme ${}^p j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{HT}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n)$ où

- π_v est une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale entière de type ϱ ,
 - t varie de 1 à $\frac{d}{g}$
 - et
 - Π_t est une représentation de $GL_{tg}(F_v)$,
 - n est un entier,
 - Γ est un réseau stable
- qu'il est, d'après le lemme 1.3.5, inutile ici de préciser.

Pour $1 \leq t \leq \frac{d}{g}$ fixé, on peut ainsi écrire

$$0 \rightarrow A_\varrho(t) \rightarrow \mathrm{Fil}_!^g(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) \rightarrow B_\varrho(t) \rightarrow 0$$

où $A_\varrho(t) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ rassemble les constituants irréductibles de $\mathrm{Fil}_!^g(\Psi_{\mathcal{I},-\pi}) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$ à support dans $X_{\overline{\mathcal{I},s}}^{\geq tg+1}$. En particulier, avec la notation 1.2.6, il existe, avec les notations précédentes, Π_t, n dépendant de π_v , tels que

$$\bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Scusp}(\varrho)} {}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}(\pi_v, \Pi_t)(n) \hookrightarrow B_\varrho(t) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l$$

et dont le quotient est à support dans $X_{\overline{\mathcal{I},s}}^{\leq tg-1}$. On note $B_\varrho(=t)$ (resp. ${}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t)(n)$) le réseau de la somme directe précédente découpé par $B_\varrho(t)$, i.e. les tirés en arrière

$$\begin{array}{ccccc} {}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}(\pi_v, \Pi_t)(n) \hookrightarrow & \bigoplus_{\pi_v \in \mathrm{Scusp}(\varrho)} {}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}(\pi_v, \Pi_t)(n) \hookrightarrow & B_\varrho(t) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{Q}}_l & & \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\ {}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t)(n) \hookrightarrow & \text{-----} & B_\varrho(=t) \hookrightarrow & \text{-----} & B_\varrho(t). \end{array}$$

Les monomorphismes de la ligne du bas sont alors stricts, i.e. les conoyaux sont libres. On a alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_\varrho(t) & \longrightarrow & \mathrm{Fil}_!^g(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) & \longrightarrow & B_\varrho(t) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A_\varrho(t) & \longrightarrow & \mathrm{Fil}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{I},\varrho}) & \longrightarrow & {}^p j_{!*}^{1 \leq tg} j^{1 \leq tg,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho} \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & F & \xlongequal{\quad} & Q \end{array}$$

Pour tout $\pi_v \in \mathrm{Scusp}(\varrho)$, en composant les inclusions de ${}^{p+C}$

$${}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t)(n) \hookrightarrow B_\varrho(t) \hookrightarrow {}^p j_{!*}^{1 \leq tg} j^{1 \leq tg,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho}$$

on obtient un monomorphisme strict de \mathcal{F}

$${}^p j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t)(n) \hookrightarrow {}^p j_{!*}^{1 \leq tg} j^{1 \leq tg,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho},$$

i.e. le conoyau est sans torsion. Or par ailleurs, comme le terme de droite de cette inclusion est aussi égal à ${}^{p+} j_{!*}^{1 \leq tg} j^{1 \leq tg,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho}$ on a une monomorphisme strict

$${}^{p+} j_{!*}^{-tg} \mathcal{HT}_\Gamma(\pi_v, \Pi_t)(n) \hookrightarrow {}^p j_{!*}^{1 \leq tg} j^{1 \leq tg,*} \Psi_{\mathcal{I},\varrho} \tag{2.3.2}$$

pour un certain réseau stable. En résumé, on a

$$\begin{array}{ccc}
& & p j_{!*}^{=tg} \mathcal{HT}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n) \\
& \swarrow \text{---} & \downarrow \text{strict} \\
p^+ j_{!*}^{=tg} \mathcal{HT}_{\Gamma'}(\pi_v, \Pi_t)(n) & \xrightarrow{\text{strict}} & p j_{!*}^{1 \leq tg} j^{1 \leq tg, *} \Psi_{\mathcal{L}, \varrho} \\
& \searrow \text{---} & \downarrow \\
& & Q
\end{array}$$

nul

Par ailleurs sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, d'après [2], la multiplicité de $p j_{!*}^{=tg} \mathcal{HT}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n)$ dans $p j_{!*}^{1 \leq tg} j^{1 \leq tg, *} \Psi_{\mathcal{L}, \varrho}$ est égale à 1 et donc, est nulle dans Q de sorte que, cf. la proposition 1.1.8 de [12], le monomorphisme strict (2.3.2) se factorise en un monomorphisme strict

$$p^+ j_{!*}^{=tg} \mathcal{HT}_{\Gamma'}(\pi_v, \Pi_t)(n) \hookrightarrow p j_{!*}^{=tg} \mathcal{HT}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n).$$

En appliquant $j^{=tg, *}$, on obtient en particulier $\Gamma' = \Gamma$ puis comme le composé

$$p^+ j_{!*}^{=tg} \mathcal{HT}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n) \hookrightarrow p j_{!*}^{=tg} \mathcal{HT}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n) \hookrightarrow p^+ j_{!*}^{=tg} \mathcal{HT}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n)$$

est un isomorphisme, on obtient bien $p j_{!*}^{=tg} \mathcal{HT}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n) \simeq p^+ j_{!*}^{=tg} \mathcal{HT}_{\Gamma}(\pi_v, \Pi_t)(n)$.

3. Extensions intermédiaires : cas non supercuspidal

Soit ϱ une $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible supercuspidale de $GL_g(F_v)$ et $\bar{\tau}_{\varrho, t}$ la représentation de $D_{v, tg}^{\times}$ de type ϱ associée à la $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation superSpeh $\text{Speh}_t(\varrho)$, cf. le théorème A.3.6.

Pour tout $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible entière τ_v de $\bar{\tau}_{\varrho, t}$ -type -1 , d'après le théorème 1.3.3, pour tout réseau stable Γ de τ_v , le système local $\mathcal{L}_{\Gamma}(\tau_v)$ n'admet qu'une seule extension intermédiaire, i.e.

$$p j_{!*}^{=tg} \mathcal{L}_{\Gamma}(\tau_v)[d - tg] \simeq p^+ j_{!*}^{=tg} \mathcal{L}_{\Gamma}(\tau_v)[d - tg].$$

En utilisant le triangle distingué, cf. [11] 2.42-2.46,

$$p j_{!*}^{=tg} \mathcal{L}_{\Gamma}(\tau_v)[d - tg] \rightarrow p^+ j_{!*}^{=tg} \mathcal{L}_{\Gamma}(\tau_v)[d - tg] \rightarrow p_i^{tg+1} \mathcal{H}_{tors}^0 i^{tg+1, *} j_*^{\geq tg} \mathcal{L}_{\Gamma}(\tau_v)[d - tg] \rightsquigarrow$$

la torsion de $p_i^{tg+1} \mathcal{H}^0 i^{tg+1, *} j_*^{\geq tg} \mathcal{L}_{\Gamma}(\tau_v)[d - tg]$ est nulle. Le but de ce paragraphe est d'expliquer la l -torsion de ce dernier dans le cas où τ_v est de $\bar{\tau}_{\varrho, t}$ -type $i \geq 0$.

3.1. Réseaux d'induction d'après [3]. — Pour π une représentation irréductible cuspidale entière de $GL_g(K)$, comme, d'après A.2.2, sa réduction modulo l , notée ϱ , est irréductible, on en déduit qu'à isomorphismes près, π possède un unique réseau stable, cf. par exemple [1] proposition 3.3.2 et la remarque qui suit.

3.1.1. Définition. — (cf. [3]) Étant donné un réseau de $\text{St}_t(\pi)$, la surjection (resp. l'injection)

$$\text{St}_t(\pi) \xrightarrow{\gamma} \pi \rightarrow \text{St}_{t+1}(\pi), i$$

induit un réseau de $\text{St}_{t+1}(\pi)$ de sorte que par récurrence on dispose d'un réseau $RI_{\bar{\mathbb{Z}}_l, -}(\pi, t)$ que l'on qualifie de *réseau d'induction*. On note alors

$$RI_{\bar{\mathbb{F}}_l, -}(\pi, t) := RI_{\bar{\mathbb{Z}}_l, -}(\pi, t) \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l} \bar{\mathbb{F}}_l,$$

3.1.2. Proposition. — (cf. [3] propositions 3.2.2 et 3.2.7) Pour tout $0 \leq k \leq \lg_\rho(s)$, il existe une sous-représentation $V_{\rho, -}(s; k)$ de longueur k de $RI_{\bar{\mathbb{F}}_l, -}(\pi, s)$

$$(0) = V_{\rho, \pm}(s; 0) \subsetneq V_{\rho, \pm}(s; 1) \subsetneq \cdots \subsetneq V_{\rho, \pm}(s; \lg_\rho(s)) = RI_{\bar{\mathbb{F}}_l, -}(\pi, s),$$

définie de sorte que l'image de $V_{\rho, -}(s; k)$ dans le groupe de Grothendieck est telle que tous ses constituants irréductibles sont de ρ -niveau strictement plus grand que n'importe quel constituant irréductible de $W_{\rho, -}(s; k) := V_{\rho, -}(s; \lg_\rho(s)) / V_{\rho, -}(s; k)$.

3.1.3. Notation. — Une représentation irréductible ρ étant fixée ainsi qu'un entier s , pour $k \geq 0$ tel que $m(\rho)l^k \leq s$, on note :

- $\underline{\delta}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \mathcal{I}_\rho(s)$ et
- pour tout t tel que $m(\rho)l^k t \leq s$, $V_{\rho, -}(s, \geq t \cdot \underline{\delta}_k)$ le sous-espace $V_{\rho, -}(s, \lg_\rho(s))$ défini ci-dessus tel que tous les constituants irréductibles de $V_{\rho, -}(s, \lg_\rho(s))$ sont de ρ -niveau plus grand ou égal à $t \cdot \underline{\delta}_k$.

3.2. Réduction modulo l d'un faisceau pervers d'Harris-Taylor. — Pour étudier la l -torsion de ${}^p i_*^{tg+1} \mathcal{H}^0 i^{tg+1, *}_{j_* \geq tg} \mathcal{L}_\Gamma(\tau_v)[d - tg]$, nous utiliserons le foncteur de réduction modulaire

$$\mathbb{F}(-) := \bar{\mathbb{F}}_l \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_l}^{\mathbb{L}} (-).$$

Rappelons que ce dernier ne commute pas aux foncteurs de troncations et que d'après les équations 2.54-2.61 de [11], on a

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^p j_{!*} &\rightarrow {}^p j_{!*} \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{H}^{-1} \mathbb{F}^p i_* {}^p \mathcal{H}_{tors}^0 i^* j_* [1] \rightsquigarrow \\ &{}^p j_{!*} \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}^{p+} j_{!*} \rightarrow \mathcal{H}^0 \mathbb{F}^p i_* {}^p \mathcal{H}_{tors}^0 i^* j_* \rightsquigarrow \end{aligned}$$

En revanche, dans le cas où ${}^p j_! = {}^{p+} j_!$, i.e. en utilisant

$${}^p j_! \rightarrow {}^{p+} j_! \rightarrow {}^p i_* \mathcal{H}_{tors}^{-1} i^* j_* [1] \rightsquigarrow$$

quand ${}^p i_* \mathcal{H}^{-1} i^* j_*$ est libre, alors le triangle distingué

$$\mathbb{F}^p j_! \rightarrow {}^p j_! \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{H}^{-1} \mathbb{F}^p i_* {}^p \mathcal{H}_{tors}^{-1} i^* j_* [2] \rightsquigarrow$$

nous donne que \mathbb{F} et ${}^p j_!$ commutent. Nous allons utiliser cette propriété avec les $j^{\geq tg}$. Rappelons les notations du §A.2 :

- $\rho := \rho_{-1}$ désignera une $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible supercuspidale de $GL_\rho(F_v)$ et on notera aussi $g_{-1} := g$.

- Pour tout $u \geq 0$, selon les notations de A.2.9, on note $\varrho_u = \text{St}_{m(\varrho_{-1})l^u}(\varrho_{-1})$ la représentation irréductible cuspidale de $GL_{g_u}(F_v)$ avec $g_u = gm(\varrho_{-1})l^u$.
- Pour tout $u \geq -1$, on se fixe une représentation irréductible cuspidale π_u de $GL_{g_u}(F_v)$ dont la réduction modulo l est isomorphe à ϱ_u et
- enfin on notera $s_u := \lfloor \frac{d}{g_u} \rfloor$.

3.2.1. Notation. — Pour tout $t \geq 1$, on note

$$\bar{\tau}_{\varrho_u, t} := r_l(\pi_u[t]_D).$$

Remarque : on rappelle, cf. le §A.3, que $\bar{\tau}_{\varrho_{-1}, t}$ est irréductible.

3.2.2. Proposition. — (cf. la proposition A.3.1)

Pour $u \geq 0$, on a l'égalité suivante dans le groupe de Grothendieck

$$\bar{\tau}_{\varrho_u, t} = l^u \sum_{i=0}^{m(\varrho)-1} \bar{\tau}_{\varrho, tm(\varrho)l^u \mathcal{V}^i}. \quad (3.2.3)$$

Remarque : dans le cas où, avec les notations de A.2.1, $\epsilon(\varrho) = 1$, la formule (3.2.3) s'écrit $\bar{\tau}_{\varrho_u, t} = l^{u+1} \bar{\tau}_{\varrho, t}$.

3.2.4. Proposition. — Avec les notations de la proposition 3.1.2, dans le groupe de Grothendieck des \mathbb{F}_l -faisceaux pervers équivariants sur $X_{\mathcal{I}, \bar{s}}$, on a l'égalité

$$\mathbb{F}\left({}^p j_{!*}^{\geq tg_u} \mathcal{HT}(\pi_u, \Pi_t)\right) = m(\varrho)l^u \sum_{r=0}^{s-tm(\varrho)l^u} {}^p j_{!*}^{\geq tg_u + rg_{-1}} \mathcal{HT}\left(\varrho, r_l(\Pi_t) \overrightarrow{\times} V_{\varrho_{-1}}(r + tm(\varrho_{-1})l^u, < \underline{\delta}_u)\right) \otimes \Xi^{r \frac{g_{-1}}{2}}.$$

Remarque : dans le groupe de Grothendieck, l'induite $r_l(\Pi_t) \overrightarrow{\times} V_{\varrho_{-1}}(r + tm(\varrho_{-1})l^u, < \underline{\delta}_u)$ n'intervient que par sa semi-simplifiée. Pour les mêmes raisons, il est inutile de préciser les réseaux stables utilisés pour les systèmes locaux de la formule précédente.

Démonstration. — Les cas $tg_u \geq d$ étant triviaux, on raisonne par récurrence en supposant le résultat acquis pour tout $t < t'$ et on traite le cas de t . L'idée est de partir de la commutation entre \mathbb{F} et les $j_i^{\geq tg}$:

$$\mathbb{F}\left(j_i^{\geq tg_u} \mathcal{HT}(\pi_u, \Pi_t)\right) = \sum_{t'=t}^{s_u} \mathbb{F}\left({}^p j_{!*}^{\geq t'g_u} \mathcal{HT}(\pi_u, \Pi_t) \overrightarrow{\times} \text{St}_{t'-t}(\pi_u)\right) \otimes \Xi^{\frac{(t'-t)(g_u-1)}{2}},$$

et, en posant $t(u) = tm(\varrho)l^u$

$$\mathbb{F}\left(j_i^{\geq t(u)g_{-1}} \mathcal{HT}(\pi_{-1}, \Pi_t)\right) = \sum_{t'=t(u)}^s \mathbb{F}\left({}^p j_{!*}^{\geq t'g_{-1}} \mathcal{HT}(\pi_{-1}, \Pi_t) \overrightarrow{\times} \text{St}_{t'-t(u)}(\pi_{-1})\right) \otimes \Xi^{\frac{(t'-t(u))(g_{-1}-1)}{2}}. \quad (3.2.5)$$

Or on a vu que

$$\mathbb{F}j_!^{\geq t g_u} \mathcal{HT}(\pi_u, \Pi_t) = j_!^{\geq t g_u} \mathbb{F} \mathcal{HT}(\pi_u, \Pi_t) = m(\varrho) l^u j_!^{\geq t(u)g-1} \mathbb{F} \mathcal{HT}(\pi_{-1}, \Pi_t)$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} \sum_{t'=t+1}^{s_u} \mathbb{F} \left({}^p j_{!*}^{\geq t' g_u} \mathcal{HT}(\pi_u, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{St}_{t'-t}(\pi_u)) \right) \otimes \Xi^{\frac{(t'-t)(g_u-1)}{2}} \\ = \sum_{t'=t(u)+1}^{s(u)} {}^p j_{!*}^{\geq t' g-1} \mathcal{HT}(\varrho, r_l(\Pi_t) \overrightarrow{\times} V_{\varrho-1}(t'-t(u), \geq \underline{\delta}_u)) \otimes \Xi^{\frac{(t'-t(u))(g_1-1)}{2}} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

En soustrayant (3.2.6) à (3.2.5), on obtient le résultat. \square

Remarque : la surjection

$${}^p j_!^{\geq t' g_u} \mathbb{F} \mathcal{HT}(\pi_u, \Pi_{t'}) \twoheadrightarrow \mathbb{F} {}^p j_{!*}^{\geq t' g_u} \mathcal{HT}(\pi_u, \Pi_{t'})$$

nous donne en outre que la suite des dimensions des gradués de la filtration de stratification exhaustive est strictement croissante ce qui fixe complètement cette filtration.

Ainsi la l -torsion du quotient des p + faisceaux pervers d'Harris-Taylor par leur p version, est complètement décrit par la combinatoire de la réduction modulo l des représentations de $GL_d(F_v)$ et de $D_{v,d}^\times$. L'étude de la torsion d'ordre supérieure découlerait selon le même schéma de démonstration, de l'étude de la réduction modulo l^n des représentations irréductibles de $GL_d(F_v)$ et $D_{v,d}^\times$.

3.3. Complexes d'induction des représentations de Steinberg. — La filtration de stratification du faisceau pervers $\mathbb{F} \left({}^p j_{!*}^{\geq t g_u} \mathcal{HT}(\pi_u, \Pi_t) \right)$ dont les gradués sont d'après la remarque de la fin du paragraphe précédent, les faisceaux pervers de la proposition 3.2.4 pris dans l'ordre inverse de la dimension de leur support (le sous-espace est donné par le faisceau pervers dont le support est de dimension minimale), fournit une suite spectrale qui calcule ses faisceaux de cohomologie. Le but de ce paragraphe est de décrire la combinatoire de cette suite spectrale.

3.3.1. Notation. — Pour tout $s \geq 1$, on note $K_\pi(s)^\bullet$ le complexe

$$K_\pi(s)^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq 0 \text{ ou } i < -s \\ RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l, -}(\pi, s+i) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{-i}(\pi) & \text{pour } -s \leq i \leq 0 \end{cases}$$

Remarque : d'après la définition rappelée au §3.1 des réseaux d'induction $RI_{\overline{\mathbb{Z}}_l, -}(\pi, s+i)$, la cohomologie de $K_\pi(s)^\bullet$ est nulle.

En notant ϱ la réduction modulo l de π , on définit aussi

$$K_\varrho(s)^\bullet := K_\pi(s)^\bullet \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_l} \overline{\mathbb{F}}_l$$

dont la cohomologie est nulle.

3.3.2. Définition. — Pour tout $k, t \geq 0$, tels que $m(\varrho)l^k t \leq s$, avec les notations de 3.1.3, on définit

— $K_\varrho(s, \geq t.\underline{\delta}_k)^\bullet$ le sous-complexe de $K_\varrho(s)$ défini, pour $-s \leq i \leq 0$ par

$$K_\varrho(s, \geq t.\underline{\delta}_k)^i = V_\varrho(s+i, \geq t.\underline{\delta}_k) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{-i}(\varrho);$$

— $K_\varrho(s, < t.\underline{\delta}_k)^\bullet$ le quotient de $K_\varrho(s)^\bullet$ par $K_\varrho(s, \geq t.\underline{\delta}_k)^\bullet$.

3.3.3. Proposition. — La cohomologie $\mathcal{H}^i K_\varrho(s, < \underline{\delta}_k)$ du complexe $K_\varrho(s, < t.\underline{\delta}_k)^\bullet$ est :

— nulle si $m(\varrho)l^k$ ne divise pas s ;

— pour $s = \delta m(\varrho)l^k$, elle est nulle si $i \neq -\delta$ et pour $i = -\delta$ isomorphe à $\text{Speh}_\delta(\rho_k)$.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur s quel que soit ϱ ; l'initialisation étant triviale supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $s-1$ et traitons le cas de s .

Soit u tel que $m(\varrho)l^u \leq s < m(\varrho)l^{u+1}$; pour tout $0 \leq k \leq u$, on note $t_k \geq 1$ tel que $t_k m(\varrho)l^k \leq s < (t_k+1)m(\varrho)l^k$ et on considère la filtration suivante de $K_\varrho(s)^\bullet$:

$$\begin{aligned} K_\varrho(s, > t_u \underline{\delta}_u)^\bullet &\subset K_\varrho(s, > (t_u-1)\underline{\delta}_u)^\bullet \subset \cdots \subset K_\varrho(s, > \underline{\delta}_u)^\bullet \\ &\subset K_\varrho(s, > t_{u-1}\underline{\delta}_{u-1})^\bullet \subset \cdots \subset K_\varrho(s, > \underline{\delta}_{u-1})^\bullet \\ &\cdots \subset K_\varrho(s, > t_0 \underline{\delta}_0)^\bullet \subset \cdots \subset K_\varrho(s, > \underline{\delta}_0)^\bullet \subset K_\varrho(s)^\bullet \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

On a alors les propriétés suivantes :

— pour $1 \leq k \leq u$, $K_\varrho(s, > t_{k-1}.\underline{\delta}_{k-1})^\bullet / K_\varrho(s, > \underline{\delta}_k)^\bullet$ est le complexe

$$\text{St}_{t_{k-1}}(\rho_{k-1}) \overrightarrow{\times} K_\varrho(s - t_{k-1}m(\varrho)l^{k-1}, < \underline{\delta}_0)^\bullet,$$

dont la cohomologie est, d'après l'hypothèse de récurrence, nulle sauf si $s = t_{k-1}m(\varrho)l^{k-1}$ auquel cas \mathcal{H}^0 est le seul \mathcal{H}^i non nul, et alors isomorphe à $\text{St}_{t_{k-1}}(\rho_{k-1})$;

— pour $0 \leq k \leq u$ et $1 \leq t < t_k$, le complexe $K_\varrho(s, > t.\underline{\delta}_k)^\bullet / K_\varrho(s, > (t+1).\underline{\delta}_k)^\bullet$ est le complexe

$$\text{St}_t(\rho_k) \overrightarrow{\times} K_\varrho(s - tm(\varrho)l^k, < \underline{\delta}_k)^\bullet,$$

dont la cohomologie est, d'après l'hypothèse de récurrence, nulle sauf si $s = t_k m(\varrho)l^k$ auquel cas \mathcal{H}^{t-t_k} est le seul \mathcal{H}^i non nul, et alors isomorphe à $\text{St}_t(\rho_k) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{t_k-t}(\rho_k)$.

Considérons alors la suite spectrale de cohomologie $E_1^{i,j} = \mathcal{H}^{i+j} gr_{-i} \Rightarrow E_\infty^{i+j}$, associée à la filtration 3.3.3, dont on rappelle que l'aboutissement E_∞^{i+h} est nul.

— D'après les propriétés précédentes les $E_1^{i,j}$ sont connus par récurrence pour tout $i > 0$.

Précisément, pour $0 \leq k \leq u$ tel que $s = m(\varrho)l^k t_k$, il existe $i_1 < i_2 < \cdots < i_{t_k}$ tels que pour $1 \leq r \leq t_k$,

$$E_1^{i_r, -t_k - i_r + r} = \text{St}_0(\rho_k) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{t_k-r}(\rho_k), \quad \underline{0} \in \mathcal{I}_{\rho_k}(r).$$

— Par ailleurs comme les flèches $E_1^{i_r, -t_k - i_r + r} \rightarrow E_1^{i_{r+1}, -t_k - i_{r+1} + r + 1}$ sont induites par celles de $K_\varrho(s)^\bullet$, on en déduit, en utilisant l'hypothèse de récurrence, que $E_1^{0, -t_k}$ est isomorphe à $\text{Speh}_{t_k}(\rho_k)$, d'où le résultat.

□

Appendice A

Rappels sur les représentations

A.1. de $GL_n(K)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$. — Dans la suite K désigne un corps local non archimédien dont le corps résiduel est de cardinal q une puissance de p et on rappelle quelques notations de [2] sur les représentations admissibles de $GL_n(K)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ où l un nombre premier distinct de p .

A.1.1. Notation. — Une racine carrée $q^{\frac{1}{2}}$ de q dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ étant fixée, pour $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, nous noterons $\pi\{k\}$ la représentation tordue de π de sorte que l'action d'un élément $g \in GL_n(K)$ est donnée par $\pi(g)\nu(g)^k$ avec $\nu : g \in GL_n(K) \mapsto q^{-\text{val}(\det g)}$.

A.1.2. Définitions. — — Soit $P = MN$ un parabolique de GL_n de Lévi M et de radical unipotent N . On note $\delta_P : P(K) \rightarrow R^\times$ l'application définie par

$$\delta_P(h) = |\det(\text{ad}(h)|_{\text{Lie}N})|^{-1}.$$

— Pour (π_1, V_1) et (π_2, V_2) des R -représentations de respectivement $GL_{n_1}(K)$ et $GL_{n_2}(K)$, et P un parabolique de $GL_{n_1+n_2}$ de Lévi $M = GL_{n_1} \times GL_{n_2}$ et de radical unipotent N ,

$$\pi_1 \times_P \pi_2$$

désigne l'induite parabolique normalisée de $P(K)$ à $GL_{n_1+n_2}(K)$ de $\pi_1 \otimes \pi_2$ c'est à dire l'espace des fonctions $f : GL_{n_1+n_2}(K) \rightarrow V_1 \otimes V_2$ telles que

$$f(nmg) = \delta_P^{-1/2}(m)(\pi_1 \otimes \pi_2)(m)(f(g)), \quad \forall n \in N, \forall m \in M, \forall g \in GL_{n_1+n_2}(K).$$

Remarque : en particulier si P est standard alors $\pi_1 \times_P \pi_2$ est l'induite « classique » de $\pi_1\{n_2/2\} \otimes \pi_2\{-n_1/2\}$.

— Foncteurs de Jacquet : pour π une R -représentation admissible de $GL_n(K)$, l'espace des vecteurs $N(K)$ -coinvariants est stable sous l'action de $M(K) \simeq P(K)/N(K)$. On notera $J_P(\pi)$ cette représentation tordue par $\delta_P^{-1/2}$.

A.1.3. Notations. — Dans le cas où le parabolique est standard de Lévi $GL_{r_1} \times GL_{r_2} \times \cdots \times GL_{r_k}$, on le notera P_{r_1, \dots, r_k} et \times désignera \times_P .

A.1.4. Définitions. — Une représentation π de $GL_n(K)$ est dite cuspidale si elle n'est pas un sous-quotient d'une induite parabolique propre.

Soient g un diviseur de $d = sg$ et π une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(K)$. L'induite parabolique

$$\pi\left\{\frac{1-s}{2}\right\} \times \pi\left\{\frac{3-s}{2}\right\} \times \cdots \times \pi\left\{\frac{s-1}{2}\right\}$$

possède

- un unique quotient irréductible noté $\text{St}_s(\pi)$; c'est une représentation de Steinberg généralisée.
- une unique sous-représentation irréductible notée $\text{Speh}_s(\pi)$; c'est une représentation de Speh généralisée.

Afin d'éviter d'avoir à écrire systématiquement toutes ces torsions, on introduit les notations suivantes.

A.1.5. Notations. — Un entier $g \geq 1$ étant fixé, pour π_1 et π_2 des représentations de respectivement $GL_{t_1g}(K)$ et $GL_{t_2g}(K)$, on notera

$$\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2 = \pi_1 \left\{ -\frac{t_2}{2} \right\} \times \pi_2 \left\{ \frac{t_1}{2} \right\}$$

A.2. de $GL_d(K)$ mod l . — On rappelle que l et p désignent des nombres premiers distincts et que q est une puissance de p . On note $e_l(q)$ l'ordre de l'image de q dans \mathbb{F}_l^\times . Afin de simplifier la lecture, dans la suite on utilisera la lettre π pour désigner une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation entière et les lettres ϱ et ρ pour des $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations.

A.2.1. Définition. — Une représentation ϱ de $GL_n(K)$ est dite

- *cuspidale* si pour tout sous-groupe parabolique propre P de $GL_n(K)$, $J_P(\varrho)$ est nul.
- Elle sera dite *supercuspidale* si elle n'est pas un sous-quotient d'une induite parabolique propre.

A.2.2. Proposition. — (cf. [13] III.5.10) La réduction modulo l d'une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale entière de $GL_g(K)$ est irréductible cuspidale.

A.2.3. Proposition. — [9] §2.2.3

Soit π une représentation irréductible cuspidale entière. Alors pour tout $s \geq 1$, la réduction modulo l de $\text{Speh}_s(\pi)$ est irréductible.

A.2.4. Définition. — Une $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible est dite l - Speh (resp. l - superSpeh) si c'est la réduction modulo l d'une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation entière $\text{Speh}_s(\pi)$ pour π irréductible cuspidale (resp. et dont la réduction modulo l de π est supercuspidale).

A.2.5. Notation. — On notera $\epsilon(\varrho)$ le cardinal de la droite de Zelevinski de ϱ , i.e. de l'ensemble des classes d'équivalence $\{\varrho\{i\} / i \in \mathbb{Z}\}$. On pose alors cf. [15] p.51

$$m(\varrho) = \begin{cases} \epsilon(\varrho), & \text{si } \epsilon(\varrho) > 1; \\ l, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque : $\epsilon(\varrho)$ est un diviseur de $e_l(q)$.

A.2.6. Définition. — Étant donné un multi-ensemble $\underline{s} = \{\rho_1^{n_1}, \dots, \rho_r^{n_r}\}$ de représentations cuspidales, on note d'après [15] V.7, $\text{St}(\underline{s})$ l'unique représentation non dégénérée de l'induite

$$\rho(\underline{s}) := \overbrace{\rho_1 \times \dots \times \rho_1}^{n_1} \times \dots \times \overbrace{\rho_r \times \dots \times \rho_r}^{n_r}.$$

Remarque : d'après [15] V.7, toutes les représentations non dégénérées sont de cette forme.

A.2.7. Notation. — Pour ρ une représentation irréductible cuspidale et $s \geq 1$, on note $\underline{s}(\rho)$ le multi-segment $\{\rho, \rho\{1\}, \dots, \rho\{s-1\}\}$ et comme dans [15] V.4, $\text{St}_s(\rho) := \text{St}(\underline{s}(\rho))$.

A.2.8. Proposition. — [15] V.4 Soit ρ une représentation irréductible cuspidale. La représentation non dégénérée $\text{St}_s(\rho)$ est cuspidale si et seulement si $s = 1$ ou $m(\rho)l^k$ pour $k \geq 0$.

Remarque : d'après [13] III-3.15 et 5.14, toute représentation irréductible cuspidale est de la forme $\text{St}_s(\rho)$ pour ρ irréductible supercuspidale et $s = 1$ ou de la forme $m(\rho)l^k$ avec $k \geq 0$.

A.2.9. Notation. — Soit ρ une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$; on note $\rho_{-1} = \rho$ et pour tout $i \geq 0$, $\rho_i = \text{St}_{m(\rho)l^i}(\rho)$.

A.2.10. Définition. — On dira d'une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale entière qu'elle est de type ρ si, à torsion par un caractère non ramifié près, sa réduction modulo l est de la forme ρ_i pour $i \geq -1$.

A.2.11. Notation. — Soit $s \geq 1$ un entier et ρ une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$. Soit $\mathcal{I}_\rho(s)$ l'ensemble des suites (m_{-1}, m_0, \dots) à valeurs dans \mathbb{N} telles que

$$s = m_{-1} + m(\rho) \sum_{k=0}^{+\infty} m_k l^k.$$

On notera $\text{lg}_\rho(s)$ le cardinal de $\mathcal{I}_\rho(s)$.

A.2.12. Définition. — Pour $\underline{i} = (i_{-1}, i_0, \dots) \in \mathcal{I}_\rho(s)$, on définit

$$\text{St}_{\underline{i}}(\rho) := \text{St}_{\underline{i}_{-1}}(\rho_{-1}) \times \text{St}_{\underline{i}_0}(\rho_0) \times \dots \times \text{St}_{\underline{i}_u}(\rho_u)$$

où $i_k = 0$ pour tout $k > u$ et où les ρ_i sont définis en A.2.9.

A.2.13. Théorème. — Soit π une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible cuspidale entière de $GL_g(K)$ et ρ sa réduction modulo l . Dans le groupe de Grothendieck des $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations de $GL_{sg}(K)$, on a l'égalité suivante :

$$r_l\left(\text{St}_s(\pi)\right) = \sum_{\underline{i} \in \mathcal{I}_\rho(s)} \text{St}_{\underline{i}}(\rho).$$

Par ailleurs pour tout $\underline{i} \in \mathcal{I}_\varrho(s)$ et pour tout parabolique P , $J_P(\text{St}_{\underline{i}}(\varrho))$ est égal à la somme des constituants irréductibles de ϱ -niveau \underline{i} de $r_l(J_P(\text{St}_s(\pi)))$.

Remarque : pour $s < m(\varrho)$, la réduction modulo l de $\text{St}_s(\pi)$ est irréductible.

A.2.14. Définition. — On dira que l est *banal* pour $GL_d(K)$ si $e_l(q) > d$.

Remarque : dans le cas banal toute représentation cuspidale est supercuspidale, i.e. $m(\varrho) < s$ avec les notations précédentes.

A.3. de $D_{K,d}^\times$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ et leurs relèvements. — Soit τ une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible de $D_{K,d}^\times$ que l'on suppose l -entière, i.e. de caractère central l -entier. Quitte à tordre ce caractère central par un caractère non ramifié, on le suppose trivial sur l'uniformisante ϖ et donc τ est une représentation de $D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}$. On note $\mathcal{P}_{K,d}$ le radical de $\mathcal{D}_{K,d}$ et soit

$$1 + \mathcal{P}_{K,d} \subset \mathcal{D}_{K,d}^\times \subset D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}$$

la filtration de quotients successifs $\mathbb{F}_{q^d}^\times$ et $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

On choisit alors un facteur irréductible ζ de $\tau|_{1+\mathcal{P}_{K,d}}$; on note N_ζ le normalisateur de sa classe d'isomorphisme dans $D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}$ et soit $\tilde{\zeta}$ son prolongement à N_ζ : en effet $1 + \mathcal{P}_{K,d}$ étant un pro- p -groupe, la dimension de ζ est une puissance de p de sorte que, un p -Sylow de $N_\zeta/(1 + \mathcal{P}_{K,d})$ étant cyclique, ζ admet un prolongement à N_ζ , cf. [14] lemme 1.19.

A.3.1. Proposition. — (cf. [9] proposition 2.3.2)

Il existe un caractère χ tel que

$$\tau \simeq \text{ind}_J^{D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}}(\tilde{\zeta}|_J \otimes \chi),$$

où J est un sous-groupe de $D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z}$ contenant $1 + \mathcal{P}_{K,d}$ la forme $N_\zeta \cap N_\chi$, pour N_χ est le normalisateur de χ vérifiant les points suivants :

- J contient $N_\zeta \cap \mathcal{D}_{K,d}^\times$;
- il existe des entiers f', d', e' de produit égal à d tels que

$$J/(1 + \mathcal{P}_{K,d}) \simeq \mathbb{F}_{q^{f'd'}}^\times \rtimes m\mathbb{Z}/e'd'\mathbb{Z},$$

où le générateur de $\mathbb{Z}/e'd'\mathbb{Z}$ agit par le Frobenius relatif à $\mathbb{F}_{q^{f'}}$ et m est un diviseur de d' tel que

$$f'm = [D_{K,d}^\times/\varpi^\mathbb{Z} : \mathcal{D}_{K,d}^\times J]$$

est le cardinal e_τ de la classe d'équivalence inertielle de τ .

- L'abélianisé de $J/(1 + \mathcal{P}_{K,d})$ s'identifie via le morphisme norme, à $\mathbb{F}_{q^{f'm}}^\times \times m\mathbb{Z}/e'd'\mathbb{Z}$.

— La réduction modulo l de τ est de cardinal

$$r_\tau = [N_\zeta \cap N_{r_l(\chi)} : J]$$

et de la forme

$$[\bar{\tau}] + [\bar{\tau}\nu] + \cdots + [\bar{\tau}\nu^{r-1}]$$

pour $\bar{\tau}$ une $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de $D_{K,d}^\times$ et ν le caractère $g \mapsto q^{\text{val} \circ \text{Nrd}(g)}$.

— Une représentation τ' a même réduction modulo l si et seulement si $J' = J$ et $r_l(\chi'), r_l(\chi)$ sont conjugués sous $N_\zeta \cap N_{r_l(\chi)}$.

— Le nombre $n(\tau)$ de représentations irréductibles strictement congrues à τ est donnée par la formule $\frac{n(\chi)}{[N_\zeta \cap N_{r_l(\chi)} : J]}$ où $n(\chi)$ est égal à la plus grande puissance de l qui divise $a(\tau) := \frac{d}{e_\tau}(q^{e_\tau} - 1)$.

Remarque : le diviseur e' de d correspond au diviseur s de d tel que τ est de la forme $\pi[s]_D$, i.e. correspond par la correspondance de Jacquet-Langlands à la représentation de Steinberg généralisée $\text{St}_s(\pi)$ où π est une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(K)$ avec $d = sg$.

A.3.2. Notations. — Suivant la proposition précédente, on notera

- $m(\bar{\tau}) = [N_\chi \cap N_{r_l(\chi)} : J]$,
- $s(\bar{\tau})$ la plus grande puissance de l divisant $\frac{d}{m(\bar{\tau})g(\bar{\tau})}$,
- $g_{-1}(\bar{\tau}) := g(\bar{\tau}) := \frac{d}{e'} = f'd'$ et
- pour $0 \leq i \leq s(\bar{\tau})$, $g_i(\bar{\tau}) = m(\bar{\tau})l^i g(\bar{\tau})$.

Remarque : pour $r_l(\tau)$, rappelons que comme $r_l(\tilde{\zeta}_{|J})$ est irréductible, $r_l(\tau)$ est de longueur $[N_\zeta \cap N_{r_l(\chi)} : N_\zeta \cap N_\chi]$. En particulier $r_l(\tau)$ est irréductible si et seulement si $N_\chi = N_{r_l(\chi)}$.

A.3.3. Définition. — Soit $\bar{\tau}$ une $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible de $D_{K,d}^\times$ dont le caractère central est trivial sur $\varpi^\mathbb{Z} \subset K^\times$. On définit

$$\mathcal{C}_{\bar{\tau}} \subset \text{Rep}_{\mathbb{Z}_l^{nr}}^\infty(D_{K,d}^\times)$$

la sous-catégorie pleine formée des \mathbb{Z}_l^{nr} -représentations de $D_{K,d}^\times$ dont tous les $\mathbb{Z}^{nr}\mathcal{D}_{K,d}^\times$ -sous-quotients irréductibles sont isomorphes à un sous-quotient de $\bar{\tau}|_{\mathcal{D}_{K,d}^\times}$.

A.3.4. Proposition. — (cf. [8] §B.2)

Soit $P_{\bar{\tau}^0}$ une enveloppe projective de $\bar{\tau}^0$ dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_l^{nr}}^\infty(\mathcal{D}_{K,d}^\times)$. Alors la sous-catégorie $\mathcal{C}_{\bar{\tau}}$ est facteur direct dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_l^{nr}}^\infty(D_{K,d}^\times)$ pro-engendrée par l'induite $P_{\bar{\tau}} := \text{ind}_{\mathcal{D}_{K,d}^\times}^{D_{K,d}^\times}(P_{\bar{\tau}^0})$.

A.3.5. Notation. — Pour tout $d \geq 1$, on note $\mathcal{R}_{\overline{\mathbb{F}}_l}(d)$ l'ensemble des classes d'équivalence des $\overline{\mathbb{F}}_l$ -représentations irréductibles de $D_{v,d}^\times$ dont le caractère central est trivial sur $\varpi^\mathbb{Z} \subset K^\times$.

Ainsi toute \mathbb{Z}_l^{nr} -représentation $V_{\mathbb{Z}_l^{nr}}$ de $D_{K,d}^\times$ se décompose en une somme directe

$$V_{\mathbb{Z}_l^{nr}} \simeq \bigoplus_{\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(d)} V_{\mathbb{Z}_l^{nr}, \bar{\tau}} \quad (\text{A.3.5})$$

où $V_{\mathbb{Z}_l^{nr}, \bar{\tau}}$ est un objet de $\mathcal{C}_{\bar{\tau}}$, i.e. tous ses sous-quotients irréductibles sont isomorphes à un sous-quotient de $\bar{\tau}|_{\mathcal{D}_{K,d}^\times}$.

A.3.6. Théorème. — (cf. [9] 3.1.4)

Il existe une bijection

$$\left\{ \bar{\mathbb{F}}_l\text{-représentations superspeh de } GL_d(K) \right\} \simeq \left\{ \bar{\mathbb{F}}_l\text{-représentations irréductibles de } D_{K,d}^\times \right\}$$

compatible à la réduction modulo l au sens suivant :

- soit ϱ une $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible supercuspidale de $GL_g(K)$ avec $d = sg$;
- soit π un $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -relèvement de ϱ .

Alors la réduction modulo l de $\pi[s]_D$, notée $\bar{\tau}_{\varrho,t}$, est irréductible et correspond via la bijection ci-dessus à la superspeh $\text{Speh}_s(\varrho)$.

Remarque : avec les notations précédentes, $g(\bar{\tau})$ est égal au g du ϱ dans le théorème ci-avant où $\varrho \in \text{Scusp}_{-1}(\bar{\tau})$.

A.3.7. Définition. — On dira d'une $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation de $D_{K,d}^\times$ (resp. de $\mathcal{D}_{K,d}^\times$) qu'elle est de type ϱ si tous ses constituants irréductibles sont, via la bijection précédente, image d'une superSpeh $\text{Speh}_s(\varrho \otimes \chi \circ \det)$ où χ est un caractère non ramifié de K^\times .

A.3.8. Notation. — On notera alors $\mathcal{R}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(h, \varrho)$ le sous-ensemble de $\mathcal{R}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(h)$ constitué des $\bar{\tau}$ de type ϱ ainsi que

$$\mathcal{R}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(\varrho) = \prod_{h=tg(\varrho)} \mathcal{R}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(h, \varrho).$$

Remarque : si h n'est pas divisible par $g(\varrho)$ alors $\mathcal{R}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(\varrho)$ est vide.

A.3.9. Notation. — Pour $1 \leq g$, on notera $\text{Scusp}_K(g)$ l'ensemble des classes d'équivalences inertielles des $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductibles supercuspidales de $GL_g(K)$. Pour $\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(g(\varrho), \varrho)$, on notera aussi

$$\text{Scusp}_K(\bar{\tau}) = \text{Scusp}_K(\varrho).$$

Remarque : on notera aussi que $\bar{\tau} \in \mathcal{R}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(h)$ possède exactement un type, i.e.

$$\mathcal{R}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(h) = \prod_{g|h} \prod_{\varrho \in \text{Scusp}_K(g)} \mathcal{R}_{\bar{\mathbb{F}}_l}(h, \varrho). \quad (\text{A.3.9})$$

Exemple : soit ϱ une $\bar{\mathbb{F}}_l$ -représentation irréductible supercuspidale de $GL_{g(\varrho)}(F_v)$. Pour tout $i \geq -1$, on considère π_i un relèvement de ϱ_i . Soit alors $t \geq 1$ et $\bar{\tau}$ la réduction modulo l de $\pi_{-1}[t]_D$ laquelle est irréductible. Pour $i \geq 0$ et t_i tel que $t_i g_i(\varrho) = tg(\varrho)$, la représentation

$\pi_i[t_i]_D$ (resp. tout sous-quotient irréductible de la réduction modulo l de $\pi_i[t_i]_D$) appartient à $\mathcal{C}_{\bar{\tau}}$. Réciproquement pour tout $\tau' \in \mathcal{C}_{\bar{\tau}}$ une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible entière, il existe $i \geq -1$ et une représentation irréductible cuspidale π_i de $GL_{g_i(\varrho)}(K)$ dont le support supercuspidal de sa réduction modulo l est un segment de Zelevinsky-Vignéras de longueur $m(\varrho)l^i$ et telle que $\tau' \simeq \pi_i[\frac{d}{g_i(\varrho)}]_D$.

A.3.10. Définition. — Suivant la discussion précédente, on dira d'une $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentation irréductible $\tau' \in \mathcal{C}_{\bar{\tau}}$ qu'elle est de $\bar{\tau}$ -type i . On notera aussi $\text{Scusp}_i(\bar{\tau})$ l'ensemble des classes d'équivalence de ces représentations π_i et $\text{Scusp}(\bar{\tau}) = \bigcup_{i \geq -1} \text{Scusp}_i(\bar{\tau})$.

Références

- [1] J. Bellaïche. À propos d'un lemme de Ribet. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 109 :45–62, 2003.
- [2] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2) :239–280, 2009.
- [3] P. Boyer. Réseaux d'induction des représentations elliptiques de Lubin-Tate. *Journal of Algebra*, 336, issue 1 :28–52, 2011.
- [4] P. Boyer. Diminution du niveau et lemme d'Ihara pour les groupes unitaires. *preprint*, 2013.
- [5] P. Boyer. La cohomologie des espaces de lubin-tate est libre. *soumis*, 2013.
- [6] P. Boyer. Filtrations de stratification de quelques variétés de shimura simples. *Bulletin de la SMF*, 142, fascicule 4 :777–814, 2014.
- [7] P. Boyer. Sur la torsion dans la cohomologie des variétés de Shimura de Kottwitz-Harris-Taylor. *preprint*, 2015.
- [8] J.-F. Dat. Théorie de Lubin-Tate non-abélienne l -entière. *Duke Math. J.* 161 (6), pages 951–1010, 2012.
- [9] J.-F. Dat. Un cas simple de correspondance de Jacquet-Langlands modulo l . *Proc. London Math. Soc.* 104, pages 690–727, 2012.
- [10] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [11] D. Juteau. Decomposition numbers for perverse sheaves. *Annales de l'Institut Fourier*, 59 (3), pages 1177–1229, 2009.
- [12] Jean-Pierre Schneiders. Quasi-abelian categories and sheaves. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, (76) :vi+134, 1999.
- [13] M.-F. Vignéras. *Représentations l -modulaires d'un groupe réductif p -adique avec $l \neq p$* , volume 137 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.
- [14] M.-F. Vignéras. À propos d'une conjecture de Langlands modulaire. In *Finite reductive groups (Luminy, 1994)*, volume 141 of *Progr. Math.*, pages 415–452. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.
- [15] M.-F. Vignéras. Induced R -representations of p -adic reductive groups. *Selecta Math. (N.S.)*, 4(4) :549–623, 1998.

BOYER PASCAL • *E-mail* : boyer@math.univ-paris13.fr, ArShiFo ANR-10-BLAN-0114