HAL
open science

Quantification en présence de divergence d'intérêts : application aux réseaux d'électricité intelligents

Olivier Beaude, Florian Danard, Benjamin Larrousse, Samson Lasaulce

To cite this version:

Olivier Beaude, Florian Danard, Benjamin Larrousse, Samson Lasaulce. Quantification en présence de divergence d'intérêts : application aux réseaux d'électricité intelligents: Quantization with non-aligned objectives: an application in the field of smart grids. Colloque Gretsi, Sep 2015, Lyon, France. hal-01203670

HAL Id: hal-01203670

https://hal.science/hal-01203670

Submitted on 23 Sep 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Quantification en présence de divergence d'intérêts : application aux réseaux d'électricité intelligents

Olivier Beaude, Florian Danard, Benjamin Larrousse et Samson Lasaulce

{beaude, danard, larrousse, lasaulce}@lss.supelec.fr

Laboratoire des Signaux et Systèmes

De la quantification classique...

- Signal continu $s \in \mathcal{S} := [0,1]$ de densité $p(\cdot)$ **approximé par**
- Un ensemble discret de *représentants* $\hat{\boldsymbol{s}} := (\hat{s}_m)_{m=1,\cdots,M}$, $M < \infty$
- Sur des *cellules de quantification* $S_m := [s_{m-1}, s_m]$, $\boldsymbol{s} := (s_m)_{m=1,\cdots,M+1}$

Distorsion

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{s}, \hat{\boldsymbol{s}}) := \sum_{m=1}^{M} \int_{s_{m-1}}^{s_m} (\hat{s}_m - s)^2 \, p(s) \, \mathrm{d}s \quad (1)$$

Quantificateur optimal

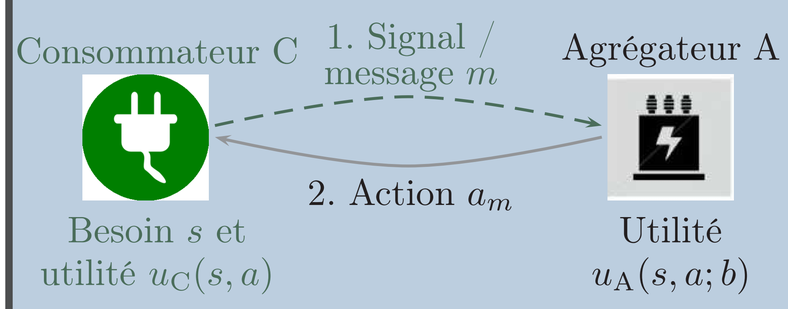
$$(\boldsymbol{s}^*, \hat{\boldsymbol{s}}^*) \in \underset{(\boldsymbol{s},\hat{\boldsymbol{s}}) \in \mathcal{S}^{M+1} \times \mathcal{S}^M}{\operatorname{argmin}} \mathrm{D} \quad (2)$$

Algorithme (itératif) de *Lloyd-Max* :

- fixer $\boldsymbol{s}^{(k)}$, $\hat{\boldsymbol{s}}^{(k+1)} \in \underset{\hat{\boldsymbol{s}} \in \mathcal{S}^M}{\operatorname{argmin}} \ \mathrm{D}(\boldsymbol{s}^{(k)}, \hat{\boldsymbol{s}})$
- fixer $\hat{\boldsymbol{s}}^{(k+1)}$, $\boldsymbol{s}^{(k+1)} \in \underset{\boldsymbol{s} \in \mathcal{S}^{M+1}}{\operatorname{argmin}} \ \mathrm{D}(\boldsymbol{s}, \hat{\boldsymbol{s}}^{(k+1)})$
- itérer $k = k+1$ jusqu'à un critère d'arrêt.

à la quantification stratégique

- Besoin en énergie d'un *consommateur* C, $s \in \mathcal{S}$ de densité $p(\cdot)$
- *Canal de communication* C $\rightarrow$ A à observation parfaite : message $m \in \mathcal{M} := \{1, \cdots, M\}$ = « **mon besoin est dans** S_m »
- Énergie effectivement allouée par un *agrégateur* A pour chaque message reçu : $a_m \in \mathcal{S}$



Jeu de quantification stratégique $\mathcal{G}_{M,b}$ [1] :

1. ***Joueurs*** : C et A
2. ***Actions/stratégies*** $\mathbf{s} \in \mathcal{S}^{M+1}$ et $\mathbf{a} \in \mathcal{S}^M$
3. ***Utilités*** : pour $\epsilon \geq 0$ et $b \geq 0$

$$U_{\mathrm{C}}^{\epsilon}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{a}) = -\sum_{m=1}^{M} \int_{s_{m-1}}^{s_m} (a_m - (s+\epsilon))^2 \, p(s) \, \mathrm{d}s$$

$$U_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{a}; b) = -\sum_{m=1}^{M} \int_{s_{m-1}}^{s_m} \left[(a_m - s)^2 + b c(a_m) \right] \, p(s) \, \mathrm{d}s$$

$b > 0$: *intérêts divergents* / $b = 0$: **quantification classique**, m gratuit = *cheap-talk* [2]

Équilibre de Nash $(\boldsymbol{s}^*, \boldsymbol{a}^*)$

$$\begin{array}{ll} \forall \boldsymbol{s} \in \mathcal{S}^{M+1}, & U_{\mathrm{C}}^{\epsilon}(\boldsymbol{s}^*, \boldsymbol{a}^*) \geq U_{\mathrm{C}}^{\epsilon}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{a}^*) \\ \forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{S}^{M}, & U_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{s}^*, \boldsymbol{a}^*) \geq U_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{s}^*, \boldsymbol{a}) \end{array} \quad (3)$$

Dynamique de *meilleure réponse* :

- fixer $\boldsymbol{s}^{(k)}$, $\boldsymbol{a}^{(k+1)} \in \underset{\boldsymbol{a} \in \mathcal{S}^M}{\operatorname{argmax}} \ U_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{s}^{(k)}, \boldsymbol{a}; b)$
- fixer $\boldsymbol{a}^{(k+1)}$, $\boldsymbol{s}^{(k+1)} \in \underset{\boldsymbol{s} \in \mathcal{S}^{M+1}}{\operatorname{argmax}} \ U_{\mathrm{C}}^{\epsilon}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{a})$
- itérer $k = k+1$...

Quantification stratégique : quelques différences fondamentales

I. Ne pas utiliser toutes les ressources de communication

Proposition 1. *Supposons $\epsilon > 0$ et $c'(\epsilon) > 0$. Alors il existe $\overline{M}_b \geq 1$ tel que $M \in \{1, \cdots, \overline{M}_b\}$ équivaut à l'existence d'un équilibre de Nash dans $\mathcal{G}_{M,b}$.*

b \ ϵ	10^{-7}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-1}
10^{-2}	60	38	15	2
10^{-1}	22	16	8	2
0.5	11	9	5	2

Table 1: $\overline{M}_b$ pour $c(a) = a^2$

II. Le biais b conditionne la quantité d'information échangée

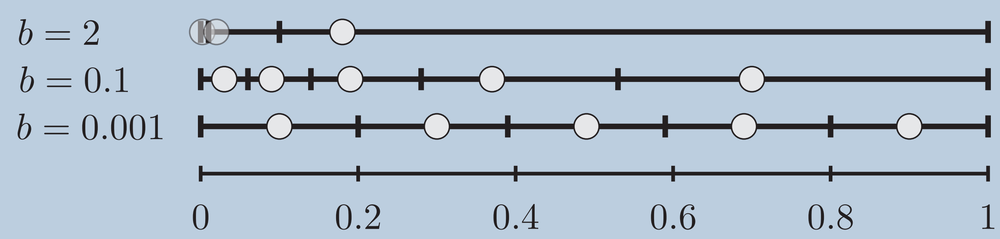


Figure 1: Partitions d'équilibre de quantification stratégique. $\epsilon = 0$, $M = 5$, $p \sim \mathcal{U}([0,1])$, $c(a) = a^2$ et $b \in \{0.001, 0.1, 2\}$. Les $M+1$ tirets sont les s_m choisis par C, les M cercles gris les a_m choisis par A.

Différence mesurée avec l'entropie $\mathrm{H}(\mathbf{s}) = -\sum_{m=1}^{M}(s_m - s_{m-1}) \log_2(s_m - s_{m-1})$. Pour $b = 0.001, 0.1$ et 2, $\mathrm{H} = 2.04, 1.94$ et 0.52. **La quantité d'information échangée diminue avec** b.

III. Utilisation d'intervalles extrêmes de probabilité nulle

Soit $0 < \overline{s} < 1$, $[0, \overline{s}]$ est dit *extrême* et supposé de probabilité nulle : $p_{|[0,\overline{s}]} = 0$ et $p_{|[\overline{s},1]} = \frac{1}{1-\overline{s}}$.

Proposition 2. *Soit $\epsilon = 0$ et $c(a) = a^2$. $\forall b > 0$, $\exists \underline{M}_b \geq 1$ tel que A utilise $[0, \overline{s}]$, i.e. $0 \leq a_1 < \overline{s}$ si et seulement si $M \geq \underline{M}_b$. De plus, $\underline{M}_b$ décroît avec b.*

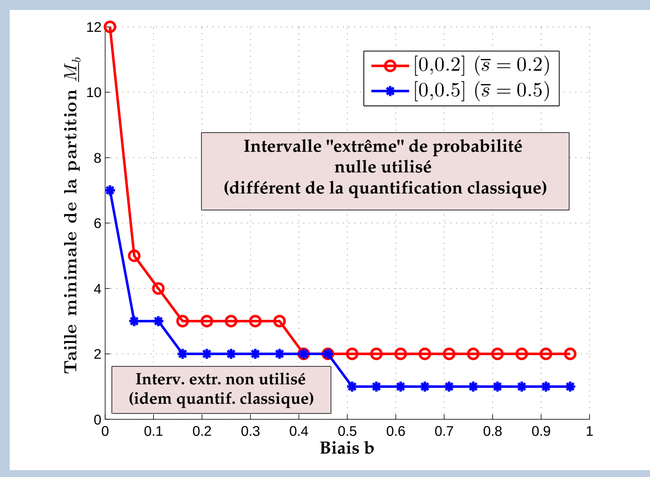


Figure 2: $\underline{M}_b$, pour $c(a) = a^2$.

IV. Convergence de la dynamique de meilleure réponse (MR) pour le calcul des partitions d'équilibre

Proposition 3. *Si $p(.) > 0$, alors la dynamique de meilleure réponse converge[a] et le point de convergence $(\mathbf{s}^*, \mathbf{a}^*)$ est un équilibre du jeu de quantification stratégique $\mathcal{G}_{M,b}$.*

Proposition 4. *Si $p \sim \mathcal{U}([0,1])$, $c(a) = a^2$ et le critère d'arrêt de la dynamique de MR est $||\mathbf{a}^{(k^{\mathrm{STOP}})} - \mathbf{a}^{(k^{\mathrm{STOP}}-1)}||_2 \leq \eta$, alors $k^{\mathrm{STOP}} \leq 1 + \lceil \frac{1/2 \log(M) - \log(\eta)}{\log(4(1+b)) - 1/2 \log(15)} \rceil$.*

a. Extension du résultat de [3] pour l'algorithme de Lloyd-Max (quantification classique).

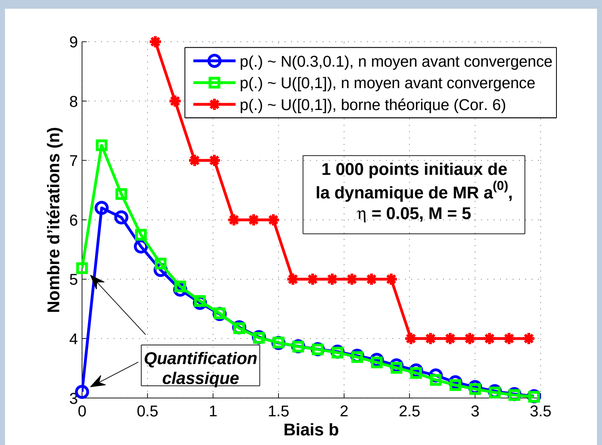


Figure 3: Vitesse de convergence de la dynamique de meilleure réponse

Extensions intéressantes

Signal vectoriel : $s \in \mathbb{R}^T$, plusieurs consommateurs envoient simultanément des signaux, échange répété du signal...

Références

[1] B Larrousse, O Beaude, and S. Lasaulce. Crawford-sobel meet Lloyd-Max on the grid. In *ICASSP, IEEE International Conference*, pages 6127–6131, 2014.

[2] Vincent P. Crawford and Joel Sobel. Strategic information transmission. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 50(6):1431–1451, 1982.

[3] Xiaolin Wu. On convergence of Lloyd's method I. *Information Theory, IEEE Tr. on*, 38(1):171–174, 1992.