



**HAL**  
open science

# Évaluation de la dispersion des propriétés mécaniques d'un matériau composite par sous-échantillonnage

Pierre Pineau, Frédéric Dau

► **To cite this version:**

Pierre Pineau, Frédéric Dau. Évaluation de la dispersion des propriétés mécaniques d'un matériau composite par sous-échantillonnage. *Revue des composites et des matériaux avancés = Journal of Composite and Advanced Materials*, 2012, 22 (3), pp.415-431. 10.3166/rcma.22.415-431 . hal-01203172

**HAL Id: hal-01203172**

**<https://hal.science/hal-01203172>**

Submitted on 22 Sep 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## Science Arts & Métiers (SAM)

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers ParisTech researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <http://sam.ensam.eu>  
Handle ID: <http://hdl.handle.net/10985/10101>

### To cite this version :

Pierre PINEAU, Frédéric DAU - Évaluation de la dispersion des propriétés mécaniques d'un matériau composite par sous-échantillonnage - Revue des composites et des matériaux avancés - Vol. 22, n°3, p.415-431 - 2012

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : [archiveouverte@ensam.eu](mailto:archiveouverte@ensam.eu)

---

# Évaluation de la dispersion des propriétés mécaniques d un matériau composite par sous-échantillonnage

## Characterization of mechanical properties variability in a composite material using a subsampling procedure

Pierre Pineau\* — Frédéric Dau\*\*

\* *LaMCoS - UMR 5259 (CNRS - INSA - Université de Lyon)*  
*INSA, bât Joseph Jaquard, 27 av. Jean Capelle, 69621 Villeurbanne Cedex*  
*pierre.pineau@insa-lyon.fr*

\*\* *I2M, dpt DuMAS - UMR 5295 (CNRS, Université Bordeaux I, Arts et Métiers ParisTech)*  
*Esplanade des Arts et Métiers, 33405 Talence Cedex*  
*f.dau@i2m.u-bordeaux1.fr*

---

*RÉSUMÉ. Dans cet article est présentée une technique de sous-échantillonnage et d'homogénéisation destinée à rendre compte des variabilités de comportement dans les matériaux composites à l'échelle mésoscopique. Ces variabilités seront mises à profit dans des modélisations multi-échelles. La technique proposée est mise en œuvre pour caractériser le comportement transverse des plis unidirectionnels dans un Composite à Matrice Organique (CMO) stratifié. Une modélisation par la Méthode des Éléments Finis (MEF) de la microstructure est réalisée à l'échelle microscopique à partir d'une micrographie transverse d'un pli. Une partie de cette micrographie représentative du matériau (échantillon) est étudiée avec l'hypothèse de déformations planes.*

*Une procédure d'homogénéisation de sous-domaines de l'échantillon est développée en post-traitement du calcul EF, réduit à trois cas de chargement élémentaires, pour obtenir les propriétés effectives du sous-domaine ou sous-échantillon. Seules les propriétés élastiques sont considérées à ce stade des travaux. Plusieurs scénarios de sous-échantillonnage sont réalisés en faisant varier la taille et les positions des sous-domaines, selon un schéma spatial régulier, pour générer des distributions statistiques de propriétés élastiques. L'identification de ces distributions a montré un effet d'inférence statistique au schéma spatial. Des sous-échantillonnages*

*spatialement aléatoires sont réalisés pour préciser son influence sur les fonctions de distributions.*

*ABSTRACT. This article presents a subsampling and homogenization technique developed to depict behaviour variability at mesoscopic scale in composite materials. This variability is intended to feed multiscale modelling at mesoscale. The technique presented here is meant to characterize the transverse behaviour of unidirectional plies in a stratified Polymer Matrix Composite.*

*A Finite Element Method simulation is performed at microscopic scale considering the heterogeneous media, the mesh being constructed from a transverse micrograph. A part of the ply entitled the sample and supposed to be representative of the material is studied under plane strain hypothesis.*

*A unique loading simulation, reduced to three basic load cases, is applied. Subsamples taken into the simulation cell are homogenized at post-processing level of strain and stress fields. A standard mechanics approach was considered. Various subsampling schemes are performed with various size and regular spatial distribution to generate statistical distributions of effective elastic properties. Identification of distribution functions highlighted a statistical inference to spatial scheme. New spatial random subsampling are performed to analyse its influence on distribution functions*

*MOTS-CLÉS : sous-échantillonnage, variabilité, propriétés élastiques, homogénéisation, approches multi-échelles*

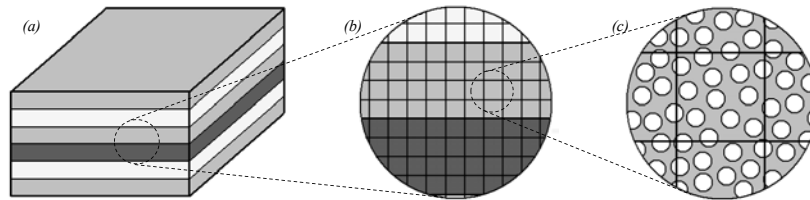
*KEYWORDS: subsampling, variability, elastic properties, homogenization, multiscale approach*

---

## 1. Introduction

### 1.1. Contexte

La prise en compte des variabilités à l'échelle de la microstructure, principalement générées par les procédés d'élaboration, est indispensable dans une démarche de dimensionnement fiabiliste. Elles influent sur le comportement élastique et bien plus significativement sur les propriétés d'endommagement. L'étude des composites à l'échelle microscopique, *i.e.* des fibres, doit être pris en compte dans les modèles de comportement à l'échelle des plis. La démarche présentée dans ce travail consiste à décrire la variabilité des propriétés élastiques de sous-domaines, sélectionnés dans une zone représentative d'un pli de composites à matrice organique (CMO) stratifiés, par homogénéisation et sous-échantillonnage. Cette variabilité décrite à l'échelle micro sera par la suite utilisée, à travers la technique de transport décrite dans (Dau *et al.*, 2008), pour décrire la variabilité des propriétés aux échelles méso et macro et nourrir ainsi un calcul mécano-fiabiliste. En particulier, les lois de distributions obtenues sur les propriétés effectives pourront être affectées aux éléments finis de la modélisation numérique d'un pli Fig. 1.(a). Les sous domaines dont on estimera les propriétés effectives, Fig. 1.(c) correspondront ultérieurement aux éléments du maillage du pli, Fig. 1.(b).



**Figure 1.** a.) Composite stratifié, b.) détail du maillage EF des plis par des éléments homogènes à l'échelle mésoscopique c.) détail de la microstructure hétérogène : fibres et matrice.

### 1.2. Homogénéisation et sous-échantillonnage : VER et sous-domaines

De nombreux auteurs ont développé des techniques d'homogénéisation appliquées aux matériaux hétérogènes : *i*) certaines basées sur des modèles analytiques permettant de borner (modèles de Voigt et Reuss) ou d'estimer les propriétés homogénéisées (modèle auto-cohérent, Eshelby, Mori-Tanaka), *ii*) d'autres basées sur des approches en champs complets permettant de prendre en compte la morphologie réelle du matériau hétérogène. Dans le second cas, les propriétés effectives des VER ou des sous-domaines sont généralement obtenues par des simulations par MEF (Hollister *et al.*, 1994; Forest *et al.*, 2002; Caillaud *et al.*, 2003; Sakata *et al.*, 2008). Les conditions aux limites les plus utilisées sont cinématiques (Kinematic Uniform Boundary

Conditions, KUBC), en contraintes (Stress Uniform Boundary Conditions, SUBC) ou mixtes (Mixed Boundary Conditions, MBC). Des conditions périodiques sur les champs de contraintes et déformations (Periodic Boundary Conditions, PBC) peuvent être appliquées à des géométries périodiques ou non. Plus délicates à implémenter, elles donnent de meilleures estimations.

La plupart du temps, c'est le Volume Élémentaire Représentatif (VER), défini comme l'élément de matière représentatif de la microstructure, des mécanismes et interactions qui y sont actifs, (Bornert *et al.*, 2012) qui est recherché. Il est obtenu par une approche déterministe en prenant le plus petit volume qui rend une stabilité des propriétés visées ou par une approche statistique en recherchant le volume minimal du matériau donnant des propriétés effectives non biaisées (Huet, 1990; Sab, 1992; Kanit *et al.*, 2003). Pour valider le comportement effectif, deux critères doivent être vérifiés : l'équivalence énergétique entre les deux échelles de représentation – hétérogène et homogène – décrit par le lemme de Hill (Hill, 1963; Sanchez-Palencia *et al.*, 1987) et la convergence des propriétés effectives au regard de la taille du sous-domaine (Trias *et al.*, 2006; Kanit *et al.*, 2006).

La volonté de ces travaux est plutôt de s'intéresser à des portions de matériau que nous appellerons des sous-domaines (ou sous-échantillons), de tailles inférieures à celle du VER (Shkoller, 1997; Chermaneanu *et al.*, 2009) pour justement rendre compte de la variabilité de la microstructure et la transporter ensuite à l'échelle mésoscopique. La représentation statistique de cette variabilité est rendue possible par une technique de sous-échantillonnage associée à une homogénéisation à posteriori, réduisant significativement les coûts de calcul.

### **1.3. Approche développée**

La démarche adoptée repose sur une procédure de sous-échantillonnage, inspirée de travaux sur l'analyse morphologique de matériaux hétérogènes aléatoires (Lahiri *et al.*, 1999). Elle a pour but de rendre compte de la variabilité des propriétés mécaniques à une échelle inférieure à celle du VER tel que décrit précédemment. Son originalité est sa mise en œuvre en phase de post-traitement de calculs par MEF réalisés sur le domaine d'étude hétérogène.

La première étape consiste en la modélisation numérique d'une portion du pli. Le maillage EF est construit à partir d'une micrographie transverse d'un pli unidirectionnel de CMO Carbone/Epoxy. Après analyse d'image et reconnaissance de formes par des procédures numériques développées spécifiquement, le maillage est généré à l'aide d'outils de maillage. En supposant une invariance géométrique hors-plan, le modèle mécanique retenu est en déformations planes. Seuls trois cas de chargement statique élémentaires seront simulés pour disposer des données suffisantes aux homogénéisations par sous-domaines réalisées par la suite.

La procédure de sous-échantillonnage est ensuite appliquée en phase de post-traitement du calcul MEF. Des sous-domaines (ou sous-échantillons) sont sélection-

nés dans le domaine d'étude, de taille nécessairement inférieure à la taille du VER. Sur chaque sous-domaine est réalisée une homogénéisation pour estimer ses propriétés effectives. La méthode d'homogénéisation utilisée autorise des conditions naturelles aux frontières du sous-domaine et repose sur la vérification du lemme de Hill (Hill, 1963; Sanchez-Palencia *et al.*, 1987). La taille des sous-domaines est relativement proche de celles des singularités, la séparation des échelles n'est pas systématiquement observée. Pour cette raison, une taille minimale pour établir l'équivalence énergétique donnée par le lemme de Hill sera recherchée pour valider les propriétés effectives des sous domaines.

La réalisation de l'échantillonnage permet d'élaborer des lois de distributions qui décrivent la variabilité recherchée des propriétés effectives. Plusieurs scénarios de sous-échantillonnage sont testés en faisant varier la taille et le mode de sélection spatiale des sous-domaines. La particularité du sous-échantillonnage par rapport à des approches de type Monte Carlo est de n'effectuer qu'une seule simulation numérique – trois cas de chargement en déformations planes – sur le domaine d'étude entier et une homogénéisation par sous-domaine. Cette méthode est moins coûteuse en temps de calcul MEF. Un avantage supplémentaire est la représentativité des sous-domaines qui est assurée puisqu'ils sont tirés directement du matériau. Il n'y a donc pas de statistique morphologique à traiter comme cela peut être le cas dans le cadre d'une approche de type reconstruction paramétrique de matériau virtuel. Une analyse statistique des distributions obtenues est menée, leur validité est discutée au regard des scénarios de sous-échantillonnages. L'effet d'inférence statistique, historiquement étudié en géostatistique (Ripley, 1988), est en particulier mis en évidence.

## 2. Homogénéisation standard de type Hill-Mandel

### 2.1. Formalisme standard

Nous décrivons succinctement dans cette partie le formalisme utilisé pour établir les propriétés effectives par homogénéisation à partir des champs calculés dans le milieu hétérogène.

Pour un sous-domaine  $\Omega$  donné, on cherche à estimer le tenseur de comportement effectif  $C_{eff}^{\Omega}$  défini à partir des champs moyens de contraintes  $\bar{\sigma}^{\Omega}$  et de déformations  $\bar{\epsilon}^{\Omega}$ , (Eq. 1).

$$\bar{\sigma}^{\Omega} = C_{eff}^{\Omega} \bar{\epsilon}^{\Omega} \quad [1]$$

Dans  $\Omega$ , le champ de déformation  $\epsilon$  du milieu hétérogène est décomposé en un champ de déformation moyen  $\bar{\epsilon}^{\Omega}$  et un champ de déformation de perturbation  $\tilde{\epsilon}^{\Omega}$ , (Eq. 2).

$$\epsilon = \bar{\epsilon}^{\Omega} + \tilde{\epsilon}^{\Omega} \quad [2]$$

La perturbation est exprimée en fonction de la moyenne par un opérateur de localisation  $M^\Omega$  adapté de la littérature (Hollister *et al.*, 1992), (Eq.3).

$$\tilde{\epsilon}^\Omega = M^\Omega \bar{\epsilon}^\Omega \quad [3]$$

Finalement, compte tenu des Eq. 1. à Eq. 3, l'opérateur de comportement effectif s'exprime simplement à partir des opérateurs de comportement local C et de localisation, (Eq. 4) :

$$C_{eff}^\Omega = C + CM^\Omega \quad [4]$$

## 2.2. Lemme de Hill

Le comportement effectif est associé à un matériau homogène équivalent (MHE). L'énergie de déformation élastique du MHE doit correspondre à celle dans le matériau hétérogène. Cette équivalence est décrite par le lemme de Hill (Hill, 1963), (Eq. 5).

$$\sigma \epsilon \Omega = \bar{\sigma}^\Omega \bar{\epsilon}^\Omega \quad [5]$$

En homogénéisation classique, le découplage des échelles ou des conditions particulières aux frontières permettent de vérifier exactement le lemme de Hill. Dans notre cas, la taille des sous-domaines sélectionnés et les conditions naturelles sur les bords conditionnent l'équivalence énergétique. L'énergie résultante du produit des champs de perturbation, n'étant pas forcément négligeable, intervient dans le déséquilibre énergétique, (Eq. 6).

$$\sigma \epsilon \Omega = \bar{\sigma}^\Omega \bar{\epsilon}^\Omega + \tilde{\sigma}^\Omega \tilde{\epsilon}^\Omega \quad [6]$$

Il convient donc de définir un indicateur d'équivalence énergétique, (Eq. 7) qui permettra d'apprécier la part relative de cette énergie selon la taille des sous-domaines considérés. Nous recherchons par la suite une taille minimale de sous-domaine au delà de laquelle cette énergie est négligeable.

$$e_{Hill}^\Omega = \frac{\tilde{\sigma}^\Omega \tilde{\epsilon}^\Omega \Omega}{\bar{\sigma}^\Omega \bar{\epsilon}^\Omega} \quad [7]$$

## 2.3. Procédure numérique d'homogénéisation : propriétés effectives

Les simulations sont réalisées en 2D dans le plan perpendiculaire à la direction des fibres orientées dans le pli unidirectionnel. Une hypothèse d'invariance géométrique dans la direction des fibres permet d'utiliser un modèle de comportement en déformations planes. Les maillages EF de la microstructure sont obtenus à l'aide d'outils dédiés. Ils génèrent des éléments finis triangulaires à interpolation linéaire du champ



de déplacement à un point d'intégration. Pour un sous-domaine  $\Omega$  donné, les champs moyens de déformations et de contraintes sont évalués à partir d'une somme pondérée des champs locaux relevés au point d'intégration de chaque élément  $E_i^\Omega$ . Ainsi, la déformation moyenne sur le sous-domaine  $\Omega$  s'exprime (Eq. 8).

$$\bar{\epsilon}^\Omega = \frac{1}{\sum_{E_i^\Omega} S_i^\Omega(E_i^\Omega)} \sum_{E_i^\Omega} S_i^\Omega(E_i^\Omega) \epsilon(E_i^\Omega) \quad [8]$$

où  $S_i^\Omega$  désigne la surface de l'élément  $E_i^\Omega$  et  $\epsilon(E_i^\Omega)$  la valeur de la déformation relevée au point d'intégration de l'élément. Les éléments finis du domaine découpés par la frontière sont également pris en compte. Ils sont identifiés par une procédure de test et la part de leur surface appartenant au domaine est évaluée et prise en compte dans (Eq. 8). Le tenseur de comportement effectif, défini (Eq. 4), est également exprimé par une somme discrète, (Eq. 9).

$$C_{eff}^\Omega = \frac{1}{\Omega} \sum_{E_i^\Omega} C(E_i^\Omega) + C(E_i^\Omega) M_i^\Omega \quad [9]$$

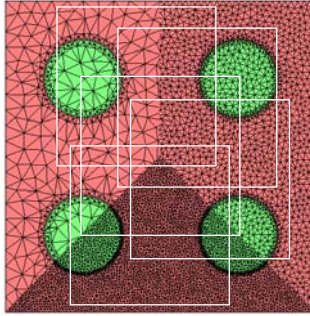
Dans le cas du problème de déformations planes traité ici, trois cas de chargement élémentaire, indicés *I*, *II* et *III*, sont suffisants pour déterminer les tenseurs de localisation (Hollister *et al.*, 1994) : deux de traction selon les directions respectives  $e_1$  et  $e_2$  et un cisaillement équilibré dans le plan d'étude. On utilise la notation des indices contractés de Voigt, le cisaillement étant indicé 6. Les champs de contraintes et déformations sont des vecteurs de dimension 3,  $\sigma_i$  et  $\epsilon_i$ , l'opérateur de comportement une matrice 3x3,  $C_{ij}$ . Les déformations moyennes et perturbées obtenues pour ces trois chargements sont concaténés dans une matrice totale, notée  $\epsilon_{tot}$ , (Eq. 10).

$$\epsilon_{tot} = [\epsilon^I \quad \epsilon^{II} \quad \epsilon^{III}] = \begin{bmatrix} \epsilon_1^I & \epsilon_1^{II} & \epsilon_1^{III} \\ \epsilon_2^I & \epsilon_2^{II} & \epsilon_2^{III} \\ \epsilon_6^I & \epsilon_6^{II} & \epsilon_6^{III} \end{bmatrix} \quad [10]$$

où  $\epsilon^I$ ,  $\epsilon^{II}$  et  $\epsilon^{III}$  représentent les champs de déformations associés respectivement aux chargements *I*, *II* et *III*. Ainsi, pour chaque élément  $E_i^\Omega$ , l'opérateur de localisation est facilement obtenu (Eq. 11) à partir de l'équation (Eq. 3).

$$M_i^\Omega = \bar{\epsilon}_{i,tot}^\Omega (\bar{\epsilon}_{tot}^\Omega)^{-1} \quad [11]$$

Cette procédure numérique a d'abord été testée sur le cas particulier de domaine à géométrie et champs périodiques pour lequel l'équivalence énergétique du lemme de Hill est avérée (Huet, 1990). Si une erreur énergétique est relevée, elle est reliée à la qualité de l'approximation des champs dans le calcul par MEF. Un carré de matrice contenant quatre fibres identiques réparties selon une organisation en carré est modélisé par MEF, Fig. 2. Plusieurs finesses de maillage ont été testées en variant le nombre d'éléments sur les bords – 20, 50 et 100 nœuds ; l'interface fibre-matrice est maillée avec 200 nœuds. Les sous-domaines sont des carrés représentant un quart du domaine



**Figure 2.** Cellule de calcul périodique, localisations variées des sous-domaines et trois finesses de maillage : 20, 50 et 100 nœuds sur les bords

et contenant chacun une fibre entière ou morcelée. Ils sont positionnés aléatoirement dans le domaine d'étude.

Les variabilités obtenues pour les propriétés effectives en fonction du positionnement des sous-domaines sont négligeables, inférieures à 0.3% pour les  $C_{ii}$ , à 0.7% pour les  $C_{ij}$ . Par ailleurs, l'équilibre énergétique est satisfaisant. En effet l'indicateur d'erreur défini Eq. 7 donne des valeurs inférieures à  $10^{-3}$  pour le maillage à 20 nœuds, à  $10^{-4}$  pour celui à 50 nœuds et à  $5 \cdot 10^{-5}$  pour celui à 100 nœuds. Il est à noter que l'erreur pourrait être plus faible avec l'emploi d'EF plus "riches", par exemple à interpolation quadratique.

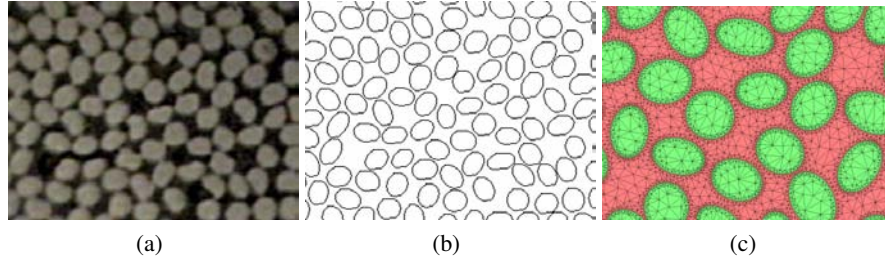
### 3. Sous-échantillonnage et variabilité des propriétés élastiques

#### 3.1. Modélisation du pli

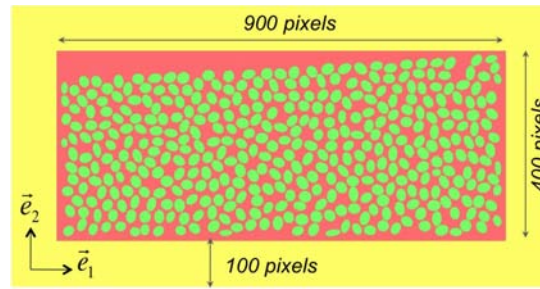
À partir d'une coupe transverse et après analyse d'image, la microstructure est modélisée par E.F, Fig. 3. Elle est paramétrée par la position des centres des fibres et par leurs caractéristiques géométriques sous forme d'ellipses. En terme d'échelle, les 400x900 pp du domaine correspondent à une surface de  $0.073 \times 0.171 \text{ mm}^2$ . Les fibres ont un diamètre de l'ordre de  $6.5 \mu\text{m}$ . La cellule de calcul Fig. 4 contient le domaine d'étude dont la microstructure fibres-matrice est détaillée, entouré d'une bande constituant un Milieu Homogène Equivalent (MHE) pour limiter les effets de bord (Brockenbrough *et al.*, 1991; Trias *et al.*, 2006). Ses propriétés élastiques sont estimées par une loi des mélanges puis réajustées après une succincte estimation des propriétés effectives.

Le comportement des constituants est considéré linéaire élastique. Leurs propriétés élastiques sont les suivantes :

- fibres de carbone :  $E_f = 390 \text{ MPa}$ ,  $\nu_f = 0.35$ ,



**Figure 3.** *Modèle numérique du pli : a.) micrographie transverse d'un pli dans un composite carbone/époxy, b.) analyse d'image, sections elliptiques de fibres, c.) maillage E.F. de la microstructure*



**Figure 4.** *Cellule de calcul : microstructure hétérogène fibres et matrice entourée d'une bande de MHE*

- matrice époxy :  $E_m = 4.5MPa, \nu_m = 0.4,$
- matériau homogène équivalent :  $E_{MHE} = 15MPa, \nu_{MHE} = 0.35 .$

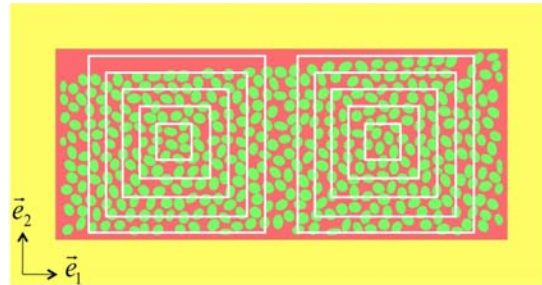
La loi des mélanges sur les rigidités avec des fractions volumiques à 50% donne en première approximation un module d'Young de  $197.25 MPa$  pour le MHE. Or cette méthode surestime très largement les propriétés effectives du composite car la matrice, matériau le plus souple, est totalement percolée à l'inverse des fibres ; le module d'Young effectif lui est très inférieur. Une première estimation du  $C_{11}$  à  $25 MPa$  aboutit à un module d'Young  $E_{MHE}$  égal à  $15MPa$  en utilisant la relation donnée Eq. 12 avec un coefficient de Poisson  $\nu_{MHE}$  pris relativement arbitrairement à  $0.35$ .

$$C_{ii} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad [12]$$

Les champs de déformation et de contraintes, fortement hétérogènes, sont obtenus pour les sollicitations élémentaires de traction et cisaillement évoquées en 2.3.

### 3.2. Influence de la taille du domaine d'homogénéisation

De nombreux travaux parmi lesquels (Kanit *et al.*, 2003; Cailletaud *et al.*, 2003) ont montré l'effet de la taille du sous-domaine sur le calcul de l'équivalence énergétique entre un milieu fortement hétérogène et le MHE correspondant. Des sous-domaines carrés de taille variable décrits Fig. 5 sont homogénéisés. Les résultats obtenus sont présentés en fonction de la demi-taille des sous-domaines, qui est le paramètre utilisé dans la procédure numérique. Ils montrent Fig. 6 que les propriétés élastiques varient significativement pour des sous-domaines de petite taille. Elles se stabilisent pour des tailles de sous-domaines plus importantes. Pour des tailles de sous-domaines voisines de l'épaisseur du pli, une légère décroissance est observée. Elle peut s'expliquer par une part plus importante de matrice dans le sous-domaine lorsqu'on se rapproche des bords du pli. Les courbes Fig. 7 montrent que l'erreur énergétique diminue lorsque la taille des sous-domaines augmente. La taille minimale de sous domaine est celle pour laquelle l'homogénéisation fournit des valeurs acceptables des propriétés effectives au sens de la satisfaction du lemme de Hill. Celle retenue ici est de l'ordre de 150 pixels, c'est à dire un peu moins de la moitié de l'épaisseur du pli.

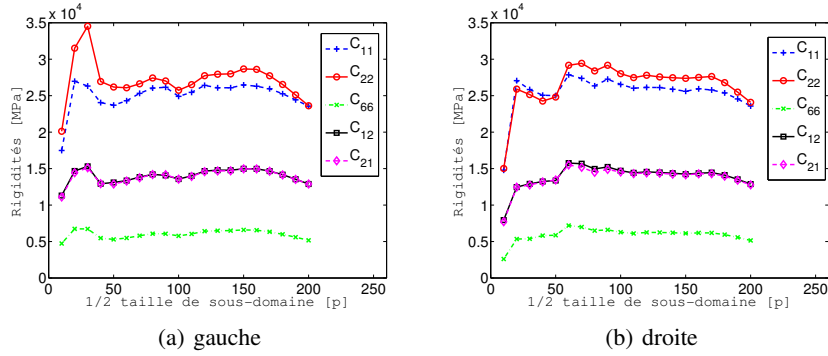


**Figure 5.** Cellule de calcul : localisations de deux jeux (gauche et droite) de sous-domaines de taille variable

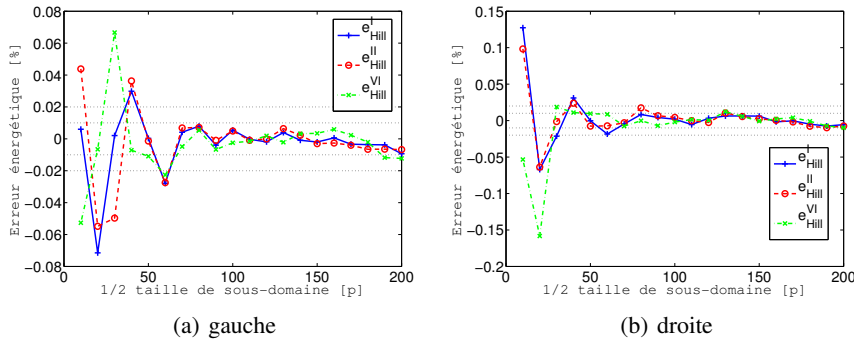
### 3.3. Variabilité des propriétés effectives

Plusieurs scénarios spatiaux de sous-échantillonnages ont été réalisés pour deux tailles de sous-domaines carrés de 200p et 300p de côté, supérieures à la taille minimale déterminée en section 3.2. Les résultats obtenus avec un mode d'échantillonnage régulier sont présentés ici. Le sous-domaine homogénéisé est déplacé régulièrement de 10p dans les deux directions  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ .

L'équivalence énergétique a été vérifiée avec des erreurs inférieures à 1.5% sur la totalité de l'échantillon testé. Les dispersions des propriétés effectives obtenues sont présentées Fig. 8 en fonction de la fraction volumique  $V_f$  de fibres relevée pour chaque sous-domaine.

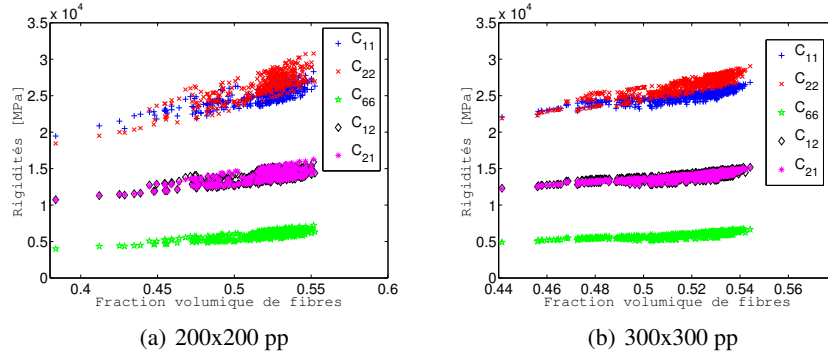


**Figure 6.** Variations des propriétés effectives en fonction de la taille des sous-domaines

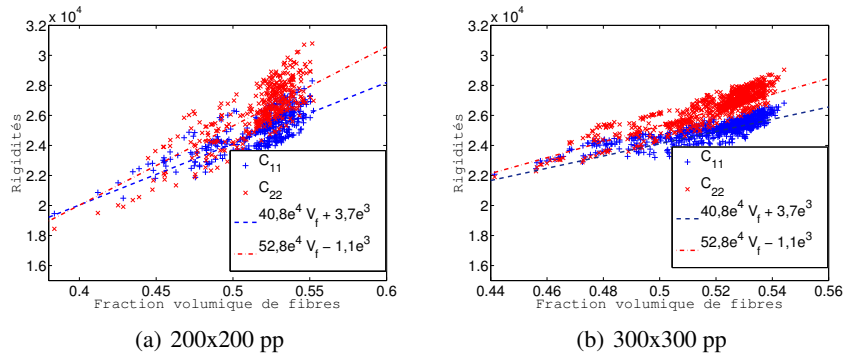


**Figure 7.** Erreur énergétique en fonction de la taille des sous-domaines, lignes pointillées à  $\pm 1\%$  et  $\pm 2\%$

Deux points importants sont à noter. Premièrement et de manière logique, la dispersion est plus marquée pour les petits sous domaines de 200p, ce en terme de  $V_f$  avec un domaine de définition plus étendu et également en terme de  $C_{ij}$  avec des spectres de dispersion plus larges. Deuxièmement, à  $V_f$  donné, une dispersion très marquée est observée, jusqu'à 10% sur les valeurs extrêmes des spectres de dispersion par rapport aux valeurs centrales du spectre. Dans d'autres travaux (Chermeaneu *et al.*, 2009), une variabilité très faible, de l'ordre de 1%, a été obtenue pour des cellules à  $V_f$  fixé mais dont les bords étaient constitués uniquement de matrice avec des conditions aux limites de type KUBC. Les résultats obtenus ici valident une influence marquée de la présence de fibres coupées aux limites du sous-domaine d'homogénéisation et de la prise en compte de leur effet sur les conditions aux limites.



**Figure 8.** Variabilité des  $C_{ij}$  en fonction de la fraction volumique de fibres  $V_f$  pour deux tailles de sous-domaines d'échantillonnage

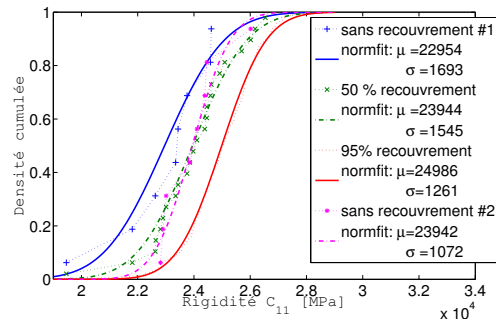


**Figure 9.** Variabilité de  $C_{11}$  and  $C_{22}$  avec les droites d'interpolation du comportement moyen

En confrontant tous les résultats pour les deux tailles de sous-domaines étudiées, des régressions linéaires par méthode des moindres carrés donnent une loi moyenne et globale pour chaque  $C_{ij}$  en fonction de  $V_f$ . Ces droites passent à travers les spectres de dispersion Fig. 9. Elles peuvent servir en première approximation d'indication sur la variabilité du comportement en fonction de  $V_f$ .

### 3.4. Effet d'inférence statistique

Dans le but d'associer ces dispersions aux éléments finis d'une modélisation numérique future à l'échelle du pli, il est nécessaire d'identifier les lois de distribution décrivant la dispersion des propriétés mise en évidence précédemment. Il a été montré



**Figure 10.** Variabilité géostatistique de l'identification de la variabilité micro/méso du paramètre  $C_{11}$ , identification par des distributions normales par moyenne  $\mu$  et variance  $\sigma$

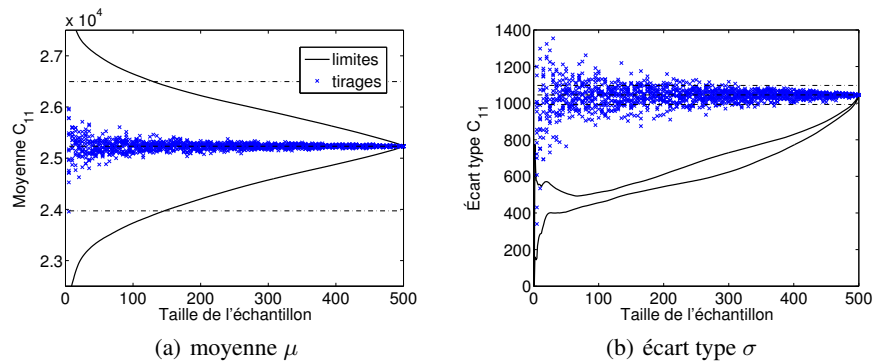
en particulier dans la section 3.3 que la taille des sous-domaines influe sur le spectre de dispersion et a fortiori sur la fonction statistique identifiée. En statistique morphologique, il est connu que le schéma d'échantillonnage est également influant. Des sous-échantillonnages de 200p avec des recouvrements spatiaux de sous-domaines voisins différents – 0%, 50%, 95% – ont été extraits des données obtenues précédemment. Les fonctions de répartition du module  $C_{11}$  pour ces scénarios de sous-échantillonnage sont présentées Fig. 10 et tracées en trait continu. Elles sont ajustées par des fonctions de distribution de type normal en trait pointillé. On notera que les deux sous-échantillons à 0% contiennent 10 fenêtres, celui à 50% contient 24 fenêtres et celui à 95% en contient 396. Ces courbes montrent tout d'abord que la distribution normale décrit correctement les variabilités obtenues. La corrélation est d'autant meilleure que la taille de la population de sous-domaines est importante, pour un mode d'échantillonnage donné, par exemple avec un taux de recouvrement de 95%. En effet, plus le taux de recouvrement est faible, plus le nombre de sous-domaines qui peuvent être extraits l'est également. Cela peut indiquer que les cellules situées sur le bord, plus nombreuses ont tendance à rendre une rigidité relativement faible ; les causes potentielles seront détaillées par la suite.

Les écarts résultant de cet effet d'inférence statistique sont du même ordre de grandeur que la dispersion. Cela montre l'effet significatif du scénario de sous-échantillonnage et pose ainsi le problème de la représentativité des données obtenues, même en partant d'une image supposée représentative de la microstructure. Les scénarii utilisés précédemment ont en fait sur-représenté les cellules du bord qui rendent a priori des rigidités plus faibles ; ce point sera éclairé par la suite.

Pour explorer plus en détail cette problématique, cinq sous-échantillonnages ont été réalisés par tirage aléatoire des positions des fenêtres d'homogénéisation. Une loi de distribution uniforme a été utilisée pour générer les abscisses et ordonnées des centres des sous-domaines, en nombres respectifs  $N_{ss-ech}$  de 25 (trois fois), 50 (deux

$N_{ss-ech}$	25			50		300	500	975
$\mu$	25296	25121	25394	25132	25202	25132	25234	25223
$\sigma$	975	944	1234	1206	998	1115	1045	1072

**Tableau 1.** Identification des paramètres des lois de distribution normale



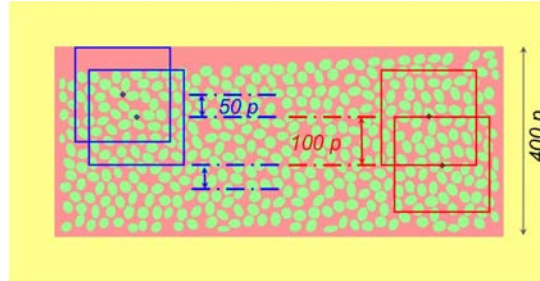
**Figure 11.** Identification des paramètres statistiques pour des sous-échantillons de la population à 500 éléments : paramètres associés aux populations les plus ou moins rigides en trait noir continu, indications en pointillés de  $\pm 5\%$  par rapport à la valeur obtenue pour la population complète

fois), 300 et 500. Les tirages étant indépendants (sans remise), ils ont tous été rassemblés dans un sous-échantillon global de 975 sous-domaines. Les distributions de  $C_{11}$  ont été identifiées par des fonctions de distribution normales dont les caractéristiques sont données Tab. 1. Contrairement aux distributions obtenues avec des sous-échantillonnages réguliers présentées Fig. ??, les valeurs obtenues avec des tirages aléatoires semblent peu sensibles à la taille du sous-échantillon.

Pour affiner ce jugement, la population à 500 éléments a été décortiquée en explorant des cas de combinaisons internes. Pour une population à  $N$  éléments, il est en effet possible d'extraire un sous-échantillon de taille inférieure  $p$  ( $p \in [1, N]$ ), avec un dénombrement de  $A_p^n$  possibilités. Il est possible de trouver pour chaque taille  $p$  la combinaison des rigidités les plus grandes ou les plus faibles, ce qui définit une limite de variation des caractéristiques statistiques. Par la suite, pour chaque valeur de  $p$  possible, donc de taille de sous-échantillon, 15 combinaisons ont été tirées de manière aléatoire. Ces résultats sont rassemblés Fig. 11.

On observe que les sous-populations donnent une estimation très correcte de la valeur moyenne mais pas pour l'écart type. On remarquera au passage que les écarts types obtenus pour les sous-populations sélectionnées les plus grandes ou faibles



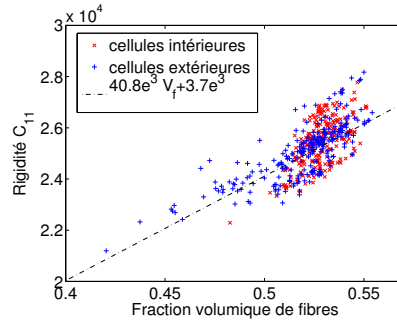


**Figure 12.** *Sélection des cellules centrales et proches des bords haut et bas : zones de localisation des centres des cellules*

rendent des écarts types totalement erronés, qui n'ont aucune valeur de bornes au contraire des valeurs moyennes.

En gardant à l'esprit que l'on compare une sous-population à un ensemble donné lui-même étant un sous-échantillonnage de la microstructure de départ, les conclusions sur ce cas particulier peuvent être extrapolées à l'analyse de la microstructure si l'on considère que la population des 500 cellules est représentative du matériau de départ. La première conclusion est que si l'on cherche à déterminer les propriétés effectives de la cellule à microstructure hétérogène, caractérisée par le paramètre moyen  $\mu$ , un sous-échantillonnage aléatoire de faible taille est suffisant ; les auteurs donneront à titre indicatif environ 200 cellules. En revanche, pour décrire la variabilité du comportement des sous-domaines, plutôt caractérisé par l'écart type  $\sigma$ , une population réduite à 350 sur les 500 de départ rend une précision tout juste inférieure à 10%. La différence en terme de temps de calcul étant minimale, les auteurs préconiseront donc une étude plus avancée en terme de nombre de cellules à analyser.

Cette population de 500 cellules a été divisée en deux parties, les cellules situées le plus au centre de la bande horizontale et celles les plus proches des bords haut et bas Fig. 12. Le tirage aléatoire a abouti à deux populations en quantités égales dont les rigidités  $C_{11}$  sont présentées Fig. 13. On remarque que les cellules les moins rigides sont situées sur les bords mais également que les cellules des bords ne sont pas forcément les moins rigides. On attribue donc cette souplesse uniquement à la fraction volumique de fibre relativement faible, pas spécifiquement à la proximité de la bande de matériau homogène équivalent. On note également que la tendance de la loi moyenne globale obtenue par l'échantillonnage régulier, Fig. ?? a), correspond à la dispersion obtenue dans le cas aléatoire. En effet, il paraît naturel que la relation entre deux caractéristiques du matériau ne soit pas influencée par la manière de les observer.



**Figure 13.** Rigidité  $C_{11}$  des cellules centrales et proches des bords haut et bas

#### 4. Conclusion

Une procédure de sous-échantillonnage d'homogénéisation à l'étape de post-traitement de calculs par MEF d'un milieu hétérogène est proposée. Elle a pour but de rendre compte de la variabilité des propriétés élastiques effectives. Le domaine d'étude est issu d'une micrographie transverse d'un pli unidirectionnel de CMO stratifié. Le sous-échantillonnage est réalisé sur des sous-domaines de taille inférieure à la taille du VER. Sur le sous-domaine, une homogénéisation permet d'évaluer les propriétés effectives recherchées. La méthode d'homogénéisation adoptée prend en compte des conditions naturelles aux frontières du sous-domaine et repose sur la vérification du lemme de Hill (Hill, 1963; Sanchez-Palencia *et al.*, 1987). Une taille minimale de sous-domaine a été mise en évidence pour satisfaire l'équivalence énergétique.

Cette taille identifiée, plusieurs scénarios de sous-échantillonnage ont mis en lumière la variabilité des propriétés effectives. Cette variabilité est d'autant plus marquée que la taille des sous-domaines est faible. À fraction volumique donnée, une variabilité marquée, de l'ordre de 10% par rapport à la valeur moyenne est apparue. Cet effet est attribué à la disposition aléatoire des fibres dans la matrice et surtout à la présence de fibres coupées sur les bords qui entraîne des champs de contraintes et déformations très singuliers.

Il est apparu que le mode de sous-échantillonnage, en terme de distribution spatiale et de taille de sous-domaine, influe très fortement sur les fonctions statistiques obtenues ; l'effet d'inférence statistique est ainsi mis en évidence. Une distribution spatiale régulière nécessite un sous-échantillonnage en quantité pour une précision acceptable sur les deux premiers moments statistiques. Ce problème a été résolu par l'utilisation de distributions spatiales aléatoires des sous-cellules. La précision sur le premier moment statistique est atteinte pour un nombre limité de sous-cellules tandis que celle sur le second moment statistique nécessite tout de même un nombre de tirages plus conséquent. On peut ainsi obtenir une distribution statistique plus descriptive du comportement très hétérogène de la microstructure de départ.

Ce travail constitue la première étape d'une approche globale micro-méso-macro de modélisation du comportement mécanique et de propagation d'incertitudes. L'analyse géomorphologique de la microstructure est envisagée pour de futurs travaux. Il s'agira de mettre en évidence des indicateurs statistiques sur les sous-domaines et de les relier explicitement à ceux du comportement effectif. Des simulations multi-échelles micro-méso, puis vers le macro, seront développées à partir de la variabilité mise en lumière dans cet article. L'effet de la microstructure sur la variabilité des endommagements, spécifique aux matériaux composites et plus généralement aux matériaux multi-structurés, sera également modélisé.

## 5. Bibliographie

- Bornert M., Brenner R., « Modélisation du comportement des matériaux hétérogènes et composites, Cours ENSTA - ParisTech [http://hera.polytechnique.fr/users/bornert/ENSTA12\\_C11\\_3\\_poly/](http://hera.polytechnique.fr/users/bornert/ENSTA12_C11_3_poly/) », 2012.
- Brockenbrough J. R., Suresh S., Wienecke H. A., « Deformation of metal-matrix composites with continuous fibers : geometrical effects of fiber distribution and shape », *Acta Metallurgica et Materialia*, vol. 39(5), p. 735 - 752, 1991.
- Cailletaud G., Forest S., Jeulin D., Feyel F., Gallier I., Mounoury V., Quilici S., « Some elements of microstructural mechanics », *Computational Materials Science*, vol. 27, p. 351 - 374, 2003.
- Chermeaneu R., Guillaumat L., Dau F., « Uncertainties propagation in composite materials », *Proceedings of Journées Nationales sur les Composites 16 (JNC16), Toulouse, France, 2009.*
- Dau F., Alzina A., Guillaumat L., « Uncertainties propagations of composite mechanical properties from micro to macro scale », *Proceedings of the 13th European Conference on Composite Materials (ECCM13), Stockholm, Sweden, 2008.*
- Forest S., Cailletaud G., Jeulin D., Feyel F., Gallier I., Mounoury V., Quilici S., « Introduction au calcul de microstructures - Elements of microstructural mechanics (in french) », *Mécanique & Industries*, vol. 3, p. 439 - 456, 2002.
- Hill R., « Elastic properties of reinforced soils : some technical principles », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11, p. 357 - 372, 1963.
- Hollister S. J., Brennan J. M., Kikuchi N., « A homogenization sampling procedure for calculating trabecular bone effective stiffness and tissue level stress », *Journal of Biomechanics*, vol. 27 (4), p. 433 - 444, 1994.
- Hollister S. J., Kikuchi N., « A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites », *Computational Mechanics*, vol. 10, p. 73 - 95, 1992.
- Huet C., « Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies », *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 38(6), p. 813 - 841, 1990.
- Kanit T., Forest S., Gallier I., Mounoury V., Jeulin D., « Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, p. 3647 - 3679, 2003.
- Kanit T., N'Guyen F., Forest S., Jeulin D., Reed M., Singleton S., « Apparent and effective physical properties of heterogeneous materials : Representativity of sample of two materials

- from food industry », *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 195, p. 3960 - 3982, 2006.
- Lahiri S. N., Kaser M. S., Cressie N., Hsu N.-J., « Prediction of spatial cumulative distribution functions using subsampling », *Journal of the American Statistical Association*, vol. 94(445), p. 86 - 110, 1999.
- Ripley B. D., *Statistical inference for spatial process*, Cambridge University Press, 1988.
- Sab K., « On the homogenization and the simulation of random materials », *European Journal of Mechanics. A/Solids*, vol. 11(5), p. 585 - 607, 1992.
- Sakata S., Ashida F., Zako M., « Kriging-based approximate stochastic homogenization analysis for composite materials », *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 197, p. 1953 - 1964, 2008.
- Sanchez-Palencia E., Zaoui A. (eds), *Lecture notes in Physics*, vol. 272, Springer-Verlag, Berlin, chapter Homogenization techniques for composite media, 1987.
- Shkoller S., « An approximate homogenization scheme for non-periodic materials », *Computer and Mathematics with Applications*, vol. 33(4), p. 15 - 34, 1997.
- Trias D., Costa J., Turon A., Hurtado J. E., « Determination of the critical size of a statistical representative volume element (SRVE) for carbon reinforced polymers », *Acta Materialia*, vol. 54, p. 3471 - 3484, 2006.