

Sur les familles orthonormales de $L^2(\mathbb{R})$

Anne de Roton, Bahman Saffari, Harold S. Shapiro & Gérald Tenenbaum

Résumé. Un résultat de type principe d'incertitude dû à H.S. Shapiro stipule que, étant donnée une famille orthonormale infinie de $L^2(\mathbb{R})$, il n'existe aucune fonction de carré intégrable dominant uniformément à la fois tous les vecteurs et toutes leurs transformées de Fourier. Shapiro a cependant conjecturé l'existence d'une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$ dont les éléments et toutes leurs transformées de Fourier sont uniformément dominés par un multiple constant de $r(x) := 1/\sqrt{1+|x|}$.

Dans ce travail, nous donnons une démonstration du principe d'incertitude de Shapiro et nous établissons sa conjecture sous une forme forte, dans laquelle l'un des deux majorants uniformes est remplacé par une fonction de décroissance arbitrairement rapide. Nous montrons également que, pour un certain type naturel de base, la majoration initiale est optimale. Enfin, nous construisons une famille orthonormale infinie de $L^2(\mathbb{R})$ dominée à l'infini ainsi que sa transformée de Fourier par une fonction $s(x)$ de décroissance strictement plus rapide que $r(x)$, mais qui n'est pas de carré intégrable au voisinage de l'origine.

Mots-clefs. Familles orthonormales de $L^2(\mathbb{R})$, transformation de Fourier, décroissance exponentielle, théorème du parapluie.

Classification AMS 2010. Principale 42A38.

1. Introduction

En analyse harmonique, un principe d'incertitude est, à l'instar de celui de Heisenberg, un résultat qui énonce l'impossibilité qu'une fonction et sa transformée de Fourier soient simultanément petites, sous diverses acceptions de ce qualificatif. Par exemple, une fonction non nulle $f \in L^2(\mathbb{R})$ et sa transformée \widehat{f} ne peuvent être toutes deux à support compact. Plus précisément, un théorème classique de Hardy stipule que, sauf encore dans le cas de la fonction nulle, f et \widehat{f} ne peuvent être toutes deux asymptotiquement négligeables devant $e^{-x^2/2}$ à l'infini. La littérature contient de nombreux résultats analogues, dont le lecteur pourra consulter un panorama dans [2].

Nous nous intéressons ici à un principe d'incertitude relatif à une classe entière de fonctions. Nous établissons ainsi que les fonctions d'une famille orthonormale infinie $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ de $L^2(\mathbb{R})$ et toutes leurs transformées de Fourier

$$\widehat{g}_n(t) := \int_{\mathbb{R}} g_n(x) e^{-itx} dx$$

ne peuvent être simultanément dominées par une fonction de carré intégrable.

Ce résultat a fait l'objet d'une note de travail non publiée de Shapiro [6]. La démonstration repose sur une application simple d'un théorème de Fréchet–Kolmogorov. L'idée essentielle est qu'une majoration uniforme des fonctions et de leurs transformées de Fourier implique la précompacité de la famille considérée. Nous reproduisons cette preuve au paragraphe 2.

Bien que non publiée, la note de Shapiro a été mentionnée à plusieurs reprises dans la littérature, ainsi du reste qu'une version préliminaire du présent travail. Une version quantitative du théorème d'incertitude de Shapiro fait l'objet du § 3.5 de l'article [3] de Jaming et Powell. Dans [4] (§ 2.2), Milinnikova simplifie et généralise à la dimension quelconque la formule établie dans [3].

Le résultat de Shapiro implique que, pour $p > 1/2$, les deux majorations suivantes sont incompatibles

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |g_n(x)| \ll (1 + |x|)^{-p} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}_n(t)| \ll (1 + |t|)^{-p} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ici et dans la suite, nous employons la notation de Vinogradov $f \ll g$ pour signifier qu'il existe une constante C pour laquelle $|f| \leq C|g|$.

Cela étant, Shapiro a conjecturé dans [6] l'existence d'une base orthonormale $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ telle que l'on ait

$$(1.1) \quad \sup_{n \in \mathbb{Z}} |g_n(x)| \ll \frac{1}{\sqrt{1+|x|}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

et

$$(1.2) \quad \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{g_n}(t)| \ll \frac{1}{\sqrt{1+|t|}} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

L'un des objets du présent travail consiste à établir cette conjecture⁽¹⁾ sous une forme forte, également conjecturée dans [6], dans laquelle l'un des majorants est remplacé par une fonction à décroissance beaucoup plus rapide. Nous montrons, par exemple, au Théorème 3.1 *infra* qu'il existe une base orthonormale $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ satisfaisant (1.2) et

$$(1.3) \quad \sup_{n \in \mathbb{Z}} |g_n(x)| \ll e^{-|x|/2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Cette situation laisse ouverte la question de savoir dans quelle mesure on peut améliorer simultanément les majorations (1.1) et (1.2).

Dans [6], Shapiro introduit une idée naturelle, nouvelle à notre connaissance, pour construire des bases orthonormales de $L^2(\mathbb{R})$ et reposant sur l'introduction d'un difféomorphisme $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},]0, 1[)$. Si, par exemple, F est une bijection strictement croissante, l'image par F de la base orthonormale $\{e^{2\pi i n x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est donnée par

$$(1.4) \quad g_n(x) := e^{2\pi i n F(x)} \sqrt{F'(x)} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

La famille $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est alors une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$, l'orthonormalité et la complétude étant issues de celles de la base initiale via un simple changement de variable. Nous avons alors

$$|g_n(x)| = \sqrt{F'(x)} \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

ce qui améliore (1.1) en y remplaçant le majorant par une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. Le résultat de Shapiro précédemment mentionné interdit semblable amélioration du second membre de (1.2). Reste à savoir si, par exemple, on peut remplacer le second membre par $\varphi(t)$ où $\varphi(t) = o(1/\sqrt{|t|})$ lorsque $|t| \rightarrow \infty$. Une telle majoration est trivialement satisfaite en moyenne puisque

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g_n}(t)|^2 dt = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |g_n(x)|^2 dx = 2\pi.$$

Le §2 est consacré à la preuve du principe d'incertitude de Shapiro. Au §3, nous construisons une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$ qui est à décroissance exponentielle tout en satisfaisant (1.2). Nous établissons au §4 que l'on peut remplacer la décroissance exponentielle par une décroissance arbitraire. Le §5 est dévolu à l'explicitation des ordres de grandeur exacts des membres de gauche de (1.1) et (1.2) pour une fonction naturelle F . La partie 6 illustre le fait que, dans un cas assez général, on ne peut espérer mieux qu'une majoration du type (1.2). Enfin, dans le dernier paragraphe, nous fournissons exemple de famille orthonormale infinie pour laquelle la majoration (1.2) est améliorable hors d'un voisinage de l'origine.

1. Byrnes a annoncé en 1994 [1] une preuve de la conjecture de Shapiro. Toutefois, nous n'avons pas pu la rendre effective à partir des indications données.

2. Le théorème d'incertitude

Nous établissons le théorème d'incertitude à partir d'un lemme simple reposant sur le théorème classique de Fréchet–Kolmogorov (voir par exemple [8], chap. X), qui, dans le cas de l'espace $L^2(\mathbb{R})$, énonce qu'un sous-ensemble K est relativement compact si, et seulement si, les trois conditions suivantes sont réalisées, (ici τ_y désigne l'opérateur de translation $f(\cdot) \mapsto f(\cdot + y)$) :

- (i) $\sup_{f \in K} \|f\|_2 < \infty$;
- (ii) $\lim_{y \rightarrow 0} \sup_{f \in K} \|\tau_y f - f\|_2 = 0$;
- (iii) $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \sup_{f \in K} \|\mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus [-\xi, \xi]} f\|_2 = 0$.

Le résultat suivant figure dans [6]. Jaming nous a récemment signalé qu'une preuve antérieure a été obtenue par Pego [5]. La courte preuve suivante, qui nous semble plus simple que celle de [5], est une variante de celle de [6].

Théorème 2.1. *Soit K une partie bornée de $L^2(\mathbb{R})$. Alors K est précompacte si, et seulement si, l'on a*

$$(2.1) \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \sup_{f \in K} \int_{|x| > \xi} \{|f(x)|^2 + |\widehat{f}(x)|^2\} dx = 0.$$

Démonstration. Notons que la limite figurant au membre de gauche de (2.1) est toujours bien définie puisque la quantité en cause est décroissante en ξ .

Considérons une partie bornée K de $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant (2.1). Alors la suite

$$\widehat{K} := \{\widehat{f} : f \in K\}$$

vérifie trivialement (i) et (iii). De plus, d'après la formule de Parseval, nous avons, pour tout $\xi > 0$,

$$\begin{aligned} \|\tau_y \widehat{f} - \widehat{f}\|_2^2 &= 4\pi \int_{\mathbb{R}} \sin(xy/2)^2 |f(x)|^2 dx \\ &\leq 4\pi \int_{|x| > \xi} |f(x)|^2 dx + \pi(\xi y)^2 \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Ainsi la relation (ii) est également satisfaite pour \widehat{K} , ce qui implique la précompacité de \widehat{K} , donc de K par isométrie.

Réciproquement, si K , et donc \widehat{K} , est précompacte, la condition (2.1) résulte de l'application de la condition (iii) à K et \widehat{K} . \square

Théorème 2.2 (Shapiro, 1991). *Soit $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ une suite orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$. Alors l'une au moins des fonctions $x \mapsto \sup_n |g_n(x)|$ et $t \mapsto \sup_n |\widehat{g}_n(t)|$ n'est pas dans $L^2(\mathbb{R})$.*

Démonstration. En vertu de l'orthogonalité de ses éléments, la suite $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ ne contient aucune sous-suite convergente. Elle n'est donc pas précompacte. D'après le Théorème 2.1, il s'ensuit que

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{|x| > \xi} \{|g_n(x)|^2 + |\widehat{g}_n(x)|^2\} dx > 0.$$

\square

3. Étude d'un cas de décroissance exponentielle

Le résultat suivant permet d'exhiber une base orthonormale construite selon le procédé (1.4) et qui est à la fois à décroissance exponentielle tout en satisfaisant la condition (1.2).

Théorème 3.1. *Soit F la fonction de $C^1(\mathbb{R},]0, 1[)$ définie par*

$$(3.1) \quad F(x) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^{-|v|} dv.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit la fonction $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par (1.4) pour ce choix de F , soit

$$g_n(x) := e^{2\pi i n F(x)} e^{-|x|/2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Alors on a

$$(3.2) \quad \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}_n(t)| \ll \frac{1}{\sqrt{1+|t|}} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Démonstration. Posons

$$f_n(t) := \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{1}{2}x + in\pi e^{-x} + itx \right\} dx \quad (n \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}).$$

Un calcul standard permet d'écrire

$$\widehat{g}_n(t) = \frac{1}{2} \sqrt{2} \{f_{-n}(-t) + f_n(t)\} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Introduisons à présent les fonctions $\varphi_{n,t}(x) := n\pi e^{-x} + tx$ et $\Phi_{n,t}(x) := \int_0^x e^{i\varphi_{n,t}(v)} dv$. Nous obtenons après intégration par parties

$$f_n(t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \Phi_{n,t}(x) e^{-x/2} dx.$$

La majoration annoncée découle donc immédiatement du résultat suivant. \square

Lemme 3.2. *Nous avons*

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}, x \geq 0} |\Phi_{n,t}(x)| \ll 1/\sqrt{t} \quad (t \geq 1).$$

Démonstration. Nous employons librement ci-dessous certaines estimations classiques d'intégrales oscillantes — voir par exemple [7], ths. I.6.2 et I.6.3.

Nous avons $\varphi_{n,t} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+)$ et

$$\varphi'_{n,t}(v) = -n\pi e^{-v} + t, \quad \varphi''_{n,t}(v) = n\pi e^{-v}.$$

Il s'ensuit que, si $|-n\pi e^{-v} + t| > t/2$ sur l'intervalle $]a, b[$, on a

$$\int_a^b e^{i\varphi_{n,t}(v)} dv \leq \frac{2}{\pi t},$$

alors que, si $|-n\pi e^{-v} + t| \leq t/2$ pour $v \in]a, b[$, on a $|\varphi''_{n,t}(v)| = |n\pi e^{-v}| \geq t - t/2 = t/2$ sur le même intervalle, et donc

$$\int_a^b e^{i\varphi_{n,t}(v)} dv \leq \frac{4}{\sqrt{\pi t/2}}.$$

On conclut en observant que, du fait de la monotonie de $v \mapsto e^{-v}$, l'intervalle $[0, x]$ est la réunion d'au plus trois intervalles relevant de l'une ou l'autre des catégories précédentes. \square

4. Décroissance unilatérale arbitraire

Nous nous proposons ici de généraliser le Théorème 3.1 en établissant, essentiellement par la même méthode, l'existence d'une base orthonormale dominée, à une constante multiplicative près, par une fonction arbitraire de $L^2(\mathbb{R})$ et satisfaisant cependant (3.2).

Théorème 4.1. *Soit G une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ telle que la borne inférieure de $|G|$ sur tout compact de \mathbb{R} soit non nulle. Il existe une bijection continue croissante $F : \mathbb{R} \rightarrow]0, 1[$, de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, telle que la base orthonormale $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ définie presque partout par (1.4) satisfasse*

$$(4.1) \quad \sup_{n \in \mathbb{Z}} |g_n(x)| \ll G(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

et

$$(4.2) \quad \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}_n(t)| \ll \frac{1}{\sqrt{1+|t|}} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Démonstration. Posons

$$\lambda_m := \min \left(\inf_{m \leq x < m+1} |G(x)|, e^{-|m|} \right) \quad (m \in \mathbb{Z}), \quad L := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lambda_m^2.$$

Désignant par w la fonction continue définie par

$$w(x) := \min(1, x^+)^2,$$

nous choisissons

$$F(x) := \frac{1}{L} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lambda_m^2 w(x - m) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ainsi, F est une bijection strictement croissante de \mathbb{R} sur $]0, 1[$, de classe C^2 sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. La suite $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par

$$(4.3) \quad g_n(x) := \begin{cases} e^{2\pi i n F(x)} \sqrt{F'(x)} & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}), \\ 0 & (x \in \mathbb{Z}), \end{cases}$$

est clairement une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$. De plus, pour $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq x < m+1$, on a

$$|g_n(x)| \leq \sqrt{F'(x)} = \lambda_m \sqrt{2(x-m)/L} \ll \lambda_m \ll G(x),$$

donc la condition (4.1) est bien satisfaite.

Il reste à estimer $\widehat{g}_n(t)$. Posant $\varrho_m := \lambda_m^2/L$, $\sigma_m := \sum_{k < m} \varrho_k$ ($m \in \mathbb{Z}$), nous pouvons écrire

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \widehat{g}_n(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i n F(x) - ixt} \sqrt{F'(x)} \, dx \\ &= \sqrt{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sqrt{\varrho_m} \int_m^{m+1} e^{2i\pi n \sigma_m + i\{2\pi n \varrho_m (x-m)^2 - tx\}} \sqrt{x-m} \, dx \\ &= \sqrt{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sqrt{\varrho_m} e^{2i\pi n \sigma_m - imt} \int_0^1 e^{i\varphi_{m,n}(t,v)} \sqrt{v} \, dv, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\varphi_{m,n}(t,v) := 2\pi n \varrho_m v^2 - vt.$$

On a en particulier

$$|\widehat{g}_n(t)| \leq \frac{2}{3} \sqrt{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sqrt{\varrho_m} < \infty,$$

de sorte que nous pouvons nous limiter à établir (4.2) pour $|t| > 1$.

D'après la seconde formule de la moyenne, pour tous entiers $m, n \in \mathbb{Z}$, il existe un nombre réel $\xi = \xi_{m,n} \in [0, 1]$ tel que

$$\int_0^1 e^{i\varphi_{m,n}(t,v)} \sqrt{v} \, dv \ll \Phi_{m,n}(t, \xi) := \int_\xi^1 e^{i\varphi_{m,n}(t,v)} \, dv.$$

On a

$$\varphi'_{m,n}(v) = 4\pi n \varrho_m v - t, \quad \varphi''_{m,n}(v) = 4\pi n \varrho_m \quad (0 \leq v \leq 1).$$

Cela implique classiquement (voir, par exemple, [7], théorèmes I.6.2 et I.6.3) que

$$\Phi_{m,n}(t, \xi) \ll \begin{cases} 1/t & (|t| > 8\pi|n|\varrho_m), \\ 1/\sqrt{|n|\varrho_m} & (|t| \leq 8\pi|n|\varrho_m). \end{cases}$$

En reportant dans (4.4), il s'ensuit que

$$\widehat{g}_n(t) \ll \frac{1}{|t|} + \sum_{\varrho_m \geq |t|/(8\pi|n|)} \frac{1}{\sqrt{|n|}} \ll \frac{1}{|t|} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{|n|}} \sqrt{\frac{|n|\varrho_m}{|t|}} \ll \frac{1}{\sqrt{|t|}}.$$

□

5. Étude d'un cas de décroissance polynomiale

Le résultat suivant fournit, pour une fonction F naturelle, l'ordre de grandeur exact de la décroissance des transformées de Fourier obtenues par le procédé (1.4).

Théorème 5.1. *Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par (1.4) pour le choix*

$$F(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{2} + \frac{\arctan x}{\pi}.$$

Alors, uniformément pour $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\widehat{g}_n(t) \ll \frac{1}{(1+|t|)^{1/3}} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

De plus, on a

$$\widehat{g}_n(2n) = \frac{(-1)^n \Gamma(1/3)}{2^{1/3} \sqrt{\pi} 3^{1/6} n^{1/3}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (n \geq 1).$$

Démonstration. Nous pouvons pleinement supposer $t \geq 1$.

Posons $\varphi_t(x) := 2n \arctan x - tx$. Nous avons

$$\widehat{g}_n(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varphi_t(x)} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

où l'intégrale est semi-convergente. La fonction φ_t est impaire et indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} . On a

$$\varphi'_t(x) = \frac{2n}{1+x^2} - t, \quad \varphi''_t(x) = \frac{-4nx}{(1+x^2)^2}, \quad \varphi'''_t(x) = 4n \frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}.$$

Notant

$$(5.1) \quad \Phi_t(x) := \int_0^x e^{i\varphi_t(v)} \, dv,$$

nous obtenons après intégration par parties

$$(5.2) \quad \widehat{g}_n(t) = \frac{2(-1)^n}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x \Re \Phi_t(x)}{(1+x^2)^{3/2}} dx.$$

Soit c une constante arbitraire de $]0, \frac{1}{4}[$. Lorsque $t > 2(1+c)n$, nous avons

$$\inf_{x>0} |\varphi'_t(x)| > ct/(1+c).$$

Il résulte alors des estimations classiques d'intégrales oscillantes (voir par exemple [7], théorème I.6.2) que $\sup_{x>0} \Phi_t(x) \ll 1/t$ et donc

$$\widehat{g}_n(t) \ll 1/t.$$

Nous pouvons dorénavant supposer $n \geq 1$.

Lorsque $t < 2(1-c)n$, posons $x_0 := \sqrt{2n/(1+c)t-1}$, $x_1 := \sqrt{2n/(1-c)t}$. Nous avons encore $\Phi_t(x) \ll 1/t$ lorsque $x \leq x_0$ et $\Phi_t(x) - \Phi_t(x_1) \ll 1/t$ lorsque $x > x_1$. La contribution de $\mathbb{R}^+ \setminus I$ à l'intégrale (5.2) est donc $\ll 1/t$. Lorsque $x \in I$, nous pouvons utiliser l'estimation

$$\Phi_t(x) \ll \frac{1}{t} + \frac{1+x^2}{\sqrt{nx}}$$

obtenue en scindant l'intégrale (5.1) à $v = \sqrt{c}$ et en utilisant la minoration $\varphi'_t(v) \geq c^2 t$ pour $0 \leq v \leq \sqrt{c}$ et⁽²⁾ la minoration $\varphi''_t(v) \gg nx/(1+x^2)^2$ pour $\sqrt{c} \leq v \leq x$. Il s'ensuit que

$$\int_I \frac{x \Phi_t(x)}{(1+x^2)^{3/2}} dx \ll \frac{1}{t} + \int_I \frac{dx}{\sqrt{nx}} \ll \frac{1}{t} + \sqrt{\frac{x_1}{n}} \ll \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Nous avons ainsi établi que

$$\widehat{g}_n(t) \ll \frac{1}{\sqrt{t}}$$

lorsque $t < 2(1-c)n$.

Il reste à examiner le cas $2(1-c)n \leq t \leq 2(1+c)n$. Nous avons alors $\varphi'_t(v) \leq -ct/(1+c)$ pour $v \geq 2\sqrt{c}$. La contribution de l'intervalle $[\min(x, 2\sqrt{c}), x]$ à l'intégrale (5.1) est donc $\ll 1/t$. Nous évaluons la contribution complémentaire en scindant l'intégrale à $v = \delta := \min(x, 2\sqrt{c}/n^{1/3})$. Comme $\varphi''_t(v) \gg \delta n$ pour $\delta \leq v \leq 2\sqrt{c}$, nous obtenons

$$\int_0^{\min(x, 2\sqrt{c})} e^{i\varphi_t(v)} dv \ll \delta + \frac{1}{\sqrt{\delta n}} \ll \frac{1}{t^{1/3}}.$$

Cela implique, sous la condition considérée,

$$\Phi_t(x) \ll \frac{1}{t^{1/3}}.$$

D'après (5.2), la même majoration vaut donc pour $\widehat{g}_n(t)$. Cela achève la démonstration de la première partie de l'énoncé.

Nous tournons à présent notre attention vers l'évaluation de la quantité

$$(5.3) \quad \widehat{g}_n(2n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{2in\vartheta(x)} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

où l'on a posé $\vartheta(x) := \arctan x - x$.

2. Voir par exemple [7], théorème I.6.3.

Soit $J := [-n^{-1/4}, n^{-1/4}]$. Comme $\vartheta'(x) \gg 1/\sqrt{n}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus J$, une intégration par parties implique immédiatement que la contribution de $\mathbb{R} \setminus J$ à l'intégrale de (5.3) est $\ll 1/\sqrt{n}$.

Pour évaluer la contribution de J , nous effectuons un développement limité de $\vartheta(x)$ à l'ordre 4 au voisinage de l'origine. On a $\vartheta(0) = \vartheta'(0) = \vartheta''(0) = 0$, $\vartheta'''(0) = -2$ et $\vartheta^{(4)}(x) \ll x$, d'où

$$\begin{aligned} \int_J e^{2in\vartheta(x)} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \int_J e^{2inx^3/3} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right) \right\} dx \\ &= \frac{1}{2^{1/3} \cdot 3^{2/3} n^{1/3}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iy}}{y^{2/3}} dy + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Une manipulation classique d'intégration complexe permet de montrer que la dernière intégrale vaut $\sqrt{3}\Gamma(1/3)$. Cela implique bien le résultat annoncé. \square

6. Limitations

Nous nous proposons ici de décrire une situation assez générale dans laquelle on a

$$\sup_{n \geq 1} |\widehat{g_n}(t)| = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{1+|t|}}\right) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Théorème 6.1. *Soit $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},]0, 1[)$ une bijection strictement croissante. Supposons que F' est strictement positive sur \mathbb{R} , que F'' ne s'annule qu'un nombre fini de fois et qu'il existe $x_0 > 0$, $\eta > 0$, tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-x_0, x_0]$, on ait*

$$(6.1) \quad F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{1}{2}h^2F''(x) + O_x(|h|^{2+\eta}) \quad (|h| \leq 1).$$

Alors, il existe une suite $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ et

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt{t_n} |\widehat{g_n}(t_n)| > 0.$$

Remarque. L'hypothèse de régularité de F du théorème peut être légèrement affaiblie. Cela permet de montrer que la conclusion est valide pour la fonction F définie en (3.1), de sorte que la majoration (3.2) est optimale.

Démonstration. Soient n_0 une constante arbitraire, qui sera précisée par la suite, et n un nombre entier excédant n_0 .

Observons tout d'abord que les conditions

$$F' \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} F'(x) = 0$$

impliquent que F' est bornée.

Comme la fonction F'' change de signe au plus un nombre fini de fois et comme $F' > 0$, $F'(\pm\infty) = 0$, il existe $x_1 > x_0$ tel que $x F''(x) < 0$ pour $|x| > x_1$. Posons $m := \min_{|x| \leq x_1} F'(x) > 0$. Alors $F'(x) < m$ pour $|x|$ assez grand, et il existe des nombres réels $\alpha \in]0, m[$, $u < -x_1$ et $v > x_1$, tels que

$$\begin{aligned} x F''(x) &< 0 && (x \in \mathbb{R} \setminus]u, v]) \\ F'([-\infty, u]) &= F'([v, \infty[) =]0, \alpha], \\ F'([u, v]) &\subset]\alpha, \infty[. \end{aligned}$$

On peut alors définir une bijection strictement décroissante $\vartheta \in \mathcal{C}^1(]-\infty, u], [v, \infty[)$ par la formule

$$F'(\vartheta(x)) = F'(x).$$

Soit $z \in]-\infty, u[$ un paramètre que nous déterminerons plus loin. Nous posons

$$t_n = t_n(z) := 2\pi n F'(z) \quad (n \geq 1),$$

de sorte que

$$(6.2) \quad \widehat{g}_n(t_n) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\varphi_n(x)} \sqrt{F'(x)} \, dx,$$

avec $\varphi_n(x) := 2\pi n \{F(x) - xF'(z)\}$ ($x \in \mathbb{R}$) et donc

$$\varphi'_n(x) = 2\pi n \{F'(x) - F'(z)\} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$. Posons $\delta_n := n^{-(1/2-\varepsilon)}$ et

$$E_n = [z - \delta_n, z + \delta_n] \cup [\vartheta(z) - \delta_n, \vartheta(z) + \delta_n].$$

Il est possible de choisir n_0 assez grand pour que l'on ait

$$E_n \subset \mathbb{R} \setminus [u, v], \quad |F'(x) - F'(z)| > C(z)\delta_n \quad (x \in \mathbb{R} \setminus E_n)$$

où nous avons posé $C(z) := \frac{1}{2} \min\{|F''(z)|, |F''(\vartheta(z))|\}$ et où la seconde relation découle du théorème des accroissements finis.

Nous pouvons majorer la contribution de $\mathbb{R} \setminus E_n$ à l'intégrale de (6.2) en notant que l'on a $|\varphi'_n(x)| > 2\pi C(z)n\delta_n$ pour tout élément x de cet ensemble. Pour tout intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R} \setminus E_n$ sur lequel F'' ne s'annule pas, on a donc classiquement⁽³⁾

$$\Phi_n(x) := \int_a^x e^{i\varphi_n(t)} \, dt \ll \frac{1}{n\delta_n} = \frac{1}{n^{1/2+\varepsilon}} \quad (a \leq x \leq b)$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{i\varphi_n(x)} \sqrt{F'(x)} \, dx &= \int_a^b \sqrt{F'(x)} \, d\Phi(x) = \sqrt{F'(b)}\Phi(b) - \int_a^b \Phi(x) \frac{F''(x)}{2\sqrt{F'(x)}} \, dx \\ &\ll \frac{\sqrt{F'(b)}}{n^{1/2+\varepsilon}} + \frac{1}{n^{1/2+\varepsilon}} \int_a^b \frac{|F''(x)|}{\sqrt{F'(x)}} \, dx \\ &\ll \frac{\sqrt{F'(b)}}{n^{1/2+\varepsilon}} + \frac{1}{n^{1/2+\varepsilon}} \left| \sqrt{F'(b)} - \sqrt{F'(a)} \right| \ll \frac{1}{n^{1/2+\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Comme F'' ne possède qu'un nombre fini de changements de signe, il s'ensuit que la contribution du domaine $\mathbb{R} \setminus E_n$ à l'intégrale $\widehat{g}_n(t_n)$ est $\ll n^{-1/2-\varepsilon}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons

$$I_n(x) := \int_{-\delta_n}^{\delta_n} e^{i\varphi_n(x+h)} \sqrt{F'(x+h)} \, dh.$$

3. Voir par exemple [7], th. I.6.2.

Il résulte de ce qui précède que

$$(6.3) \quad \widehat{g}_n(t_n) = I_n(z) + I_n(\vartheta(z)) + O\left(\frac{1}{n^{1/2+\varepsilon}}\right).$$

Évaluons à présent les deux intégrales de (6.3). D'après (6.1), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \varphi_n(z+h) &= 2\pi n\{F(z+h) - (z+h)F'(z)\} \\ &= 2\pi n\{F(z) + hF'(z) + \frac{1}{2}h^2F''(z) + O(|h|^{2+\eta}) - (z+h)F'(z)\} \\ &= \varphi_n(z) + \pi nh^2F''(z) + O(n|h|^{2+\eta}). \end{aligned}$$

Comme $F'(z+h) - F'(z) \ll h$ pour $|h| \leq \delta_n$, il s'ensuit que, sous l'hypothèse supplémentaire $0 < \varepsilon \leq \eta/(4+2\eta)$, qui garantit que $n\delta_n^{2+\eta} \ll 1$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} I_n(z) &= \int_{-\delta_n}^{\delta_n} e^{i\varphi_n(z+h)} \{\sqrt{F'(z)} + O(h)\} dh \\ &= \sqrt{F'(z)} e^{i\varphi_n(z)} \int_{-\delta_n}^{\delta_n} e^{i\pi nh^2F''(z)} \{1 + O(n\delta_n^{2+\eta})\} dh + O(\delta_n^2) \\ &= 2\sqrt{F'(z)} e^{i\varphi_n(z)} \int_0^{\delta_n} e^{i\pi nh^2F''(z)} dh + O(n\delta_n^{3+\eta} + \delta_n^2). \end{aligned}$$

Imposons à présent la condition $0 < \varepsilon < \eta/(8+2\eta)$, de sorte que le dernier terme d'erreur est $\ll n^{-1/2-\varepsilon}$. En effectuant le changement de variable $t = \pi nh^2F''(z)$ dans l'intégrale, nous obtenons

$$\begin{aligned} I_n(z) &= \sqrt{\frac{F'(z)}{\pi n F''(z)}} e^{i\varphi_n(z)} \int_0^{\pi F''(z)n^{2\varepsilon}} e^{it} \frac{dt}{\sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{n^{1/2+\varepsilon}}\right) \\ &= \sqrt{\frac{F'(z)}{\pi n F''(z)}} e^{i\varphi_n(z)} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{i\pi/4} + O\left(\frac{1}{n^{1/2+\varepsilon}}\right) \\ &= \left\{1 + O\left(\frac{1}{n^\varepsilon}\right)\right\} \sqrt{\frac{F'(z)}{n F''(z)}} e^{i\varphi_n(z) + i\pi/4} \end{aligned}$$

De même, nous obtenons à l'aide du changement de variable $t = -\pi nh^2F''(\vartheta(z))$,

$$I_n(\vartheta(z)) = \left\{1 + O\left(\frac{1}{n^\varepsilon}\right)\right\} \sqrt{\frac{F'(z)}{n|F''(\vartheta(z))|}} e^{i\varphi_n(\vartheta(z)) - i\pi/4}.$$

En reportant dans (6.3), nous obtenons donc que, posant

$$K_n(z) := \sqrt{F'(z)} \left\{ \frac{e^{i\varphi_n(z) + i\pi/4}}{\sqrt{F''(z)}} + \frac{e^{i\varphi_n(\vartheta(z)) - i\pi/4}}{\sqrt{|F''(\vartheta(z))|}} \right\},$$

nous avons établi, pour tout $z \in]-\infty, u[$, la formule asymptotique

$$\widehat{g}_n(t_n) = \frac{K_n(z) + O(1/n^\varepsilon)}{\sqrt{n}} \quad (n \geq 1).$$

Si l'on avait $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(z) = 0$, alors on aurait d'une part $F''(z) = -F''(\vartheta(z))$ et d'autre part

$$\varphi_n(z) - \varphi_n(\vartheta(z)) \rightarrow \frac{1}{2}\pi \pmod{2\pi},$$

soit encore, en notant $\|x\|$ la distance du nombre réel x à l'ensemble des entiers relatifs,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| n(F(z) - F(\vartheta(z)) - \{z - \vartheta(z)\}F'(z)) - \frac{1}{4} \right\| = 0,$$

ce qui conduit à une contradiction en regardant par exemple deux grands entiers consécutifs.

Ainsi $K_n(z)$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Cela fournit la conclusion requise. \square

7. Une famille orthonormale presque optimale

Considérons une fonction à croissance lente L , à valeurs dans $[1, \infty[$ et telle que, pour tout $c > 0$, $x \mapsto x^c/L(x)$ soit croissante sur \mathbb{R}^+ , $x \mapsto 1/\{x^c L(x)\}$ soit décroissante sur \mathbb{R}^+ . Supposons de plus que $u(x) := 1/\{\sqrt{x}L(x)\}$ ne soit pas dans $L^2(\mathbb{R})$. Les fonctions $L(x) := \max(1, \log \log x)$ et $L(x) := \max(1, \sqrt{\log x})$, par exemple, satisfont ces hypothèses.

Il alors existe une suite $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ d'éléments de $[1, \infty[$ telle que la suite de fonctions

$$g_n(x) := \frac{\mathbf{1}_{[\lambda_n, \lambda_{n+1}[}(x)}{\sqrt{x}L(x)} \quad (n \geq 1)$$

soit une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$.

De plus

$$\sup_n |g_n(x)| \leq u(x) \quad (x > 0).$$

Nous avons

$$\widehat{g}_n(t) = \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \frac{e^{-ixt}}{\sqrt{x}L(x)} dx$$

et $\Phi_n(x, t) := \int_{\lambda_n}^x e^{-iyt} dy \ll x/(1+xt)$ ($x > \lambda_n$, $t > 0$). Cela implique immédiatement

$$\widehat{g}_n(t) \ll 1/t \quad (t \geq 1).$$

Lorsque $0 < t < 1$, une intégration par parties permet d'écrire

$$\begin{aligned} \widehat{g}_n(t) &= \Phi_n(\lambda_{n+1})u(\lambda_{n+1}) - \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \Phi_n(x, t)u'(x) dx \\ &\ll \frac{\sqrt{\lambda_{n+1}}}{(1+t\lambda_{n+1})L(\lambda_{n+1})} + \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+tx)L(x)} \ll \frac{1}{\sqrt{t}L(1/t)}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons construit une famille orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\sup_n |g_n(x)| + \sup_n |\widehat{g}_n(x)| \ll u(x) + \frac{u(1/x)}{x} \quad (x > 0).$$

Cependant, il ne s'agit pas d'une base et la majoration n'est pas de carré intégrable au voisinage de l'origine.

Bibliographie

- [1] J. S. Byrnes, Quadrature mirror filters, low crest factor arrays, functions achieving optimal uncertainty principle bounds, and complete orthonormal sequences—a unified approach, *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **1**, n°3 (1994), 261–266.
- [2] G. B. Folland, A. Sitaram, The uncertainty principle : A mathematical survey, *J. Fourier Anal. Appl.* **3** (1997), 207–238.
- [3] P. Jaming, A. Powell, Uncertainty principles for orthonormal sequences, *J. Funct. Anal.* **243**, n°2 (2007), 611–630.
- [4] E. Malinnikova, Orthonormal sequences in $L^2(\mathbb{R}^d)$ and time frequency localization, *J. Fourier Anal. Appl.* **16**, n°6 (2010), 983–1006.
- [5] R. L. Pego, Compactness in L^2 and the Fourier transform, *Proc. Amer. Math. Soc.* **95** (1985), 252–254.
- [6] H.S. Shapiro, Note de travail non publiée, 1990/1991.
- [7] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 4ème éd., coll. Échelles, Belin, 2015, 592 pp.
- [8] K. Yosida, *Functional Analysis*, Réédition de la sixième édition (1980), Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, xii+501 pp.

Bahman Saffari
Analyse Harmonique
Département de mathématiques
Université de Paris XI-Orsay
91405 Orsay cedex
France

bahman.saffari@math.u-psud.fr

Harold S. Shapiro
Gurlita Vägen 15
16839 Bromma
Suède
shapiro@math.kth.se

Anne de Roton & Gérard Tenenbaum
Institut Élie Cartan
Université de Lorraine
BP 70239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex
France

Anne.De-Roton@univ-lorraine.fr
gerald.tenenbaum@univ-lorraine.fr