



**HAL**  
open science

## Une nouvelle formulation solide–coque basée sur le concept “Assumed Strain” pour l’élément fini prismatique à six nœuds “SHB6”

Vuong-Dieu Trinh, Farid Abed-Meraim, Alain Combescure

### ► To cite this version:

Vuong-Dieu Trinh, Farid Abed-Meraim, Alain Combescure. Une nouvelle formulation solide–coque basée sur le concept “Assumed Strain” pour l’élément fini prismatique à six nœuds “SHB6”. 9ème Colloque National en Calcul des Structures, May 2009, Giens, France. hal-01199800

**HAL Id: hal-01199800**

**<https://hal.science/hal-01199800>**

Submitted on 16 Sep 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L’archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d’enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## Science Arts & Métiers (SAM)

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers ParisTech researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <http://sam.ensam.eu>  
Handle ID: <http://hdl.handle.net/10985/10022>

### To cite this version :

Vuong-Dieu TRINH, Farid ABED-MERAIM, Alain COMBESCURE - Une nouvelle formulation solide-coque basée sur le concept "Assumed Strain" pour l'élément fini prismatique à six-noeuds "SHB6" - In: 9ème Colloque National en Calcul des Structures, France, 2009-05-25 - 9ème Colloque National en Calcul des Structures - 2009

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : [archiveouverte@ensam.eu](mailto:archiveouverte@ensam.eu)

# Une nouvelle formulation solide–coque basée sur le concept “*Assumed Strain*” pour l’élément fini prismatique à six-nœuds “SHB6”

V.D. Trinh<sup>1</sup>, F. Abed-Meraim<sup>1</sup>, A. Combescure<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, LPMM, (Arts et Métiers ParisTech, CNRS), 4 rue Augustin Fresnel, 57078 Metz Cedex 3  
{vuong-dieu.trinh, farid.abed-meraim}@metz.ensam.fr

<sup>2</sup> Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures, LaMCoS, (INSA de Lyon, CNRS), 18-20 rue des Sciences, 69621 Villeurbanne Cedex  
alain.combescure@insa-lyon.fr

---

**Résumé** – Une nouvelle formulation de l’élément solide–coque SHB6 est décrite. Il s’agit d’un élément isoparamétrique prismatique à 6 nœuds, interpolation linéaire et intégration réduite dans le plan moyen. Les déplacements sont les seuls d.d.l. et les points d’intégration sont distribués à travers l’épaisseur. L’analyse de *hourglass* a révélé qu’il n’y a pas de modes à énergie nulle à stabiliser ; néanmoins, la méthode “*assumed strain*” est adoptée pour améliorer sa convergence. Les performances du nouvel élément, ainsi obtenu, sont évaluées à travers des cas tests standard.

**Mots clés** – Solide–coque SHB6, verrouillage, *hourglass*, méthode « *assumed strain* », cas tests.

---

## 1 Introduction

L’efficacité et la précision des EF sont des propriétés clés recherchées dans les logiciels de simulation dont le recours devient systématique. Dans l’analyse 3D de problèmes structuraux, de nombreux travaux ont été consacrés au développement d’éléments solide–coques effectifs à 8 nœuds [1-3,5-8]. Cependant pour pouvoir mailler des géométries complexes et avec l’avènement d’outils libres de génération de maillage, le développement d’éléments similaires prismatiques est rendu nécessaire. Rappelons que le concept solide–coque est une alternative utilisant des éléments 3D spécifiquement modifiés pour modéliser efficacement les problèmes où des zones minces et épaisses coexistent. En effet, les techniques de connexion entre coques et solides introduisent souvent des hypothèses cinématiques à l’interface qui raidissent la liaison. Ces éléments solide–coques ont aussi d’autres avantages : évitent la cinématique élaborée de coques, utilisent des lois de comportement générales 3D, permettent un calcul correct de la variation d’épaisseur, traitement plus facile de grandes rotations avec adaptation simple des configurations, connexion directe aux éléments solides classiques puisque les déplacements sont les seuls d.d.l. et traitement naturel des conditions de contact sur les deux faces de la structure. Cet article présente la formulation d’un solide–coque à six nœuds appelé SHB6 et obtenu à partir d’une approche purement 3D. La méthode de « déformation postulée » est combinée à une intégration réduite avec les points d’intégration alignés suivant l’épaisseur. La loi élastique 3D est aussi modifiée pour s’approcher de la situation coque et atténuer les verrouillages. Une étude détaillée du rang de la matrice de raideur révèle que l’élément n’a pas de modes de *hourglass* à condition qu’au moins deux points d’intégration soient utilisés. On montre que la formulation est valable quel que soit le nombre de points, supérieur à 2, placés selon la direction d’épaisseur. Des cas tests variés montrent le rôle très utile de complément à l’élément hexaèdre SHB8PS, par l’usage de maillages mixtes (SHB8PS/SHB6), ainsi que l’avantage de mélanger ces deux EF.

## 2 Formulation de l'élément solide-coque SHB6

### 2.1 Cinématique et interpolation

Le SHB6 est un élément linéaire isoparamétrique à six nœuds (voir Figure 1). Les coordonnées  $x_i$  et déplacements  $u_i$  sont reliés à leurs contreparties nodales  $x_{iI}$  et  $u_{iI}$ , resp., par :

$$x_i = x_{iI} N_I(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{I=1}^6 x_{iI} N_I(\xi, \eta, \zeta) \quad , \quad u_i = u_{iI} N_I(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{I=1}^6 u_{iI} N_I(\xi, \eta, \zeta) \quad (1)$$

où les fonctions de forme tri-linéaires  $\mathbf{N}^T = (N_1, \dots, N_6)$  sont données par les expressions :

$$\mathbf{N}^T(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1-\zeta)(1-\xi-\eta) & (1-\zeta)\xi & (1-\zeta)\eta & (1+\zeta)(1-\xi-\eta) & (1+\zeta)\xi & (1+\zeta)\eta \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\xi = [0,1]; \quad \eta = [0,1-\xi]; \quad \zeta = [-1,1]$$

Dans la suite, et sauf mention contraire, la convention de sommation sur les indices répétés sera adoptée. Les indices en minuscule  $i$  varient de 1 à 3 et représentent les directions des coordonnées spatiales, et les indices en majuscule  $I$  varient de 1 à 6 et sont relatifs aux nœuds.

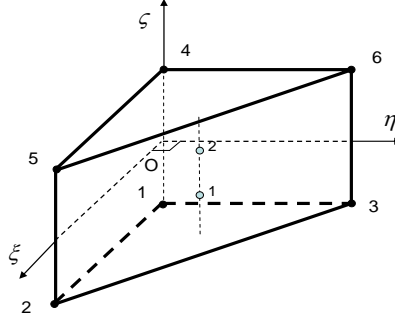


Figure 1 – Géométrie de référence du SHB6 et disposition des points de Gauss (ici  $n_{\text{int}} = 2$ ).

### 2.2 Opérateur gradient discrétisé

La forme explicite de l'opérateur gradient discret, reliant la déformation aux déplacements nodaux, est obtenue par le développement suivant du champ de déplacement, rendu possible par la combinaison des équations (1), (2) et de relations d'orthogonalité particulières démontrées :

$$u_i = a_{0i} + (x_1 \mathbf{b}_1^T + x_2 \mathbf{b}_2^T + x_3 \mathbf{b}_3^T + h_1 \boldsymbol{\gamma}_1^T + h_2 \boldsymbol{\gamma}_2^T) \cdot \mathbf{d}_i \quad (3)$$

avec  $h_1 = \eta\zeta$ ,  $h_2 = \xi\zeta$  et la forme explicite des vecteurs :  $\mathbf{b}_i = \mathbf{N}_{,i}(\mathbf{0}) = \partial \mathbf{N} / \partial x_i |_{\xi=\eta=\zeta=0}$  ;  $i = 1, 2, 3$ , et

$\boldsymbol{\gamma}_\alpha = \frac{1}{2} (\mathbf{h}_\alpha - \sum_{i=1}^3 (\mathbf{h}_\alpha^T \cdot \mathbf{x}_i) \mathbf{b}_i)$  ;  $\alpha = 1, 2$ . Dans ces expressions,  $\mathbf{h}_1^T = (0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1)$ ,

$\mathbf{h}_2^T = (0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)$ , et les vecteurs  $\mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{d}_i$  représentent les coordonnées et déplacements nodaux. La relation (3) est obtenue grâce aux propriétés d'orthogonalités suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{h}_\alpha = 0, & \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{x}_j = \delta_{ij}, & \mathbf{h}_\alpha^T \cdot \mathbf{h}_\beta = 2\delta_{\alpha\beta}, \\ \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \cdot \mathbf{x}_j = 0, & \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \cdot \mathbf{h}_\beta = \delta_{\alpha\beta} & i, j = 1, \dots, 3 \quad \alpha, \beta = 1, 2 \end{cases} \quad (4)$$

Par différentiation de l'équation (3), on obtient la forme pratique de l'opérateur gradient :

$$\nabla^s(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,y} \\ u_{z,z} \\ u_{x,y} + u_{y,x} \\ u_{x,z} + u_{z,x} \\ u_{y,z} + u_{z,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_x^T + h_{\alpha,x} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_y^T + h_{\alpha,y} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_z^T + h_{\alpha,z} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ \mathbf{b}_y^T + h_{\alpha,y} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{b}_x^T + h_{\alpha,x} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_z^T + h_{\alpha,z} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} & \mathbf{b}_x^T + h_{\alpha,x} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_z^T + h_{\alpha,z} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{b}_y^T + h_{\alpha,y} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{d}_x \\ \mathbf{d}_y \\ \mathbf{d}_z \end{bmatrix} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{d} \quad (5)$$

### 2.3 Principe variationnel

Par l'application de la forme simplifiée [4] du principe variationnel mixte non linéaire de Hu-Washizu, dans lequel la contrainte interpolée est choisie orthogonale à la différence entre la partie symétrique du gradient de déplacement et le champ de déformation postulée, on obtient :

$$\delta\pi(\mathbf{u}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \int_{\Omega_e} \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \delta \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{f}^{ext} = 0 \quad (6)$$

Remplaçant la déformation postulée par son expression,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{d}$ , dans l'équation (6) on obtient les formules suivantes pour les forces internes et la matrice de raideur de l'élément :

$$\mathbf{f}^{int} = \int_{\Omega_e} \bar{\mathbf{B}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad , \quad \mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \bar{\mathbf{B}}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{B}} d\Omega \quad (7)$$

Dans une approche standard en déplacement, l'opérateur  $\bar{\mathbf{B}}$  est simplement remplacé par  $\mathbf{B}$ .

### 2.4 Analyse des modes de *hourglass*

Les modes de *hourglass* sont des modes non physiques (à énergie nulle) engendrés par la sous-intégration. Cette anomalie est liée à une déficience du rang de la matrice de raideur. Pour une matrice de comportement non singulière, et au vu de l'expression (7) de la raideur, ces modes peuvent être recherchés comme les vecteurs du noyau, outre les modes rigides, soit :

$$\mathbf{B}(\zeta_j) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad \forall \zeta_j \quad J = 1, \dots, n_{int} \quad (8)$$

On peut alors construire la base suivante de l'espace vectoriel des déplacements discrétisés :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{0} & \mathbf{x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{s} & \mathbf{0} & -\mathbf{x} & \mathbf{0} & \mathbf{z} & \mathbf{0} & \mathbf{y} & \mathbf{0} & \mathbf{x} & \mathbf{0} & \mathbf{z} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{s} & \mathbf{0} & -\mathbf{x} & -\mathbf{y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{z} & \mathbf{0} & \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Ceci se fait grâce aux relations d'orthogonalité (4) démontrées précédemment, qui montrent aussi que les 6 premiers vecteurs ci-dessus vérifient la relation (8) et représentent les 6 modes rigides (3 translations et 3 rotations). Les 12 vecteurs restants ne vérifient pas (8) si au moins 2 points d'intégration sont pris dans l'épaisseur, ce qui montre qu'il n'y a pas de modes à énergie nulle, et que donc, à la différence de l'élément SHB8PS, aucune stabilisation n'est requise ici.

### 2.5 Formulation "Assumed Strain" et projection de l'opérateur gradient

La méthode de « déformation postulée » introduite en [4] est utilisée pour atténuer la plupart des verrouillages. Elle consiste à projeter l'opérateur gradient  $\mathbf{B}$  en un opérateur  $\bar{\mathbf{B}}$ . D'abord on décompose cet opérateur en un terme contenant les gradients dans le plan moyen (termes de membrane) et les déformations normales, et un terme contenant les cisaillements transverses :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2, \text{ avec } \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_z^T + h_{\alpha,z} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{0} & \mathbf{b}_x^T + h_{\alpha,x} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_z^T + h_{\alpha,z} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T & \mathbf{b}_y^T + h_{\alpha,y} \boldsymbol{\gamma}_\alpha^T \end{bmatrix} \quad (10)$$

Seule la partie  $\mathbf{B}_2$  est projetée en un opérateur  $\overline{\mathbf{B}}_2$ , ce qui donne pour la raideur :

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_1^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_1 d\Omega + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_1^T \cdot \mathbf{C} \cdot \overline{\mathbf{B}}_2^T d\Omega + \int_{\Omega_e} \overline{\mathbf{B}}_2^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_1 d\Omega + \int_{\Omega_e} \overline{\mathbf{B}}_2^T \cdot \mathbf{C} \cdot \overline{\mathbf{B}}_2 d\Omega \quad (11)$$

Notez que la décomposition (10) et la projection choisie annule les termes croisés ci-dessus.

### 3 Résultats numériques de cas tests

Dans les cas tests qui suivent, la version actuelle notée SHB6<sup>bar</sup> est comparée, d'une part, à la solution de référence et, d'autre part, aux solutions données par les deux éléments : PRI6 qui est l'élément standard prisme 3D à 6 nœuds et SHB6 qui est l'ancienne version sans projection.

#### 3.1 Poutre vrillée

Ce problème est devenu un test coque de référence pour évaluer les éléments dans le cas de configuration initiale « distordue ». En effet, la poutre, initialement vrillée d'un angle de 90°, est encastree à son extrémité gauche et soumise à un effort tranchant  $P = 1$  à son extrémité droite. Le caractère distordu des éléments accentue ainsi les verrouillages et donc la sévérité du test.

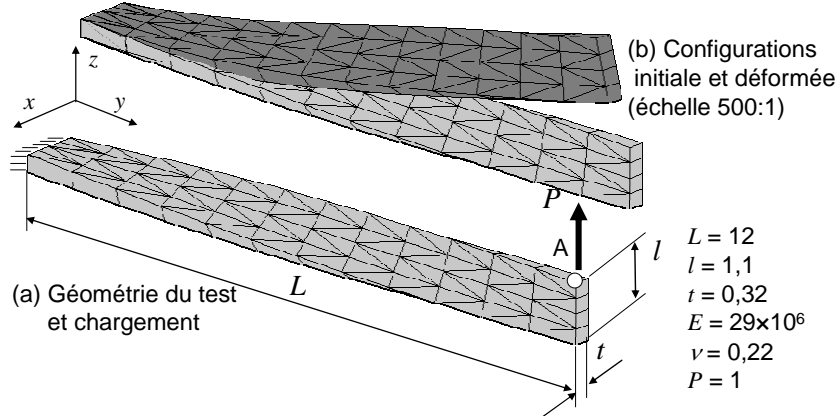


Figure 2 – Description du test de poutre vrillée et exemple de maillage  $(12 \times 4 \times 1) \times 2$ .

Maillages	PRI6	SHB6	SHB6 <sup>bar</sup>
	$w/w_{ref}$	$w/w_{ref}$	$w/w_{ref}$
$(6 \times 2 \times 1) \times 2$	0.061	0.234	0.496
$(12 \times 4 \times 1) \times 2$	0.202	0.470	0.784
$(24 \times 4 \times 1) \times 2$	0.485	0.779	0.935
$(36 \times 8 \times 1) \times 2$	0.489	0.875	0.972

Tableau 1 – Convergence (poutre vrillée) : déplacement vertical normalisé du point A.

Le tableau 1 donnant les résultats normalisés par rapport à la référence  $w_{ref} = 5,424 \times 10^{-3}$  montre que le SHB6<sup>bar</sup> converge plus rapidement que l'ancienne version SHB6 et que le PRI6.

### 3.2 Plaque circulaire encastrée sous charge concentrée

Ce test de plaque circulaire encastrée sur son bord et soumise à une force concentrée au centre permet d'évaluer les performances de l'élément en flexion et cisaillement. Par symétrie, un quart de la plaque est modélisé par des maillages à 3 zones (voir exemple en Figure 3).

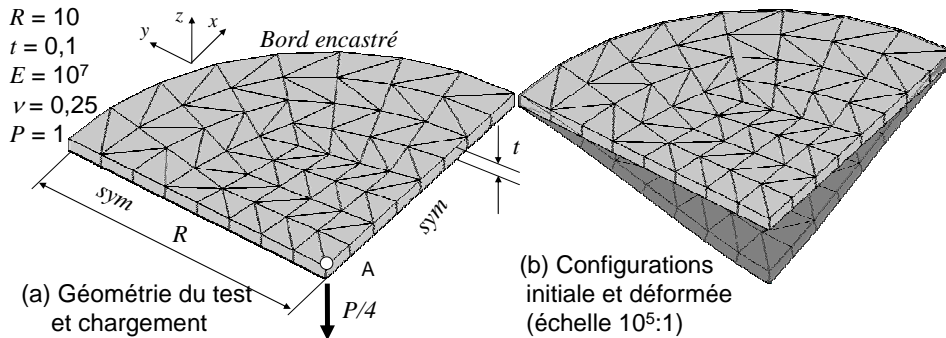


Figure 3 – Description du test de la plaque circulaire et exemple de maillage  $(3 \times (4 \times 4 \times 1)) \times 2$ .

Les résultats normalisés par rapport à la référence  $w_{ref} = -2,65736 \times 10^{-5}$  sont donnés dans le tableau 2, ce qui montre clairement que les modifications apportées à la version actuelle SHB6<sup>bar</sup> améliorent sa convergence en comparaison à l'ancienne version SHB6 et au PRI6.

Maillages	PRI6	SHB6	SHB6 <sup>bar</sup>
	$w/w_{ref}$	$w/w_{ref}$	$w/w_{ref}$
$(3 \times (2 \times 2 \times 1)) \times 2$	0.162	0.422	0.692
$(3 \times (4 \times 4 \times 1)) \times 2$	0.370	0.638	0.876
$(3 \times (6 \times 6 \times 1)) \times 2$	0.522	0.753	0.942
$(3 \times (8 \times 8 \times 1)) \times 2$	0.624	0.820	0.974

Tableau 2 – Convergence (plaque circulaire) : déplacement vertical normalisé du point A.

### 3.3 Hémisphère pincé avec mélange d'éléments

Ce test, souvent utilisé pour évaluer le comportement en flexion inextensionnelle 3D de coques, est devenu très populaire. Le problème est sévère car les verrouillages en cisaillement et en membrane sont dominants et accentués par la géométrie particulière (éléments distordus). Par symétrie, un quart de la structure est maillé. À travers ce test, l'intérêt d'utiliser des maillages mixtes (maillages hexaédriques et prismatiques) est illustré, ce qui représente la principale motivation du SHB6. Le SHB8PS développé en [1,2] est mélangé aux SHB6<sup>bar</sup> et SHB6, tandis que le PRI6 est mélangé au HEX8, qui est l'élément 3D standard hexaédrique à huit nœuds.

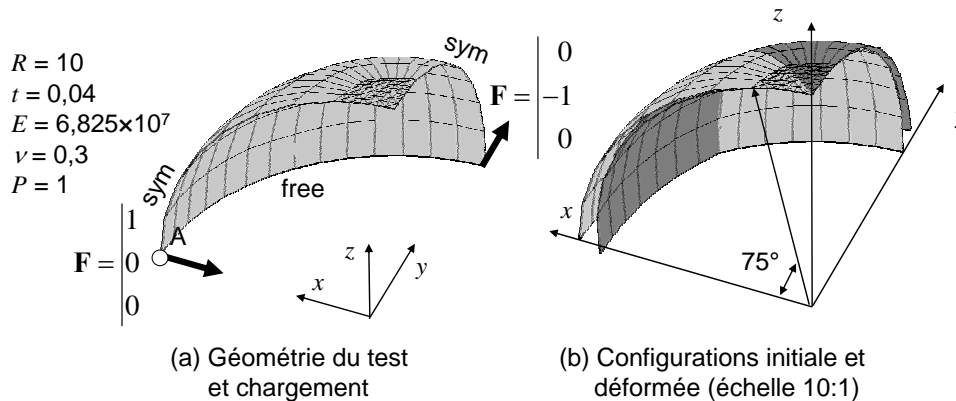


Figure 3 – Description du test de l'hémisphère pincé et exemple de maillage mixte.

Les résultats normalisés par rapport à la référence  $u_{ref} = 0,0924$  sont donnés dans le tableau 3, ce qui montre clairement l'intérêt de mélanger ces deux éléments à formulation solide-coque si l'on compare aux formulations purement 3D traditionnelles.

Nbr. d'éléments	PRI6+HEX8	SHB6+SHB8PS	SHB6 <sup>bar</sup> +SHB8PS
	$u_x/u_{ref}$	$u_x/u_{ref}$	$u_x/u_{ref}$
36	0,001	0,703	0,785
100	0,002	0,880	0,960
156	0,004	0,929	0,983

Tableau 3 – Convergence (hémisphère pincé) : déplacement  $u_x$  normalisé du point A.

## 4 Discussion et conclusions

Un nouvel élément solide-coque a été formulé et implanté dans le code Aster d'EDF. La version actuelle SHB6<sup>bar</sup> a été améliorée grâce à la projection et modifications visant à réduire les verrouillages. Les résultats montrent que cet élément est bien plus performant que l'élément solide PRI6. Cependant, cet élément à base triangulaire montre encore des verrouillages dans certaines configurations, il est surtout intéressant à être utilisé comme complément à l'élément solide-coque SHB8PS afin de mailler des structures complexes de géométries arbitraires.

## Remerciements

Ces travaux ont été financés par une bourse Cifre d'EDF R&D et un contrat industriel avec EDF R&D et le CETIM. Les auteurs tiennent à remercier J.M. Proix, P. Massin et X. Desroches (EDF R&D) et M. Afzali et J.F. Billaud du CETIM.

## Références

- [1] F. Abed-Meraim, A. Combescure. SHB8PS – a new adaptive, assumed-strain continuum mechanics shell element for impact analysis. *Computers & Structures*, 80, 791-803, 2002.
- [2] F. Abed-Meraim, A. Combescure. A physically stabilized and locking-free formulation of the (SHB8PS) solid-shell element. *Eur. Journal Comp. Mech.*, 16, 1037-1072, 2007.
- [3] R.J. Alves de Sousa, J.W. Yoon, R.P.R. Cardoso, R.A. Fontes Valente, J.J. Gracio. On the use of a reduced enhanced solid-shell (RESS) element for sheet forming simulations. *Int. Journal Plasticity*, 23, 490-515, 2007.
- [4] T. Belytschko, L.P. Bindeman. Assumed strain stabilization of the eight node hexahedral element. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 105, 225-260, 1993.
- [5] E. Domissy. *Formulation et évaluation d'éléments finis volumiques modifiés pour l'analyse linéaire et non linéaire des coques*. Thèse de doctorat, UT Compiègne, France, 1997.
- [6] R. Hauptmann, K. Schweizerhof. A systematic development of solid-shell element formulations for linear and non-linear analyses employing only displacement degrees of freedom. *Int. Journal Num. Meth. Engng.*, 42, 49-69, 1998.
- [7] A. Legay, A. Combescure. Elastoplastic stability analysis of shells using the physically stabilized finite element SHB8PS. *Int. Journal Num. Meth. Engng.*, 57, 1299-1322, 2003.
- [8] S. Reese. A large deformation solid-shell concept based on reduced integration with hourglass stabilization. *Int. Journal Num. Meth. Engng.*, 69, 1671-1716, 2007.