



**HAL**  
open science

## Impédances de surface en 2D : comparaison de méthodes de paramétrisation en $\delta$

Laurent Krähenbühl, Patrick Dular, Victor Péron, Ronan Perrussel, Ruth Sabariego, Clair Poignard

### ► To cite this version:

Laurent Krähenbühl, Patrick Dular, Victor Péron, Ronan Perrussel, Ruth Sabariego, et al.. Impédances de surface en 2D : comparaison de méthodes de paramétrisation en  $\delta$ . Numélec 2015, Université de Nantes - IREENA, Jun 2015, Nantes, France. hal-01199546

**HAL Id: hal-01199546**

**<https://hal.science/hal-01199546v1>**

Submitted on 15 Sep 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Impédances de surface en 2D : comparaison de méthodes de paramétrisation en $\delta$

L. Krähenbühl<sup>1</sup>, P. Dular<sup>2</sup>, V. Péron<sup>3</sup>, R. Perrussel<sup>4</sup>, R. Sabariego<sup>5</sup> et C. Poignard<sup>6</sup>

<sup>1</sup>Université de Lyon, Ampère (CNRS UMR5005), ECL, France, <sup>2</sup>Université de Liège, Belgique, <sup>3</sup>Université de Pau, France

<sup>4</sup>Université de Toulouse, France, <sup>5</sup>KU Leuven, Belgique, <sup>6</sup>INRIA Bordeaux Sud-Ouest, EPC MC2, France  
Courriel : Laurent.Krahenbuhl@ec-lyon.fr

**Résumé**— Les méthodes d’impédance de surface sont parmi les plus efficaces pour résoudre les problèmes de courants de Foucault à faible profondeur de pénétration ( $\delta$ ) en régime harmonique linéaire. Cependant l’effort de calcul devient considérable lorsqu’on s’intéresse à une large gamme de fréquences (ou de conductivités), car chacun des résultats correspond à la résolution d’un problème d’éléments finis en valeurs complexes ; de plus, l’erreur est en  $\delta^2$  et augmente donc très vite avec  $\delta$ . Nous avons précédemment montré qu’un développement limité permet des paramétrisations en  $\delta$  des solutions, très précises pour toutes les valeurs de  $\delta$  comprises entre la limite conducteur parfait ( $\delta \rightarrow 0$ ) et les premiers résultats accessibles par maillage de l’effet de peau ( $\delta = \delta_{FE}$ ), avec un coût numérique équivalent à celui de 2 résolutions. Nous comparons ici la précision de deux des méthodes possibles pour construire un tel développement limité.

## I. INTRODUCTION

La méthode classique des impédances de surface (dite de *Leontovich*, notée IBC) permet de résoudre une approximation du problème harmonique des courants induits, pour des matériaux à comportement linéaire et frontières régulières. La précision est en pratique suffisante si la profondeur de pénétration  $\delta$  reste petite par rapport à la plus petite dimension caractéristique  $D$  du conducteur  $\Omega_C$  considéré.

Si la frontière  $\Sigma$  de ce conducteur est suffisamment régulière, on peut en effet calculer le champ électromagnétique dans le domaine extérieur en imposant sur  $\Sigma$  une condition d’impédance de surface (les vecteurs sont en gras, les grandeurs complexes sont soulignées) :

$$\text{curl } \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}}_s \text{ dans } \Omega_O, \quad (1)$$

$$\mathbf{n} \times \underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{Z}}_S \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \underline{\mathbf{H}}) \text{ sur } \Sigma, \quad (2)$$

$$\underline{\mathbf{Z}}_S = (1+j)/(\sigma\delta), \quad (3)$$

où  $\underline{\mathbf{H}}$  est le champ magnétique [A/m],  $\underline{\mathbf{J}}_s$  la densité de courant source [A/m<sup>2</sup>],  $\underline{\mathbf{E}}$  le champ électrique [V/m],  $\mathbf{n}$  la normale extérieure à la surface  $\Sigma$  de  $\Omega_O$ ,  $j$  l’unité imaginaire et  $\underline{\mathbf{Z}}_S$  l’impédance de surface (qui dépend de la conductivité électrique  $\sigma$  [S/m] et de la profondeur de pénétration  $\delta$ ). La solution est facilement obtenue par éléments finis ; par exemple dans le cas 2D plan ( $\underline{\mathbf{J}}_s$  perpendiculaire à ce plan), elle s’exprime à l’aide d’un potentiel vecteur  $\underline{\mathbf{A}}$  avec une seule composante  $\underline{A}$  orthogonale au plan :

$$-\Delta \underline{A} = \mu_0 \underline{J}_s \text{ dans } \Omega_O ; \underline{A} = \underline{\alpha} \delta \partial_n \underline{A} \text{ sur } \Sigma ; \underline{\alpha} = (j-1)/2. \quad (4)$$

Si la fréquence ou la conductivité (donc  $\delta$ ) sont modifiées, la résolution doit être recommencée.

Cette condition d’impédance fait partie d’une hiérarchie d’approximations de plus en plus précises du problème de courants induits [1] : l’ordre 0 correspond à l’approximation du « conducteur parfait » avec une erreur en  $\delta$  ; l’ordre 1 est la condition de Leontovich ci-dessus, avec une erreur en  $\delta^2$  ; l’ordre 2 prend en plus en compte la courbure de la surface (erreur en  $\delta^3$ ) ; pour les ordres supérieurs, un opérateur différentiel doit être introduit sur la surface.

## II. DEVELOPPEMENT DE LA SOLUTION IBC

Définissons la somme partielle  $\tilde{\underline{A}}_n(\delta)$  suivante :

$$\tilde{\underline{A}}_n(\delta) = A_0 + \underline{\alpha} \delta A_1 + (\underline{\alpha} \delta)^2 A_2 + \dots + (\underline{\alpha} \delta)^n A_n \quad (5)$$

où les coefficients réels  $A_i$  sont solutions d’une suite récurrente de problèmes indépendants de  $\delta$  :

$$-\Delta A_0 = \mu_0 J_s \text{ dans } \Omega_O ; A_0 = 0 \text{ sur } \Sigma, \quad (6)$$

$$\forall i \geq 1, -\Delta A_i = 0 \text{ dans } \Omega_O ; A_i = \partial_n A_{i-1} \text{ sur } \Sigma. \quad (7)$$

On montre aisément que le développement asymptotique correspondant ( $n \rightarrow \infty$ ) est solution de (4).

$A_0$  est la solution « conducteur parfait » ; la condition de Leontovich correspond à la série complète pour  $n$  infini ; cependant, la somme partielle  $\tilde{\underline{A}}_1(\delta)$  est une paramétrisation d’ordre 1 de la solution physique, dont l’erreur se comporte en  $\delta^2$ , comme celle de la condition de Leontovich. Les deux potentiels de base  $A_0$  et  $A_1$  sont obtenus facilement en résolvant deux problèmes réels (6) et {(7),  $i=1$ } dans le seul domaine extérieur  $\Omega_O$  grossièrement maillé.

Avec le même coût numérique qu’une résolution en impédance de surface, nous avons ainsi obtenu une solution paramétrée de même précision. Peut-on faire mieux ?

La poursuite du développement (5) au-delà de  $n=1$  nous rapprocherait de la solution classique des impédances de surfaces, mais pas nécessairement de la solution physique ; de plus, la solution de (7) pour  $i \geq 3$  est numériquement instable. Nous proposons une autre approche, qui reste inspirée par le développement (5).

## III. DÉVELOPPEMENT INTERPOLANT

### A. But poursuivi.

On considère la solution par éléments finis  $\underline{A}_{FE}$  du problème magnétodynamique harmonique dans le domaine complet  $\Omega = \Omega_O \cup \Omega_C$ , obtenu avec le maillage de la région conductrice  $\Omega_C$  raffiné de façon « acceptable » en terme de coût (dit « maillage grossier ») ;  $f_{FE}$  and  $\delta_{FE}$  sont respectivement la fréquence et la profondeur de pénétration correspondantes (typiquement,  $\delta_{FE}$  est 15-20% de la taille caractéristique  $D$  de  $\Omega_C$  et la précision numérique est garantie en s’assurant qu’il y a 4 à 5 éléments finis du premier ordre pour  $\delta_{FE}$  tout le long de  $\Sigma$ , Fig. 1).

Nous cherchons une solution  $\hat{\underline{A}}(\delta)$  telle que, dans  $\Omega_O$  :

$$\hat{\underline{A}}(\delta) = \tilde{\underline{A}}_1(\delta) + \mathcal{O}(\delta^2) \text{ et } \lim_{\delta \rightarrow \delta_{FE}} \hat{\underline{A}}(\delta) = \underline{A}_{FE}. \quad (8)$$

De cette manière, une bonne précision peut être attendue pour toutes les profondeurs de pénétration inférieures à  $\delta_{FE}$  : la même précision que la méthode des impédances de surface pour les petits deltas, une précision améliorée pour les plus grands deltas, jusqu’à la précision de la solution précalculée  $\underline{A}_{FE}$ , en  $\delta_{FE}$ .

### B. Développement, et choix possibles pour ses coefficients.

L'idée pour garantir les contraintes (8) est d'utiliser un développement en puissance de delta comme dans (5). Une première possibilité est d'écrire :

$$\hat{A}(\delta) = \hat{A}_1(\delta) + (\alpha\delta)^2 \hat{A}_2 + (\underline{\alpha}\delta)^3 \hat{A}_3 \quad (9)$$

$$\hat{A}(\delta_{FE}) = \underline{A}_{FE} \text{ dans } \Omega_0, \quad (10)$$

où  $\hat{A}_1(\delta)$  est la paramétrisation d'ordre 1 de la section II., ce qui avec (10) garantit bien le respect de nos objectifs (8). Cette expansion reprend pour les termes en  $\delta^2$  et en  $\delta^3$  les arguments des termes complexes du développement (5), alors que nous ne l'avons jusqu'ici formellement justifié que pour la solution en impédance de surface.

On peut s'affranchir de cette contrainte sans faire plus de calcul, mais on obtient alors un développement  $\hat{A}(\delta)$  limité à la puissance 2 de  $\delta$ , le potentiel  $\hat{A}_2$  cherché étant cette fois-ci complexe :

$$\hat{A}(\delta) = \hat{A}_1(\delta) + \delta^2 \hat{A}_2 \text{ avec } \hat{A}(\delta_{FE}) = \underline{A}_{FE} \text{ dans } \Omega_0 \quad (11)$$

$$\text{soit : } \hat{A}_2 = [\underline{A}_{FE} - \hat{A}_1(\delta_{FE})] / \delta_{FE}^2. \quad (12)$$

Pour ces deux méthodes, le coût numérique est identique : en pré calcul (réalisé une seule fois), deux résolutions en réels dans le domaine extérieur pour déterminer  $A_0$  et  $A_1$ , et une résolution magnétodynamique en nombres complexes dans le domaine complet, toutes indépendantes de  $\delta$ , et réalisées sur des maillages « grossiers ».

La solution pour une profondeur  $\delta$  quelconque se construit ensuite comme combinaison linéaire de 4 potentiels réels (ou 2 réels et un complexe), avec des coefficients qui sont, eux, fonction de  $\delta$ .

### III. PREMIERS RÉSULTATS

Le problème test (Fig. 1) utilisé pour ce résumé est celui décrit dans [2] : on force un flux harmonique à lécher la surface  $\Sigma$  d'un angle conducteur arrondi (c'est la géométrie la plus simple possible qui n'est pas simplement plate ; le cas des angles vifs conducteurs a fait l'objet d'autres travaux [3] par les mêmes auteurs, ce n'est pas l'objet ici).

La Fig. 2 illustre la première méthode par les 4 potentiels  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $\hat{A}_2$  et  $\hat{A}_3$  obtenus avec des maillages grossiers.

La Fig. 3 présente quelques résultats d'erreur, en comparant cette première méthode, et la solution par impédances de surfaces sur le même maillage, avec une solution de référence du problème de magnétodynamique complet calculée sur un maillage adapté très raffiné.

Les premiers tests effectués à partir de (11)–(12) ont tous conduit à une erreur qui se comporte de la même manière dans l'espace, mais de norme environ double. Ce résultat sera vérifié d'ici à la Conférence dans des configurations géométriques plus compliquées en 2D et en 3D, et à partir d'arguments théoriques que nous espérons avoir formalisés d'ici là.

### REFERENCES

- [1] S.V. Yuferev, N. Ida, "Impedance boundary conditions of high order approximation for electromagnetic transient scattering problems," Proc. of 10<sup>th</sup> Int. Conf. on Antennas & Prop., paper 436, IEE, 1997.
- [2] L. Krähenbühl, P. Dular, V. Péron, R. Perrussel, C. Poignard, R. Sabariego, "Asymptotic delta-parametrization of surface-impedance solutions," CEFC, Annecy, France, 2014.

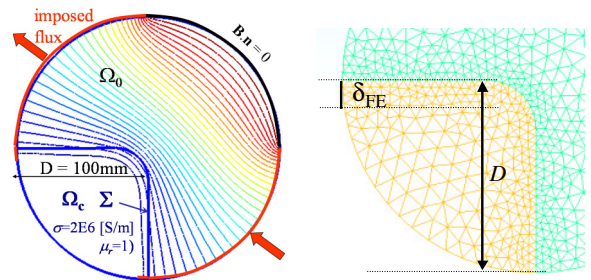


Fig. 1. Problème-test, et un maillage grossier typique ( $\delta_{FE}=15\%D$ ).

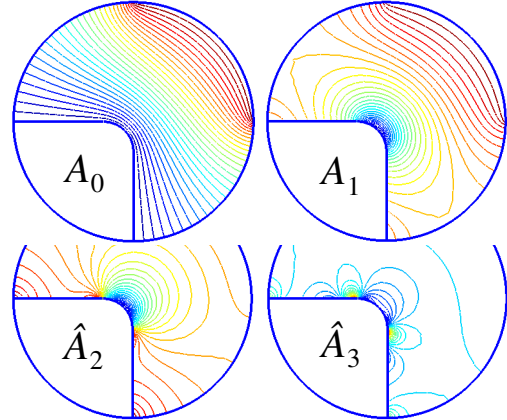


Fig. 2. Comportement des 4 solutions de base (9)–(10) pour  $\delta_{FE}=15\%D$ .

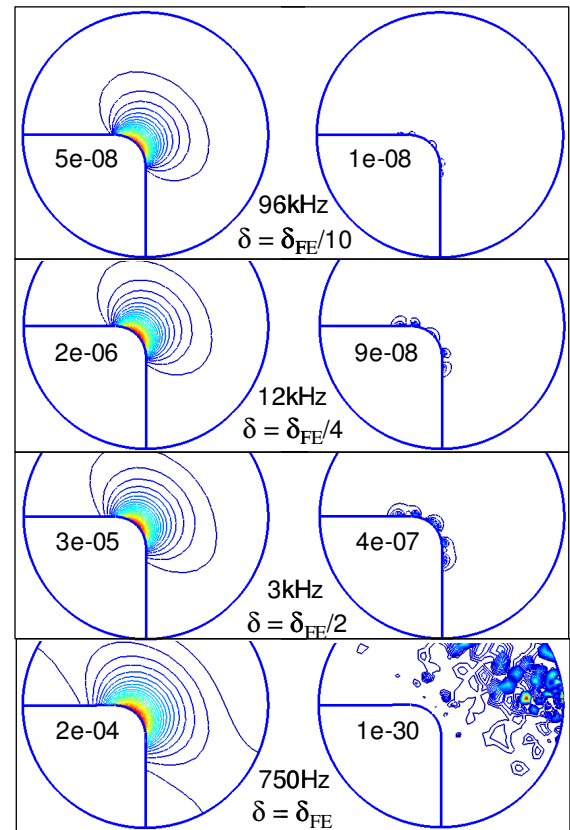


Fig. 3. Erreurs quadratiques comparées : à gauche : Leontovich ; à droite : méthode (9)–(10).

- [3] M. Dauge, P. Dular, L. Krähenbühl, *et al.*, "Corner asymptotics of the magnetic potential in the eddy-current model," in *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 37 (13), pp.1924-1955, 2014.