



**HAL**  
open science

# Vibration transverse d'une poutre excitée axialement par un mouvement harmonique transmis via un contact intermittent.

Daniel Cintra, Pierre Argoul

## ► To cite this version:

Daniel Cintra, Pierre Argoul. Vibration transverse d'une poutre excitée axialement par un mouvement harmonique transmis via un contact intermittent.. 2015. hal-01198953v1

**HAL Id: hal-01198953**

**<https://hal.science/hal-01198953v1>**

Preprint submitted on 13 Oct 2015 (v1), last revised 4 Sep 2017 (v4)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NoDerivatives 4.0 International License

# Vibration transverse argumentaire sous-harmonique d'une poutre excitée axialement.

D. Cintra, P. Argoul  
Université Paris-Est  
Laboratoire Navier (UMR 8205)  
CNRS, ENPC, IFSTTAR

- Abstract -

This paper studies the transverse vibration of an axially-excited beam, and shows that this vibration is governed by an argumental nonlinear equation, which implies that a vibration in the fundamental transverse mode of the beam can occur when the frequency of the excitation is many times the frequency of the fundamental transverse mode. Two cases are studied : the articulated-(articulated-guided) case, and the clamped-(clamped-guided) case.

-----

Le présent article étudie la vibration transverse d'une poutre excitée axialement, et montre que cette vibration est gouvernée par une équation argumentaire. Ceci implique qu'une vibration transverse de la poutre peut se produire lorsque la fréquence de l'excitation est plusieurs fois la fréquence du mode transverse fondamental. L'équation est non-linéaire, du type suivant :

$$\frac{d^2 x(\tau)}{d\tau^2} + 2\beta \frac{dx(\tau)}{d\tau} + x(\tau) + \mu x^3(\tau) = C_0 a_A x(\tau) \sin\left(\frac{\nu}{\omega_0} \tau\right) + C_1,$$

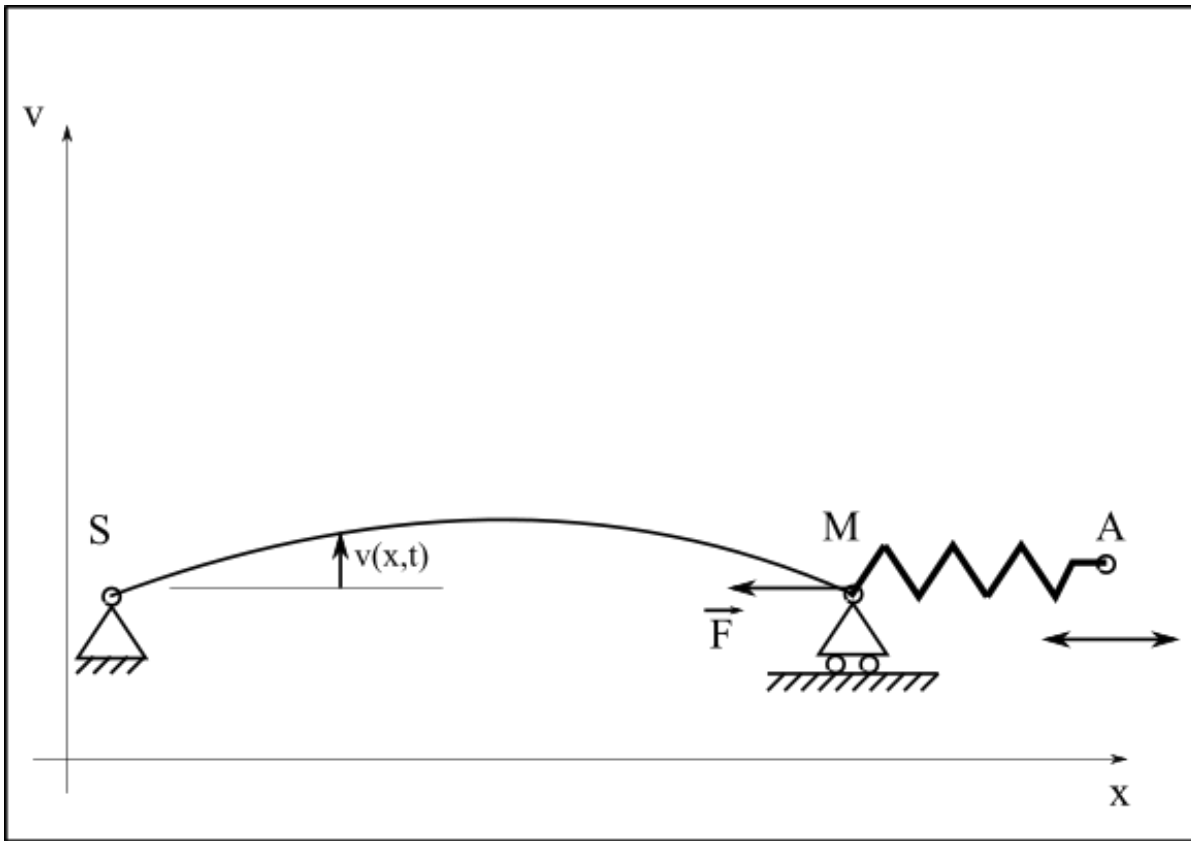
où  $x$  est la coordonnée d'espace,  $\tau$  est le temps réduit, et

$\beta, \mu, C_0, a_A, \nu, \omega_0$  et  $C_1$  sont des paramètres constants.

On étudie le cas le cas articulé-(articulé-guidé) et le cas encasté-(encasté-guidé).

-----

Etudions le cas d'une poutre horizontale articulée en S et guidée horizontalement en M, et reliée en M, via un ressort linéaire, à un point A se déplaçant horizontalement selon un mouvement harmonique.



Soient SM la poutre,  $x_M$  l'abscisse de M,  $F$  la force extérieure subie par la poutre et appliquée en M,  $x_A$  l'abscisse de A, et  $v(x, t)$  le déplacement de la poutre dans la direction Oy.

### Expression de $x_M$ .

#### Expression générale de $x_M$ en fonction de $v(x, t)$ .

Introduisons l'abscisse curviligne  $s$  le long de la poutre :  $s(x, v, t) = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial v(u, t)}{\partial u}\right)^2} du$ .

#### (xxx-52)

Comme la poutre est inextensible, son extrémité droite M se déplace le long de l'axe des  $x$ , et l'abscisse curviligne de M vaut  $L$ . De sorte que, si nous notons  $x_M$  l'abscisse de M, nous avons :

$$s(x_M, v, t) = \int_0^{x_M} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial x}\right)^2} dx = L. \quad (\text{xxx-51})$$

Comme nous avons pris l'hypothèse des rotations modérées, nous pouvons écrire que  $\left|\frac{\partial v(x, t)}{\partial x}\right| \ll 1$ , et que par suite :

$$s(x, v, t) \approx \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(u, t)}{\partial u}\right)^2\right) du = L + \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial v(u, t)}{\partial u}\right)^2 du. \quad (\text{xxx-54})$$

Nous cherchons à exprimer  $x_M$  en fonction de la fonction  $v$  et de  $L$ . Pour cela, nous allons former un développement limité de  $s(x, v, t)$ .

Nous avons, en conséquence de (xxx-52) :

$$\frac{\partial}{\partial x} s(x, v, t) = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial v(u, t)}{\partial u} \right)^2} \Big|_{u=x} \approx 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v(u, t)}{\partial u} \right)^2 \Big|_{u=x}.$$

D'où, par un développement limité au premier ordre de  $s(x, v, t)$  voisinage de  $x = L$  :

$$s(x, v, t) \approx s(L, v, t) + \frac{\partial}{\partial x} s(x, v, t) \Big|_{x=L} (x - L) \approx s(L, v, t) + \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v(u, t)}{\partial u} \right)^2 \Big|_{u=L} \right) (x - L).$$

En appliquant cette formule en  $x = x_M$ , nous obtenons :

$$s(x_M, v, t) \approx s(L, v, t) + \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v(u, t)}{\partial u} \right)^2 \Big|_{u=L} \right) (x_M - L).$$

Par suite, en remplaçant  $s(x_M, v, t)$  par son expression **(xxx-51)** :

$$L \approx s(L, v, t) + \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v(u, t)}{\partial u} \right)^2 \Big|_{u=L} \right) (x_M - L). \text{ D'où :}$$

$$x_M \approx L + \frac{L - s(L, v, t)}{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v(u, t)}{\partial u} \right)^2 \Big|_{u=L}}. \quad \text{(xxx-55)}$$

En faisant  $x = L$  dans **(xxx-54)**, il vient :

$$s(L, v, t) \approx L + \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial v(u, t)}{\partial u} \right)^2 du, \text{ soit } L - s(L, v, t) \approx -\frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial v(u, t)}{\partial u} \right)^2 du.$$

En reportant cette expression dans **(xxx-55)**, nous obtenons :

$$x_M \approx L - \frac{1}{2} \frac{\int_0^L \left( \frac{\partial v(u, t)}{\partial u} \right)^2 du}{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v(u, t)}{\partial u} \right)^2 \Big|_{u=L}}.$$

Et comme nous avons considéré que  $\left| \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right| \ll 1$ , nous obtenons finalement :

$x_M \approx L - \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx.$	<b>(xxx - 4)</b>
---	------------------

Remarque : dans le cas où la poutre est encastree-guidée en M, nous avons  $\left( \frac{\partial v(u, t)}{\partial u} \right)^2 \Big|_{u=L} \approx 0$ , et

l'approximation est d'autant meilleure.

### ▼ Cas articulé-(articulé-guidé).

Nous considérons que le mouvement est principalement de la forme  $v(x, t) = L q_I(t) \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$ . Nous avons dans ce cas :

$$\int_0^L \left( \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx = \int_0^L \left( L q_1(t) \frac{\pi}{L} \cos\left(\pi \frac{x}{L}\right) \right)^2 dx = \int_0^L q_1^2(t) \pi^2 \cos^2\left(\pi \frac{x}{L}\right) dx = \pi^2 q_1^2(t) \int_0^L \cos^2\left(\pi \frac{x}{L}\right) dx$$

$$= \pi^2 q_1^2(t) \int_0^L \frac{1 + \cos\left(2\pi \frac{x}{L}\right)}{2} dx = \pi^2 q_1^2(t) \left[ \frac{x}{2} + \frac{L}{4\pi} \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right) \right]_0^L = \pi^2 q_1^2(t) \frac{L}{2} = \frac{\pi^2 L}{2} q_1^2(t).$$

Nous avons alors, d'après l'équation (xxx - 4) :

$x_M(t) \approx L \left( 1 - \frac{\pi^2}{4} q_1^2(t) \right).$	<b>(xxx - 25)</b>
---	-------------------

Nous aurons besoin plus bas de l'expression de  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^L \left( \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx$ . Nous avons :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^L \left( \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{2L} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (q_1^2(t)) = \frac{\pi^2}{L} \frac{\partial}{\partial t} (q_1(t) \dot{q}_1(t)) = \frac{\pi^2}{L} (\dot{q}_1^2 + q_1 \ddot{q}_1).$$

### ▼ Cas encastré-(encastré-guidé).

La forme modale du premier mode est [Pecker, chap. 8, p. 169] :

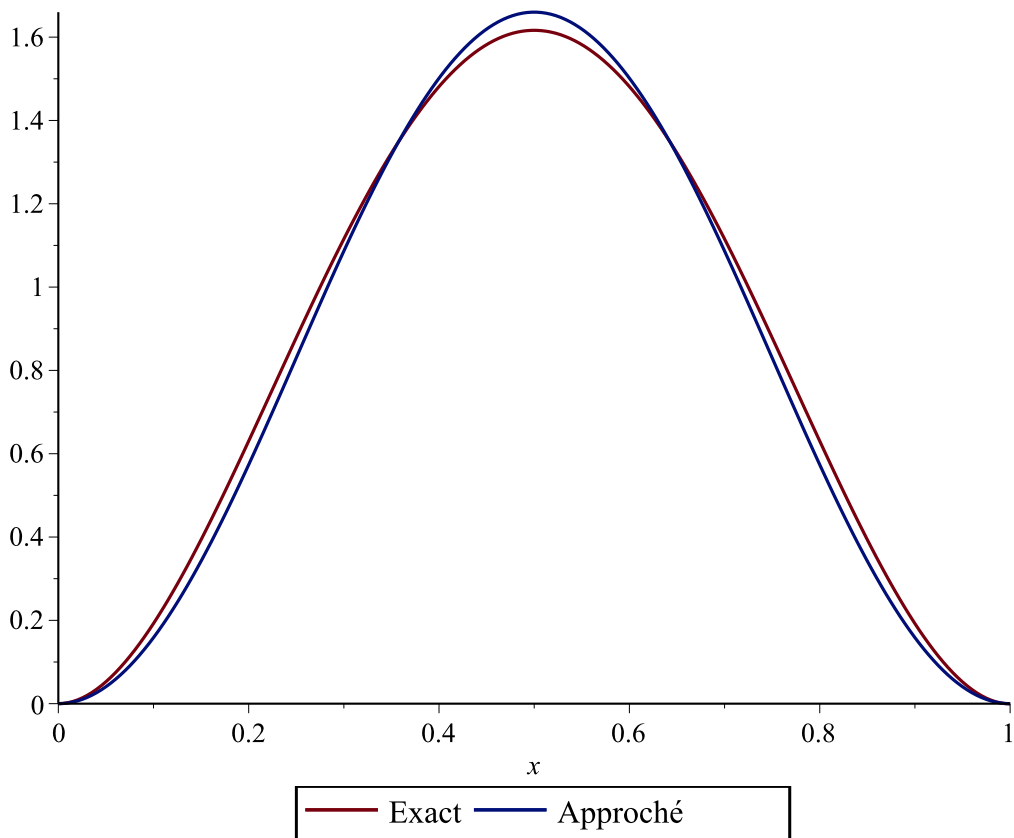
$\varphi(x) = A_1 \sin(ax) + A_2 \cos(ax) + A_3 \sinh(ax) + A_4 \cosh(ax)$ , avec  $A_1$  arbitraire,  $A_2 = -1.0178 A_1$ ,  $A_3 = -A_1$ , et  $A_4 = -A_2$ .

Comparons cette forme modale avec la forme  $b \left( 1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right)$ , où  $b$  est une constante à ajuster.

$A1 := 1 : A2 := -1.0178 A1 : A3 := -A1 : A4 := -A2 :$

$L := 1 : a := \frac{4.73}{L} : b := 0.83 :$

$plot\left(\left[ A1 \sin(ax) + A2 \cos(ax) + A3 \sinh(ax) + A4 \cosh(ax), b \left( 1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right) \right], x=0..L, legend = ["Exact", "Approché"]\right);$



Nous constatons que, si nous prenons  $b = 0.83$ , les formes des deux courbes sont très voisines. Par suite, nous allons considérer que le mouvement est principalement de la forme

$v(x, t) = L q_1(t) \left( 1 - \cos\left(2 \pi \frac{x}{L}\right) \right)$ . Nous avons dans ce cas :

$$\int_0^L \left( \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx = \int_0^L \left( L q_1(t) \frac{-2 \pi}{L} \sin\left(2 \pi \frac{x}{L}\right) \right)^2 dx = \int_0^L q_1^2(t) 4 \pi^2 \sin^2\left(2 \pi \frac{x}{L}\right) dx = 4 \pi^2 q_1^2(t)$$

$$\int_0^L \sin^2\left(2 \pi \frac{x}{L}\right) dx$$

$$= 4 \pi^2 q_1^2(t) \int_0^L \frac{1 - \cos\left(4 \pi \frac{x}{L}\right)}{2} dx = 4 \pi^2 q_1^2(t) \left[ \frac{x - \frac{L}{4 \pi} \cos\left(4 \pi \frac{x}{L}\right)}{2} \right]_0^L = 4 \pi^2 q_1^2(t) \frac{L}{2}$$

$$= 2 \pi^2 L q_1^2(t)$$

Nous avons alors, d'après l'équation (xxx - 4) :

--	--

### Conclusion. Formule générale.

En comparant les formules (xxx - 25) et (xxx - 60), nous voyons qu'elles sont analogues, de sorte que nous pouvons introduire un coefficient  $\eta$  pour donner une formule générale englobant les deux cas :

$x_M(t) \approx L \left( 1 - \frac{\pi^2}{\eta} q_1^2(t) \right),$ <p>avec <math>\eta = 1</math> pour le cas encastré-(encastré-guidé) et <math>\eta = 4</math> pour le cas articulé-(articulé-guidé).</p>	<b>(xxx - 61)</b>
--	-------------------

### Expression de la force $F$ .

#### Cas de la liaison par un ressort linéaire.

Nous avons en M une force  $F$  telle que

$$F(x_M, t) = k (x_A(t) - x_M(t) - l_r) = k (x_A(t) - l_r - L - (x_M(t) - L)), \quad \text{(a)}$$

où  $l_r$  est la longueur du ressort au repos.

Soit  $x_{A0}$  l'abscisse moyenne du point A (qui est soumis à un mouvement harmonique en abscisse).

Appelons  $x_{M0}$  l'abscisse du point M lorsque la poutre est rectiligne. Nous avons  $x_{M0} = L$ . Lorsque la poutre est rectiligne et que le point A est tel que  $x_A = x_{A0}$ , nous avons en M une force  $F_0$  telle que :

$$F_0 = k (x_{A0} - x_{M0} - l_r). \quad \text{(b)}$$

D'où, par soustraction membre à membre entre (a) et (b) :

$$F(x_M, t) - F_0 = k (x_A(t) - x_M(t) - l_r) - k (x_{A0} - x_{M0} - l_r) = k$$

$$(x_A(t) - x_M(t) - l_r - x_{A0} + x_{M0} + l_r) = k (x_A(t) - x_M(t) - x_{A0} + x_{M0}) = k (x_A(t) - x_M(t) - l_0) = k (l(t) - l_0)$$

où  $l_0 = x_{A0} - x_{M0}$  est la longueur du ressort lorsque la poutre est rectiligne et A en sa position moyenne, et où  $l(t) = x_A(t) - x_M(t)$  est la longueur actuelle du ressort.

Nous pouvons écrire :  $F(x_M, t) - F_0 = k (x_A(t) - x_{A0} - (x_M(t) - x_{M0}))$ .

Posons  $z_A(t) = \frac{x_A(t) - x_{A0}}{L}$ . Il vient :

$F(x_M, t) = F_0 + k (L z_A(t) - (x_M(t) - L))$	<b>(xxx - 3)</b>
---	------------------

Pour chercher l'ordre de grandeur de  $k$ , considérons le cas où le ressort est constitué d'une poutre de même matière et de même section que la poutre (SM), et partons de la position rectiligne de la poutre, où  $x_M = L$ .

Faisons  $F_0 = 0$  et appliquons en M un déplacement  $\Delta l = x_M(t) - L$  en faisant  $z_A(t) = 0$ .

Nous avons d'une part  $F = \sigma S = E \frac{\Delta l}{L} S$ , d'où  $\Delta l = \frac{\sigma L}{E}$ , et d'autre part  $F = k \Delta l$ , d'où

$$k \Delta l = F = \sigma S = E \frac{\Delta l}{L} S. \quad \text{Par suite, nous avons : } k = \frac{E S}{L}.$$

En utilisant (xxx-61), nous pouvons obtenir l'expression de  $F(t)$ . Il vient :

$$F(x_M, t) = F_0 + k (L z_A(t) - (x_M(t) - L)) = F_0 + k \left( L z_A(t) + \frac{\pi^2 L}{\eta} q_1^2(t) \right) = F_0 + k L \left( z_A(t) + \frac{\pi^2}{\eta} q_1^2(t) \right)$$

$F(x_M, t) = F_0 + k L \left( z_A(t) + \frac{\pi^2}{\eta} q_1^2(t) \right),$	<b>(xxx -</b>
--	---------------

$$\text{avec } z_A(t) = \frac{x_A(t) - x_{A0}}{L}.$$

3b)

## Equation dynamique de la poutre.

### Equation du mouvement dans le cas du mouvement transverse d'une poutre excitée axialement.

Nous avons ici un résultat classique :

$$\rho S \ddot{v} + E I v^{(4)} + F(q_I, t) v'' + 2 \beta' \dot{v} = f(x, t), \quad (\text{Equ. dim. OK}) \quad (\text{xxx-12})$$

où  $f(x, t)$  est la densité linéique de force extérieure dans la direction transverse, et  $F(q_I, t)$  est la force axiale exercée en M, à l'extrémité droite.

L'équation (xxx-12) n'est à variables séparables que si  $F(q_I, t) \equiv 0$ ,  $f(x, t) \equiv 0$ , et  $\beta' = 0$ ; c'est alors l'équation homogène qui sert à trouver les modes propres. Pour trouver les solutions de l'équation complète (xxx-12), nous ne pouvons nous contenter de poser  $v(x, t) = L q(t) \varphi(x)$ , de façon à adimensionner  $q$  et  $\varphi$ , car nous obtiendrions ainsi :

$$\rho S L \ddot{q}(t) \varphi(x) + E I L \varphi^{(4)}(x) q(t) + F(q_I, t) L \varphi''(x) q(t) + 2 \beta' L \varphi(x) \dot{q}(t) = f(x, t), \text{ soit}$$

$$\rho S \ddot{q}(t) \varphi(x) + E I \varphi^{(4)}(x) q(t) + F(q_I, t) \varphi''(x) q(t) + 2 \beta' \varphi(x) \dot{q}(t) = f(x, t), \quad (\text{xxx équ. aux dimensions OK})$$

qui n'est pas à variables séparables. Nous allons donc chercher une décomposition sur la base modale des modes propres de l'équation homogène.

### Cas articulé-(articulé-guidé).

#### Equations aux coordonnées modales.

Les modes propres que nous allons utiliser,  $\varphi_p(x) = \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right)$ , s'obtiennent par résolution de l'équation dynamique sans force extérieure et sans amortissement :  $\rho S \ddot{v} + E I v^{(4)} = 0$ .

En coordonnées modales, posons  $v(x, t) = L \sum_{p=1}^{+\infty} q_p(t) \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right)$ , de façon à adimensionner  $q$  et  $\varphi$ .

Reportant cette expression dans (xxx-12), il vient :

$$\rho S L \sum_{p=1}^{+\infty} \ddot{q}_p(t) \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) + E I L \sum_{n=1}^{+\infty} q_p(t) \left(\frac{p\pi}{L}\right)^4 \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) - L F(q_I,$$

$$t) \sum_{p=1}^{+\infty} q_p(t) \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) + 2 \beta' L \sum_{n=1}^{+\infty} \dot{q}_p(t) \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) = f(x, t)$$

$$\Leftrightarrow \rho S \sum_{p=1}^{+\infty} \ddot{q}_p(t) \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) + E I \sum_{n=1}^{+\infty} q_p(t) \left(\frac{p\pi}{L}\right)^4 \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) - F(q_I,$$

$$t) \sum_{p=1}^{+\infty} q_p(t) \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) + 2 \beta' \sum_{n=1}^{+\infty} \dot{q}_p(t) \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) = \frac{1}{L} f(x, t)$$

. (xxx-15)

Pour obtenir les équations aux coordonnées modales en fonction du temps, on utilise le fait que, d'après le théorème spectral, les modes propres sont orthogonaux vis-à-vis du produit scalaire xxx (intégrale du produit point par point) et constituent une base des fonctions déformées xxx. Il vient, en prenant le produit

scalaire xxx par  $\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$  des deux membres de l'équation (xxx-15) :

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \left( \rho S \sum_{p=1}^{+\infty} \ddot{q}_p(t) \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) + E I \sum_{p=1}^{+\infty} q_p(t) \left(\frac{p\pi}{L}\right)^4 \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) - F(q_I,$$

$$t) \sum_{p=1}^{+\infty} q_p(t) \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) + 2 \beta' \sum_{n=1}^{+\infty} \dot{q}_p(t) \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) - \frac{1}{L} f(x, t) \right) dx = 0$$



L'orthogonalité des modes se manifeste par le fait que :

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \cos\left((m-p)\frac{\pi}{L}x\right) - \cos\left((m+p)\frac{\pi}{L}x\right) \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(m-p)\frac{\pi}{L}} \cos\left((m-p)\frac{\pi}{L}x\right) - \frac{1}{(m+p)\frac{\pi}{L}} \cos\left((m+p)\frac{\pi}{L}x\right) \right]_0^L$$

$$= \begin{cases} 0 & m \neq p \text{ et } m \neq -p \\ \frac{L}{2} & m = p \end{cases}.$$

Par suite, les équations aux coordonnées modales  $q_p(t)$  sont :

$$\frac{L}{2} \left( \rho S \ddot{q}_p(t) + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^4 EI q_p(t) - \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2 q_p(t) F(q_I, t) + 2\beta' \dot{q}_p(t) \right) + \frac{1}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) f(x, t) dx = 0, \quad p = 1, 2, 3 \dots$$

(xxx équ. aux dimensions OK)

Prenons le cas où  $f(x, t) \equiv \rho S g$  représente le poids linéique de la poutre.

Comme

$$\int_0^L \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) \rho S g dx = \rho S g \int_0^L \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) dx = \rho S g \int_0^\pi \sin(pz) \left(\frac{L}{\pi} dz\right) = \rho S g \frac{L}{\pi} \left[ \frac{\cos(pz)}{-p} \right]_0^\pi =$$

$$-\frac{\rho S g L}{\pi p} \begin{cases} 0 & p \text{ pair} \\ -2 & p \text{ impair} \end{cases}$$

, il vient :

$$\frac{L}{2} \left( \rho S \ddot{q}_p(t) + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^4 EI q_p(t) - \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2 q_p(t) F(q_I, t) + 2\beta' \dot{q}_p(t) \right) + \frac{\rho S g}{\pi p} \begin{cases} 0 & p \text{ pair} \\ 2 & p \text{ impair} \end{cases}$$

$= 0, \quad p = 1, 2, 3 \dots$

, soit :

<p style="text-align: center;">Equation à la coordonnée modale <math>q_p(t)</math> dans le cas articulé- (articulé-guidé) :</p> $\ddot{q}_p(t) + \frac{2\beta'}{\rho S} \dot{q}_p(t) + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^4 \frac{EI}{\rho S} q_p(t) - \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2 \frac{1}{\rho S} F(q_I, t) q_p(t) + \frac{4g}{\pi p L} \cdot \begin{cases} 0 & p \text{ pair} \\ 1 & p \text{ impair} \end{cases}$ <p style="text-align: center;"><math>= 0, \quad p = 1, 2, 3 \dots</math></p> <p style="text-align: center;">(Equ. dim. OK)</p>	<p><b>(xxx - 16)</b></p>
---	--------------------------

### ▼ Cas du ressort linéaire.

Nous allons projeter sur le premier mode seul, en faisant  $p = 1$  et en remplaçant  $F(q_I, t)$  par son

expression  $F(q_I, t) = F_0 + k L \left( z_A(t) + \frac{\pi^2}{4} q_I^2(t) \right)$ . Nous obtenons :

$$\ddot{q}_I(t) + \frac{2\beta'}{\rho S} \dot{q}_I(t) + \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{EI}{\rho S} q_I(t) = \frac{\pi^2}{L^2} \frac{1}{\rho S} q_I(t) \left( F_0 + k L \left( z_A(t) + \frac{\pi^2}{4} q_I^2(t) \right) \right) + \frac{4g}{\pi L}.$$

Transformons :

$$\ddot{q}_I(t) + \frac{2\beta'}{\rho S} \dot{q}_I(t) + \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{EI}{\rho S} q_I(t) = \frac{\pi^2}{L^2} \frac{1}{\rho S} q_I(t) \left( F_0 + k L \left( z_A(t) + \frac{\pi^2}{4} q_I^2(t) \right) \right) + \frac{4g}{\pi L}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{q}_I(t) + \frac{2\beta'}{\rho S} \dot{q}_I(t) + \left( \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{EI}{\rho S} - \frac{\pi^2}{L^2} \frac{1}{\rho S} F_0 \right) q_I(t) - \frac{\pi^2}{L^2} \frac{1}{\rho S} k L \frac{\pi^2}{4} q_I^3(t) = \frac{\pi^2}{L^2} \frac{1}{\rho S} q_I(t) k L z_A(t) + \frac{4g}{\pi L}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{q}_I(t) + \frac{2\beta'}{\rho S} \dot{q}_I(t) + \frac{1}{\rho S} \frac{\pi^2}{L^2} \left( \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI - F_0 \right) q_I(t) - \frac{k L}{4} \frac{\pi^4}{L^2} \frac{1}{\rho S} q_I^3(t) = \frac{\pi^2}{L^2} \frac{L}{\rho S} q_I(t) k z_A(t) + \frac{4g}{\pi L}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{q}_I(t) + \frac{2\beta'}{\rho S} \dot{q}_I(t) + \frac{1}{\rho S} \frac{\pi^2}{L^2} \left( \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI - F_0 \right) q_I(t) - \frac{k}{4\rho S} \frac{\pi^4}{L} q_I^3(t) = \frac{\pi^2}{L^2} \frac{k L}{\rho S} q_I(t) z_A(t) + \frac{4g}{\pi L}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{q}_I(t) + \frac{2\beta'}{\rho S} \dot{q}_I(t) + \frac{1}{\rho S} \frac{\pi^2}{L^2} \left( \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI - F_0 \right) \left( q_I(t) - \frac{\frac{k}{4\rho S} \frac{\pi^4}{L}}{\frac{1}{\rho S} \frac{\pi^2}{L^2} \left( \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI - F_0 \right)} q_I^3(t) \right) = \frac{\pi^2}{L} \frac{k}{\rho S} q_I(t) z_A(t) + \frac{4g}{\pi L}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{q}_I(t) + \frac{2\beta'}{\rho S} \dot{q}_I(t) + \frac{1}{\rho S} \frac{\pi^2}{L^2} \left( \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI - F_0 \right) \left( q_I(t) - \frac{\pi^2}{4} \frac{k L}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI - F_0} q_I^3(t) \right) = \frac{\pi^2}{L} \frac{k}{\rho S} q_I(t) z_A(t) + \frac{4g}{\pi L}$$

. (xxx équ. aux dimensions OK)

Introduisons la grandeur  $F_B$ , charge critique de flambage de la poutre. Nous avons  $F_B = \frac{\pi^2 EI}{L_k^2}$  (formule

d'Euler), où  $L_k$  est la longueur de flambement de la poutre. Ici, nous avons  $L_k = L$ , puisque nous sommes en articulé-articulé, et l'équation s'écrit :

$$\ddot{q}_I(t) + \frac{2\beta'}{\rho S} \dot{q}_I(t) + \frac{1}{\rho S} \frac{\pi^2}{L^2} (F_B - F_0) \left( q_I(t) - \frac{\pi^2}{4} \frac{k L}{F_B - F_0} q_I^3(t) \right) = \frac{\pi^2}{L} \frac{k}{\rho S} q_I(t) z_A(t) + \frac{4g}{\pi L}$$

C'est une équation argumentaire portant sur un oscillateur de Duffing. Nous pouvons nous attendre à mettre en évidence le phénomène argumentaire.

Nous pouvons écrire l'équation sous la forme suivante :

<p>Dans le cas articulé-(articulé-guidé) :</p> $\ddot{q}_I(t) + 2 \frac{\beta'}{\rho S} \dot{q}_I(t) + \omega_0^2 (q_I(t) + \mu q_I^3(t)) = B q_I(t) z_A(t) + C$
--

<p>avec <math>F_B = \frac{\pi^2 EI}{L^2}</math>, <math>\omega_0^2 = \frac{\pi^2}{\rho S L^2} (F_B - F_0)</math>, <math>\mu = -\frac{\pi^2}{4} \frac{k L}{F_B - F_0}</math>,</p> <p><math>B = \frac{\pi^2}{L} \frac{k}{\rho S}</math>, <math>C = \frac{4g}{\pi L}</math>, <math>z_A(t) = \frac{x_A(t) - x_{A0}}{L}</math>,</p> <p>et <math>k = \frac{ES}{L}</math> si le ressort est une poutre de même matière et de même section que la poutre étudiée.</p>	<p>(xxx - 167)</p> <p>(xxx - 168)</p>
--	---------------------------------------

Nous voyons que, si le ressort est une poutre de même matière et de même section que la poutre étudiée, nous avons, puisque dans ce cas  $k = \frac{ES}{L}$ ,  $B = \frac{\pi^2}{L} \frac{k}{\rho S} = \frac{\pi^2}{L} \frac{ES}{\rho S L} = \pi^2 \frac{E}{\rho L^2}$ . Comme nous devons avoir par la suite, pour appliquer la méthode de centrage,  $\sup(|B q_1(t) z_A(t)|) \ll 1$ , nous devons donc avoir  $\sup\left(\left|\pi^2 \frac{E}{\rho L^2} q_1(t) z_A(t)\right|\right) \ll 1$ . Ainsi, si la poutre est en aluminium, nous devons avoir  $\sup\left(\left|\pi^2 \frac{70 \cdot 10^9}{2700 L^2} q_1(t) z_A(t)\right|\right) \ll 1$ , soit  $\sup(|q_1(t) z_A(t)|) \ll 3.9 \cdot 10^{-8}$ . Si nous admettons une valeur de l'ordre de  $10^{-3}$  pour  $q_1$ , soit une flèche de l'ordre de 1 mm pour une poutre d'une longueur de l'ordre de 1 m, nous voyons que, si le point A suit un déplacement harmonique, l'amplitude de  $z_A$  devra être petite devant  $3.9 \cdot 10^{-5}$  m.

Si maintenant nous utilisons un ressort métallique de raideur  $k = 10 \text{ N/mm} = 10^4 \text{ N/m}$ , à la place du ressort de nature "poutre" précédent, dont la raideur était  $\frac{ES}{L} \approx \frac{70 \cdot 10^9 \cdot 10^{-4}}{1} = 7 \cdot 10^6$ , nous aurons une amplitude maximale de  $z_A$  qui sera de  $3.9 \cdot 10^{-5} \frac{7 \cdot 10^6}{10^4} \approx 27 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 27 \text{ mm}$ .

### ▼ Cas encasté-(encasté-guidé).

#### ▼ Forme approchée du premier mode.

Les modes propres sont classiquement (voir Pecker, chapitre 8, page 129) :

$$\varphi_p(x) = A_1 \sin(a_p x) + A_2 \cos(a_p x) + A_3 \sinh(a_p x) + A_4 \cosh(a_p x), \text{ avec } a_p \text{ solution de } \cos(a_p L) \cosh(a_p L) = 1.$$

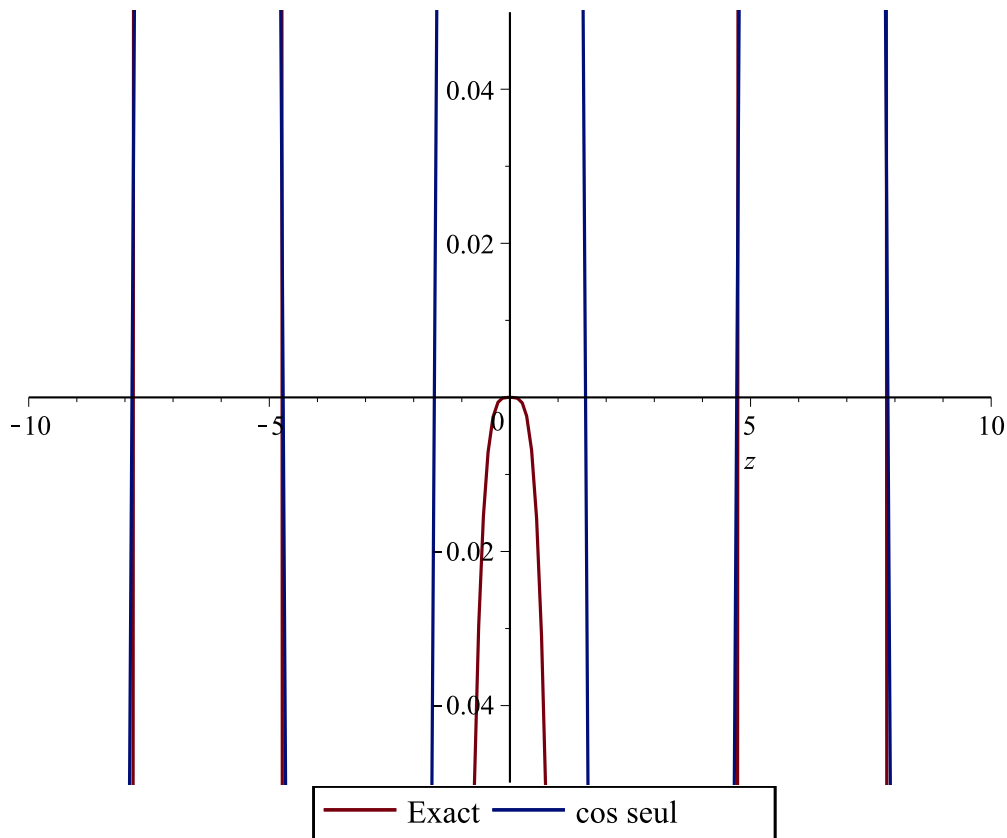
Notons  $\lambda_1$  la première solution non nulle de  $\cos(x) \cosh(x) = 1$  et  $r_1$  la valeur  $\frac{\sin(\lambda_1) - \sinh(\lambda_1)}{\cosh(\lambda_1) - \cos(\lambda_1)}$ .

Nous avons, pour le premier mode :

$$\cos(z) \cosh(z) = 1 \xrightarrow{\text{solve}} 4.730040745$$

$$\lambda_1 := 4.730040745 : r_1 := \frac{\sin(\lambda_1) - \sinh(\lambda_1)}{\cosh(\lambda_1) - \cos(\lambda_1)} : r_1 = -1.017809411$$

$z := 'z': \text{plot}([\cos(z) \cosh(z) - 1, \cos(z)], z = -10 .. 10, \text{legend} = ["Exact", "cos seul"], \text{view} = -0.05 .. 0.05);$



Nous avons  $\lambda_1 \approx 4.730$ .

$a_1 L = \lambda_1 \approx 4.730040745$ ,  $A_1$  arbitraire,  $A_2 = r_1 \cdot A_1 \approx -1.0178 A_1$ ,  $A_3 = -A_1$  et  $A_4 = -A_2$ .

Nous avons donc pour le premier mode :

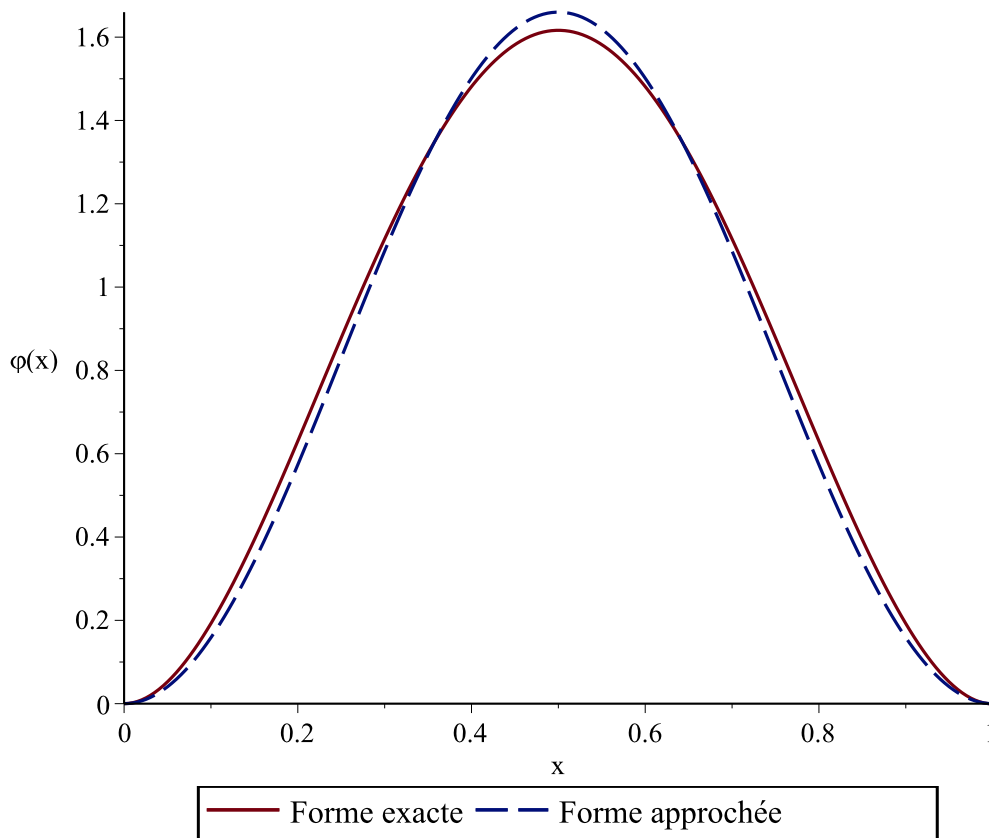
$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= A_1 \sin(a_1 x) + A_2 \cos(a_1 x) + A_3 \sinh(a_1 x) + A_4 \cosh(a_1 x) \\ &= A_1 \sin\left(\frac{\lambda_1}{L} x\right) + r_1 A_1 \cos\left(\frac{\lambda_1}{L} x\right) - A_1 \sinh\left(\frac{\lambda_1}{L} x\right) - r_1 A_1 \cosh\left(\frac{\lambda_1}{L} x\right) \\ &= A_1 \left( \sin\left(\frac{\lambda_1}{L} x\right) + r_1 \cos\left(\frac{\lambda_1}{L} x\right) - \sinh\left(\frac{\lambda_1}{L} x\right) - r_1 \cosh\left(\frac{\lambda_1}{L} x\right) \right). \end{aligned}$$

Nous allons voir que cette forme est très proche de la forme  $b \left( 1 - \cos\left(\frac{2 \pi x}{L}\right) \right)$ , avec  $b$  représentant une constante, à condition de bien choisir la constante  $b$ .

$A_1 := 1 : A_2 := -1.0178 A_1 : A_3 := -A_1 : A_4 := -A_2 :$

$L := 1 : a := \frac{4.73}{L} : b := 0.83 :$

`plot`  $\left( \left[ A_1 \sin(ax) + A_2 \cos(ax) + A_3 \sinh(ax) + A_4 \cosh(ax), b \left( 1 - \cos\left(\frac{2 \pi x}{L}\right) \right) \right], x=0 ..L, \right.$   
`linestyle = ["solid", "dash"], labels = ["x", " $\varphi(x)$ "], legend = ["Forme exacte", "Forme approchée"]`);



La valeur que nous prenons pour  $b$  dans le graphique est 0.83.

Le premier mode propre approché est  $\varphi_1(x) = 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$ .

### ▼ Décomposition modale.

Les modes propres  $\varphi_p(x)$  s'obtiennent avec une force extérieure nulle et sans amortissement, selon l'équation  $\rho S \ddot{v} + EI v^{(4)} = 0$ .

En coordonnées modales, posons  $v(x, t) = L \sum_{p=1}^{+\infty} q_p(t) \varphi_p(x)$ , avec  $q_p$  et  $\varphi_p$  sans dimension. Reportant cette expression dans **(xxx-12)**, il vient :

$$\rho S \ddot{v} + EI v^{(4)} + F(q_p, t) v'' + 2\beta' \dot{v} = f(x, t)$$

$$\Leftrightarrow \rho S \sum_{p=1}^{+\infty} \ddot{q}_p(t) \varphi_p(x) + EI \sum_{n=1}^{+\infty} q_p(t) \left(\frac{p\pi}{L}\right)^4 \varphi_p^{(4)}(x) + F(q_p, t) \sum_{p=1}^{+\infty} q_p(t) \varphi_p^{(2)}(x) + 2\beta' \sum_{n=1}^{+\infty} \dot{q}_p(t) \varphi_p(x) = \frac{1}{L} f(x, t)$$

### • (xxx-15)

Pour obtenir les équations aux coordonnées modales en fonction du temps, on utilise le fait que, d'après le théorème spectral, les modes propres sont orthogonaux vis-à-vis du produit scalaire xxx (intégrale du produit point par point) et constituent une base des fonctions déformées xxx. Il vient, en prenant le produit scalaire xxx des deux membres de l'équation **(xxx-15)** :

$$\int_0^L \varphi_m(x) \left( \rho S \sum_{p=1}^{+\infty} \ddot{q}_p(t) \varphi_p(x) + EI \sum_{n=1}^{+\infty} q_p(t) \left(\frac{p\pi}{L}\right)^4 \varphi_p^{(4)}(x) + F(q_p, t) \sum_{p=1}^{+\infty} q_p(t) \varphi_p^{(2)}(x) + 2\beta' \sum_{n=1}^{+\infty} \dot{q}_p(t) \varphi_p(x) - \frac{1}{L} f(x, t) \right) dx = 0$$

### Projection sur le premier mode approché.

Comme les calculs symboliques exacts de projection sont très lourds dans le cas présent, nous allons projeter sur le premier mode approché  $\varphi_1^*(x) = 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$ , en posant  $m=1$ , et en considérant que

$$\int_0^L \varphi_1^*(x) \varphi_p(x) dx \approx \begin{cases} 0 & p \neq 1 \text{ et } p \neq -1 \\ \int_0^L (\varphi_1^*(x))^2 dx & p = 1 \end{cases}.$$

Nous avons  $\int_0^L (\varphi_1^*(x))^2 dx \approx \int_0^L \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\right)^2 dx = \frac{3}{2}L$  (cf Maple :

$$L := 'L': \int_0^L \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\right)^2 dx = \frac{3}{2}L).$$

Et nous avons en outre :  $\int_0^L \varphi_1^*(x) \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) dx = \int_0^L \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\right) \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) dx = -\frac{L}{2}$  (cf

$$\text{Maple : } L := 'L': \int_0^L \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\right) \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) dx = -\frac{1}{2}L).$$

Nous supposons également que :  $\varphi_I(x) \approx \varphi_1^*(x)$ ,  $\varphi_1^{(2)}(x) \approx \varphi_1^{*(2)}(x)$  et  $\varphi_1^{(4)}(x) \approx \varphi_1^{*(4)}(x)$ .

Enfin, nous avons :  $\varphi_1^{(2)}(x) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$  et  $\varphi_1^{(4)}(x) = -\left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$ .

Il vient :

$$\int_0^L \varphi_1^*(x) \left( \rho S \ddot{q}_I(t) \varphi_I(x) + EI q_I(t) \varphi_1^{(4)}(x) + F(q_I, t) q_p(t) \varphi_1^{(2)}(x) + 2\beta' \dot{q}_p(t) \varphi_I(x) - \frac{1}{L} f(x, t) \right) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^L \varphi_1^*(x) \left( \rho S \ddot{q}_I(t) \varphi_I(x) + EI q_I(t) \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 \left(-\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\right) + F(q_I, t) q_I(t) \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\right) + 2\beta' \dot{q}_I(t) \varphi_I(x) - \frac{1}{L} f(x, t) \right) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \rho S \ddot{q}_I(t) \int_0^L \varphi_1^{*2}(x) dx + EI q_I(t) \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 \int_0^L \varphi_1(x) \left(-\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\right) dx + F(q_I, t) q_I(t) \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$$

$$\int_0^L \varphi_1^2(x) \left(\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\right) dx + 2\beta' \dot{q}_I(t) \int_0^L \varphi_1^{*2}(x) dx - \frac{1}{L} \int_0^L \varphi_1^*(x) f(x, t) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \rho S \ddot{q}_I(t) \cdot \frac{3L}{2} - EI q_I(t) \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 \int_0^L \varphi_1(x) \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) dx + F(q_I, t) q_I(t) \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$$

$$\int_0^L \varphi_1(x) \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) dx + 2\beta' \dot{q}_I(t) \cdot \frac{3L}{2} - \frac{1}{L} \int_0^L \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\right) f(x, t) dx = 0$$

Par suite, l'équation s'écrit :

$$\rho S \ddot{q}_1(t) \cdot \frac{3L}{2} - EI q_1(t) \left( \frac{2\pi}{L} \right)^4 \left( -\frac{L}{2} \right) + F(q_1, t) q_1(t) \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \left( -\frac{L}{2} \right) + 2\beta' \dot{q}_1(t) \cdot \frac{3L}{2} - \frac{1}{L} \int_0^L \left( 1 - \cos\left( \frac{2\pi}{L} x \right) \right) f(x, t) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \rho S \ddot{q}_1(t) \cdot \frac{3L}{2} + EI q_1(t) \left( \frac{2\pi}{L} \right)^4 \frac{L}{2} - F(q_1, t) q_1(t) \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{L}{2} + 2\beta' \dot{q}_1(t) \cdot \frac{3L}{2} - \frac{1}{L} \int_0^L \left( 1 - \cos\left( \frac{2\pi}{L} x \right) \right) f(x, t) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\rho S \ddot{q}_1(t) + EI q_1(t) \left( \frac{2\pi}{L} \right)^4 - F(q_1, t) q_1(t) \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 + 6\beta' \dot{q}_1(t) - \frac{2}{L^2} \int_0^L \left( 1 - \cos\left( \frac{2\pi}{L} x \right) \right) f(x, t) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{q}_1(t) + \frac{2\beta'}{\rho S} \dot{q}_1(t) + \frac{EI}{3\rho S} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^4 q_1(t) - \frac{1}{3\rho S} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 F(q_1, t) q_1(t) - \frac{2}{3L^2 \rho S} \int_0^L \left( 1 - \cos\left( \frac{2\pi}{L} x \right) \right) f(x, t) dx = 0$$

<p style="text-align: center;">Equation approchée à la coordonnée modale <math>q_1(t)</math> dans le cas encastré-(encastré-guidé) :</p> $\ddot{q}_1(t) + \frac{2\beta'}{\rho S} \dot{q}_1(t) + \left( \frac{2\pi}{L} \right)^4 \frac{EI}{3\rho S} q_1(t) - \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{1}{3\rho S} F(q_1, t) q_1(t) - \frac{2}{3L^2 \rho S} \int_0^L \left( 1 - \cos\left( \frac{2\pi}{L} x \right) \right) f(x, t) dx = 0$	<b>(xxx - 80)</b>
--	-------------------

Dans le cas où la force linéique  $f(x, t)$  est le poids linéique de la poutre, nous avons :

$$f(x, t) \equiv \frac{(\rho S L) g}{L} = \rho S g, \text{ d'où :}$$

$$\int_0^L \left( 1 - \cos\left( \frac{2\pi}{L} x \right) \right) f(x, t) dx = \rho S g \int_0^L \left( 1 - \cos\left( \frac{2\pi}{L} x \right) \right) dx = \rho S g \left[ x - \frac{L}{2\pi} \sin\left( \frac{2\pi}{L} x \right) \right]_0^L = \rho S g L$$

Par suite, l'équation s'écrit :

$$\ddot{q}_1(t) + \frac{2\beta'}{\rho S} \dot{q}_1(t) + \left( \frac{2\pi}{L} \right)^4 \frac{EI}{3\rho S} q_1(t) - \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{1}{3\rho S} F(q_1, t) q_1(t) - \frac{2}{3L} g = 0$$

<p style="text-align: center;">Equation approchée à la coordonnée modale <math>q_1(t)</math> dans le cas encastré-(encastré-guidé) et où <math>f</math> est le poids linéique de la poutre :</p> $\ddot{q}_1(t) + \frac{2\beta'}{\rho S} \dot{q}_1(t) + \left( \frac{2\pi}{L} \right)^4 \frac{EI}{3\rho S} q_1(t) - \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{1}{3\rho S} F(q_1, t) q_1(t) - \frac{2}{3L} g = 0$	<b>(xxx - 80b)</b>
--	--------------------

$$-\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \frac{1}{3\rho S} F(q_I, t) q_I(t) - \frac{2}{3L} g = 0$$

### Projection sur le premier mode exact.

Rappelons que le premier mode exact est, en notant  $a_1$  pour désigner la valeur  $\frac{\lambda_1}{L}$  :

$$\varphi_1(x) = \sin\left(\frac{\lambda_1}{L} x\right) + r_1 \cos\left(\frac{\lambda_1}{L} x\right) - \sinh\left(\frac{\lambda_1}{L} x\right) - r_1 \cosh\left(\frac{\lambda_1}{L} x\right),$$

avec  $\lambda_1$  première solution non nulle de  $\cos(x) \cosh(x) = 1$ , soit  $\lambda_1 \approx 4.730040745$ , et

$$r_1 = \frac{\sin(\lambda_1) - \sinh(\lambda_1)}{\cosh(\lambda_1) - \cos(\lambda_1)}.$$

Nous avons  $\varphi_1^{(2)}(x) = a_1^2 (-\sin(a_1 x) - r_1 \cos(a_1 x) - \sinh(a_1 x) - r_1 \cosh(a_1 x))$  et

$$\varphi_1^{(4)}(x) = a_1^4 (\sin(a_1 x) + r_1 \cos(a_1 x) - \sinh(a_1 x) - r_1 \cosh(a_1 x)) = a_1^4 \varphi_1(x).$$

Notons  $\varphi_1^*(x) = -\sin(a_1 x) - r_1 \cos(a_1 x) - \sinh(a_1 x) - r_1 \cosh(a_1 x)$ .

Nous avons, par projection sur le premier mode exact :

$$\begin{aligned} & \int_0^L \varphi_1(x) (\rho S \ddot{q}_1(t) \varphi_1(x) + EI q_1(t) \varphi_1^{(4)}(x) + F(q_I, t) q_I(t) \varphi_1^{(2)}(x) + 2\beta' \dot{q}_1(t) \varphi_1(x)) dx = 0 \\ & \Leftrightarrow \int_0^L \varphi_1(x) (\rho S \ddot{q}_1(t) \varphi_1(x) + EI a_1^4 q_1(t) \varphi_1(x) + F(q_I, t) q_I(t) a_1^2 \varphi_1^*(x) + 2\beta' \dot{q}_1(t) \varphi_1(x)) dx \\ & \quad = 0 \\ & \Leftrightarrow \int_0^L \varphi_1^2(x) (\rho S \ddot{q}_1(t) + EI a_1^4 q_1(t) + 2\beta' \dot{q}_1(t)) dx + \int_0^L F(q_I, t) q_I(t) a_1^2 \varphi_1(x) \varphi_1^*(x) dx = 0 \\ & \Leftrightarrow (\rho S \ddot{q}_1(t) + EI a_1^4 q_1(t) + 2\beta' \dot{q}_1(t)) \int_0^L \varphi_1^2(x) dx + F(q_I, t) q_I(t) a_1^2 \int_0^L \varphi_1(x) \varphi_1^*(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Nous devons calculer  $\int_0^L \varphi_1^2(x) dx$  et  $\int_0^L \varphi_1(x) \varphi_1^*(x) dx$ .

Maple nous donne :  $\int_0^L \varphi_1^2(x) dx = \mu_1 L$  avec  $\mu_1 \approx 1.035944925$ , et  $\int_0^L \varphi_1(x) \varphi_1^*(x) dx = \mu_1^* L$  avec

$$\mu_1^* \approx 11134.94256.$$

Calculs via Maple.

$$\begin{aligned} \lambda := 4.73 : L := 'L': & \int_0^L \left( \sin\left(\frac{\lambda}{L} x\right) - \sinh\left(\frac{\lambda}{L} x\right) + \frac{\sin(\lambda) - \sinh(\lambda)}{\cosh(\lambda) - \cos(\lambda)} \left( \cos\left(\frac{\lambda}{L} x\right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \cosh\left(\frac{\lambda}{L} x\right) \right) \right)^2 dx \\ & = 1.035944925 L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda := 4.73 : & \int_0^L \left( \sin\left(\frac{\lambda}{L} x\right) - \sinh\left(\frac{\lambda}{L} x\right) + \frac{\sin(\lambda) - \sinh(\lambda)}{\cosh(\lambda) - \cos(\lambda)} \left( \cos\left(\frac{\lambda}{L} x\right) - \cosh\left(\frac{\lambda}{L} x\right) \right) \right) \left( \right. \\ & \left. - \sin\left(\frac{\lambda}{L} x\right) - \sinh\left(\frac{\lambda}{L} x\right) - \frac{\sin(\lambda) - \sinh(\lambda)}{\cosh(\lambda) - \cos(\lambda)} \left( \cos\left(\frac{\lambda}{L} x\right) + \cosh\left(\frac{\lambda}{L} x\right) \right) \right) dx \\ & = -0.5696452229 L \end{aligned}$$

Par suite, l'équation s'écrit :



$$(\rho S \ddot{q}_1(t) + EI a_1^4 q_1(t) + 2 \beta' \dot{q}_1(t)) \mu_1 L + F(q_1, t) q_1(t) a_1^2 \mu_1^* L = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{q}_1(t) + \frac{2 \beta'}{\rho S} \dot{q}_1(t) + \frac{EI}{\rho S} a_1^4 q_1(t) + a_1^2 \frac{\mu_1^*}{\mu_1} \frac{1}{\rho S} F(q_1, t) q_1(t) = 0.$$

Remplaçons  $a_1$  par sa valeur  $\frac{\lambda_1}{L}$  :

$$\ddot{q}_1(t) + \frac{2 \beta'}{\rho S} \dot{q}_1(t) + \left(\frac{\lambda_1}{L}\right)^4 \frac{EI}{\rho S} q_1(t) + \left(\frac{\lambda_1}{L}\right)^2 \frac{\mu_1^*}{\mu_1} \frac{1}{\rho S} F(q_1, t) q_1(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{q}_1(t) + \frac{2 \beta'}{\rho S} \dot{q}_1(t) + \left(\frac{\lambda_1}{L}\right)^4 \frac{EI}{\rho S} q_1(t) + \left(\frac{\lambda_1}{L}\right)^2 \frac{\mu_1^*}{\mu_1} \frac{1}{\rho S} F(q_1, t) q_1(t) = 0$$

Remplaçons  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  respectivement par leurs valeurs 4.730040745, 1.035944925  $L$  et -0.5696452229  $L$ . Nous obtenons :

$$\ddot{q}_1(t) + \frac{2 \beta'}{\rho S} \dot{q}_1(t) + \left(\frac{4.730040745}{L}\right)^4 \frac{EI}{\rho S} q_1(t) + \left(\frac{4.730040745}{L}\right)^2 \frac{-0.5696452229 L}{1.035944925 L} \frac{1}{\rho S} F(q_1, t) q_1(t) = 0$$

, soit :

$$\ddot{q}_1(t) + \frac{2 \beta'}{\rho S} \dot{q}_1(t) + \frac{500.5639018}{L^4} \frac{EI}{\rho S} q_1(t) - \frac{22.3732854}{L^2} \cdot 0.5498798 \frac{1}{\rho S} F(q_1, t) q_1(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{q}_1(t) + \frac{2 \beta'}{\rho S} \dot{q}_1(t) + \frac{500.5639018}{L^4} \frac{EI}{\rho S} q_1(t) - \frac{12.3026177}{L^2} \frac{1}{\rho S} F(q_1, t) q_1(t) = 0. \quad (\text{Equ. dim. OK}).$$

dim. OK).

Ceci est à comparer avec l'équation approchée que nous avons trouvée en (xxx - 80), soit :

$$\ddot{q}_1(t) + \frac{2 \beta'}{\rho S} \dot{q}_1(t) + \left(\frac{2 \pi}{L}\right)^4 \frac{EI}{3 \rho S} q_1(t) - \left(\frac{2 \pi}{L}\right)^2 \frac{1}{3 \rho S} F(q_1, t) q_1(t) = 0, \text{ que nous pouvons}$$

écrire, en remplaçant  $\pi$  par sa valeur numérique :

$$\ddot{q}_1(t) + \frac{2 \beta'}{\rho S} \dot{q}_1(t) + \frac{16 \pi^4}{3 L^4} \frac{EI}{\rho S} q_1(t) - \frac{4 \pi^2}{3 L^2} \frac{1}{\rho S} F(q_1, t) q_1(t) = 0, \text{ soit :}$$

$$\ddot{q}_1(t) + \frac{2 \beta'}{\rho S} \dot{q}_1(t) + \frac{519.515152}{L^4} \frac{EI}{\rho S} q_1(t) - \frac{13.159472}{L^2} \frac{1}{\rho S} F(q_1, t) q_1(t) = 0.$$

Nous constatons que les coefficients de l'équation à la solution exacte et ceux de l'équation à la solution approchée sont proches les uns des autres.

### Comparaison des deux approches.

Cette dernière forme de l'équation à la première coordonnée modale est à comparer avec l'équation approchée que nous avons trouvée en (xxx - 80), soit :

$$\ddot{q}_1(t) + \frac{2 \beta'}{\rho S} \dot{q}_1(t) + \left(\frac{2 \pi}{L}\right)^4 \frac{EI}{3 \rho S} q_1(t) - \left(\frac{2 \pi}{L}\right)^2 \frac{1}{3 \rho S} F(q_1, t) q_1(t) = 0, \text{ que nous pouvons}$$

écrire, en remplaçant  $\pi$  par sa valeur numérique :

$$\ddot{q}_1(t) + \frac{2 \beta'}{\rho S} \dot{q}_1(t) + \frac{16 \pi^4}{3 L^4} \frac{EI}{\rho S} q_1(t) - \frac{4 \pi^2}{3 L^2} \frac{1}{\rho S} F(q_1, t) q_1(t) = 0, \text{ soit :}$$

$$\ddot{q}_1(t) + \frac{2 \beta'}{\rho S} \dot{q}_1(t) + \frac{519.515152}{L^4} \frac{EI}{\rho S} q_1(t) - \frac{13.159472}{L^2} \frac{1}{\rho S} F(q_1, t) q_1(t) = 0.$$

Nous constatons que les coefficients de l'équation à la solution exacte et ceux de l'équation à la solution

approchée sont proches les uns des autres.

### Cas du ressort linéaire et de la solution symbolique approchée.

Dans (xxx-80), remplaçons  $F(q_I, t)$  par son expression dans le cas du ressort linéaire : nous avons, avec

ici  $\eta = 4$  :  $F(q_I, t) = F_0 + k L \left( z_A(t) + \frac{\pi^2}{4} q_I^2(t) \right)$ . Il vient :

$$\ddot{q}_I(t) + \frac{2\beta'}{\rho S} \dot{q}_I(t) + \left( \frac{2\pi}{L} \right)^4 \frac{EI}{3\rho S} q_I(t) - \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{1}{3\rho S} \left( F_0 + k L \left( z_A(t) + \frac{\pi^2}{4} q_I^2(t) \right) \right) q_I(t) - \frac{2}{3L} g = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{q}_I(t) + \frac{2\beta'}{\rho S} \dot{q}_I(t) + \left( \left( \frac{2\pi}{L} \right)^4 \frac{EI}{3\rho S} - \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{1}{3\rho S} F_0 \right) q_I(t) - \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{1}{3\rho S} k L \frac{\pi^2}{4} q_I^3(t) - \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{1}{3\rho S} k L z_A(t) q_I(t) - \frac{2}{3L} g = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{q}_I(t) + \frac{2\beta'}{\rho S} \dot{q}_I(t) + \frac{1}{3\rho S} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \left( \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 EI - F_0 \right) q_I(t) - \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{k L}{3\rho S} q_I^3(t) - \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{k L}{3\rho S} z_A(t) q_I(t) - \frac{2}{3L} g = 0$$

Introduisons la grandeur  $F_B$ , charge critique de flambage de la poutre. Nous avons  $F_B = \frac{\pi^2 EI}{L_k^2}$  (formule

d'Euler), où  $L_k$  est la longueur de flambement de la poutre. Ici, nous avons  $L_k = \frac{L}{2}$ , et par suite, nous

avons  $F_B = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$  puisque nous sommes en encasté-encasté, et l'équation s'écrit :

$$\ddot{q}_I(t) + \frac{2\beta'}{\rho S} \dot{q}_I(t) + \frac{1}{3\rho S} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 (F_B - F_0) q_I(t) - \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{k L}{3\rho S} q_I^3(t) - \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{k L}{3\rho S} z_A(t) q_I(t) - \frac{2}{3L} g = 0$$

Transformons :

$$\ddot{q}_I(t) + \frac{2\beta'}{\rho S} \dot{q}_I(t) + \frac{1}{3\rho S} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 (F_B - F_0) \left( q_I(t) - \frac{\pi^2}{4} \frac{\left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{k L}{3\rho S}}{\frac{1}{3\rho S} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 (F_B - F_0)} q_I^3(t) \right) - \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{k L}{3\rho S} z_A(t) q_I(t) - \frac{2}{3L} g = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{q}_I(t) + \frac{2\beta'}{\rho S} \dot{q}_I(t) + \frac{1}{3\rho S} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 (F_B - F_0) \left( q_I(t) - \frac{\pi^2}{4} \frac{k L}{F_B - F_0} q_I^3(t) \right) = \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{k L}{3\rho S} z_A(t) q_I(t) - \frac{2}{3L} g = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{q}_I(t) + \frac{2\beta'}{\rho S} \dot{q}_I(t) + \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{\rho S L^2} (F_B - F_0) \left( q_I(t) - \frac{\pi^2}{4} \frac{k L}{F_B - F_0} q_I^3(t) \right)$$

$$= \frac{4}{3} \frac{\pi^2 k}{\rho S L} z_A(t) q_I(t) - \frac{2}{3 L} g = 0$$

C'est une équation argumentaire portant sur un oscillateur de Duffing. Nous pouvons nous attendre à mettre en évidence le phénomène argumentaire.

Nous pouvons écrire l'équation sous la forme suivante :

<p style="text-align: center;">Dans le cas encastéré-(encastéré-guidé) :</p> $\ddot{q}_I(t) + 2 \frac{\beta'}{\rho S} \dot{q}_I(t) + \omega_0^2 (q_I(t) + \mu q_I^3(t)) = B q_I(t) z_A(t) + C$ <p style="text-align: center;">avec <math>\omega_0^2 = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{\rho S L^2} (F_B - F_0)</math>, <math>F_B = \frac{4 \pi^2 E I}{L^2}</math>,</p> <p style="text-align: center;"><math>\mu = -\frac{\pi^2}{4} \frac{k L}{F_B - F_0}</math>, <math>B = \frac{4}{3} \frac{\pi^2 k}{\rho S L}</math>, et <math>C = \frac{2}{3 L} g</math>.</p>	<p>(xxx - 177)</p> <p>(xxx - 178)</p>
--	---------------------------------------

### Equation argumentaire dans le cas du ressort linéaire.

Partant d'une équation argumentaire portant sur un oscillateur de Duffing, nous pouvons nous attendre à mettre en évidence le phénomène argumentaire.

Que ce soit dans le cas articulé-(articulé-guidé) ou dans le cas encastéré-(encastéré-guidé), nous avons vu que nous pouvons écrire l'équation sous la forme générale suivante :

$$\ddot{q}_I(t) + 2 \frac{\beta'}{\rho S} \dot{q}_I(t) + \omega_0^2 (q_I(t) + \mu q_I^3(t)) = B q_I(t) z_A(t) + C.$$

Puis, en posant  $\tau = \omega_0 t$  et  $x(\tau) = q_I(t)$ , nous obtenons  $\frac{d q_I}{d t} = \frac{d x}{d \tau} \frac{d \tau}{d t} = \omega_0 \frac{d x}{d \tau}$  et  $\frac{d^2 q_I}{d t^2} = \omega_0^2 \frac{d^2 x}{d \tau^2}$ ,

d'où :

$$\omega_0^2 \frac{d^2 x}{d \tau^2} + 2 \frac{\beta'}{\rho S} \omega_0 \frac{d x}{d \tau} + \omega_0^2 (x(\tau) + \mu x^3(\tau)) = C_0 \omega_0^2 x(\tau) z_A\left(\frac{\tau}{\omega_0}\right) + C_1 \omega_0^2, \text{ avec } C_0 \text{ défini par :}$$

$$C_0 \omega_0^2 = B \text{ et } C_1 \text{ par } C_1 \omega_0^2 = C.$$

Définissons  $\beta$  par :  $\beta \omega_0 = \frac{\beta'}{\rho S}$ . Nous obtenons :

$$\omega_0^2 \frac{d^2 x}{d \tau^2} + 2 \beta \omega_0^2 \frac{d x}{d \tau} + \omega_0^2 (x(\tau) + \mu x^3(\tau)) = C_0 \omega_0^2 x(\tau) z_A\left(\frac{\tau}{\omega_0}\right) + C_1 \omega_0^2, \text{ soit finalement :}$$

$$\frac{d^2 x}{d \tau^2} + 2 \beta \frac{d x}{d \tau} + x(\tau) + \mu x^3(\tau) = C_0 x(\tau) z_A\left(\frac{\tau}{\omega_0}\right) + C_1, \text{ (xxx équ. aux dimensions OK)}$$

$$\text{XXXX avec : } \beta = \frac{\beta'}{\rho S \omega_0}, \omega_0^2 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{E I}{\rho S}, \mu = \frac{k L}{4 E I}, \text{ et (xxx équ. aux dimensions OK) XXXX}$$

$$C_0 = \frac{B}{\omega_0^2} = \frac{\pi^2}{L^2} \frac{k}{\rho S}, \text{ (xxx équ. aux dimensions OK ?)}$$

$$\text{et } C_1 = \frac{C}{\omega_0^2} = \frac{4 g}{\pi L \omega_0^2}. \text{ (xxx équ. aux dimensions OK ?)}$$

Enfin, remplaçant  $z_A(t)$  par  $a_A \sin\left(\frac{v}{\omega_0} \tau\right)$ , nous obtenons :

Equation argumentaire du mouvement transversal de la poutre élancée sous excitation axiale :
--

$$\frac{d^2 x(\tau)}{d\tau^2} + 2\beta \frac{dx(\tau)}{d\tau} + x(\tau) + \mu x^3(\tau) = C_0 a_A x(\tau) \sin\left(\frac{\nu}{\omega_0} \tau\right) + C_1$$

avec :

$\omega_0$  = pulsation propre (exprimée vis-à-vis du temps réel  $t$ ) du mode 1 de la poutre (en  $s^{-1}$ ),

$\tau = \omega_0 t$ , temps réduit, sans dimension,

$x(\tau)$  = coordonnée modale selon le premier mode de la poutre, sans dimension,

$\beta'$  = amortissement exprimé dans l'équation d'origine (xxx-12),

$\beta = \frac{\beta'}{\rho S \omega_0}$ , représentant l'amortissement, sans dimension,

Paramètre	Cas articulé- (articulé- guidé)	Cas encastré- (encastré- guidé)	Dimension
$\omega_0^2$	$\frac{\pi^2}{\rho S L^2} (F_B - F_0)$	$\frac{4}{3} \frac{\pi^2}{\rho S L^2} (F_B - F_0)$	(en $s^{-2}$ )
$F_B$	$\frac{\pi^2 E I}{L^2}$	$4 \frac{\pi^2 E I}{L^2}$	(en N)
$C_0$	$\frac{\pi^2 k}{\rho S L}$	$\frac{4}{3} \frac{\pi^2 k}{\rho S L}$	(sans dimension)
$C_1$	$\frac{4 g}{\pi L \omega_0^2}$	$\frac{2 g}{3 L \omega_0^2}$	(sans dimension)

(xxx-10)

$\mu = -\frac{\pi^2}{4} \frac{k L}{F_B - F_0}$ , coefficient de Duffing, xxx ? ---> sans dimension,

$a_A$  = amplitude (adimensionnée par  $L$ ) du mouvement harmonique du point A,

$\nu$  = pulsation (exprimée vis-à-vis du temps réel  $t$ ) du mouvement du point A (en  $s^{-1}$ ).

Remarque : dans le cas du ressort linéaire,  $k$  est de l'ordre de  $\frac{E S}{L}$  si l'on

considère qu'il y a plein contact pour les déplacements de A ; on a alors

$$\mu = -\frac{\pi^2}{4} \frac{\frac{E S}{L} L}{F_B - F_0} = -\frac{\pi^2}{4} \frac{E S}{F_B - F_0} \text{ et } C_0$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi^2 E}{\rho L^2} & (\text{cas articulé} - (\text{articulé} - \text{guidé})) \\ \frac{4}{3} \frac{\pi^2 E}{\rho L^2} & (\text{cas encastré} - (\text{encastré} - \text{guidé})) \end{cases}$$

Exemple dans le cas articulé-(articulé-guidé) :  $E = 70 \cdot 10^9 \text{ Pa}$  (aluminium),  $I = 10^{-8} \text{ m}^4$ ,  $\rho = 2.7 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $S = 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $L = 1 \text{ m}$ ,  $\beta = 3 \cdot 10^{-3}$  avec  $F_0 = 0$  :

$$F_B = \frac{\pi^2 70 10^9 10^{-8}}{1^2} \approx 6910 \text{ N},$$

$$\omega_0^2 = \frac{\pi^2}{\rho S L^2} (F_B - F_0) \approx (3.14)^2 \frac{6910}{2.7 10^3 10^{-4}} \approx 253000 \text{ s}^{-2}, \text{ d'où } \omega_0 \approx 503 \text{ s}^{-1}, \text{ soit une fréquence } f_0 \approx 80 \text{ Hz}.$$

Et pour  $L = 2 \text{ m}$ , nous obtenons  $f_0 \approx \frac{80}{16} = 5 \text{ Hz}$ .

Par ailleurs :  $\mu = -\frac{\pi^2}{4} \frac{ES}{F_B - F_0} \approx -\frac{\pi^2}{4} \frac{70 10^9 10^{-4}}{6910} \approx \frac{70 10^6}{28 10^3} \approx 2500$  pour  $L = 1 \text{ m}$  et  $\mu \approx 10000$  pour  $L = 2 \text{ m}$ .

Et comme  $C_0 = \frac{\pi^2}{L^2} \frac{E}{\rho} \approx \frac{\pi^2}{1} \frac{70 10^9}{2.7 10^3} \approx 2.56 10^8$ , nous voyons que, pour pouvoir appliquer la méthode de centrage, il faudra prendre  $a_A$  tel que  $C_0 a_A x_{\max} \ll 1$ , avec  $x_{\max}$  = valeur maximale attendue de  $|x(\tau)|$ , soit  $a_A x_{\max} \ll 0.39 10^{-8}$ .

Si nous prenons  $x_{\max} \approx 10^{-3} L$ , nous obtenons comme condition sur  $a_A$  :  $a_A L \ll 0.67 10^{-5}$ , soit  $a_A \ll 6 \mu$  pour  $L = 1 \text{ m}$ .

Par ailleurs, nous avons :  $C_I = \frac{4g}{\pi L \omega_0^2} \approx \frac{4 \cdot 9.81}{\pi \cdot 1 \cdot 253000} \approx 4.9 10^{-5}$ . Nous vérifions que nous avons bien

$C_I \ll 1$  pour l'application de la méthode de centrage.

Le coefficient  $\beta$  sera obtenu par identification expérimentale.