



**HAL**  
open science

## Optimisation globale pour la résolution de problèmes parcimonieux en norme $l_0$

Sébastien Bourguignon, Jordan Ninin, Hervé Carfantan, Marcel Mongeau

► **To cite this version:**

Sébastien Bourguignon, Jordan Ninin, Hervé Carfantan, Marcel Mongeau. Optimisation globale pour la résolution de problèmes parcimonieux en norme  $l_0$ . Assemblée Générale du GDR ISIS, Mar 2015, Lyon, France. . hal-01194776

**HAL Id: hal-01194776**

**<https://hal.science/hal-01194776>**

Submitted on 9 Sep 2015

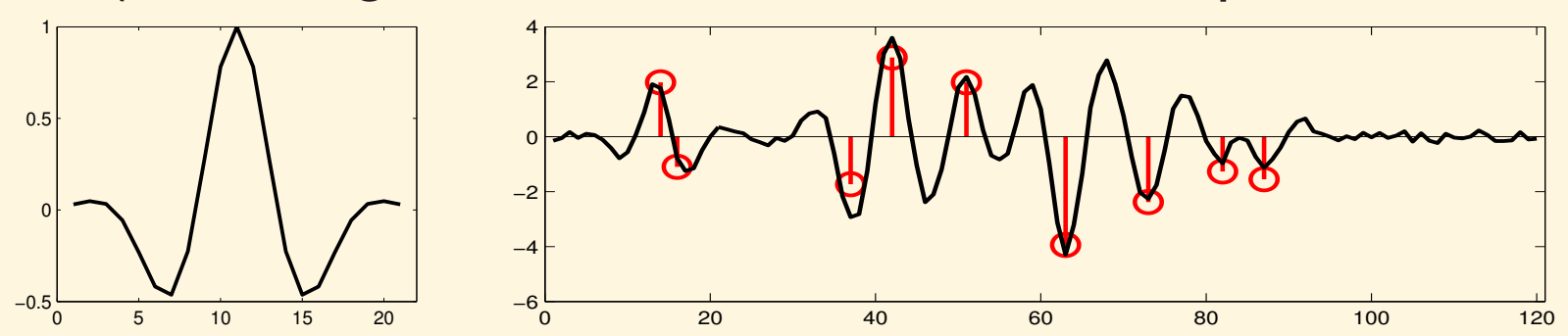
**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## APPROXIMATION PARCIMONIEUSE

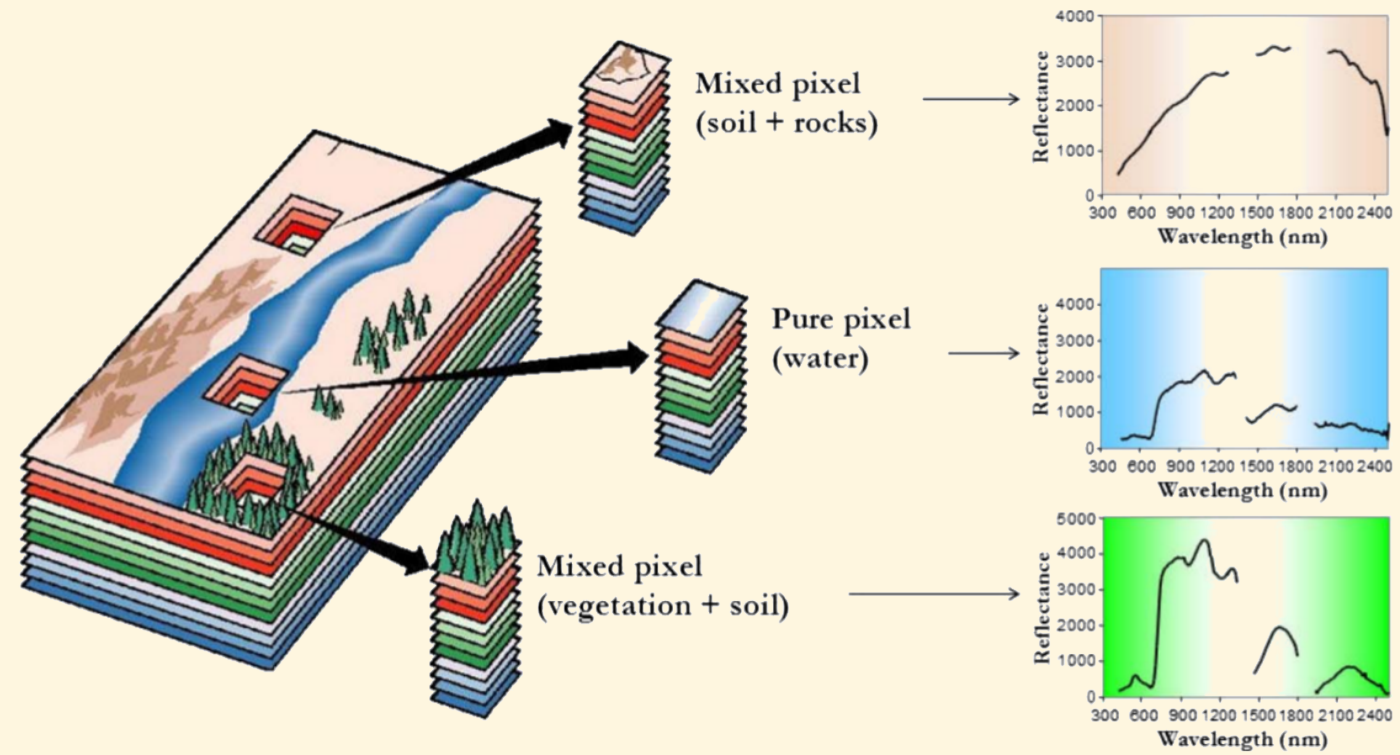
**Problèmes inverses parcimonieux :**  
on cherche  $x$  avec peu de composantes non nulles tel que  $y \simeq Hx$ .

- **Déconvolution de trains d'impulsions** (sismologie, contrôle non destructif par ultrasons)



filtre  $h$  ○  $x$ ,  $-y = h * x + \text{bruit}$   
 $H$  = matrice de convolution  
 $x \rightsquigarrow$  détection de discontinuités / défauts

- **Démélange de spectres** (imagerie hyperspectrale)



$H$  = bibliothèque de spectres purs  
 $x \rightsquigarrow$  composantes présentes + proportions

- **Estimation de modèles, sélection de variables, ...**

## PROGRAMMATION MIXTE EN NOMBRES ENTIERS (MIP)

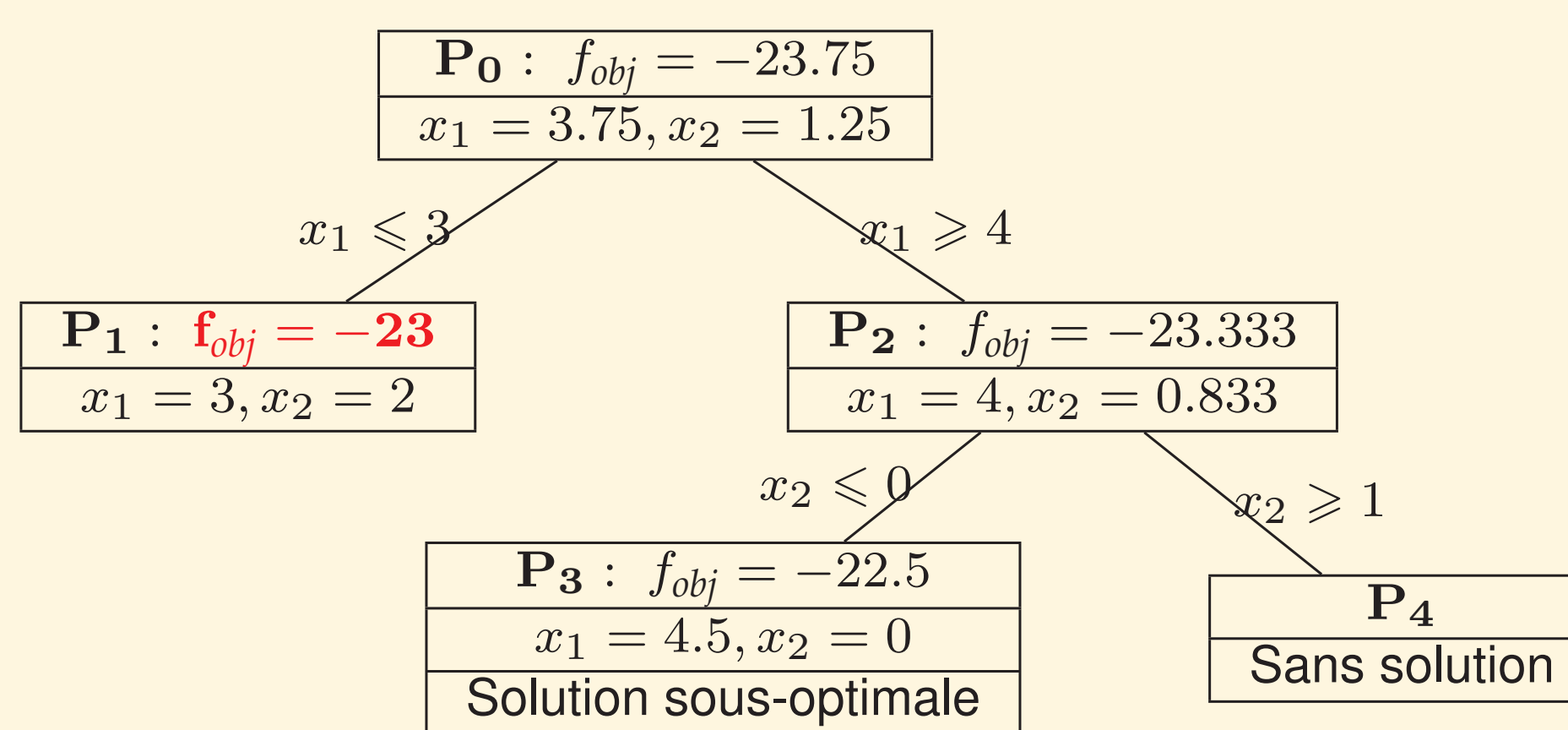
**MIP quadratique à contraintes quadratiques :**

$$\min_{v \in \mathbb{R}^J} v^T F v + c^T v, \text{ t.q. } \begin{cases} v^T B v + d^T v \leq e, & l_b \leq v \leq u_b, \\ A_{in} v \leq b_{in}, & A_{eq} v = b_{eq}, \\ v_j \in \mathbb{Z}, \forall j \in \mathcal{I}. \end{cases}$$

- **Méthodes de résolution exactes: Branch and Cut**

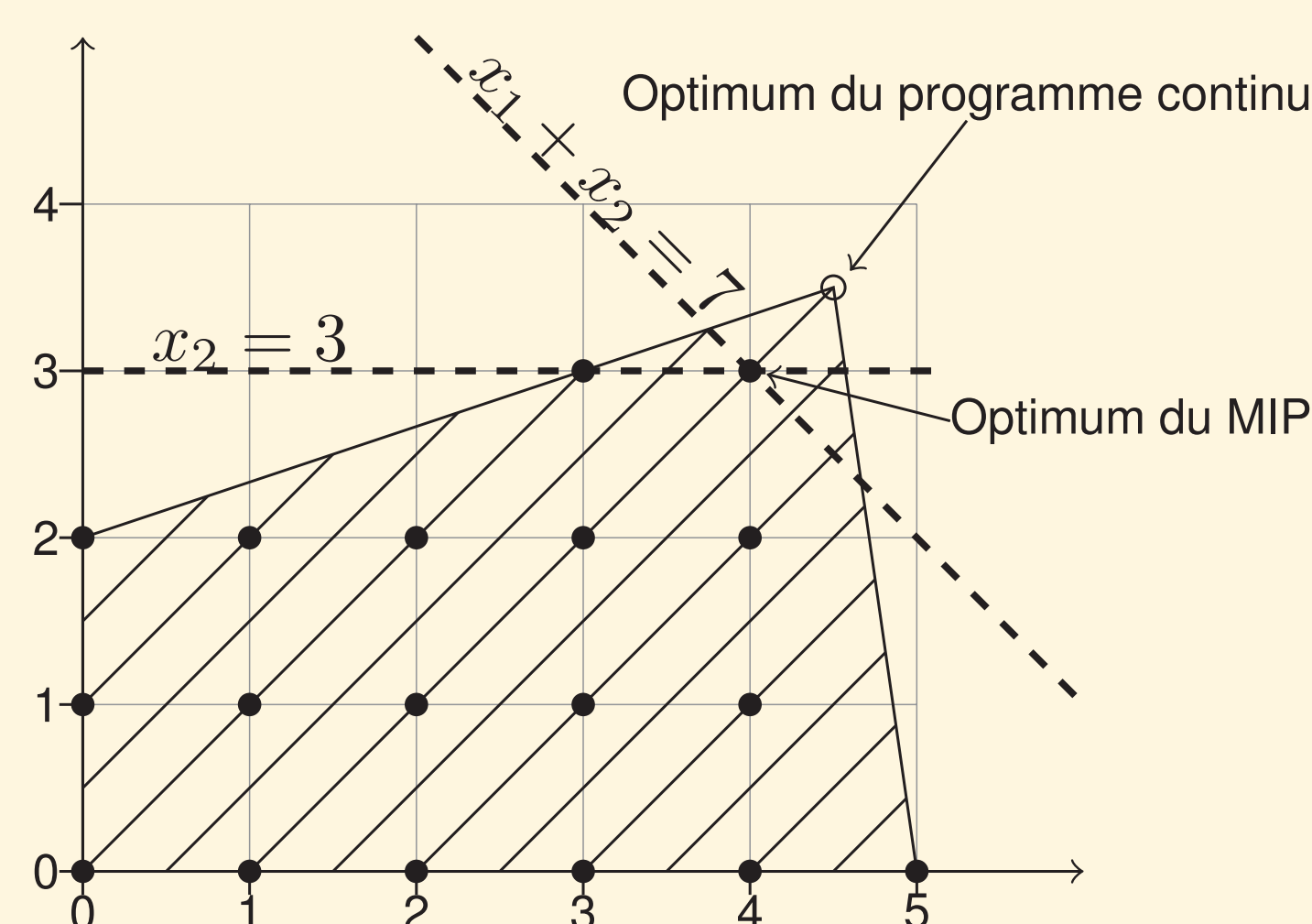
– **Branch and Bound** : énumération implicite des solutions

$$\min_{x_1, x_2} f_{obj} = -5x_1 - 4x_2 \text{ t.q. } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, & x_1 \geq 0, \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45, & x_2 \geq 0 \end{cases}$$



- **Méthodes de coupe (Gomory, ...)** :

$\rightsquigarrow$  relaxations continues successives (variables binaires)  
 $\rightsquigarrow$  raffinement de la solution du programme continu pour converger vers une solution entière



$\Rightarrow$  **convergence avec preuve d'optimalité**

- **Choix de la mesure d'attache aux données**

– quadratique  $\rightsquigarrow$  MIP quadratiques  
– linéaire par morceaux  $\rightsquigarrow$  MIP linéaires  
 $\rightsquigarrow \|y - Hx\|_1$  (bruit laplacien)  
 $\rightsquigarrow \|y - Hx\|_\infty$  (bruit uniforme)

## COÛTS DE CALCUL

- **Problèmes de déconvolution parcimonieuse**

$x \in \mathbb{R}^{100}$ ,  $K = 9$  composantes non nulles

Mise en œuvre sous IBM ILOG CPLEX

- **Réglage heuristique de la borne  $M$  :**

- Initialisation  $M_0 = \|H^T y\|_\infty / \|h\|_2^2$
- Si la borne est atteinte en la solution ( $\hat{x}_q = M_k$ ), la reformulation de la norme  $\ell_0$  n'est pas valide. L'optimisation est alors relancée avec  $M_{k+1} = 1.1M_k$ .

RSB	$P_{0/2}$	$P_{0/1}$	$P_{0/\infty}$	$P_{2/0}$	$P_{1/0}$	$P_{\infty/0}$	$P_{0+2}$	$P_{0+1}$	$P_{0+\infty}$
30 dB	122	3	2.1	2.8	9.1	21	1.2	4.9	5.2
20 dB	243 <sup>(3)</sup>	4.7	2.6	14	28	45 <sup>(1)</sup>	64	17 <sup>(2)</sup>	121
10 dB	513 <sup>(12)</sup>	21	4.5	35 <sup>(1)</sup>	182 <sup>(1)</sup>	206 <sup>(4)</sup>	121 <sup>(5)</sup>	234 <sup>(2)</sup>	141 <sup>(6)</sup>

Temps de calcul (s) pour l'optimisation des neuf problèmes reformulés en MIP (moyennes sur 20 réalisations).

Entre parenthèses : nombre de réalisations n'ayant pas fourni de solution optimale en 1000 s.

Rq : exploration combinatoire complète évaluée à 1.5 an.

- $\rightsquigarrow$  **Optimisation possible ... dans une certaine mesure**
- $\rightsquigarrow$  **Coût  $\nearrow$  avec le bruit et le nombre de composantes**
- $\rightsquigarrow$  **Attache aux données  $\ell_2$  : formulation  $P_{2/0}$**   
 $\ell_1$  ou  $\ell_\infty$  : formulation  $P_{0/p}$

- Plus de résultats dans [5]...

## OPTIMISATION EN NORME $\ell_0$

**Problème d'optimisation bi-objectif :**

$$\min_x \{ \|y - Hx\|_2^2, \|x\|_0 \}, \quad \|x\|_0 := \text{Card} \{q | x_q \neq 0\}$$

$$\rightarrow \min_x \|x\|_0 \text{ t.q. } \|y - Hx\|_2^2 \leq \epsilon \quad (P_{0/2})$$

$$\rightarrow \min_x \|y - Hx\|_2^2 \text{ t.q. } \|x\|_0 \leq K \quad (P_{2/0})$$

$$\rightarrow \min_x \|y - Hx\|_2^2 + \mu \|x\|_0 \quad (P_{p+0})$$

- **Norme  $\ell_0$  à valeurs discrètes  $\rightsquigarrow$  pb combinatoire**
- **Méthodes approchées peu coûteuses :** [1]
  - relaxation convexe :  $\|x\|_0 \rightsquigarrow \|x\|_1$
  - méthodes gloutonnes : exploration combinatoire partielle
- ... **mais ne résolvent pas le problème initial**
  - $H$  très corrélé  $\rightsquigarrow$  conditions théoriques inapplicables
  - résultats empiriques défavorables
- **Travaux en norme  $\ell_0$  [2, 3, 4] : convergence locale**
- **Pourtant : l'optimisation exacte en norme  $\ell_0$  ne requiert pas forcément une recherche exhaustive!**

## RÉFÉRENCES

- [1] JA Tropp and SJ Wright, "Computational methods for sparse solution of linear inverse problems," *Proc. IEEE*, vol. 98, no. 6, pp. 948–958, 2010.
- [2] H Mohimani, M Babaie-Zadeh, and C Jutten, "A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed  $\ell_0$  norm," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 57, no. 1, pp. 289–301, 2009.
- [3] T Blumensath and ME Davies, "Iterative thresholding for sparse approximations," *J. Fourier Anal. Appl.*, vol. 14, no. 5–6, pp. 629–654, 2008.
- [4] Z Lu and Y Zhang, "Sparse approximation via penalty decomposition methods," *SIAM J. Optimization*, vol. 23, no. 4, pp. 2448–2478, 2013.
- [5] S Bourguignon, J Ninin, H Carfantan, and M Mongeau, "Exact resolution of sparse approximation problems via mixed-integer programming," *submitted to IEEE Trans. Signal Process.*, 2015.
- [6] I Tomic and S Drewes, "Learning joint intensity-depth sparse representations," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 23, no. 5, 2014.

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un projet Jeunes Chercheurs 2013 du GdR ISIS (SB-JN). MM a été partiellement financé par l'Agence Nationale de la Recherche, projet JCJC ATOMIC n°12-JS02-009-01.

## REFORMULATIONS DE CRITÈRES PARCIMONIEUX

- **Reformulation de la norme  $\ell_0$**

– Variables binaires  $b_q$  telles que  $x_q = 0 \Leftrightarrow b_q = 0$ .

$$\rightsquigarrow \|x\|_0 = \sum_{q=1}^Q b_q.$$

– **Hypothèse de borne** :  $\forall q, -M < x_q < M$ . Alors :

$$\min_{x \in \mathcal{F}} \|x\|_0 \Leftrightarrow \min_{x \in \mathcal{F}} \sum_{q=1}^Q b_q \text{ t.q. } -Mb \leq x \leq Mb$$

$\rightsquigarrow$  reformulation de  $P_{0/2}$  et  $P_{0+2}$

$$\|x\|_0 \leq K \Leftrightarrow \exists b \in \{0, 1\}^Q \text{ t.q. } \begin{cases} \sum_q b_q \leq K \\ -Mb \leq x \leq Mb \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$  reformulation de  $P_{2/0}$

- **Reformulation des attaches aux données  $\ell_1$  et  $\ell_\infty$**

$$\min_{x \in \mathcal{F}} \|y - Hx\|_1 \Leftrightarrow \min_{x \in \mathcal{F}} \sum_{n=1}^n w_n \text{ t.q. } -w \leq y - Hx \leq w$$

$$\min_{x \in \mathcal{F}} \|y - Hx\|_\infty \Leftrightarrow \min_{x \in \mathcal{F}} t \text{ t.q. } -t1_N \leq y - Hx \leq t1_N$$

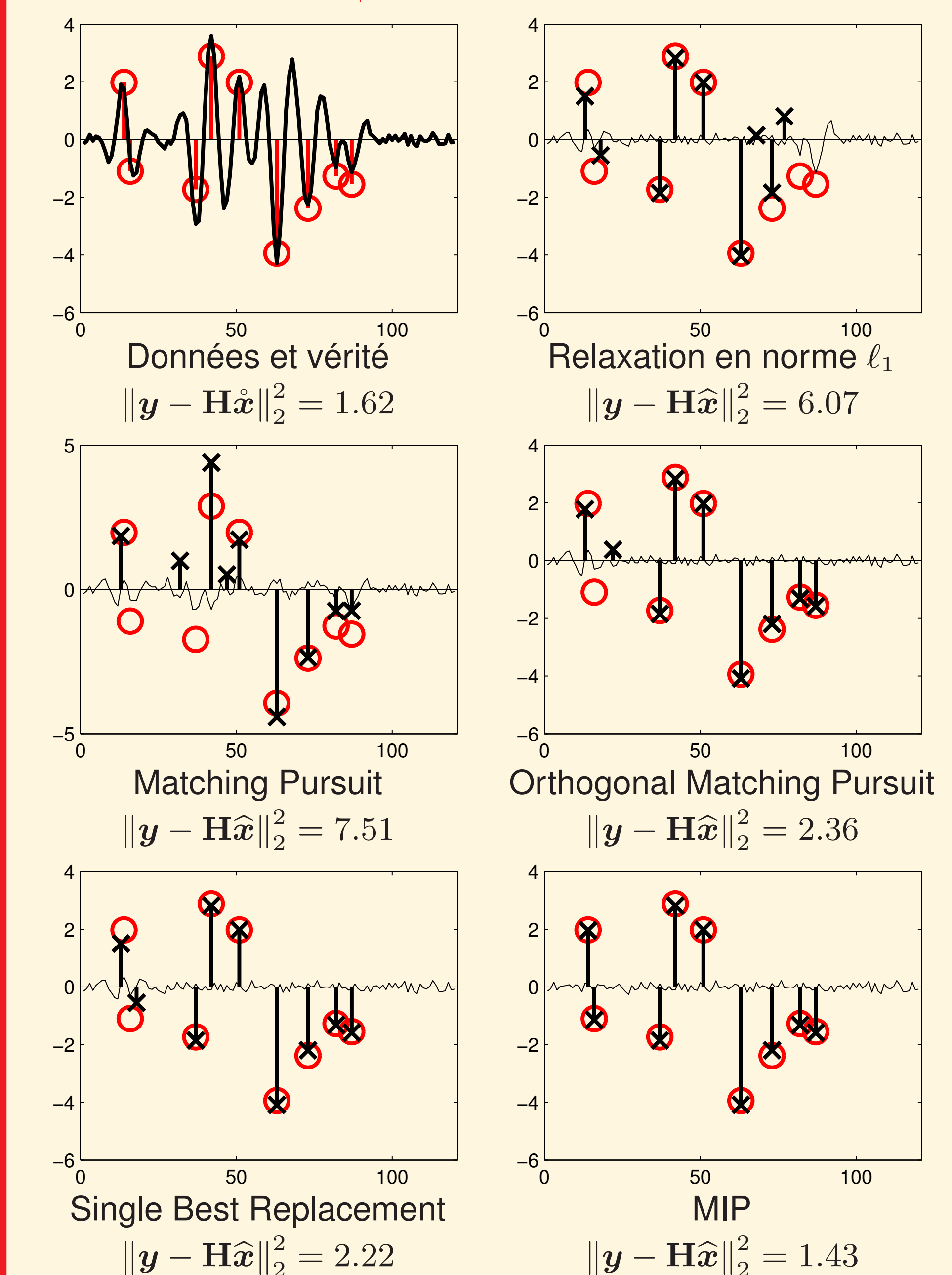
$\rightsquigarrow$  **MIP linéaires à contraintes linéaires**

- **Un exemple :**  $\min_{x \in \mathbb{R}^Q} \|y - Hx\|_1 \text{ t.q. } \|x\|_0 \leq K$

$$\Leftrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^Q} \sum_{n=1}^n w_n \text{ t.q. } \begin{cases} \sum_q b_q \leq K \\ -w \leq y - Hx \leq w \\ -Mb \leq x \leq Mb \\ w \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

## SOLUTIONS OBTENUES

- **Exemple pour  $P_{2/0}$  (RSB = 20 dB) :**



- **Erreurs d'estimation entre  $\hat{x}$  (vérité) et  $\hat{x}$  (estimé) :**

i) convolution des impulsions par un noyau gaussien ( $\sigma = 1$ )

ii)  $d(\hat{x}, \hat{x}) :=$  erreur  $\ell_2$  entre les deux signaux convolués

RSB	Relax. $\ell_1$	MP	OMP	SBR	MIP
30 dB	9.1	3.9	3.3	2.3	0.1
20 dB	8.6	3.9	3.3	2.2	0.3
10 dB	7.5	4.1	3.6	2.8	1.6

Distances  $d(\hat{x}, \hat{x})$  moyennées sur 100 réalisations

## PERSPECTIVES

- **Réduction du coût de calcul**
  - Stratégies « intelligentes » de branchement basées sur la connaissance du problème
  - Autres types de résolutions exactes : *quadratic convex reformulation* (QCR)  
 $\rightsquigarrow$  approximations successives du MIP par des programmes d'optimisation semi-définie positive (SDP)
- Prise en compte de **contraintes supplémentaires** (positivité, somme à 1)
- Problèmes avec **parcimonie structurée** [6]
- **Optimisation multi-objectifs**