



HAL
open science

Giuseppe Veronese e i fondamenti della geometria
[Giuseppe Veronese and the Foundations of Geometry]

Paola Cantu

► **To cite this version:**

Paola Cantu. Giuseppe Veronese e i fondamenti della geometria [Giuseppe Veronese and the Foundations of Geometry]. Unicopli, 1999, 9788840005898. hal-01194312

HAL Id: hal-01194312

<https://hal.science/hal-01194312>

Submitted on 28 Feb 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

BIBLIOTECA DI CULTURA FILOSOFICA

Collana diretta da Renato Pettoello

Volumi pubblicati

- 1 - Arrigo Pacchi, *Introduzione alla lettura del "Saggio sull'intelletto umano" di Locke*
- 2 - Mariateresa Fumagalli Beonio Brocchieri (a cura di), *Le due chiese. Progetti di riforma politico-religiosa nei secoli XII-XV*
- 3 - Achille Olivieri (a cura di), *Erasmus e il Funus. Dialoghi sulla morte e la libertà nel Rinascimento*
- 4 - Vittorio Morfino (a cura di), *La Spinoza-Renaissance nella Germania di fine Settecento*
- 5 - Tommaso Campanella, *LA CITTÀ DEL SOLE. Edizione comparata del manoscritto della prima redazione italiana (1602) e dell'ultima edizione a stampa (1637)*
- 6 - Emilio Garroni, *Estetica ed epistemologia. Riflessioni sulla Critica del Giudizio di Kant*
- 7 - Georg Simmel, *Kant. Sedici lezioni berlinesi, n. ed.*
- 8 - Husserl - Heidegger, *Fenomenologia*, a cura di R. Cristin
- 9 - Francesco Barone, *Logica formale e logica trascendentale, Vol. 1*

Volumi in preparazione

- 10 - Francesco Barone, *Logica formale e logica trascendentale, Vol. 2*
- 11 - Maria Banfi, *Platone. Lezioni 1937-38*

PAOLA CANTÙ

GIUSEPPE VERONESE
E I FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA

INDICE

7	PREFAZIONE di Silvio Bozzi
13	INTRODUZIONE
31	1. UNA TEORIA GENERALE DELLE FORME
31	1.1 I concetti primitivi delle scienze
56	1.2 Uguaglianza e grandezza
70	1.3 Il numero
87	2. IL CONTINUO NON ARCHIMEDEO
87	2.1 La forma fondamentale
95	2.2 Segmenti infiniti e infinitesimi attuali
117	2.3 La continuità della forma fondamentale
131	2.4 L'infinitesimo attuale
148	2.5 La teoria generale delle grandezze
163	3. GEOMETRIA E SPAZIO
163	3.1 La classificazione delle scienze
179	3.2 La forma assiomatica
193	3.3 L'intuizione geometrica dello spazio
219	4. I FONDAMENTI
215	4.1 Matematica e filosofia
221	4.2 La genesi empirica della geometria
224	4.3 Il linguaggio
231	4.4 Il metodo sintetico
237	4.5 Verità
243	4.6 Ontologia
257	BIBLIOGRAFIA
269	INDICE DEI NOMI

Volume pubblicato con il contributo dell'Università degli Studi di Milano -
Dipartimento di Filosofia

Prima edizione: ottobre 1999

© Proprietà letteraria originaria dell'Università degli Studi di Milano

Edizioni Unicopli: via della Signora, 2/A - 20122 Milano - Tel 02/760.21.689
E-mail: unicopli@galactica.it

È vietata la riproduzione, anche parziale, ad uso interno o didattico, con
qualsiasi mezzo effettuata, non autorizzata.

PREFAZIONE

di Silvio Bozzi

Se nessuno oggi pone più in dubbio l'importanza dell'opera matematica di Giuseppe Veronese (in particolare per quanto riguarda la geometria degli iperspazi e la creazione di sistemi non archimedei) lo stesso non si può certo dire per i suoi contributi al dibattito sui fondamenti della geometria che solo da alcuni anni sono stati riscoperti per merito di studiosi come D. Laugwitz, G. Fisher e soprattutto P. Ehrlich. E' questa una delle ragioni per cui particolarmente benvenuto è questo bel libro di Paola Cantù in cui per la prima volta questo aspetto dell'opera di Veronese è al centro di un'analisi accurata e sistematica, ricca di riferimenti testuali non solo a Veronese, ma ai principali protagonisti dei dibattiti su questi temi alla fine del secolo scorso.

Largamente citati e discussi quando uscirono nel 1891, i *Fondamenti della Geometria* di Veronese ebbero una vasta risonanza non solo in Italia ma anche all'estero soprattutto dopo che furono tradotti in tedesco da Schepp nel 1894. Russell utilizza ampiamente nel suo *Essay on the Foundations of Geometry* del 1897 il panorama storico-critico che Veronese aveva posto in appendice al suo libro e Peirce non nasconderà mai l'interesse che per lui rivestiva il tentativo di sviluppare una teoria del continuo in cui fossero ammessi gli infinitesimi. Ma i riferimenti non si limitano certo a questi. Si può dire che per tutti gli anni '90 sino all'affermarsi della prospettiva assiomatica inaugurata dai *Grundlagen* di Hilbert le posizioni di Veronese furono al centro di discussioni significative ed importanti. La risposta che in Italia Peano e la sua scuola (con significative eccezioni, ad es. Rodolfo Bettazzi) dettero ai *Fondamenti* ci mostra, però, quale sarà il destino del lavoro di Veronese e le ragioni del suo successivo oblio. La recensione di Peano è di rara violenza e coinvolge non solo lo stile di Veronese - che

non offre certo esempi di bella prosa – ma pone in discussione la coerenza logica stessa delle idee alla base del lavoro. Peano negava sia l'idea che abbia un senso geometrico (non solo analitico) parlare di iperspazi come faceva Veronese, sia la possibilità logica di un continuo non archimedeo, sia infine il modo stesso in cui Veronese affrontava la problematica sui fondamenti.

E' quest'ultimo elemento soprattutto che ci spiega la sfortuna che l'opera di Veronese incontrerà più tardi con l'affermarsi della visione assiomatica. Per Peano – come sarà poi per la stragrande maggioranza dei matematici dopo i *Grundlagen* di Hilbert – il problema dei fondamenti della geometria è essenzialmente un problema di organizzazione assiomatica, di pulizia concettuale e logica: scegliere i primitivi, individuare un sistema coerente ed irridondante di assiomi che per via puramente logica ci permettano di ottenere i teoremi dovuti e le definizioni necessarie. Anche se Peano è del tutto convinto che la geometria debba avere un aggancio con l'esperienza pre-matematica, quando si passa al lavoro matematico in senso proprio tutti questi collegamenti devono scomparire e sono i soli nessi logici astratti che contano, nessi che devono sussistere quale che sia l'interpretazione dei termini assunti come primitivi. Le interpretazioni cui pensa Peano non sono solo quelle intuitive, concrete ma sono date in termini di quella che per Peano era la logica e che per noi oggi è la teoria degli insiemi: classi di elementi (la cui natura specifica è irrilevante) su cui sono definite relazioni ed operazioni le cui proprietà sono vincolate alla sola condizione di soddisfare gli assiomi.

Non si può immaginare concezione più lontana da quella di Veronese che nei suoi *Fondamenti* parla del *signicismo* di Peano come di una forma particolarmente perversa di pedanteria che pretende di separare ogni frase in componenti che hanno un significato univoco indipendente dal contesto. Per Veronese assioma, principio, legge sono termini che non si riferiscono ad enunciati con una specifica struttura linguistica, ma "fatti" che si possono esprimere in mille modi e che hanno un loro significato logico indipendentemente dalla loro espressione linguistica cui il matematico si riferisce mediante frasi ed espressioni che capiamo in base al contesto. Sono questi "fatti" che contano e sono le loro diverse componenti che l'indagine sui fondamenti deve portare alla luce. Nel suo libro,

Paola Cantù mostra molto bene come Veronese cerca di classificare questi "fatti" individuandone la diversa portata ed il diverso significato: fattuale, intuitivo, concettuale, operativo etc. E' un'analisi complessa che si contrappone allo studio dei puri rapporti logici formali tra enunciati che ben presto per gran parte di matematici e logici sarebbero diventati l'unico oggetto della ricerca fondazionale. In linea di principio, Veronese non ha nulla contro l'analisi logica formale, semplicemente non è questa che a lui interessa e soprattutto tiene a sottolineare che il problema dei rapporti tra geometria e realtà non si riduce a quello di saper come – data una specifica situazione reale – scegliere la geometria astratta da utilizzare. Per Veronese il problema è molto più complesso e richiede l'individuazione delle diverse componenti che compaiono nel discorso geometrico e che vengono appiattite da un'analisi solo formale. E' necessario così vedere quali elementi hanno una fondazione reale, fisica e quali dipendano da obiettivi operativi, quale sia il dato intuitivo (che trascende quanto ci è offerto dal solo dato fisico) e quali le esigenze di una ben articolata organizzazione concettuale. Ogni volta che applichiamo la geometria tutti questi elementi interagiscono tra loro e lo scopo dell'indagine fondazionale è appunto quello di dare a ciascuno il suo, analizzandone l'intergioco. Non c'è forse esemplificazione più bella e concreta di questa concezione di quel discorso sulla laguna di Venezia che Veronese tenne nel 1904 ed in cui geografia antropica e fisica, meccanica e geometria, matematica e filosofia intervengono ciascuna con un suo ruolo preciso nella comune impresa di dare realizzazione concreta ad un obiettivo civile.

Per troppo tempo gli studiosi hanno ritenuto questa attenzione di Veronese (e non solo di Veronese) per gli aspetti non strettamente logici dei fondamenti della geometria come il frutto di un atteggiamento conservatore che si attarda su una fase ormai chiusa della ricerca (quella di Riemann, di Helmholtz) e non vede la vera grande novità, il nuovo che avanza: l'idea che la geometria sia una costruzione astratta, un prodotto della nostra mente che non ha una realtà esterna cui adeguarsi, ma solo leggi da imporre (fatta eccezione naturalmente per le leggi logiche che sono costitutive dell'unico vero demiurgo della situazione, il pensiero umano). Un esempio illuminante ed autorevole di questo modo di vedere le cose (che è poi quello che nei dibattiti epistemologici tiene da lungo tempo

banco) ci è offerto sul piano storiografico dai lavori che in diverse occasioni Hans Freudenthal ha dedicato alla preistoria dei *Grundlagen* di Hilbert in cui appunto l'elemento discriminante è tra coloro che ancora si ostinano a parlare di diversi tipi di evidenza geometrica e concepiscono la geometria come fortemente legata alla fisica e coloro invece che hanno visto la luce, hanno capito che cosa significa fare matematica in senso moderno.

Oggi sappiamo che la situazione non è così semplice e che già lo stesso Hilbert era ben lungi dal pensare che la geometria fosse staccata dallo studio del mondo reale e che anzi è nel contesto di una progettata analisi assiomatica delle diverse teorie fisiche che si sviluppò la fondazione della geometria dei *Grundlagen*. Emerge così sempre più netta la necessità di separare il discorso sul senso del metodo assiomatico (che è applicabile a qualunque teoria) da quello sul contenuto della geometria ponendo in luce la natura sostanzialmente ideologica di tutti i tentativi di dedurre dalla possibilità di una analisi assiomatica della geometria la non esistenza di un suo contenuto specifico o per lo meno la irrilevanza di questo ai fini dello sviluppo matematico.

Sgombrato il terreno da questi equivoci, ritornare su autori come Veronese ha sicuramente un effetto corroborante perché ci permette di portare alla luce problemi, connessioni e progetti che possono avere per noi oggi grande interesse. Questo è particolarmente vero per Veronese in quanto il suo è stato un tentativo di ripensare dalla radice i problemi non solo dei fondamenti della geometria ma dell'analisi e della aritmetica a partire da idee base che non sono quelle insiemistiche che si sono poi affermate. I gruppi, gli elementi, la relazione di eguaglianza, tutte le idee di partenza di Veronese differiscono significativamente da quelle di Cantor, di Frege o di Russell. Anche se ineliminabilmente più confuse, non possono essere ridotte a pure caricature di queste come per troppo tempo si è fatto dando per scontato che queste dovevano essere le idee giuste. A cominciare da quegli ordinali che tante volte Veronese cercò di spiegare non erano quelli di Cantor e di cui si servivano invece tutti i suoi rigorosissimi avversari (Cantor stesso, Peano, Vivanti, etc. etc.) per provare che ovviamente non erano possibili gli infinitesimi. Solo pochi, Bettazzi ad es. o Peirce, si resero conto che lì per lo meno c'era un problema non un errore da

scolaretto e quando nei *Grundlagen* Hilbert finalmente provò che era possibile una geometria non archimedea e che essa possedeva modelli analitici che ne garantivano la coerenza la reazione generale fu quella di annoverare Veronese tra i precursori di Hilbert nella dimostrazione della indipendenza dell'assioma di Archimede dagli altri.

Con questa lettura si compiva un doppio tradimento: da una parte – come Veronese avrebbe ricordato a Poincaré che era stato con la sua recensione ai *Grundlagen* uno dei principali diffusori di questa idea – si nascondeva il fatto che Hilbert non aveva provato che l'assioma di Archimede era indipendente da una qualche formulazione della continuità, ma anzi aveva dato il suo assioma di completezza presupponendo l'assioma di Archimede, dall'altra si riduceva l'obiettivo di Veronese che era stato quello di costruire una *teoria non archimedea del continuo* mostrando definitivamente che continuità e non esistenza degli infinitesimi sono fatti totalmente distinti. Nasceva così una teoria generale delle grandezze che poteva avere sviluppi tanto in senso archimedeo che non archimedeo. La storia di questi sviluppi a partire dai lavori di Du Bois-Reymond, che precorrono quelli di Veronese, e passa per Levi-Civita, Hahn e giunge ai nostri giorni è stata ricostruita in modo mirabile da Paul Ehrlich in una serie di articoli che la Cantù utilizza ampiamente nel suo testo.

Rimaneva il compito più ingrato in vista della innegabile oscurità di Veronese: cercare di ricostruire l'articolarsi delle concezioni filosofiche di fondo analizzandone i rapporti con il pensiero degli autori cui Veronese dichiara di rifarsi e porre così in luce le motivazioni più profonde del suo lavoro. E' questo che Paola Cantù ha cercato di fare nel suo libro prendendo finalmente sul serio gli aspetti filosofici dei *Fondamenti* (e di tutta la produzione scientifica di Veronese) senza d'altra parte cedere alla tentazione di accostamenti fantasiosi come accade in alcuni studi recenti, ma basando sempre il suo discorso sui testi. Come il lettore si accorgerà proseguendo nella lettura, ci sono molte idee ricevute da rivedere per quanto riguarda il dibattito sui fondamenti della matematica (e della logica) sul finire del secolo scorso. Gli storici troppo spesso hanno fatto da corifei alle idee dominanti cercando di dar loro l'apparenza di verità storica col solo risultato di nascondere spesso motivazioni, programmi e problemi di estremo

interesse. Oggi sono gli sviluppi stessi del pensiero matematico e logico che ci rendono meno sicuri della ineluttabilità delle idee che sono risultate vincenti e diviene quindi urgente riprendere la strada a ritroso e tentare un'analisi storica su basi diverse.

Il libro che il lettore ha in mano è un passo significativo in questa direzione.

INTRODUZIONE

Come un secondo Prometeo sopporterò questo, e anche di peggio, pur di riuscire con qualsiasi mezzo a suscitare nell'intimo dell'umanità sia Piana che Solida uno spirito di rivolta contro la presunzione che vorrebbe limitare le nostre Dimensioni a Due, a Tre o a qualsiasi numero che non sia Infinito.

E. A. Abbott

Allievo di Cremona e di Klein, Veronese difese nel 1891 l'esistenza geometrica dell'infinitesimo attuale e l'ipotesi di spazi a più dimensioni, partecipando a un dibattito che avrebbe coinvolto Cantor, Peano, Hilbert, Poincaré. A lungo trascurati dagli storici della matematica, gli scritti di Veronese sono stati riscoperti soltanto in anni recenti grazie ad alcuni studi che hanno rivalutato il contributo della geometria non archimedeica di Veronese alle ricerche sulle strutture algebriche e alla costruzione di grandezze infinitesime attuali. Attraverso l'analisi degli scritti "filosofici" di Veronese, questo saggio ricostruisce il rapporto tra riflessioni epistemologiche e risultati teorici, quali la costruzione sintetica del continuo non archimedeo e la possibilità di geometrie iperspaziali, e propone una rivalutazione complessiva della figura e dell'opera di Veronese evidenziando il suo contributo alla filosofia della matematica ottocentesca.

Veronese è noto ai matematici per le opere dedicate agli studi sugli spazi a più dimensioni con il metodo per proiezioni e sezioni di Cremona e per la costruzione di un primo continuo non archimedeo che comprende segmenti infiniti e infinitesimi attuali. Molto più trascurati negli studi di storia e filosofia della matematica sono i suoi scritti fondazionali, che comprendono Prefazione e Introduzione ai *Fondamenti di geometria a*

più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare (1891), diversi articoli pubblicati tra il 1890 e il 1909 e alcuni passi dei manuali di geometria curati per le scuole. Tra le cause della scarsa fortuna dell'opera di Veronese si cita spesso la complessità del suo testo, il cui stile è indubbiamente difficile e poco curato e il cui sviluppo è contorto e talvolta, nel tentativo di mantenere un livello estremo di generalità, anche confuso. Questa spiegazione è insufficiente per almeno due ragioni. In primo luogo perché esistono passi comprensibili e chiari dei *Fondamenti* che hanno tuttavia dato adito a fraintendimenti: emblematico è il caso di Poincaré, che vede nei numeri infiniti di Veronese una mera applicazione geometrica dei transfiniti di Cantor. In secondo luogo perché non tutti i grandi matematici hanno dato una valutazione negativa delle riflessioni fondazionali di Veronese: se per Peano "gli errori, la mancanza di precisione e rigore in tutto il libro [i *Fondamenti*] tolgono ad esso ogni valore", per Hilbert al contrario esso ha un "valore profondo". Neppure si può spiegare la mancanza di attenzione per gli scritti sui fondamenti della geometria con una generale ignoranza della figura di Veronese perché la sua geometria iperspaziale fu lodata anche all'estero: fin dalla pubblicazione della celebre memoria "Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Prinzip des Projicirens und Schneidens". Bullo, autore di una biografia di Veronese scritta in occasione della sua nomina per meriti scientifici a senatore del Regno nel 1904, scrisse che fin dalle sue prime pubblicazioni sull'Hexagrammum di Pascal egli era "entrato in carteggio coi primi geometri d'Europa e d'America" e dei suoi lavori furono fatte "relazioni ed elogi in diversi periodici e specialmente nei *Fortschritte der Mathematik* di Berlino e nel *Bulletin de Sciences Mathématiques* di Parigi." I lavori di geometria iperspaziale di Veronese avevano dunque suscitato l'apprezzamento dell'ambiente matematico europeo, e tedesco in particolare. Con l'eccezione di Segre, Hilbert e più tardi di Natorp, Russell e pochi altri, l'introduzione ai *Fondamenti* suscitò prevalentemente critiche. Veronese fu attaccato da Cantor, Peano, Vivanti per la fede nell'esistenza di segmenti infinitamente piccoli, la cui possibilità era considerata incompatibile con il principio di continuità della retta. La scarsa fortuna di Veronese non dipese però neppure soltanto da queste obiezioni alla possibilità dell'esistenza degli infinitesimi attuali, che pure screditarono

inizialmente il suo lavoro. La vera ragione dell'oblio nel quale sono caduti i *Fondamenti* è rintracciabile nella costruzione hilbertiana di una geometria non archimedea. Poiché anch'essa soddisfaceva agli assiomi della geometria euclidea ma non all'assioma di Archimede, si ritenne risolta e presentata in maniera più chiara la questione sollevata da Veronese. A ciò si aggiunse il contributo di Poincaré, il quale, in una relazione sull'opera di Hilbert scritta in occasione del conferimento del Premio Lobatschevskij, riconobbe la portata eccezionale dell'invenzione della geometria non archimedea, destinata a sconvolgere la nostra idea di continuo, ma, pur riconoscendo in Veronese un precursore, attribuì a Hilbert la priorità dell'invenzione, perché più elegante e semplice giudicava la sua esposizione, più profonde le sue vedute filosofiche, maggiore il profitto che egli traeva da quest'idea fondamentale. Ai giudizi di Poincaré, riportati anche da George Halsted, matematico americano noto per i suoi lavori sui principi della geometria, Veronese rispose con una memoria presentata all'Accademia dei Lincei nella quale rivendicava la priorità della geometria non archimedea e correggeva alcuni errori di Poincaré nell'interpretazione della sua teoria. Ma le *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert, ove l'indipendenza del postulato di Archimede dagli altri assiomi della geometria elementare era dimostrata attraverso l'esibizione di un modello numerico, conobbero un'enorme fortuna e l'interesse si spostò sulla costruzione compiuta da Tullio Levi-Civita per via puramente aritmetica di una teoria dei numeri infiniti e infinitesimi ottenuti a partire dai numeri reali ordinari. Dai numeri di vario ordine di Veronese ebbero inizio lo studio delle serie formali e importanti lavori di Hans Hahn sulle proprietà di completezza di strutture algebriche ordinate non archimedee. In questa direzione di ricerca fu ripresa e sviluppata l'intuizione di Veronese sul rapporto tra postulato di continuità e principio di Archimede e rivalutata la differenza tra la sua impostazione e quella di Hilbert, che considerò il principio di Archimede come un presupposto dell'assioma di completezza.

Dall'analisi degli scritti "filosofici" di Veronese emergono molti risultati matematici originali: la trattazione puramente sintetica della geometria, la costruzione di una nuova classe di numeri infiniti per i quali continuano a valere le usuali proprietà ed operazioni valide per i numeri reali, la determinazione precisa dei rapporti tra il postulato di Archimede e quello di continui-

tà nella forma datane da Dedekind, la costruzione di spazi a n dimensioni accessibili alla nostra intuizione geometrica (combinata coll'astrazione) e studiati con il metodo per proiezioni e sezioni, la scoperta di una geometria non archimedea che contiene come parte quella proposta da Hilbert (nel 1902 Bindoni mise i numeri di Veronese sotto la forma funzionale di Hilbert e dimostrò che la geometria scoperta da questi era una parte di quella costruita nei *Fondamenti*). Non meno interessanti per lo storico e per il filosofo della matematica sono i contributi metodologici e l'analisi concettuale dei principi e delle nozioni primitive della geometria e della matematica svolta da Veronese nei *Fondamenti*. Da un lato l'analisi dei concetti di intuizione, di spazio pluridimensionale, di continuo, di infinito e di infinitesimo attuale, di grandezza e di numero conduce ad una soluzione originale all'interno del dibattito sui fondamenti della matematica tra la fine dell'Ottocento e i primi anni del Novecento: una sorta di razionalismo critico che conceda alla matematica la massima libertà di sviluppo. Dall'altro l'opera di Veronese fornisce un contributo essenziale alla ricostruzione storica di quel periodo grazie alla costante attenzione per il confronto con le concezioni di altri matematici, contemporanei e predecessori, testimoniata nell'Appendice ai *Fondamenti*, nella quale l'autore per primo affronta uno "studio storico e critico dei principi della geometria". Proprio l'interesse storico di Veronese ma ancor più il suo atteggiamento critico e dialettico nei confronti delle opere di altri matematici permette di sviluppare un confronto con le idee di Grassmann, Riemann, Klein, Helmholtz, Pasch, Cantor, Dedekind, Du Bois-Reymond, Stolz, Enriques, Peano, Poincaré. Sviluppando questi confronti il presente volume non intende fornire una presentazione completa delle idee matematiche e filosofiche degli autori citati ma soltanto individuare, sulla scorta delle indicazioni di Veronese, i punti di contatto e di divergenza relativi agli aspetti epistemologici e metodologici generali o a particolari concetti matematici quali quelli di continuo, infinito, infinitesimo.

Il volume è suddiviso in due parti autonome. La prima parte, più tecnica (capitoli I e II), è dedicata all'esposizione e al commento dell'Introduzione ai *Fondamenti*: essa indaga "i principi e le operazioni logiche comuni" sulle quali si fondano la matematica e la geometria e presenta in dettaglio la costruzione del continuo non archimedeo. La seconda parte, più filosofica

(capitoli III e IV), affronta il rapporto tra geometria e spazio e propone un'interpretazione della concezione epistemologica di Veronese. I testi ai quali si fa principale riferimento sono la Prefazione ai *Fondamenti* (1891), "Il continuo rettilineo e l'assioma V di Archimede" (1889), "Osservazioni sui principi della geometria" (1893-4), Prefazione e Appendice a *Elementi di Geometria* (1895-7), "Les postulats de la Géométrie dans l'enseignement" (1902), "La geometria non-Archimedea. Una questione di priorità" (1905), *Il vero nella matematica* (1906), "La geometria non-Archimedea" (1909).

Il primo capitolo (*Una teoria generale delle forme*) spiega la derivazione delle nozioni primitive della matematica (prima, poi, unità, pluralità, gruppo, serie) dalle leggi e dalle operazioni del pensiero: il concetto di gruppo, sul quale si fondano sia la nozione di numero sia quella di grandezza geometrica, è analizzato attraverso il confronto con le definizioni di Bolzano, Cantor, Dedekind. Tra i primi teoremi derivati dai principi logici vi è la legge della continuità del pensiero, essenziale sia per la costruzione di segmenti infiniti e infinitesimi attuali sia per la determinazione dell'esistenza di spazi a più di tre dimensioni: essa afferma la possibilità di pensare, dato un gruppo di enti, un altro ente non contenuto in esso. Grandezze matematiche o forme (è evidente l'influenza di Grassmann) sono tutti gli oggetti che possono essere confrontati secondo i contrassegni: tutto, parte, ordine e modo di posizione. Il concetto di grandezza è introdotto senza riferimento a coordinate numeriche per permettere una trattazione sintetica della geometria che non sia fondata sulle proprietà dei numeri reali. La relazione di uguaglianza tra oggetti è definita in base all'uguaglianza dei rispettivi concetti: essa è relativa se è riferita ad uno o ad alcuni contrassegni delle grandezze (equivalenza), assoluta se è riferita a tutti i contrassegni delle grandezze (identità). Il numero (la definizione riecheggia un passo cantoriano) è un gruppo ordinato di unità ottenuto per astrazione da un gruppo ordinato di oggetti. La possibilità di distinguere le unità che compongono il numero è determinata dalla differenza di posizione all'interno della successione temporale delle cose pensate: l'uguaglianza tra numeri è introdotta mediante la corrispondenza biunivoca e nello stesso ordine tra i rispettivi gruppi di oggetti.

Il secondo capitolo (il *continuo non archimedeo*) affronta la costruzione della forma fondamentale, ossia di un sistema di grandezze non archimedee e continue. Essa è costituita da un sistema di elementi ad una dimensione e identico nella posizione delle sue parti. I segmenti sono parti del sistema contenenti almeno due elementi distinti. Le operazioni di addizione e sottrazione tra segmenti sono definite in conformità con le leggi che governano l'associazione e la separazione delle cose nel pensiero. La forma fondamentale è caratterizzata mediante due ipotesi di esistenza e di costruzione di segmenti infiniti attuali: dato un segmento come unità, esiste almeno un segmento infinito rispetto ad esso e in particolare ne esistono infiniti; non esiste un primo segmento infinito rispetto all'unità (qui risiede la fondamentale differenza rispetto ai transfiniti di Cantor) ed è possibile costruire una gerarchia di segmenti infiniti. A tali segmenti Veronese associa numeri infiniti di vario ordine, costruendo una nuova classe di numeri che godono di proprietà analoghe a quelle della classe dei numeri finiti. Tra le ipotesi della forma fondamentale non compare il principio di Archimede che vieta l'esistenza di grandezze infinitesime attuali. Tuttavia è possibile dimostrare un principio più generale, il quale afferma che dati due segmenti esiste sempre un multiplo dell'uno che supera l'altro: tale multiplo è inteso secondo il numero η della nuova classe numerica anziché secondo un numero naturale n . Poiché il postulato di continuità di Dedekind implica il principio di Archimede, Veronese si trova di fronte ad un'alternativa: o ammette che il nuovo sistema è discontinuo perché in esso non vale il principio di Archimede oppure deve fornire un nuovo principio di continuità che non ne presupponga la validità. Scegliendo questa seconda strada, Veronese introduce per ipotesi la continuità relativa e assoluta della forma fondamentale. La prima, detta anche continuità rispetto ad un'unità di misura, è analoga alla continuità ordinaria nel senso di Dedekind e sussiste all'interno di ciascuna scala della forma fondamentale (una scala è una serie di segmenti uguali all'unità e consecutivi a ciascuno dei quali corrisponde un numero naturale). La continuità assoluta invece è riferita all'intera forma fondamentale, la quale non è continua nel senso di Dedekind, perché data una sezione non sempre esiste un massimo della prima classe o un minimo della seconda.

Un'ampia parte del secondo capitolo è dedicata al concetto matematico astratto di infinitesimo attuale e alle ragioni per le quali Veronese ha osato introdurre questa nozione, ritenuta paradossale sia dai filosofi sia da molti matematici. Brevi cenni storici sull'utilizzo degli infinitesimi in matematica permettono di comprendere alcune ragioni a favore e contro l'esistenza dell'infinitesimo attuale. La risposta di Veronese alle obiezioni di Cantor, Vivanti, Peano è però esclusivamente matematica: essa riposa sulla comprensione della dipendenza logica tra postulato di Dedekind e principio di Archimede. Poiché i numeri reali sono archimedei, ogni tentativo di fondare la continuità geometrica sulla continuità analitica è incompatibile con l'esistenza di grandezze infinitesime attuali. Se al contrario si attribuisce al continuo geometrico il compito di descrivere il continuo intuitivo sensibile e si adotta un metodo sintetico anziché presupporre le proprietà del continuo analitico, una forma di collegamento continuo tra le parti può sussistere anche tra grandezze non archimedee. Veronese fu il primo a costruire un continuo geometrico non archimedeo ma non fu l'unico, negli ultimi decenni dell'Ottocento, ad affermare la possibilità di grandezze infinitesime attuali: nell'ultimo paragrafo del capitolo sono citati i lavori di Du Bois-Reymond, Bettazzi, Levi-Civita, Hahn, Hilbert, Poincaré. Pur senza fare riferimento a numeri infiniti attuali, Du Bois-Reymond introdusse nel 1871 un criterio per confrontare l'infinità di certe funzioni e determinare tra di esse una relazione d'ordine analoga a quella dei numeri reali. Convinto assertore della realtà di grandezze infinitamente grandi e piccole, egli formulò un argomento a favore dell'infinitesimo assoluto e dimostrò il teorema per il quale, data una successione infinita numerabile di funzioni crescenti, esiste una funzione che è maggiore di tutte le funzioni date ma non appartiene a tale successione. Rodolfo Bettazzi formulò nel 1891 (indipendentemente da Veronese) una teoria generale delle grandezze che affrontava lo studio di classi a n dimensioni, nelle quali non vale il principio di Archimede benché sia possibile determinare delle sottoclassi continue nel senso ordinario. Tullio Levi-Civita, allievo di Veronese, propose la prima dimostrazione della non contraddittorietà della geometria non archimedeo: egli costruì un campo non archimedeo di numeri reali e dimostrò la validità delle consuete operazioni dell'aritmetica nel caso dei numeri

infiniti e infinitesimi attuali. Ai lavori di Veronese e di Levi-Civita si ispirò Hans Hahn, che nel 1907 affrontò uno studio algebrico delle strutture ordinate non archimedee. Hahn formulò un assioma di completezza valido anche per i sistemi semplicemente ordinati e non archimedei, dimostrando che questi ultimi hanno proprietà analoghe ai sistemi archimedei. Hilbert costruì nel 1899 un modello di geometria non archimedea dimostrando l'indipendenza del postulato di Archimede dagli assiomi di collegamento, di ordinamento, di congruenza e dall'assioma delle parallele: egli riconobbe che il primo tentativo di costruzione di una geometria non archimedea fu compiuto da Veronese. Poincaré analizzò il procedimento di creazione del continuo matematico suggerito dall'esperienza del continuo fisico e accennò alla possibilità di un continuo del terzo ordine determinabile mediante l'introduzione di infinitesimi di diverso ordine nel continuo dei numeri reali: tale continuo non archimedeo gli apparve però matematicamente irrilevante.

Il terzo capitolo (*Geometria e spazio*) analizza e commenta le osservazioni di Veronese sulla natura della geometria in rapporto all'intuizione spaziale. Innanzi tutto si affronta la classificazione delle scienze che Veronese mutua dall'*Ausdehnungslehre* di Grassmann: l'analisi delle premesse e degli oggetti geometrici rivela che la geometria non è né una scienza formale né una scienza sperimentale bensì una scienza mista. Determinante per tale caratterizzazione della geometria sono sia l'analisi degli enti geometrici (in parte nozioni ideali prodotte per astrazione dagli oggetti concreti, in parte puri prodotti del pensiero) sia una complessa classificazione delle premesse: logiche, materiali, empiriche, semiempiriche, astratte, pratiche. La distinzione dei vari tipi di premesse geometriche serve a comprendere la natura e l'oggetto della geometria ma spiega anche il ruolo di intuizione e astrazione nonché la distinzione tra geometria teorica e applicata. Poiché le scienze formali studiano enti astratti che non hanno la stessa evidenza empirica degli oggetti delle scienze sperimentali, è necessario introdurre delle condizioni di possibilità per le ipotesi che descrivono le proprietà di tali enti. Non contraddittorietà e indipendenza sono le condizioni richieste per la possibilità matematica delle ipotesi. Un'ulteriore condizione è necessaria nel caso delle ipotesi geometriche: la conformità all'intuizione spaziale. Questa se-

conda condizione, introdotta perché la geometria è ancora concepita come scienza dello spazio, differenzia la geometria dalla matematica pura: la teoria non arguesiana di Hilbert e quella dell'iperboloide ad una falda di Poincaré non sono "geometrie" ma teorie matematiche astratte perché negano le proprietà elementari di certi oggetti fisici che conosciamo per intuizione.

Nel secondo paragrafo si espongono alcune osservazioni di Veronese sull'assiomatica, inquadrando in riferimento a Euclide, Pasch, Peano, Hilbert. Per poter presentare in forma assiomatica una teoria occorre determinare i concetti primitivi, escludere il ricorso all'intuizione dalle dimostrazioni, attribuire un valore definitorio agli assiomi, accordare un valore puramente nominale alle definizioni di punto, retta, piano. Veronese non raggiunge risultati particolarmente originali nello studio delle proprietà metateoriche delle teorie e non approfondisce lo studio dell'indipendenza e della non contraddittorietà dei postulati sviluppato invece nelle scuole di Peano e di Hilbert. Tuttavia egli ha un'intuizione metodologica felice quando suggerisce che la finalità degli studi sull'indipendenza dei postulati consiste nella costruzione di nuove teorie mediante la sostituzione di un'ipotesi con la sua negazione: proprio secondo questo procedimento ha origine la geometria non archimedea.

L'ultimo paragrafo del terzo capitolo è dedicato all'analisi del concetto di intuizione spaziale. Dalla lettura di alcuni testi di Veronese, Helmholtz e Klein emerge la distinzione tra intuizione empirica e intuizione geometrica. Mentre la prima è immediata e accompagna la percezione sensibile degli oggetti fisici, la seconda è mediata e permette di cogliere gli oggetti geometrici astratti. Klein distingue tra un'intuizione geometrica naïve che si sviluppa grazie ad esperienze meccaniche e visive ed un'intuizione raffinata che si sviluppa dalla familiarità con oggetti puramente ideali. Veronese estende questa intuizione fino ad affermare la possibilità, grazie ai metodi di proiezione e sezione propri della geometria proiettiva, di intuire una quarta dimensione. Per legittimare la possibilità delle geometrie iperspaziali Veronese introduce una particolare nozione di spazio geometrico astratto (o spazio generale) ad un numero indeterminato di dimensioni. Una distinzione tra spazio fisico, intuitivo e geometrico è presentata negli stessi anni da Helmholtz

e da Poincaré. Il primo distingue spazio fisico, descritto dalla geometria euclidea, e spazio intuitivo, compatibile con le geometrie euclidea, iperbolica e riemanniana. Poiché per Helmholtz lo spazio intuitivo ha necessariamente tre dimensioni, o non può esistere una geometria a quattro dimensioni (e questa è la sua convinzione) o la geometria non descrive lo spazio intuitivo. Poincaré sostiene questa seconda ipotesi: lo spazio geometrico è un'astrazione che non rispecchia tutte le proprietà dello spazio rappresentativo. Veronese rifiuta il presupposto che lo spazio intuitivo abbia un numero determinato di dimensioni: mediante la proiezione nello spazio tridimensionale si può infatti intuire la quarta dimensione come in un quadro bidimensionale si intuisce la profondità degli oggetti. La soluzione di Veronese ha il duplice scopo di legittimare lo studio delle geometrie iperspaziali (compatibili con lo spazio intuitivo) e di escludere dall'ambito geometrico alcune teorie astratte incompatibili con l'intuizione (ad es. le geometrie di Hilbert e di Poincaré di cui si è detto sopra).

L'ultimo capitolo (*I fondamenti*) presenta alcune riflessioni sulla filosofia della matematica di Veronese. Il problema dei fondamenti è un terreno d'incontro tra matematica e filosofia ma i compiti di queste due discipline sono distinti: alla matematica spetta l'esplicitazione dei concetti primitivi, la formulazione rigorosa di assiomi e dimostrazioni, le indagini sull'indipendenza e la non contraddittorietà dei postulati; alla filosofia spetta la ricerca della genesi dei concetti e dei principi della scienza e la determinazione della natura degli enti matematici. Questa separazione dei campi d'indagine impedisce che una teoria matematica cerchi la propria legittimazione in un'argomentazione filosofica piuttosto che nella dimostrazione di non contraddittorietà e diminuisce il rischio dell'influenza vincolante della metafisica, che spesso frena il libero sviluppo della matematica criticando l'introduzione di nuovi enti o principi. Poiché il rifiuto della possibilità dell'infinito e dell'infinitesimo attuale restringe la matematica in confini inaccettabili, è piuttosto la filosofia a dover accettare le nuove idee matematiche: con questa argomentazione Veronese rifiuta tutte le concezioni epistemologiche finitiste, e in particolare l'empirismo estremo di Pasch che attribuisce agli enti matematici una realtà concreta, empirica. Nonostante questa critica all'ontologia empirista Veronese è un convinto sostenitore della genesi empirica degli oggetti

geometrici: da un lato essa rende ragione della richiesta di conformità all'intuizione spaziale introdotta come condizione per la possibilità geometrica; dall'altro essa evita gli svantaggi dell'apriorismo, che ritenendo innati i concetti geometrici li considera fissi e immutabili. In contrasto con la scelta di Peano di costruire un linguaggio simbolico per l'esposizione dei principi della geometria, Veronese adotta il linguaggio comune, che ha il vantaggio di essere più semplice, più familiare e soprattutto conforme all'intuizione spaziale. Le ambiguità del linguaggio comune non pregiudicano la comprensione degli assiomi, perché punto, retta piano hanno un'interpretazione fissata, determinata dal riferimento intuitivo dei termini. Le critiche al linguaggio simbolico si intrecciano con le obiezioni mosse alla trattazione analitica della geometria. Riaprendo una polemica tra sostenitori del metodo analitico e sostenitori del metodo sintetico nello studio della geometria, polemica che Grassmann, Klein e Segre avevano ormai considerato conclusa auspicando un approccio combinato dei due metodi, Veronese non fornisce rigide prescrizioni ma non cela la propria preferenza per il metodo sintetico. Esso è più semplice e più adatto all'analisi dei fondamenti della geometria perché è basato sull'intuizione spaziale. Il metodo analitico al contrario non permette la comprensione dei singoli passi delle dimostrazioni e trasforma la geometria in uno sviluppo meccanico di formule. Non solo, permettendo un'interpretazione generale e indeterminata dei simboli, esso conduce all'attribuzione di possibilità geometrica a teorie matematiche contrarie all'intuizione spaziale.

Nel quarto paragrafo sono presentate alcune affermazioni sulla verità della matematica tratte da un discorso inaugurale dell'anno accademico letto a Padova nel 1905. La verità della matematica è assoluta perché, come in tutte le scienze formali, dipende dall'accordo tra pensiero e pensiero e non tra pensiero e realtà. L'esistenza di una segreta armonia tra pensiero e natura permette d'altra parte che la verità della matematica trovi conferma nell'applicazione alla realtà: le leggi matematiche, infatti, esprimono le leggi del pensiero, che a loro volta corrispondono alle leggi del reale. Veronese instaura un rapporto di dipendenza tra matematica e logica intesa come scienza delle leggi del pensiero: i principi, le operazioni e i concetti primitivi della matematica hanno infatti origine

dai principi e dalle operazioni del pensiero. Tale dipendenza della matematica dalla logica è genetica e non ha nulla a che vedere con il logicismo fregeano. Poiché la genesi della matematica dalle leggi del pensiero è finalizzata alla chiarificazione dei concetti primitivi e alla verifica della loro non contraddittorietà piuttosto che all'indagine della mente umana (compito attribuito al filosofo e non al matematico), Veronese ha poco in comune anche con gli psicologisti. Intervenendo in una nota polemica tra Segre e Peano sulla possibilità delle geometrie iperspaziali e sul rigore in matematica, Veronese precisa che la ricerca della verità e della dimostrazione di non contraddittorietà delle teorie non va confusa con la pretesa di un rigore assoluto che frena lo sviluppo di nuove ricerche.

L'ultimo paragrafo è dedicato all'analisi della natura ontologica degli enti della geometria e ad una valutazione complessiva della concezione epistemologica di Veronese. Gli oggetti geometrici sono enti ideali costruiti o per astrazione da certi oggetti fisici o come puri prodotti del pensiero. Gli enti ideali di questo secondo tipo sono privi di un corrispettivo concreto ma hanno tuttavia realtà: essi hanno un'esistenza astratta distinta dall'esistenza concreta degli oggetti fisici perché esistono nel pensiero. Veronese caratterizza la propria posizione come razionalismo o idealismo, benché non in senso filosofico. Per comprendere questa sua affermazione occorre fare riferimento al dialogo tra empirista e idealista introdotto da Du Bois-Reymond nella *Allgemeine Functionenlehre*. L'empirista è materialista, ritiene che gli enti matematici siano oggetti concreti e ammette solo l'infinito potenziale; l'idealista al contrario ammette l'esistenza di tutti gli enti matematici purché essi siano rappresentabili nel pensiero: egli ammette dunque l'esistenza del limite e dell'infinito attuale. Veronese è razionalista o idealista perché afferma che gli enti matematici esistono nella mente umana come prodotti del pensiero: l'unica condizione di esistenza degli enti è la loro possibilità logica e non la rappresentabilità o l'esistenza di un oggetto empirico corrispondente. Non è però un idealista in senso filosofico, perché non sostiene che tali enti esistano solo nel pensiero. La concezione epistemologica di Veronese può essere interpretata come una forma di razionalismo perché essa ammette la massima libertà della ragione di integrare i dati dell'esperienza inoltrandosi oltre il campo osservativo finito senza tema di cadere in paradossi e antinomie irresolubili. Il ra-

zionalismo di Veronese si fonda sull'opposizione all'empirismo e ad ogni filosofia finitista che rifiuti la possibilità del passaggio dal limitato all'illimitato, la legge di generalizzazione che permette l'induzione completa, l'esistenza del limite e dell'infinito attuale, la legge della continuità del pensiero. Tale razionalismo è fondato sulla critica ai fondamenti, sulla critica ad altre concezioni filosofiche, su di una critica storico-genetica dei concetti primitivi delle scienze e sul confronto con le posizioni di altri matematici. Per tali ragioni Veronese accetterebbe probabilmente il titolo di *razionalista critico*, a patto però di non confondere la sua concezione epistemologica né con il razionalismo secentesco né con quello sperimentale di Enriques né con l'epistemologia popperiana.

L'assenza di riferimenti bibliografici cospicui relativi all'opera di Veronese e soprattutto la mancanza di studi rivolti specificamente all'interpretazione della sua concezione epistemologica (unica eccezione un testo di Paolo Bussotti del 1997) e all'analisi dei rapporti con altri matematici hanno reso necessario un lungo lavoro di ricerca condotto sui testi, dei quali sono stati citati ampi brani per rendere più comprensibile lo sviluppo del discorso e per promuovere la conoscenza e lo studio diretto dei lavori di Veronese. A tal fine riportiamo alcuni cenni biografici che delineano la sua molteplice attività di matematico, professore, politico. Giuseppe Veronese nacque a Chioggia il 7 maggio 1854 da Giovanni Antonio Veronese, pittore decoratore e M. Elisabetta Ottavia Duse, cugina della grande attrice Eleonora Duse. Fin da piccolo dimostrò una grande inclinazione per la pittura ma a causa delle condizioni economiche modeste della famiglia, dell'opposizione del padre e della mancanza di buoni maestri a Chioggia, rinunciò a dedicarsi all'arte. Frequentò i primi anni di scuola nel Seminario di Chioggia quindi si trasferì alle Scuole Tecniche per poi proseguire gli studi all'Istituto Tecnico di Venezia. Qui ebbe come maestro il matematico Pietro Cassani, autore di ricerche sul metodo della proiezione stereoscopica (estensibile a tutti gli spazi lineari) e sulla geometria "pura" euclidea a n dimensioni. Veronese si mantenne agli studi lavorando come copista e dando lezioni; nel 1872, all'esame di licenza, fu classificato eccellente in quasi tutte le materie tranne che in matematica, di cui fallì la prova scritta riparandola però poi brillantemente nella prova d'appello. Grazie al professor Eusoni ottenne un

lavoro ben retribuito a Vienna come impiegato nell'impresa "Castor et Couvreur" per la regolazione del Danubio; nel frattempo lavorò anche come disegnatore per l'esposizione mondiale di Vienna del 1873, nella quale rappresentava la sua città: Chioggia. Poco dopo abbandonò il lavoro per iscriversi al Politecnico di Zurigo, ove fu mantenuto agli studi dal conte Papadopoli. Nel 1873 si iscrisse alla Sezione meccanica ma due anni dopo, scoperto il suo interesse prevalente per la matematica pura (come testimonia il suo primo lavoro scritto all'età di vent'anni "Teoremi e costruzioni di Geometria proiettiva"), ottenne il trasferimento nella Sezione matematica, dove studiò geometria sintetica proiettiva con Fiedler. Nel 1876, al terzo anno di corso, Veronese scrisse per una conferenza da tenere nel *Mathematisches Seminar* diretto da Fiedler e Frobenius un lavoro nel quale risolveva negativamente la questione di Hesse e di Schröter, che consisteva nel ricercare se la corrispondenza reciproca tra certe rette e certi punti di una particolare configurazione ottenuta dall'*Hexagrammum mysticum* di Pascal provenisse da una polarità. Nell'estate dello stesso anno Veronese scrisse a Cremona chiedendo di essere ammesso al quarto anno di corso per la laurea in matematica nell'università di Roma e propose come dissertazione di laurea il lavoro sopra citato. Grande fu l'apprezzamento di Cremona e di Battaglini per i "Nuovi teoremi sull'*Hexagrammum mysticum*", pubblicati l'anno successivo nelle Memorie dell'Accademia dei Lincei, mentre Veronese otteneva non solo l'iscrizione all'università di Roma ma anche la nomina (eccezionale prima della laurea) ad assistente della cattedra di Geometria proiettiva e descrittiva allora tenuta dal professor Salvatore-Dino. Nel 1880 dopo aver prestato il servizio militare Veronese si trasferì a Berlino e poi, ottenuto un posto di perfezionamento, si recò a Lipsia a studiare con Felix Klein. Frutto di questo periodo tedesco fu la celebre memoria "Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Prinzip des Projicirens und Schneidens", pubblicata nel 1882 nel *Mathematische Annalen*, nella quale la geometria proiettiva degli spazi a più dimensioni "è per la prima volta organizzata sistematicamente, come scienza geometrica, e non come una specie di analisi travestita". Nel 1881, vinto il concorso per la cattedra di geometria analitica sia nell'università di Catania sia in quella di Padova, si trasferì a Padova, ove successe a

Bellavitis ottenendo contemporaneamente in affidamento la cattedra di geometria superiore. Tra il 1881 e il 1885 fu impegnato come Consigliere comunale di Chioggia e dal 1882 come presidente di un'Associazione per curare la ricostruzione del Magistrato Veneto delle Acque (ufficio statale che si occupava delle opere d'ingegneria idraulica in materia di acque pubbliche). Nel 1885 Veronese sposò la baronessa Beatrice Bartolini, dalla quale ebbe otto figli. Dal 1899 fu consigliere comunale a Padova eletto nel blocco dei partiti democratici, l'Unione popolare, formato da radicali, repubblicani e socialisti; dal 1897 al 1900 fu deputato del collegio di Chioggia; nel 1904 fu nominato senatore del regno per meriti scientifici. Provato da gravi disturbi circolatori, morì improvvisamente a Padova, per attacco cardiaco, il 17 luglio 1917.

Desidero ringraziare Silvio Bozzi per il sostegno che mi ha dato sia durante la preparazione della tesi di laurea sia durante la stesura di questo volume e soprattutto per l'entusiasmo che mi ha trasmesso a lezione. Ringrazio anche Corrado Mangione, che mi ha introdotto allo studio della storia della logica e della filosofia della matematica, e Renato Pettoello, che mi ha offerto la possibilità di pubblicare questo libro e ha sostenuto questo progetto con un impegno generoso e continuo. Un ringraziamento speciale va a Santuzza Baldassarri Ghezzi e ai partecipanti al Convegno di Storia della Matematica di Rende negli anni 1998 e 1999, in particolare ad Aldo Brigaglia, Paolo Freguglia e Massimo Galuzzi. A tutti sono debitrice di preziosi consigli e suggerimenti. Voglio ricordare, infine, Clelia e Fausto per l'affetto e la generosità con cui mi hanno accompagnato in tutti questi anni.

I. UNA TEORIA GENERALE DELLE FORME

L'introduzione ai *Fondamenti di geometria* si apre con alcuni capitoli dedicati all'analisi dei principi logici necessari alla costruzione di una teoria generale delle forme fondata sui concetti di ordine, serie, gruppo e sulle relazioni di uguaglianza e corrispondenza. Poiché sussiste un nesso preciso (ma non adeguatamente sottolineato nella letteratura su Veronese) tra queste analisi logico-filosofiche sui fondamenti della matematica e la costruzione del continuo non archimedeo, commenteremo innanzi tutto i capitoli I-IV dell'introduzione per evidenziare il ruolo centrale svolto in tale contesto dalle nozioni di gruppo, uguaglianza, grandezza o forma matematica.

I.1 I CONCETTI PRIMITIVI DELLE SCIENZE

Un'indagine sui fondamenti della geometria comporta per Veronese l'individuazione di un gruppo di assiomi non contraddittori e indipendenti dai quali derivare per via puramente logica tutti i teoremi; essa comporta però anche l'analisi dei concetti matematici primitivi comuni a tutte le scienze e aventi la propria origine nelle operazioni del pensiero. Nel I capitolo dell'introduzione Veronese presenta perciò alcune idee fondamentali per la costruzione delle scienze: unità, pluralità, prima, poi. Tali concetti, introdotti come aspetti essenziali dell'attività del pensiero, sono primitivi perché sono ammessi senza definizione, vale a dire senza una spiegazione del loro significato in funzione di altri concetti più semplici. Il pensiero è governato dalle leggi logiche di identità, contraddizione e terzo escluso, leggi che regolano ogni discorso significativo e costituiscono l'unico vincolo alla libera attività pensante del soggetto. Le operazioni del pensiero sono il porre, il togliere, l'unire e il paragonare. Fondamentale è l'introduzione del concetto di gruppo, inteso come sinonimo di aggregato, molteplicità, sistema e non

nel significato a noi consueto di gruppo algebrico. Un particolare interesse riveste la definizione dell'uguaglianza tra cose come identità dei rispettivi concetti: attraverso la determinazione dei contrassegni rilevanti in ciascun confronto essa permette di distinguere tra uguaglianza assoluta e uguaglianza relativa. Originale è infine l'introduzione esplicita, come teorema, di un particolare principio (che chiameremo della continuità del pensiero) sul quale si fondano tanto la costruzione di segmenti infiniti e infinitesimi rispetto ai segmenti di una retta data quanto la possibilità dell'esistenza matematica di iperspazi.

1.1.1 Le operazioni del pensiero

Poiché gli oggetti matematici sono enti ideali astratti creati dal pensiero, Veronese ritiene opportuno che una ricerca sui fondamenti della matematica inizi con l'analisi dell'atto del pensare e dei principi che lo regolano. Il pensiero è sempre pensiero di qualcosa (pensare nessuna cosa significa non pensare), è inscindibile da un oggetto, sussiste solo in concomitanza con qualcosa che al pensiero è *dato*. Le più semplici caratteristiche del pensiero – ad esempio che il pensare può essere rivolto ad una cosa sola oppure a più cose, prima ad una cosa e poi ad un'altra cosa – indicano il significato dei concetti primitivi di unità, pluralità, prima e poi, grazie ai quali si costruiscono i concetti derivati di gruppo, ordine e serie.¹ Per concetto o idea o rappresentazione mentale di una cosa s'intende "ciò che corrisponde nel pensiero ad una cosa". Veronese non approfondisce da un punto di vista logico la questione della natura dei concetti ma si limita a fornire una definizione *nominale* dei termini che introduce, soffermandosi soltanto su quelle definizioni che servono a rendere comprensibile il legame e insieme la differenza tra il significato dei termini del linguaggio comune e quello dei termini matematici usati in senso tecnico.² Una distinzione molto interessante è quella tra cose *date* o *poste al pensiero* e cose *date* o *poste dal pensiero*:

Se penso una cosa dico che la cosa è *data* o *posta* dal pensiero;
se penso ad una cosa dico che la cosa è *data* o *posta* al pensiero.

¹ FG, p. 1, § 1, nn. 1-3.

² FG, p. 1, § 1, n. 4.

[...] La costruzione di un giudizio è una cosa posta dal pensiero; Carlo uomo è una cosa data al pensiero.³

L'esser dato o posto *al* pensiero e l'esser dato o posto *dal* pensiero, ove la differenza di preposizione rivela la distinzione tra un'attività quasi passiva ed una essenzialmente attiva del pensiero, non determinano una separazione rigida tra le cose: non esistono categorie di oggetti che sono sempre dati *al* pensiero; piuttosto Veronese dimostra che "una cosa posta dal pensiero si può considerare poi come data al pensiero, e inversamente."⁴ Questa affermazione contiene in sé il principio dell'autoriflessione del pensiero; dato un pensiero è sempre possibile pensare tale pensiero, ossia, nel linguaggio di Veronese, è sempre possibile che ciò che è posto *dal* pensiero sia poi considerato come dato *al* pensiero. Un giudizio, ad esempio, è qualcosa di posto *dal* pensiero, ma non appena vogliamo giudicarne l'esattezza, lo consideriamo come qualcosa di dato *al* pensiero; così ad un oggetto concreto del mondo esterno, dato al pensiero, corrisponde un concetto, che, in quanto risultato di un'operazione mentale, può essere considerato come posto *dal* pensiero. La terminologia di Veronese rimanda a quella introdotta da Grassmann nella prefazione alla *Ausdehnungslehre* del 1844; ove si afferma che prerogativa delle scienze formali è di avere per oggetto un essere posto dal pensiero stesso:

Il pensiero si dà soltanto nella relazione ad un essere che gli sta di fronte e che è rappresentato dal pensiero; questo essere [...] nelle scienze formali è *posto dal pensiero stesso*, che ora a sua volta si pone come essere di fronte ad un secondo atto di pensiero.⁵

L'essere al quale la matematica si rivolge è posto da un precedente atto del pensiero: ciò che il pensiero ha posto diventa l'essere che sta di fronte al pensiero, il dato di un nuovo atto del pensare. Una cosa data al pensiero è un punto di partenza del ragionamento, il dato al quale si applica un'operazione

³ FG, p. 2, § 1, n. 6.

⁴ FG, p. 7, § 5, n. 18.

⁵ Grassmann, [1844], p. 22. Per i testi in lingua straniera si è fatto riferimento alla traduzione italiana quando possibile; se in bibliografia non è citata alcuna edizione italiana, si deve intendere che la traduzione è dell'autore e il riferimento di pagina è al testo originale.

mentale. Poiché il risultato può a sua volta essere oggetto della stessa operazione, è possibile iterare ad infinitum il processo del pensiero, anche a partire da un solo, primo oggetto al quale esso è rivolto. Il principio dell'autoriflessione del pensiero è matematicamente rilevante perché postula che un oggetto ottenuto come risultato di un'operazione possa a sua volta essere il dato al quale applicare la stessa o un'altra operazione. L'insistenza sulla differenza e sull'intercambiabilità tra esser dato o posto *al* e *dal* pensiero è tanto più interessante se confrontata con i riferimenti di Dedekind, e prima ancora di Bolzano, all'autoriflessività del pensiero come condizione di possibilità dell'esistenza di insiemi infiniti. Data una qualunque verità espressa in una proposizione, affermando che tale proposizione è vera si ottiene una nuova proposizione; affermando che quest'ultima è vera si ottiene un'altra proposizione;⁶ procedendo all'infinito si ottiene un insieme di proposizioni che è più grande di ogni insieme finito di esse:

L'aggregato di tutte queste proposizioni, ognuna delle quali è legata alla precedente dalla relazione testé enunciata, di avere come proprio soggetto la stessa proposizione precedente e come proprio contenuto la asserzione che tale proposizione è vera, comprende un insieme di elementi (proposizioni) che è maggiore di ogni insieme finito.⁷

Riprendendo questa dimostrazione di Bolzano, che non è soddisfacente perché presuppone l'esistenza dei numeri naturali (e dunque di un insieme infinito, che è quanto si vorrebbe dimostrare), Dedekind si serve del principio dell'autoriflessione del pensiero per garantire l'esistenza di un insieme infinito costituito dalla totalità delle cose pensabili. La dimostrazione, benché non circolare (ricorre infatti ad una definizione di insieme infinito che non dipende dall'insieme dei numeri natu-

⁶ "[...] quando noi consideriamo una qualunque verità, come la proposizione che esistono verità o una qualunque altra che indico con A, scopriamo che la proposizione espressa dalle parole "A è vera" è diversa da A stessa; poiché questa ha evidentemente un altro soggetto rispetto a quella. Il suo soggetto, cioè, è l'intera proposizione A. Secondo la stessa legge con la quale abbiamo derivato dalla proposizione A quest'altra proposizione diversa che chiamo B, così deriviamo da B una terza proposizione C e così via senza fine." Bolzano, [1851], p.13 (trad. it., p. 12).

⁷ Bolzano, [1851], pp. 13-14 (trad. it., p. 12).

rali), è anch'essa difettosa, perché, come Dedekind stesso riconoscerà in seguito ad alcune critiche di Cantor, la totalità delle cose pensabili non è un insieme. Diversa è la posizione di Veronese: la possibilità di pensare più cose insieme e di pensare cose sempre diverse da quelle già pensate non garantisce la pensabilità del tutto delle cose possibili; benché le cose che possiamo pensare siano illimitate, non è possibile pensare una totalità che le comprenda tutte. Veronese ricorre all'autoriflessione per mostrare che un tutto posto *dal* pensiero può a sua volta esser dato *al* pensiero come parte da unire con altre in un nuovo tutto e dimostrare così che, dato un gruppo di cose pensate e qualora non sia stabilito che esso contiene tutte le cose possibili, si può sempre ottenere un'altra cosa pensata distinta dalle prime.⁸ Veronese dunque, anziché affermare con Dedekind e Bolzano l'esistenza di una totalità di cose pensabili, dimostra al contrario un principio che permette, dato un tutto, di postulare sempre l'esistenza di qualcosa che stia al di fuori di esso.

Al porre, definito come l'atto del pensare una cosa, si contrappone il *togliere*, che è il *non pensare ad* una cosa precedentemente data o posta dal pensiero insieme ad altre: togliere una cosa è fare astrazione da essa, vale a dire non pensarla più.⁹ La terza operazione fondamentale del pensiero è il *paragonare*, che consiste nell'applicazione alle cose dei principi logici d'identità, di diversità, di contraddizione e del terzo escluso; il risultato di tale operazione è una *relazione* stabilita fra più cose.¹⁰ Il termine *operazione* è usato per significare una generica attività della mente piuttosto che un procedimento matematico che a partire da due o più enti costruisce un terzo ente come risultato. Veronese ricerca l'origine del significato tecnico dei termini nel significato generale e intuitivo che essi hanno nel linguaggio comune: ritiene che da esso derivi per raffinzioni successive il significato dei termini nel linguaggio matematico.

⁸ FG, pp. 13-14, § 9, n. 37.

⁹ FG, p. 2, § 1, n. 7.

¹⁰ "I. Il concetto A è il concetto A (principio d'identità). II. Il concetto A non è il concetto B (principio di diversità che è la negazione di quello d'identità). III. Il concetto A è A e non è non-A (principio di contraddizione). IV. Il concetto A è o non è il concetto B (principio del terzo escluso fra i contraddittori)." FG, p. 2, § 2, n. 8.

Una cosa può essere paragonata con altre in base a uno o più concetti detti *contrassegni*. È possibile considerare soltanto uno o tutti i contrassegni delle cose: conseguentemente dal confronto scaturirà un giudizio relativo ad un solo aspetto delle cose o alle cose nel loro complesso. I contrassegni di un concetto corrispondente nel pensiero ad una cosa non sono concetti individuali che lo rappresentano ma generi nei quali l'oggetto è sussunto o proprietà di cui gode (ad es. 'uomo' è uno dei contrassegni di Caio). La definizione dell'operazione di paragone tra cose per mezzo del confronto tra le corrispondenti rappresentazioni concettuali risponde allo scopo di introdurre una doppia relazione di uguaglianza: relativa se si considerano soltanto alcuni contrassegni, assoluta se si considerano tutti i contrassegni delle cose.¹¹

1.1.2 Il gruppo e la serie

Con il termine *gruppo* Veronese indica il risultato dell'operazione del *pensare insieme* più cose date che non si contraddicono fra loro e tali che togliendo ciascuna di esse non si tolga alcun'altra cosa. Le condizioni alle quali è possibile pensare il gruppo AB (ottenuto pensando insieme le cose A e B) sono dunque due: in primo luogo A deve essere non contraddittoria rispetto a B, in secondo luogo se è tolta A non deve essere tolta B e viceversa. Il gruppo è il risultato di un'operazione che unisce certe cose date in un tutto: l'unire. Tale operazione è a senso unico (il risultato è determinato univocamente dalle condizioni iniziali), gode della proprietà associativa e determina un tutto che contiene le cose date e nessun'altra cosa, nemmeno se derivabile dalle prime.

I. L'atto semplice del considerare insieme più cose date in un dato ordine o indipendentemente dal loro ordine è a senso unico.

II. Pensando insieme o no più cose in un dato ordine o indipendentemente da questo ordine non si pensa alcuna cosa che non sia una delle cose date.

III. Unire l'oggetto C all'oggetto B unito all'oggetto A, significa

¹¹ Ritomeremo a lungo su tale relazione nel § 1.2 perché sull'uguaglianza si fonda la definizione di *grandezza matematica*.

unire l'oggetto C al tutto ottenuto dall'unione di B ad A, ovvero significa unire il tutto dato dall'unione di C a B coll'oggetto A (principio di associazione). $ABC = (AB)C$ $ABC \neq A(BC)$ ¹²

Il termine *gruppo* indica una molteplicità generica, all'interno della quale non occorre che le cose siano legate da proprietà comuni. L'*unione* può essere applicata a cose qualunque: essa è "l'operazione del pensare o considerare insieme nella sua espressione più semplice", è un atto del pensiero piuttosto che un'operazione nel senso matematico del termine.¹³ Nell'edizione tedesca dei *Fondamenti* il termine 'unione' è tradotto con *Verknüpfung*, che compare — come nota Veronese — anche nelle *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik* di Otto Stolz, ma in un'accezione diversa:

Alcuni autori indicano coll'unire un'operazione generale, mentre per noi ha qui un senso particolare ben determinato. Ad es. Stolz per *eindeutige Verknüpfung* (che si può tradurre per combinazione od unione a senso unico) delle grandezze *a, b, c, ...* di un dato sistema intende una *regola* secondo la quale a ciascuno oppure ad alcuni gruppi *ab* corrisponde soltanto una grandezza *c* di questo o di un altro sistema. [...]¹⁴

Veronese intende sottolineare che l'unire non va inteso come un'operazione matematica che ad un gruppo di due oggetti fa corrispondere un altro oggetto: è piuttosto l'atto che il pensiero compie quando, pensando più cose come un tutto, forma un gruppo. Alla *Verknüpfung* di Stolz Veronese farà corrispondere l'operazione matematica di unione, indicata con il termine *somma* e definita solo tra forme o grandezze matematiche.

All'unire corrisponde un'operazione inversa che dal tutto conduce alle parti: *scomporre* una cosa data X determina delle parti A, B, C, D, ..., N che insieme unite danno il tutto X.¹⁵ L'unire e lo scomporre, così definiti, rimandano alle operazioni fondamentali del pensiero: la *sintesi*, che mediante l'unione collega arbitrariamente i concetti, e l'*analisi*, che attraverso la

¹² FG, p. 10, § 7, n. 29 [in grassetto nel testo].

¹³ FG, p. 6, § 4, n. 13, nota 1.

¹⁴ FG, p. 10, § 7, n. 29, nota 3. Cfr. Stolz, [1885-86], I, p. 2.

¹⁵ FG, p. 11, § 8, n. 30.

scomposizione isola le parti di un tutto.¹⁶ Dalle definizioni dell'atto dell'unire e del suo risultato emergono due caratteristiche rilevanti del concetto di gruppo. Richiedere che tolta una cosa del gruppo non ne risulti tolta alcuna altra equivale ad imporre la condizione che le parti del gruppo siano tutte distinte e separate le une dalle altre, escludendo che il gruppo possa essere parte di se stesso.¹⁷ Richiedere che nel gruppo non si pensi alcuna cosa che non sia una di quelle date ribadisce l'impossibilità che le parti delle parti siano parti del tutto e vieta di considerare come parte di un gruppo ciò che è derivabile dalle parti dello stesso.¹⁸ Ne risulta una nozione discreta e apparentemente finitista di gruppo: le cose che unite insieme formano un gruppo sono separate e semplici;¹⁹ se tutte le cose fossero date in anticipo al pensiero, esse sarebbero inoltre in numero finito (Veronese dimostrerà al contrario anche l'esistenza di gruppi illimitati). Le cose pensate insieme per formare un gruppo corrispondono, nella teoria classica degli insiemi, agli elementi di un insieme e sono distinte dai sottogruppi di un gruppo (sottoinsiemi di un insieme). Dati due gruppi (A) e (B), Veronese introduce le relazioni di appartenenza, esser parte ed esser fuori, che corrispondono rispettivamente all'inclusione, all'inclusione propria e alla non inclusione (disgiunzione o intersezione) tra insiemi: se tutti gli oggetti di (A) sono oggetti di (B), (A) appartiene a (B); se inoltre non tutti gli oggetti di (B) sono oggetti di (A), allora (A) è parte o è sottogruppo di (B); (A) è invece fuori rispetto a (B) quando (A) o una parte di (A) non appartiene a (B). Il concetto di fuori — precisa Veronese — non presuppone o contiene in sé quello

¹⁶ "Ad ogni concetto generale si può pervenire per due strade: o attraverso un collegamento arbitrario dei concetti, oppure isolando quelle conoscenze che sono state chiarite per suddivisione." Kant, [1764], p. 219.

¹⁷ "Delle cose date non può essere una contenuta nell'altra e tanto meno il gruppo può essere una delle cose date. Se ciò fosse, facendo astrazione da essa si farebbe astrazione da un'altra cosa data o dalle altre cose date." FG, p. 6, § 4, n. 13, Oss.

¹⁸ "In questo modo è evitato che nel gruppo ordinato o non, o nella serie di cose date si considerino anche cose che conseguono dalle prime secondo certi principi." FG, p. 10, § 7, n. 29, nota 2.

¹⁹ Ciò non significa che siano semplici: esse possono avere parti, ma tali parti non sono prese in considerazione nell'atto dell'unire e pertanto non sono costituenti del gruppo.

di spazio, anche se il termine rimanda all'intuizione di un luogo limitato e di ciò che sta oltre, al di là di esso. Il fuori è ottenuto come semplice negazione dell'appartenere ed è legittimato dall'assunzione del principio del terzo escluso, dall'applicazione del quale otteniamo che o (A) appartiene a (B) o (A) non appartiene a (B), vale a dire è fuori di (B).²⁰ Questa caratterizzazione restrittiva della nozione di gruppo presenta alcuni aspetti interessanti: esclude il caso di insiemi che siano parte di se stessi e vieta l'identificazione tra un oggetto e il suo singleton; evita i paradossi dell'autoriferimento escludendo che un gruppo possa essere parte di se stesso; la richiesta che le parti di un gruppo siano semplici e disgiunte esclude infine certi gruppi indesiderabili costituiti da catene di appartenenza (insiemi inclusi l'uno nell'altro). Le caratteristiche di questa definizione di gruppo dipendono dal ricorso di Veronese all'operazione del "pensare insieme o considerare insieme nella sua espressione più semplice" ma sono anche il frutto di un'esigenza matematica.

Veronese introduce un'altra condizione perché, date certe cose, sia possibile pensarle insieme in un gruppo: occorre che le cose siano tra loro non contraddittorie. Bussotti propone una spiegazione metateorica di questa condizione: se chiamiamo gruppo l'insieme degli assiomi di una teoria, le parti di questo gruppo non possono essere tra loro contraddittorie perché altrimenti non avremmo un modello della teoria.²¹ Anche se Veronese ha in mente questa applicazione (fa infatti spesso riferimento a gruppi di assiomi e ipotesi), è però probabile che l'esigenza di introdurre la clausola di non contraddittorietà derivi dalla scelta di caratterizzare la nozione di gruppo come risultato dell'operazione del pensare insieme, la quale è fondata sul principio di non contraddizione. È interessante osservare anche che tale condizione, assente in Dedekind e Cantor, è invece esplicitamente introdotta da Schröder, che sulla

²⁰ "Il concetto di fuori non include necessariamente quello di spazio, poiché se non altro l'esistenza formale di un oggetto fuori di un gruppo è determinata dalla negazione, cioè che non appartiene al gruppo dato. La negazione in questo caso è giustificata dal principio stesso del mezzo escluso fra i contraddittori, perché questo principio non avrebbe vigore se non vi fossero cose B fuori di A, o cose A fuori di B." FG, p. 6, § 4, n. 13, nota 3.

²¹ Bussotti, [1997], pp. 28-29.

scia di Boole costruisce un'algebra della logica che descriva il pensiero e le sue leggi.

Oltre alle relazioni fra gruppi (appartenere, esser parte e esser fuori) Veronese definisce una relazione d'ordine tra gli elementi determinata dall'attività del pensiero che pensa prima una cosa e poi un'altra ponendole in successione: affermare che le cose A e B stanno nell'ordine AB significa pensare prima A e poi B. Considerare le cose ABCD...N... nell'ordine ABCD...N... equivale a considerare la successione o serie di cose ABCD...N..., la quale, corrispondendo alla successione degli atti di pensiero, rispecchia la temporalità del pensare:

La successione delle nostre idee, o il poter considerare più cose una dopo l'altra, ci fa intuire qualche cosa senza la quale noi non potremmo svolgere il nostro pensiero, e questa qualche cosa è il tempo.²²

Una serie (conformemente all'uso di Veronese utilizzeremo nel seguito i termini serie e successione come sinonimi) può essere formata anche da uno stesso concetto ripetuto, purché per ripetizioni diverse si usino vocaboli diversi, in modo da differenziare le cose date secondo l'ordine nel quale si succedono. L'attribuzione di un diverso nome per ogni cosa che sia il risultato di un atto del pensiero permette a Veronese di chiamare prima, seconda, terza le cose che si succedono in un certo ordine. La successione di più cose pensate in un certo ordine è distinta da quella dei posti che ciascuna cosa occupa: la nozione di posto o posizione di una cosa in una successione dipende infatti dall'ordine, ossia da un rapporto di prima o poi tra le cose. Prima e poi, benché introducano un ordine astratto che rimanda sia a quello spaziale tra cose sia a quello temporale tra le nostre impressioni sensoriali, non presuppongono né il concetto di spazio né quello di tempo.²³ È qui evidente l'intenzione di Veronese di introdurre l'ordine come relazione algebrica puramente astratta piuttosto che come

²² FG, p. 7, § 5, n. 19, nota 3.

²³ "Anche il concetto di posto o di posizione astratta non include necessariamente quello di spazio". FG, p. 8, § 5, n. 20, nota 1. L'altro concetto al quale Veronese allude è quello di fuori. "Ma il concetto del prima e del poi non include necessariamente quello del tempo, vale a dire che non se ne possa fare astrazione." FG, p. 7, nota 3.

relazione spaziale tra segmenti o relazione temporale tra idee.

Data una serie, e quindi un ordine nel quale più cose sono disposte, è possibile definire le relazioni di precedere o essere prima e di seguire o essere dopo: la prima cosa della serie non ha cose che la precedono, l'ultima è definita come quella che non ha cose che la seguono. Da questa relazione d'ordine dipende l'essere compreso fra: se X precede Y e Z segue Y in una data serie, si dice che Y è compresa fra X e Z, e che X e Z sono separate da Y [$X < Y < Z$].²⁴ La relazione d'appartenenza o essere parte, già definita per i gruppi, è introdotta analogamente per le serie aggiungendo un'ulteriore condizione alla relazione di esser contenuto. Una serie β si dice contenuta in una serie α quando gli oggetti di β sono gli oggetti di α e quando gli oggetti che precedono o seguono ogni oggetto X in β precedono o seguono l'oggetto X in α [se $x < y$ in β allora $x < y$ in α e se $x > y$ in β allora $x > y$ in α].²⁵ Questa definizione della relazione di inclusione tra serie è analoga a quella di inclusione tra gruppi ma poiché le serie sono caratterizzate da un ordine richiede che la serie α mantenga, almeno per le cose comuni a entrambe le serie, la relazione d'ordine (precedenza) che le caratterizzava nella serie β . Nessuna condizione è imposta sugli eventuali elementi di α che non appartengono a β : essi possono essere compresi fra le cose di β purché non ne modifichino l'ordine. La relazione di esser parte è un'inclusione propria che rispetta un'ulteriore relazione tra gli elementi, la consecutività: consecutiva seguente o antecedente di una cosa di una data serie è la prima cosa che la segue o la precede. Una serie β , contenuta in una serie α , è parte di α , se in α vi sono oggetti che non appartengono a β e se gli oggetti consecutivi in β sono anche consecutivi in α . Se ad esempio α è data da A,B,C,D,E,F,G,H,I,... e β è data da B,D,F,H,..., possiamo affermare soltanto che β è contenuto in α , ma non che ne è parte, perché non è rispettata la consecutività. Al contrario se prendiamo β data da A,B,C,D,E possiamo dire che essa è contenuta in α e ne è anche parte.²⁶

²⁴ FG, p. 8, § 5, n. 23. Si veda la definizione della relazione stare fra in Pasch [1884], pp. 6-7.

²⁵ FG, p. 8, § 5, n. 23.

²⁶ Cfr. FG, p. 8, § 5, n. 24.

Veronese distingue le serie in limitate e illimitate. Una serie è *limitata* se ha un primo e un ultimo oggetto, mentre è *illimitata* negli altri tre casi possibili: se non ha un primo oggetto, se non ne ha un ultimo, se non ha né un primo né un ultimo oggetto.²⁷ La possibilità matematica dell'esistenza di una serie illimitata è garantita dal principio di non contraddizione:

Il concetto di successione di cose date è indipendente dal fatto che questa serie sia o no limitata, e quindi i contrassegni di limitato e illimitato non sono in contraddizione col concetto di serie già dato. La negazione è anche in questo caso sufficiente a stabilire astrattamente l'esistenza della serie illimitata, perché non è in contraddizione col concetto di serie limitata, che la prima comprende in sé.²⁸

Serie naturale o limitata di prima specie è una serie limitata che non contiene come parte alcuna serie illimitata; *serie semplice* è una serie che non contiene alcun elemento ripetuto.²⁹ Una qualunque serie può essere considerata semplice perché "essendo diversi i posti occupati nella serie dalla stessa cosa possiamo indicare la cosa ripetuta in ogni ripetizione con un segno diverso dai precedenti, [...] supponendo che la cosa ripetuta rappresenti più cose distinte".³⁰ A questo punto meglio si comprende perché Veronese abbia definito il concetto d'aggregato come il risultato del pensare insieme più cose non necessariamente diverse: anch'è due cose identiche possono infatti essere distinte considerando la diversa posizione all'interno di un ordine seriale. Dalla definizione di serie limitata, illimitata, naturale deriva quella di gruppo ordinato limitato, illimitato, naturale: quest'ultimo è il risultato dell'unire o pensare assieme le cose successive di una serie naturale (o limitata di prima specie).³¹

Il concetto di *gruppo ordinato* deriva dal concetto di serie mediante l'applicazione dell'operazione dell'unire: esso è il risultato

²⁷ FG, p. 12, § 9, n. 32-33.

²⁸ FG, p. 12, § 9, n. 32, nota 1.

²⁹ FG, p. 13, § 9, n. 35-36.

³⁰ FG, p. 13, § 9, n. 36.

³¹ Nel testo manca una definizione di gruppo ordinato naturale, ma è chiaro che il termine "gruppo naturale" si riferisce ad un gruppo ottenuto a partire da una serie naturale.

dell'unire o pensare insieme successivamente le cose di una serie nell'ordine in cui le une seguono alle altre.³² Mentre nella definizione di gruppo non si fa riferimento all'ordine in cui si esegue l'operazione dell'unire, il gruppo ordinato è invece ottenuto attraverso l'applicazione successiva dell'operazione dell'unire tenendo conto dell'ordine secondo il quale le cose sono unite le une alle altre. Nel primo caso l'operazione dell'unire è commutativa perché si fa astrazione dall'ordine in cui si sono avute le idee, mentre nel secondo caso non lo è perché si tiene conto dell'ordine: $(AB)C$ è diverso da $(AC)B$. In una definizione successiva Veronese precisa che il gruppo ordinato si compone o è l'insieme degli oggetti dati nell'ordine stabilito. Il termine insieme è introdotto soltanto ora per denotare una molteplicità ordinata di cose e non un semplice aggregato di oggetti; per indicare il concetto generale di gruppo Veronese usa altri sinonimi, quali aggregato, molteplicità o sistema. Tra i gruppi ordinati sono definite le consuete relazioni di appartenere e di esser parte; dall'analisi di tali relazioni emerge uno stretto legame tra gruppo ordinato e serie: la seconda si differenzia dal primo per il solo fatto che in essa manca l'operazione dell'unire.³³ Legata al concetto di gruppo è anche l'operazione che, attraverso il confronto, pone in corrispondenza gli oggetti di due gruppi, associandoli qualora essi stiano tra loro in una relazione data. Più precisamente due gruppi *si corrispondono secondo una data relazione* quando è possibile stabilire tale relazione tra un qualunque elemento del primo gruppo e uno o più elementi del secondo.³⁴ La corrispondenza si dice univoca e

³² "Date le cose A e B nell'ordine AB, si consideri insieme B con A, o come diremo anche si unisca B ad A; e più generalmente, data una serie qualunque di cose secondo la condizione della def. 1,13 si applichi o si intenda compiuta questa operazione per le cose successive della serie; il risultato di questa operazione chiamasi gruppo o tutto ordinato." FG, p. 9, § 6, n. 26. La definizione a cui si fa riferimento nel brano citato è quella di gruppo, che richiede che le cose non si contraddicano fra loro e che, tolta una di esse, non ne risulti tolta nessun'altra. Cfr. FG, p. 6, § 4, n. 13.

³³ FG, p. 10, § 6, n. 28.

³⁴ "Quando tra gli elementi A e X, B e Y, C e Z ecc., che appartengono rispettivamente ai gruppi (A) e (A') esiste o si stabilisce una relazione qualsiasi comune e tale che dato un elemento del primo gruppo qualunque sussista questa relazione rispetto ad uno o più elementi del secondo gruppo, si dirà che i gruppi si corrispondono secondo la relazione suddetta." FG, p. 20, § 4, n. 42, Def. 1.

reciproca o più semplicemente *univoca* (oggi diremmo biunivoca o biiettiva³⁵) quando ad un elemento del primo gruppo corrisponde un solo elemento del secondo (ossia la corrispondenza è una funzione) e ad ogni elemento del secondo gruppo corrisponde lo stesso elemento del primo e questo solo:

Se ad ogni elemento A del primo gruppo corrisponde un solo elemento A' del secondo, e ad ogni elemento A' di questo corrisponde lo stesso elemento A del primo e questo solo, si dice che gli elementi dei gruppi dati si corrispondono univocamente, e la corrispondenza si chiama *univoca e reciproca* o soltanto *univoca*.³⁶

Il concetto di corrispondenza può essere esteso ai gruppi ordinati; si parla in questo caso di *corrispondenza nel medesimo ordine* quando: 1. gli elementi corrispondenti sono compresi fra elementi corrispondenti; 2. i due gruppi sono limitati e agli elementi che precedono un dato elemento corrispondono gli elementi che precedono l'elemento corrispondente.³⁷

Veronese introduce a questo punto un principio — fondamentale per la dimostrazione della possibilità logica degli spazi a quattro dimensioni — che esprime la capacità del pensiero di pensare sempre un'altra cosa al di fuori di un tutto dato:

*Data una cosa A determinata, se non è stabilito che A è il gruppo di tutte le cose possibili che vogliamo considerare, possiamo pensarne un'altra non contenuta in A (vale a dire fuori di A) e indipendente da A .*³⁸

Questo principio, che chiameremo *legge della continuità del pensiero*, è dimostrato ricorrendo all'infinita ripetibilità degli atti del pensiero: in una serie una cosa ripetuta non coincide mai

³⁵ Seguendo l'uso di Veronese con il termine *univoca* intenderemo d'ora in poi una corrispondenza biunivoca.

³⁶ FG, p. 20, § 4, n. 42, Def. II.

³⁷ FG, p. 21, § 4, n. 42, Oss. II.

³⁸ FG, pp. 13-14, § 9, n. 37, in una breve recensione ai *Fondamenti* Peano muove una critica radicale al principio della continuità del pensiero, il quale significherebbe che "data una classe A , se essa non contiene tutti gli oggetti, allora essa non contiene tutti gli oggetti". Da questa tautologia del tipo "se A allora A ", assumendo la verità dell'antecedente, si otterrebbe la verità del conseguente per la regola logica del *modus ponens*, perché la possibilità che A non sia mai la classe di tutti gli oggetti non è dimostrata ma postulata all'inizio dell'argomentazione. Peano, [1892a], p. 144.

con la cosa posta prima, perché se si considera come contrassegno l'ordine due cose identiche sono diverse almeno per la loro posizione e dunque sono distinte. Oltre che per la costruzione degli spazi a quattro dimensioni (immaginando che esista un punto al di fuori del tutto costituito dallo spazio ordinario)³⁹ il principio della continuità del pensiero è essenziale per la determinazione dei segmenti limitati infiniti e infinitesimi attuali sulla forma fondamentale ossia per la costruzione del continuo non archimedeo. Veronese non attribuisce alcun nome particolare a questo principio: noi lo abbiamo chiamato *legge della continuità del pensiero*, intendendo riferirci alla capacità attribuita al pensiero umano di oltrepassare continuamente ogni limite ponendo sempre qualcosa oltre a ciò che prima era stato posto come un tutto. La scelta del termine "legge della continuità del pensiero" richiama alla mente la continuità intesa da Cohen come una legge del pensiero grazie alla quale "tutti gli elementi del pensiero, nella misura in cui è lecito considerarli elementi della conoscenza, sono prodotti a partire dall'origine",⁴⁰ vale a dire dall'infinitesimale, considerato come origine della dinamica del pensiero matematico. Il principio di Veronese presenta in effetti una componente genetica e dinamica riscontrabile anche nell'idea di continuità della scuola di Marburgo. Mentre per Cohen il principio matematico del continuo trova il suo fondamento in una legge del pensiero, perché il pensiero stesso origina il suo contenuto ricavandolo dalla propria attività, e per Natorp il continuo non è intuito o percepito nella sensazione ma dipende da una legge del pensiero,⁴¹ Veronese afferma al contrario che il continuo geometrico si fonda sull'intuizione; perché è la rappresentazione del continuo intuitivo a fornire le indicazioni per la costruzione di quello matematico.⁴² La continui-

³⁹ "Dato lo spazio intuitivo S , separando l'idea del punto da quella dello spazio se non si dice che lo spazio intuitivo contiene tutti i punti possibili, possiamo pensare un altro punto fuori di S , vale a dire uguale agli altri punti ma distinto da essi; oppure un altro spazio S' intuitivo uguale a S ma distinto da S ." FG, p. 14, § 9, n. 37.

⁴⁰ Cohen, [1902], p. 92.

⁴¹ Natorp, [1921], p. 183.

⁴² Per Natorp al contrario "[...] l'intuizione non può affatto fondare la continuità, nemmeno per lo spazio o il tempo. La continuità può essere introdotta soltanto mediante un concetto." Natorp, [1921], pp. 175-176. Natorp apprezza entusiasti-

tà non è una legge del pensiero ma una proprietà dello spazio che ci è suggerita dall'intuizione: la legge della continuità del pensiero permette di costruire un continuo astratto che rappresenta adeguatamente il continuo intuitivo ma non lo fonda.⁴³ Per un confronto tra l'idea di continuo di Veronese e quella di Natorp si veda l'articolo di Pfeiffer-Reuter "L'infini relatif chez Veronese et Natorp", nel quale l'autore si propone di evidenziare un collegamento tra Natorp e Veronese in merito alla concezione del pensiero scientifico e alla maniera di affrontare il problema del continuo. Il pensiero sarebbe in entrambi i casi "orientato verso il divenire piuttosto che verso l'essere, verso il dinamismo della costruzione progressiva piuttosto che verso la contemplazione degli oggetti statici".⁴⁴ A questo proposito Pfeiffer-Reuter sottolinea la componente *genetica* propria del pensiero e del continuo di Veronese, accentuandone la differenza rispetto alla posizione *ontica* di Cantor: "La differenza della loro maniera di vedere è già tutta intera nel loro concetto di base: l'insieme di Cantor rappresenta una collezione di oggetti stabile e ben delimitata; la sequenza illimitata introdotta da Veronese è il simbolo di una progressione senza fine."⁴⁵ Costruendo il continuo a partire dall'intuizione di un filo rettilineo considerato come una totalità all'interno del quale possiamo distinguere delle parti, Veronese procede dall'idea di un tutto indistinto che la matematica determinerebbe attraverso un sistema di punti fissati in esso con il pensiero. Pfeiffer-Reuter tenta di mostrare che con un "fenomeno di risonanza" senza contatti diretti questa pratica scientifica di Veronese si accorda con la teoria epistemologica di Natorp, anche se riconosce la differenza fondamentale tra la fondazione intuitiva del continuo di Veronese e il tentativo opposto di

camente il lavoro di Veronese, che ha raggiunto a suo dire la massima precisione che si possa ottenere con mezzi puramente matematici nella soluzione del problema del continuo, proprio perché la costruzione della forma fondamentale di Veronese non si fonda sull'impossibile tentativo di produrre il continuo dal discreto, ma "al contrario afferma della continuità l'assoluto andare oltre ogni discreto, sia esso anche infinite volte infinito". Natorp, [1921], p. 186.

⁴³ Si veda anche il § 2.3.1 nel quale citiamo un passo di Veronese che chiarisce che la definizione del continuo geometrico deve scaturire dall'esame del continuo intuitivo.

⁴⁴ Pfeiffer-Reuter, [1989], p. 96.

⁴⁵ Pfeiffer-Reuter, [1989], p. 97.

Natorp di eliminare da esso ogni traccia di intuizione, estranea al puro pensiero. Più che di un accordo vero e proprio con la teoria epistemologica di Natorp sarebbe opportuno parlare di una convergenza tra i due autori sull'idea della rappresentazione del continuo come totalità indistinta anteriore ad ogni determinazione puntuale. L'epistemologia di Veronese, inscindibile dalla sua pratica scientifica, è infatti molto lontana da quella di Natorp: non è il pensiero a determinare le relazioni spazio-temporali; esso fornisce piuttosto una descrizione astratta di certe verità imprescindibili che derivano dall'esperienza e dall'intuizione sensibile. Il richiamo all'intuizione non è interpretabile in Veronese come una ricaduta nell'esperienza all'interno di un programma che derivi dal pensiero tutte le conoscenze matematiche (come sembra credere Natorp quando afferma che "nel richiamo all'intuizione si nasconde [...] la giusta idea di una nuova capacità del pensiero non ancora concepita chiaramente come tale"): esso è piuttosto legato alla ricerca di una giustificazione del criterio con il quale il matematico stabilisce i postulati fondamentali di una teoria geometrica.

Poiché l'operazione grazie alla quale è possibile porre una cosa fuori di un'altra data non ha limite, Veronese costruisce una serie *illimitata* "ponendo una cosa B fuori di un'altra A, una cosa C fuori del gruppo AB, e così via".⁴⁶ Una serie illimitata che ha un primo elemento è *illimitata di prima specie* se le sue parti limitate aventi per primo elemento quello della serie data sono di prima specie, cioè non contengono come parte alcuna serie illimitata. La serie (I) 1,2,3,4,5,6... dei numeri naturali è un esempio di serie illimitata di 1° specie. Ogni serie limitata di una serie illimitata di prima specie è di prima specie (che abbia o no come primo elemento quello della serie di partenza): dunque una serie illimitata di prima specie è una serie tale che ogni sua parte limitata non contiene alcuna serie illimitata.⁴⁷ Le parti illimitate di una serie illimitata di prima specie sono sempre serie illimitate di prima specie, cioè ogni loro parte limitata non contiene parti illimitate.

Come conseguenza delle proprietà di una serie illimitata di prima specie e in virtù del concetto di consecutività Veronese

⁴⁶ FG, p. 14, § 9, n. 37. a'.

⁴⁷ FG, p. 17, § 2, n. 39.

dimostra il principio di induzione, che afferma che se una proprietà vale per la prima forma della serie e, data una forma qualunque della serie, vale per la consecutiva seguente, allora la proprietà vale per tutte le forme della serie:

Data una serie limitata (o illimitata) di 1° specie ABCD...LM ... per dimostrare che una proprietà P vale per tutte le forme della serie basta dimostrare: 1. che P vale per la prima forma A della serie 2. che supposto valga per una forma X scelta ad arbitrio nella serie vale anche per la consecutiva seguente.⁴⁸

Il teorema di induzione completa (il cui nome - osserva Veronese citando una memoria di Benno Erdmann del 1887 - è impreciso perché la dimostrazione che si svolge secondo tale principio, è perfettamente deduttiva, anche se il criterio diretto è induttivo)⁴⁹

[...] è una conseguenza immediata delle definizioni della serie limitata e illimitata di 1° specie. Nel nostro ordine di idee, che ci pare il più naturale nella costruzione delle prime serie, limitate e illimitate, il principio suddetto deriva da questa costruzione come proprietà speciale di queste serie.⁵⁰

Ad avanzare l'esigenza della giustificazione rigorosa dell'applicazione aritmetica del principio di induzione completa, che permette nel caso dei numeri naturali di estendere una proprietà valida per un certo numero al suo successivo, furono per primi Frege e Dedekind.⁵¹ A questo proposito, come più in generale in relazione all'origine dei numeri e all'individuazione delle proprietà che li caratterizzano, faremo riferimento soltanto a Dedekind, innanzitutto perché Veronese non conosce l'opera di Frege, in secondo luogo perché è dal saggio di Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen?* che Veronese deriva presumibilmente la propria definizione e dimostrazione del principio di induzione nonché l'idea che i numeri non siano dei semplici simboli che abbreviano il calcolo ma dei concetti le cui proprietà vanno subordinate "a quei concetti generali e a quelle attività dell'intelletto

⁴⁸ FG, p. 18, § 2, n. 39, l.

⁴⁹ FG, p. 18, § 2, n. 39, nota 1. Il testo citato di Benno Erdmann è "Zur Theorie des Syllogismus und der Induktion", pubblicato in A.A.V.V., [1887], pp. 197-238.

⁵⁰ FG, p. 18, § 2, n. 39, nota 1.

⁵¹ Cfr. Mangione-Bozzi, [1993], cap. III, specialmente pp. 261-269 e 290-301.

senza le quali in assoluto non è possibile alcun pensiero".⁵² Il principio di induzione completa, essenziale per la definizione delle operazioni di somma e sottrazione tra numeri, nonché per la dimostrazione di molti teoremi aritmetici, è introdotto da Dedekind come una proprietà dei numeri naturali derivabile da un teorema più generale che concerne le catene, ossia quei particolari insiemi che rispetto ad una data rappresentazione contengono la propria immagine:

Teorema di induzione completa. Per dimostrare che la catena A_0 [la catena di A, ossia la comunione di tutte le catene di cui il sistema A è parte] è parte di un qualsivoglia sistema Σ (sia esso parte di S o no [ove S è un sistema di elementi del quale A è parte]), basta mostrare che A è parte di Σ e che l'immagine di ogni elemento comune di A_0 e Σ è anch'essa elemento di Σ .⁵³

La formulazione di Veronese si differenzia da quella di Dedekind perché non fa cenno esplicito a gruppi o sistemi o insiemi di oggetti, bensì ricorre al concetto di serie illimitate di prima specie di cose. Il problema della determinazione precisa della funzione di successore, risolto brillantemente da Dedekind mediante il concetto di catena, resta in Veronese soltanto sullo sfondo, perché egli continua a muoversi, non senza qualche ambiguità, su un piano logico che precede l'introduzione delle forme matematiche vere e proprie. Poiché il concetto di serie è intuitivo e molto generale (esso non è ancora stato definito rigorosamente da un punto di vista matematico, dato che è un concetto derivato immediatamente dai concetti primitivi del pensiero, prima e poi), generale è anche l'enunciato del principio di induzione: ciò risponde all'intenzione e agli scopi di Veronese, il quale vuole mostrare che una delle proprietà essenziali dei numeri non vale necessariamente solo per i numeri ma per tutte le cose che formano una serie illimitata di 1° specie (in questo senso si richiama all'idea di Dedekind di cercare le proprietà valide in generale per tutte le catene).

Dopo aver introdotto i concetti di serie limitata e illimitata di prima specie, Veronese dimostra che ogni gruppo ordinato

⁵² Dedekind, *Lettera a Keferstein del 27 febbraio 1890*, trad. it. in Dedekind, [1982], p. 154.

⁵³ Dedekind, [1888], p. 97 [per esigenze tipografiche abbiamo sostituito ad alcuni simboli del testo un'espressione linguistica].

naturale (che è il risultato dell'unire le cose successive di una serie naturale e dunque è limitato) può essere posto in corrispondenza univoca e nello stesso ordine con un solo sottogruppo di un gruppo ordinato qualunque illimitato di prima specie, facendo corrispondere al primo elemento del primo gruppo un elemento dato qualunque del secondo. In altre parole, un gruppo limitato corrisponde biunivocamente ad un solo sottogruppo di un gruppo illimitato i cui sottogruppi limitati siano tutti di prima specie, cioè non contengano sottogruppi illimitati. Veronese dimostra poi che due gruppi ordinati illimitati di prima specie (ossia due gruppi tali che ogni loro sottogruppo limitato avente per primo elemento quello del gruppo dato sia di prima specie) possono sempre essere posti in corrispondenza univoca e nello stesso ordine fra loro. Si dimostra anche che è possibile porre in corrispondenza un gruppo ordinato illimitato di prima specie con ogni gruppo ordinato illimitato contenuto in esso (infatti questo sarà un gruppo ordinato illimitato di prima specie). Questo teorema ammette la possibilità di stabilire una corrispondenza biunivoca tra un insieme infinito ed una sua parte, contro il principio che afferma che il tutto è maggiore della parte.²⁴

1.1.3 Il concetto di gruppo

Tra le ragioni che hanno permesso a Veronese la costruzione di un continuo non archimedeo vi è la determinazione di un concetto di aggregato adeguato alla descrizione delle grandezze geometriche. Per comprenderne la peculiarità è utile un confronto con le riflessioni di alcuni autori che hanno offerto un contributo essenziale alla nascita della teoria degli insiemi: Bolzano, Dedekind, Cantor. Diversi sono i nomi usati nell'Ottocento per denotare gli insiemi; la varietà della terminologia rispecchia una pluralità di prospettive non ancora confluite in una teoria organica; l'odierna teoria degli insiemi si è infatti costituita solo nel Novecento come disciplina autonoma all'interno della ma-

²⁴ Pochi anni prima della pubblicazione dei *Fondamenti* tale caratteristica degli insiemi infiniti venne adottata da Dedekind nel già citato saggio *Was sind und was sollen die Zahlen?* come una definizione positiva dell'infinito, vale a dire come quella caratteristica che lo distingue dal finito, nell'ambito del quale il tutto è invece sempre maggiore della parte. Dedekind, [1888], p. 98.

tematica. Senza pretendere di affrontare qui l'interessante ma vasta questione delle relazioni sussistenti tra i diversi concetti di insieme o molteplicità emersi nello sviluppo della matematica ottocentesca, riteniamo comunque interessante accennare brevemente ad alcune differenze terminologiche tra Bolzano, Dedekind, Cantor per individuare l'origine dei concetti di gruppo e serie in Veronese. Bolzano utilizza il termine *Inbegriff* come concetto generale di aggregato, quindi introduce termini particolari quali *Menge*, *Vielheit*, *Summe*, *Reihe* per denotare insiemi con particolari proprietà. Dedekind utilizza il termine *System* come sinonimo di complesso, molteplicità, totalità di cose distinte riunite insieme dallo spirito che le considera sotto un punto di vista comune. Un sistema è a sua volta una cosa in quanto oggetto del nostro pensiero ed è completamente determinato quando per ogni cosa sia determinato se essa è o non è un elemento del sistema. Cantor adotta inizialmente *Mannigfaltigkeit* e *Menge* come sinonimi, ma in una lettera a Dedekind del 1899 distingue *Vielheiten* (*Systeme*, *Inbegriffe*) consistenti di cose e *Vielheiten* inconsistenti: solo le prime sono propriamente *Menge* in quanto possono essere a loro volta concepite come oggetti.²⁵ Veronese utilizza il termine *gruppo* come sinonimo di aggregato, molteplicità, sistema e il termine *somma* per indicare l'operazione di unione tra grandezze matematiche.²⁶

Analizzando in maggiore dettaglio le definizioni di aggregato, sistema, molteplicità, pluralità, gruppo è possibile cogliere alcune risonanze e differenze teoricamente rilevanti tra il testo dei *Fondamenti di geometria* e le opere di Bolzano, Dedekind, Cantor. Un aggregato [*Inbegriff*] di certe cose è per Bolzano una congiunzione o una riunione di queste cose, un essere unite delle stesse, un tutto nel quale esse compaiono come parti, senza che sia determinato se esista e quale sia l'ordine nel quale le cose sono considerate insieme.²⁷ Si introduce un'analogia tra l'operazione unificante del pensiero e la congiunzione linguistica delle parole: a fondamento della con-

²⁵ Cantor, [1899], p. 443.

²⁶ Nell'edizione tedesca dei *Fondamenti* il termine "aggregato" è tradotto con *Aggregat* e non con *Inbegriff*: non si ha dunque identità terminologica tra Veronese e Bolzano.

²⁷ Bolzano, [1837], §. 82, pp. 393-394, p. 396.

giunzione e sta infatti il concetto di un aggregato di cose o di un tutto che si compone di parti.⁵⁸ Veronese non fa riferimento esplicito alla copula ma intende definire l'unire nel suo senso primitivo e comune; fornendo un esempio di gruppo, scrive: "Ho ad es. l'idea A, poi l'idea B; dunque ho avuto più idee, cioè A e B. Considerando poi insieme queste idee ho il gruppo d'idee A e B."⁵⁹ Se la riunione di più cose è spiegata da Dedekind mediante la considerazione delle stesse sotto un punto di vista comune e da Cantor in forza di una legge che permette di riunire elementi determinati in un tutto ma anche come frutto di un procedimento di astrazione dalle caratteristiche non comuni,⁶⁰ Veronese e Bolzano introducono innanzitutto la riunione di più oggetti come correlato della congiunzione. Benché in tutti questi casi si tratti di un'operazione del pensiero, nei primi due si ha un'interpretazione del concetto di aggregato che presta il fianco alle critiche fregeane contro l'astrazione, mentre nel terzo si insiste soprattutto sulla capacità del pensiero di costruire collezioni di oggetti a partire da oggetti dati, i quali possono essere totalmente arbitrari purché soddisfino ad una condizione di non contraddittorietà reciproca.

Sia per Bolzano che per Veronese l'ordine non è un componente essenziale del concetto di aggregato o di gruppo. Per poter pensare insieme degli oggetti è necessario per Bolzano disporli in una successione; l'ordine non appartiene tuttavia alla rappresentazione in sé di aggregato, la quale è oggettiva e non ha un'esistenza reale nello spazio e nel tempo. L'ordine è presente soltanto come determinatezza spazio-temporale delle rappresentazioni pensate o espresse linguisticamente. Nel concetto di aggregato non è determinato se ci sia e quale sia l'ordine delle parti, la successione di esse: l'ordine è una condizione perché si diano le rappresentazioni pensate o espresse linguisticamente ma non pertiene essenzialmente alle rappresentazioni in sé. Anche Veronese distingue gruppo e gruppo ordinato: tale distinzione non dipende però dalla natura delle cose bensì dalla scelta convenzionale di tenere o non tenere conto dell'ordine considerato come un contrassegno dell'operazione

⁵⁸ Bolzano, [1851], p. 2.

⁵⁹ FG, p. 6, § 4, n. 13 [corsivo mio].

⁶⁰ Dedekind, [1887], p. 87. Cantor, [1883], p. 127.

di unione.⁶¹ Mentre per Bolzano la successione [Reihe] è un particolare tipo di Inbegriff, per Veronese essa è distinta dal gruppo ordinato perché non contiene il concetto di unione;⁶² in ciò Veronese si differenzia anche da Cantor, che definisce la successione [Folge] come una pluralità ben ordinata, tale cioè che ogni sua parte abbia un primo elemento.⁶³

Una formulazione generale del concetto di aggregato si trova in Bolzano, che in base alle diverse proprietà degli elementi determina diverse nozioni di totalità. Un aggregato che sia considerato facendo astrazione dalla struttura e dalle relazioni d'ordine che sussistono tra gli elementi è un insieme [Menge]; un insieme i cui elementi sono considerati come unità di un certo tipo A (o come oggetti omogenei che cadono sotto uno stesso concetto A) è detto pluralità di A [Vielheit von A].⁶⁴ Gli aggregati che senza alcuna alterazione essenziale possono essere considerati dal punto di vista per cui le parti delle parti sono parti del tutto si chiamano somme [Summen] e godono della proprietà associativa.⁶⁵ Un aggregato nel quale sia definita una legge uniforme che permetta, per ogni elemento, di determinare un successore (o un predecessore) di tale elemento è una successione [Reihe] di termini.⁶⁶ Un aggregato non può essere costituito da più elementi uguali fra loro, mentre una serie può contenere anche elementi ripetuti: essi sono distinguibili perché sono costituiti dalle nostre rappresentazioni degli oggetti.⁶⁷ La definizione di aggregato proposta da Bolzano presenta tratti comuni sia con la definizione di Cantor che con quella di Veronese:

[...] qualunque oggetto arbitrario A può venire riunito in un aggregato [Inbegriff] con tutti gli altri oggetti arbitrari B, C, D, ..., ovvero (esprimendosi in modo ancor più rigoroso) affermando

⁶¹ Cfr. FG, p. 9, § 6, n. 26.

⁶² Come si è già detto nel § 1.1.2, Veronese utilizza spesso il termine serie come sinonimo di successione: in ogni caso non intende fare riferimento all'unione di più oggetti ma solo all'ordine nel quale essi si susseguono.

⁶³ Cantor, [1899], p. 444.

⁶⁴ Bolzano, [1851], p. 4. Cfr. anche Bolzano, [1837], I, § 84, pp. 399-401, § 86, p. 407.

⁶⁵ Bolzano, [1851], p. 4.

⁶⁶ Bolzano, [1851], p. 5. Cfr. anche Bolzano, [1837], I, § 85, pp. 401-406.

⁶⁷ Bolzano, [1837], I, § 85, p. 404. Cfr. anche Bolzano, [1851], § 3.

che questi oggetti formano, già di per se stessi, un aggregato intorno al quale si possono enunciare numerose verità, più o meno importanti, alla sola condizione che ognuno dei simboli A, B, C, D, ... rappresenti realmente un oggetto diverso (*anderen Gegenstand*); cioè alla sola condizione che non sia vera nessuna delle proposizioni: A è identico a B, A è identico a E, B è identico a C, e così via. Infatti, se A fosse identico, per esempio, a B, sarebbe ovviamente assurdo parlare di un aggregato composto dalle cose A e B.⁶⁸

Benché la terminologia di Veronese ricalchi abbastanza fedelmente quella proposta da Bolzano, le due definizioni presentano però una differenza rilevante: per Bolzano gli oggetti devono essere tra loro diversi (solo nel rispetto di questa condizione è possibile enunciare delle verità intorno all'aggregato), per Veronese possono anche essere tra loro uguali. Mentre il primo richiede che gli elementi di un aggregato siano considerati ciascuno una sola volta (questa caratteristica è rimasta, attraverso l'elaborazione cantoriana, a connotare il nostro concetto di insieme), il secondo ammette che un aggregato possa essere composto dalle cose A e B anche se sono identiche: è sempre possibile, infatti, considerare l'atto del pensiero mediante il quale il concetto A è stato ripetuto per ottenere la diversità tra A e la ripetizione di A. Per Veronese è sufficiente che gli oggetti siano separati e distinti piuttosto che diversi. Un'altra differenza tra Bolzano e Veronese concerne l'esistenza di certi insiemi particolari che non hanno alcun elemento o ne hanno uno solo. Poiché un aggregato è una riunione di cose, Bolzano esclude che abbia senso parlare di un insieme che contiene meno di due elementi: non esistono né l'insieme vuoto né insiemi a un solo elemento.⁶⁹ Veronese al contrario ammette la possibilità sia di insiemi costituiti da un solo oggetto sia dell'insieme vuoto: l'insieme vuoto è un nome introdotto per convenzione per designare il risultato dell'operazione del togliere tutte le parti di un tutto.

Per evitare talvolta distinzioni inutili e dannose, anziché dire:

⁶⁸ Bolzano, [1831], p. 223 (trad. it., pp. 2-3).

⁶⁹ Bolzano, [1837], I, § 84, p. 400. Bolzano non ammette nemmeno lo zero tra i numeri, però ammette concetti singolari che hanno estensioni a un solo elemento e concetti vuoti che non hanno estensione.

un oggetto (cosa), diremo anche: un gruppo di un solo oggetto. [...] Per esprimere che togliendo tutte le parti del tutto non vi è alcuna parte rimanente, diremo che nulla rimane. Per evitare distinzioni inutili, o che facendole complicano le questioni, diremo anche che si ottiene in tal caso un gruppo nullo. [...] In questo caso il nulla si considera per convenzione come qualche cosa, vale a dire come un gruppo di nessuna cosa.⁷⁰

Le condizioni che i vari autori impongono sugli elementi di un insieme sono differenti e diversi sono anche i concetti di aggregato che ne derivano: Veronese, come Schröder, richiede che gli elementi di un gruppo siano tra loro non contraddittori: tale condizione di natura essenzialmente logica è assente sia in Dedekind sia in Cantor, che considerano inizialmente insiemi di oggetti omogenei, quali punti o numeri. È proprio l'introduzione del concetto di gruppo o aggregato come risultato di un'operazione mentale di pensare insieme cose qualsiasi che rende necessario esplicitare la condizione di non contraddittorietà. Essa è comunque implicitamente contenuta nel collegamento mentale che deve sussistere tra le cose perché si dia un sistema nel senso di Dedekind. Cantor non affronta il problema perché la sua nozione di insieme è più ristretta di quella di Veronese: dalla definizione del 1883 si ricava che nella nozione di molteplicità o insieme è inclusa l'esistenza di una legge per mezzo della quale un Inbegriff di elementi determinati può essere collegato in un tutto;⁷¹ nei *Beiträge* si precisa che gli oggetti devono essere del tutto diversi tra loro, senza elementi comuni.⁷² Veronese non impone questa condizione: a differenza degli insiemi cantoriani i gruppi possono contenere anche elementi ripetuti. Poiché il gruppo è definito come risultato di un'operazione del pensiero e poiché il pensiero può ripetere un concetto A ottenendo il concetto A, non è possibile postulare che tutti gli oggetti che il pensiero riunisce in un gruppo siano distinti. Gli oggetti di un gruppo possono anche essere ripetuti un certo numero di volte: essi saranno tra loro distinguibili in base alla posizione. Per posizione non si deve però intendere necessariamente l'ordine,

⁷⁰ PG, p. 6, § 4, n. 13, Def. III e p. 11, § 8, n. 31, Def. I e nota I.

⁷¹ Cantor, [1866], p. 204, Tr. it. in Cantor, [1883], p. 127.

⁷² Cantor, [1895-97], p. 282.

ossia il posto indicato in una successione da un numero ordinale: Veronese infatti introduce i concetti di molteplicità e di gruppo indipendentemente dal concetto di numero per rivendicare la piena autonomia della geometria dall'analisi. La nozione di gruppo costituisce il concetto primitivo comune tanto all'una che all'altra disciplina: da essa derivano sia il concetto di numero sia quello di grandezza geometrica. Il numero è un gruppo ordinato di unità ottenuto per astrazione da un gruppo di oggetti; una forma geometrica è un sistema determinato da elementi ad una dimensione e identico nella posizione delle sue parti.⁷³ Il concetto di numero non interviene nella determinazione del concetto di grandezza geometrica e il concetto di grandezza geometrica non serve a determinare quello di numero. Grazie a questa definizione di gruppo che non richiede che gli elementi siano semplici, le grandezze geometriche continue sono introdotte come insiemi di parti e non come insiemi di punti. Gli elementi di un sistema geometrico (i segmenti di una retta) possono essere a loro volta sistemi di parti (insiemi di punti), a condizione che le parti delle parti (i punti) non siano parti del tutto (la retta). Vedremo nel § 2.1 che questa condizione è rispettata perché i punti sono parti dei segmenti ma non parte della retta. Mediante questa definizione di gruppo il continuo è determinato come un sistema di parti continue ciascuna delle quali può essere a sua volta scomponibile in parti. La considerazione della retta come un sistema di segmenti anziché come un insieme di punti contribuisce a indirizzare Veronese verso una soluzione originale del problema della continuità della retta.

1.2 UGUAGLIANZA E GRANDEZZA

Osservando che nel testo di Euclide manca una definizione del concetto di grandezza,⁷⁴ che pure riveste un ruolo centrale nel problema dei fondamenti della matematica, Veronese si assume il compito di determinare in modo univoco il significato del termine, proponendo una definizione astratta che

⁷³ Cfr. i §§ 1.3 e 2.1.

⁷⁴ FG, p. 15, § 1, n. 38, nota 2. "Euclide non spiega in nessuna parte dei suoi Elementi il concetto di grandezza, come del resto non ne spiega molti altri."

non pretende di essere applicabile all'intero ambito di studio della scienza matematica, ma soltanto agli enti studiati nei *Fondamenti di geometria*:

Questa definizione delle forme matematiche astratte vale certamente per tutto quello che noi considereremo, ma non intendiamo però che questa definizione debba essere assoluta e quindi circoscrivere fin d'ora il campo della matematica.⁷⁵

Il termine *forma* era stato sostituito a quello meno ampio di grandezza già da Grassmann nella *Ausdehnungslehre*, ove per forma del pensiero s'intende l'essere particolare posto dal pensiero, oggetto della matematica pura:

Di conseguenza la matematica pura è la scienza dell'essere particolare in quanto divenuto ad opera del pensiero. Chiamiamo l'essere particolare, inteso in questo senso, una *forma di pensiero* o semplicemente una *forma*. Così la matematica pura è la *teoria delle forme*.⁷⁶

La teoria generale delle forme, che comprende anche l'aritmetica e la teoria combinatoria (agli oggetti delle quali il termine grandezza poco o nulla si attaglia) è costituita da una serie di verità, che suppongono soltanto i concetti generali d'uguaglianza, diversità, unione e separazione. Le forme matematiche sono cose che devono poter essere poste uguali o disuguali ad altre cose, ossia enti analizzabili nella loro relazione con altri enti.⁷⁷ Discutendo questa definizione di Grassmann, Veronese analizza e definisce innanzi tutto la relazione di uguaglianza tra cose.

⁷⁵ FG, p. 15, § 1, n. 38, nota 2.

⁷⁶ Grassmann, [1844], p. 23. Grassmann riprende un'idea presentata già nel 1810 da Bolzano in *Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Arithmetik*, ove si definisce la matematica "come una scienza che tratta delle leggi generali (forme) alle quali si devono confermare le cose nella loro esistenza". Bolzano, [1810], p. 11.

⁷⁷ Anche qui è interessante confrontare il testo citato di Bolzano, il quale afferma che la consueta definizione di matematica come scienza delle grandezze "è troppo angusta, perché la grandezza è considerata per sé e in astratto soltanto nella pura *mathesis generalis*, cioè nella *logistica* o nell'*aritmetica*, ma non esaurisce neppure il contenuto di questa scienza. Infatti in molti problemi di *teoria combinatoria* [...] il concetto di grandezza o di numero non compare neanche una volta." Bolzano, [1810], p. 4.

1.2.1 La relazione di uguaglianza

Una cosa A è uguale ad una cosa B quando il concetto di A è il concetto di B.⁷⁸ Tale relazione gode delle proprietà riflessiva (enunciata nel principio stesso d'identità: la cosa A è uguale a se stessa, perché il concetto di A è il concetto di A), simmetrica e transitiva.⁷⁹ Una formulazione chiara e precisa delle tre proprietà che descrivono la relazione d'uguaglianza si trova già negli *Arithmetices principia nova methodo exposita*, pubblicati da Peano nel 1889: riflessività, simmetria e transitività dell'uguaglianza sono tre delle nove proprietà che Peano introduce come assiomi della teoria dei numeri naturali. Veronese precisa che queste tre proprietà non riguardano soltanto i numeri ma sono piuttosto proprietà logiche generali, la prima delle quali coincide con il principio d'identità.⁸⁰

Accanto alla relazione di uguaglianza Veronese introduce quella di diversità fra cose, riconducendola alla diversità tra concetti: A è diverso da B, se il concetto della cosa A non è il concetto della cosa B. La relazione di diversità gode della proprietà simmetrica e di un'altra proprietà, la quale afferma che se A è uguale a B e A è diverso da C, allora B è diverso da C.⁸¹ Le relazioni di uguaglianza e di diversità risultano ben definite quando sono definite le proprietà semplici delle cose: solo dal confronto tra i contrassegni delle cose, infatti, è possibile stabilire l'identità tra i rispettivi concetti. Ammettendo di poter determinare in modo non ambiguo tutti i contrassegni delle cose che vogliamo confrontare e ammettendo inoltre che ciascuno di essi descriva una proprietà semplice della cosa (Veronese non insiste su questa condizione che costituisce però un presupposto essenziale della sua definizione di uguaglianza), diremo che due cose A e B distinte sono uguali in senso assoluto (o identiche) quando sono uguali rispetto a tutti i loro

⁷⁸ FG, p. 3, § 2, n. 8, Def. VI.

⁷⁹ Le ultime due proprietà affermano rispettivamente che se A è uguale a B, anche B è uguale ad A e che se A è uguale a B e B è uguale a C, allora A è uguale a C; anch'essa si deduce dal principio d'identità (se A è il concetto B, si dimostra che B è il concetto A, mentre se A è il concetto B e B è il concetto C, si dimostra che A è il concetto C). FG, p. 3, § 2, n. 8, d-e.

⁸⁰ FG, p. 28, § 2, n. 46, nota 1.

⁸¹ FG, p. 3, § 2, n. 8, Def. VII, g-h.

contrassegni che consideriamo (e scriveremo $A=B$), mentre diremo che sono uguali in senso relativo (o equivalenti) quando sono uguali rispetto ad alcuni dei contrassegni che consideriamo (scriveremo $A=B$). Ad esempio Tizio e Caio sono uguali in senso relativo perché sono uguali rispetto al contrassegno uomo, mentre potrebbero essere diversi rispetto ad altri contrassegni, quali il colore dei capelli, l'età, la forma del viso. Due unità, invece, sono uguali in senso assoluto, perché sono uguali rispetto al contrassegno essere una anziché più cose, che è l'unico rilevante: in questo caso uguaglianza assoluta e uguaglianza relativa coincidono.⁸²

Come è però possibile che due cose distinte siano uguali? Se l'uguaglianza è relativa non si ha contraddizione, perché le cose possono differire secondo i contrassegni dai quali si è fatta astrazione. Se l'uguaglianza è intesa in senso assoluto, si può osservare che i contrassegni rilevanti nel confronto sono le proprietà intrinseche dell'oggetto e non quelle relazionali: perché due cose siano distinte eppure identiche non è possibile che esse siano uguali rispetto a tutti i contrassegni, ma è sufficiente che lo siano rispetto a tutti i contrassegni che le caratterizzano in se stesse.⁸³ Ciò che distingue due cose identiche è la posizione, ossia una proprietà che concerne le cose nei loro rapporti reciproci. Due cose pensate (e in particolare gli oggetti matematici astratti) sono sempre distinte per il fatto di essere poste prima una e poi l'altra nel pensiero: data una cosa A e ripetendo A si ottiene una cosa distinta dalla prima ma ad essa identica. La posizione non è una nota caratteristica delle cose ma riguarda le relazioni reciproche tra cose: può essere assunta come contrassegno per differenziare gli elementi di una successione, ma non è propria di nessuno di

⁸² È interessante osservare che già Bolzano aveva introdotto la considerazione di proprietà degli oggetti sotto un certo aspetto (in gewisser Rücksicht): in particolare aveva osservato che a quasi qualunque oggetto si può attribuire unità sotto un certo aspetto, cioè in relazione ad una certa rappresentazione sotto la quale esso cade come oggetto, anche se si può benissimo concedere che sotto altri aspetti (cioè in relazione ad altre rappresentazioni) tale oggetto non abbia unità. Cfr. Bolzano, WL, § 86, p. 407.

⁸³ FG, p. 15, nota 2: "[...] due cose si possono dire identiche od uguali quando il concetto dell'una è il concetto dell'altra considerata ciascuna in sé e non in relazione di posizione con altre cose."

essi. Se così non fosse, il principio leibniziano di identità degli indiscernibili (se A e B sono uguali sotto tutti gli aspetti sono lo stesso ente) ci imporrebbe di considerare relativa e non assoluta l'uguaglianza di due cose distinte. Veronese può affermare l'identità di cose distinte perché non tiene conto della loro diversità: "Se si tenesse conto della loro diversità, ad una cosa A non si potrebbe sostituire nessun'altra cosa distinta da A."⁸⁴ Solo prescindendo dalla diversità di posizione tra due cose è possibile affermare l'identità e sostituirle l'una all'altra nel ragionamento. L'uguaglianza assoluta fra due cose in quanto identità tra i concetti corrispondenti implica che ad entrambe le cose corrisponda una stessa rappresentazione mentale rispetto alla quale le cose possono essere sostituite l'una all'altra:

Quando A e B sono uguali hanno la stessa rappresentazione mentale nella relazione di uguaglianza, e quindi pensare ad A è come se si pensasse alla cosa B; diciamo perciò che le possiamo sostituire una all'altra nel loro concetto o nella loro determinazione, o che si possono scambiare fra loro.⁸⁵

Se le cose sono uguali in senso assoluto, allora sono intercambiabili, mentre se sono uguali in senso relativo possono essere sostituite l'una all'altra soltanto rispetto ai contrassegni comuni. L'intercambiabilità di due cose uguali altro non è che l'identità leibniziana, definita come sostituibilità *salva veritate*: A è identico a B quando la sostituzione di A con B, o viceversa, conserva la verità degli enunciati che concernono A o B. Veronese riprende tale idea di uguaglianza dal *Lehrbuch der Arithmetik* di Grassmann, al quale fa riferimento commentando alcune affermazioni di Stolz:

Stolz aggiunge che due cose siccome non possono essere uguali in ogni loro contrassegno è troppo dire, secondo Grassmann, che due cose sono uguali quando in ogni giudizio si può porre l'una al posto dell'altra.⁸⁶

L'uguaglianza — afferma Grassmann — è un concetto sempli-

⁸⁴ FG, p. 4, § 2, n. 9.

⁸⁵ FG, p. 3, § 2, n. 8.

⁸⁶ FG, p. 5, § , nota 2. Il testo di Stolz cui Veronese fa riferimento è *Vorlesungen über die allgemeine Arithmetik*.

ce, determinato in base alla possibilità di sostituire reciprocamente due cose in ogni giudizio.⁸⁷ Benché Veronese non menzioni questo fatto, l'idea della possibilità di concepire in molti modi l'uguale è presente nel testo di Grassmann: due linee limitate, ad esempio, possono essere confrontate in base alla lunghezza o alla direzione, o alla posizione, o alla lunghezza ed essere uguali secondo un aspetto, diverse secondo un altro. Questo non significa che, dati due oggetti, esistano tra essi diverse relazioni di uguaglianza o che la relazione di identità sia mutevole o multiforme; ciò che varia, infatti, non è la relazione stessa ma le cose alle quali è applicato il confronto, poiché esse non sono più gli oggetti dati (determinati da un complesso di note caratteristiche), ma singoli aspetti o note di essi. Benché due linee uguali solo per la lunghezza non siano identiche o uguali in modo assoluto, le rispettive lunghezze sono identiche e dunque la relazione di uguaglianza è assoluta:

In effetti noi non possiamo dire di due rette della stessa lunghezza che esse sono uguali in quanto tali, ma solamente che le loro lunghezze sono uguali, e per parte sua tale lunghezza è allora nella relazione assoluta d'uguaglianza.⁸⁸

Affermare l'uguaglianza di due linee della stessa lunghezza anziché l'uguaglianza delle loro lunghezze è un modo impreciso di esprimersi, che ingenera l'errata credenza che esistano diverse relazioni di uguaglianza (che è invece proprio quanto Veronese afferma): ciò che in questo caso è identico o uguale in senso assoluto non sono le linee ma le loro lunghezze. La definizione di uguaglianza come sostituibilità in ogni giudizio implica che quando due oggetti sono uguali sussista una relazione d'identità tra tutti i contrassegni degli oggetti. Pur mutuando da Grassmann l'uso del termine forma per indicare una grandezza matematica, Veronese rifiuta il concetto di uguaglianza che serve a definirla: esso è troppo ristretto perché postula la sostituibilità degli enti in ogni giudizio, senza tenere conto del fatto che in giudizi diversi potrebbero essere

⁸⁷ "[...] uguale è ciò di cui si può sempre dire la stessa cosa o, in senso più generale, uguale è ciò che può essere sostituito reciprocamente in ogni giudizio." Grassmann, [1844], p. 33.

⁸⁸ Grassmann, [1844], p. 33.

differenti i contrassegni da considerare rilevanti: le stesse cose possono essere talvolta uguali, talvolta diverse. La definizione d'uguaglianza di Grassmann è anche troppo indeterminata, perché - continua Veronese - non precisa i contrassegni rispetto ai quali le cose devono essere confrontate:

H. Grassmann chiama grandezza ogni cosa che deve essere posta uguale o disuguale ad un'altra cosa. Questa definizione per la grandezza matematica, accettata anche da Stolz a me pare troppo ristretta nel senso in cui è intesa da Grassmann nel libro suddetto il concetto dell'uguale; mentre in generale è invece indeterminata, se non si dice rispetto a quali contrassegni sono uguali o disuguali e se non si aggiunge anche che debbano potersi determinare nei loro stati onde si rendano suscettibili di confronto le loro modificazioni. Per noi questi contrassegni sono tutto e parte ordine e modo di posizione.⁸⁹

L'obiezione di Veronese è valida se per definizione di uguaglianza tra due cose si accetta l'identità tra i rispettivi concetti e se si ammette che il concetto di una cosa sia una somma di contrassegni tra loro indipendenti e separati che determinano le cose. Da questo punto di vista l'uguaglianza è un nome che comprende in sé differenti tipi di relazioni, determinabili soltanto se sono definiti, in base alla loro rilevanza nel giudizio, i contrassegni delle cose che sono confrontate. Perciò Veronese introduce il concetto di grandezza determinando i contrassegni in base ai quali effettuare il confronto tra le cose: tutto e parte, ordine e modo di posizione. Si ottengono diverse relazioni di uguaglianza: due grandezze possono essere uguali in senso relativo per il fatto di essere entrambe parti di un tutto, o perché hanno lo stesso ordine o perché sono poste nello stesso modo, oppure perché sono uguali secondo due di questi contrassegni; le stesse grandezze sono invece uguali in senso assoluto o identiche quando siano uguali rispetto a tutti i contrassegni suddetti.

L'insistenza di Veronese sull'importanza della ricerca di una definizione precisa e appropriata di forma e di uguaglianza tra forme (sulla quale si fonda la possibilità del confronto tra le cose) è determinata dall'insoddisfazione per l'assenza di una

⁸⁹ FG, p. 15-16, nota 2.

definizione precisa di grandezza nel testo euclideo e dall'uso di definizioni oscure o insufficienti negli scritti di altri matematici e geometri dell'Ottocento. Uno degli obiettivi polemici di Veronese è Bernhard Riemann, che nel saggio *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* costruisce "il concetto di grandezza pluriestesa a partire da concetti generali di grandezza" e introduce lo spazio come "un caso particolare di grandezza triestesa."⁹⁰ La critica di Veronese alla definizione riemanniana di grandezza va inquadrata all'interno di una profonda differenza relativa alla natura e al metodo della geometria (che per Riemann è una scienza empirica). Pur riconoscendo che Riemann è stato il primo a fornire una "discussione profonda sui principi della geometria",⁹¹ Veronese ne critica l'impostazione analitica e in particolare la definizione di grandezza, che è oscura come oscuro è il rapporto che lega tale concetto a quello di varietà pluriestesa. Anche volendo assumere quest'ultimo come determinazione del concetto di grandezza matematica, esso resta, per Veronese, poco rigoroso, perché Riemann si avvale di termini non ben definiti, il cui significato intuitivo rimanda all'ambiente spaziale tridimensionale in cui viviamo:

La "einfache ausgedehnte Mannigfaltigkeit" (varietà semplicemente estesa) è distinta dal fatto che da un elemento (punto) è possibile un avanzamento (Fortgang) continuo e secondo due versi (Seiten), avanti e indietro. Come si vede questa non è astrattamente una definizione ben determinata, perché manca la definizione di versi, o di avanti (vorwärts) e indietro (rückwärts) e del continuo.⁹²

Un altro neo rilevante del saggio di Riemann è per Veronese la definizione di uguaglianza come sovrapposibilità, che, presupponendo il principio del libero movimento dei corpi rigidi, vale soltanto negli spazi tridimensionali a curvatura costante e non in generale per ogni tipo di grandezza astratta:

Riemann è oscuro nella definizione del concetto di grandezza. Egli parla di "Aufeinanderlegen der zu vergleichenden Größen"

⁹⁰ Riemann, [1854], p. 3.

⁹¹ FG, p. 574.

⁹² FG, pp. 574-575.

(della sovrapposibilità delle grandezze da confrontarsi), e che il misurare richiede "ein Mittel die eine Grösse als Massstab auf die andere fortzutragen" (un mezzo per trasportare una grandezza quale scala su di un'altra). Qui siccome non dà altra spiegazione, adopera il concetto del movimento dei corpi rigidi in varietà puramente astratte.⁹²

1.2.2 I contrassegni delle grandezze matematiche

Veronese dedica ampio spazio alla discussione della relazione di uguaglianza perché vuole definire l'uguaglianza delle figure geometriche senza fare ricorso al metodo per sovrapposizione, che presuppone il principio del libero movimento dei corpi rigidi. La definizione d'uguaglianza d'Euclide (cose che coincidono sono uguali) – afferma Veronese – è poco chiara, ma non va necessariamente interpretata nel senso del principio di sovrapposizione poiché essa riguarda "cose qualunque" ed è introdotta tra le "nozioni comuni". Euclide, inoltre, quando può (ad es. nel caso della dimostrazione dell'uguaglianza di due triangoli aventi un lato e due angoli adiacenti uguali) evita di ricorrere al principio del movimento senza deformazione.⁹⁴ Definendo l'uguaglianza come il risultato di un'operazione di confronto dei contrassegni delle cose è possibile affermare l'identità di due segmenti in base alla sola applicazione ai loro concetti dei principi di identità e diversità, senza postulare la possibilità del trasporto senza deformazione delle figure nello spazio:

È dai suddetti principi di identità e di diversità che trarremo in seguito quelli per le forme matematiche astratte e per le figure della geometria, senza bisogno di ricorrere al movimento dei corpi senza deformazione.⁹⁵

⁹² FG, p. 574.

⁹³ Cfr. FG, p. 617, nota 1.

⁹⁴ FG, p. 616. A sostegno della necessità di trovare una definizione di uguaglianza diversa da quella di sovrapposibilità delle figure, Veronese nota anche che il movimento senza deformazione presuppone ciò che dovrebbe definire, dando luogo ad un circolo vizioso: il giudizio che un corpo nel movimento da A a B non si deforma significa che il corpo nella posizione A è identico al corpo nella posizione B. "il giudizio che noi esprimiamo [...] si appoggia adunque sul principio d'identità. [...] Secondo questo modo di spiegare il movimento senza deforma-

La definizione di uguaglianza proposta da Veronese intende essere più generale rispetto a quella della sovrapposibilità delle figure e testimonia l'interesse per la determinazione di concetti e relazioni applicabili anche alla geometria pluridimensionale.

Così si restringe il concetto dell'uguaglianza facendolo dipendere dalle dimensioni dello spazio in cui le figure sono contenute, mentre ricorrendo ad uno spazio di una dimensione in più si possono far coincidere col suddetto principio.⁹⁶

Veronese propone l'esempio di due figure simili che in uno spazio a due dimensioni non possono essere sovrapposte ma in uno spazio a tre dimensioni, grazie ad una rotazione, possono coincidere: così "la mano destra si dice uguale alla sinistra e la immagine di un oggetto in uno specchio è geometricamente uguale all'oggetto stesso".⁹⁷ Il punto di vista di Veronese è quello del geometra proiettivo che cerca di dare una definizione generale dei concetti e delle relazioni fondamentali che comprenda in sé le altre definizioni più specifiche come casi particolari: la definizione di uguaglianza non deve essere valida soltanto nello spazio a tre dimensioni o in uno spazio a curvatura costante nel quale valga il principio del libero movimento dei corpi rigidi bensì anche nello spazio generale, che non ha un numero determinato di dimensioni.⁹⁸ In quest'aspirazione a conferire la massima generalità ai principi emerge la modernità di Veronese, che sulla scia di Klein e di Pasch cerca di stabilire una fondazione comune per la geometria proiettiva e per quella metrica.

In tale prospettiva egli individua un altro difetto del testo di Riemann: l'esistenza del concetto di varietà dipende da quello di varietà numerica che è necessario per determinare la prima.⁹⁹ La definizione di sistema a più dimensioni che Veronese

zione, e non ne conosciamo né sappiamo immaginarne altri, vi è una petizione di principio nella proposizione che due corpi sono uguali quando si possono sovrapporre senza deformazione."

⁹⁶ FG, p. 616.

⁹⁷ FG, p. 616, nota 1.

⁹⁸ Si veda il § 3.3.

⁹⁹ La definizione di Riemann è così riassunta da Veronese: "Data una varietà in cui l'elemento di natura qualsiasi viene determinato da n quantità variabili indipendenti, e viceversa (colla debita restrizione indicata da Cantor), essa si chiama

presenta nell'Introduzione ai *Fondamenti* e della quale ci occuperemo a lungo nei prossimi capitoli intende essere più generale e soprattutto indipendente dal concetto di numero:

Il punto di vista della nostra definizione dei sistemi ad una o a più dimensioni della nostra introduzione è più generale, perché da essa noi deduciamo anche le varietà numeriche.¹⁰⁰

Avendo in mente la determinazione di un continuo geometrico che non presupponga quello aritmetico dei numeri reali, Veronese cerca infatti di costruire un sistema di grandezze le cui proprietà possano essere descritte senza l'ausilio di coordinate numeriche. I contrassegni scelti come rilevanti nel confronto tra le forme matematiche sono i concetti di tutto e parte, di ordine e di modo di posizione:

Le cose i cui contrassegni sono tutto, parte, ordine e modo di posizione, o che si possono paragonare mediante questi contrassegni si chiamano *forme* o *grandezze matematiche astratte*, anche se si fa astrazione da alcuni dei suddetti contrassegni.¹⁰¹

Oltre alle relazioni di esser parte e di ordine che caratterizzano tutti i gruppi di oggetti Veronese introduce altre possibili relazioni tra grandezze:

L'ordine ci assicura quando una cosa è posta prima o dopo di un'altra, il modo riguarda invece le altre relazioni possibili di posizione che supponiamo esistano e non siano contenute nel concetto di ordine.¹⁰²

Tali relazioni sono indipendenti dal concetto di spazio geometrico: un modo di posizione è l'intervallo di tempo intercorso tra due atti mentali con i quali ripetiamo una stessa cosa A prima posta. Veronese cita un esempio estraneo alla geometria

varietà ad n dimensioni. Quando questa varietà è assoggettata alle leggi dello spazio ordinario, indipendentemente dalle dimensioni, essa si chiama pure spazio e punto il suo elemento." FG, p. 611. La restrizione indicata da Cantor è l'osservazione che per caratterizzare una varietà ad n dimensioni non è sufficiente postulare la determinazione dell'elemento per mezzo di n grandezze, ma occorre anche la continuità della corrispondenza fra gli elementi della varietà e i sistemi di valori del continuo (x_1, \dots, x_n) .

¹⁰⁰ FG, p. 611.

¹⁰¹ FG, p. 15.

¹⁰² [corsivo mio] FG, p. 15.

proprio per evitare "il sospetto che il modo con cui sono poste le parti nel tutto sia necessariamente dipendente dall'idea di spazio".¹⁰³ Un altro esempio di modo di posizione è dato dal colore delle tessere di un mosaico che, diversamente disposte, formano disegni diversi:

Colle stesse pietre di un mosaico di colore diverso e supposte uguali rispetto agli altri loro contrassegni si possono formare diversi mosaici. Possono essere poste nello stesso ordine rispetto alla loro successione e in modo differente (formando disegni diversi); o nello stesso modo (formando lo stesso disegno) e in ordine differente.¹⁰⁴

Ma anche la direzione delle figure rientra sotto il concetto di modo di posizione perché unendo insieme "i pezzi di un bicchiere rotto" si otterrà il bicchiere primitivo soltanto a condizione di ricostruire sia l'ordine dei pezzi sia la loro orientazione:

Coi pezzi di un bicchiere rotto unendoli insieme in un dato ordine e in un dato modo si ottiene il bicchiere primitivo (fatta astrazione dalle leggi fisiche), ma unendoli altrimenti si ottiene in generale un altro tutto non identico al bicchiere dato.¹⁰⁵

È interessante osservare che un esempio analogo, introdotto per lo stesso motivo (ossia per mostrare che la riunione di più parti in un tutto può avvenire in diversi modi) compare nei *Paradoxien des Unendlichen* di Bolzano, al quale Veronese fa riferimento nell'Appendice ai *Fondamenti*:

Esistono aggregati che, sebbene contengano gli stessi elementi A, B, C, D, ..., tuttavia, secondo il punto di vista (il concetto) da cui li consideriamo, si presentano come diversi (chiamiamo essenziale tale tipo di diversità); per esempio, un bicchiere intero e un bicchiere rotto in più pezzi, considerato come recipiente per bere. Chiamiamo ciò su cui si fonda tale distinzione tra aggregati di questo genere, la *modalità di collegamento*, o la *disposizio-*

¹⁰³ "Posta l'idea A, ripeto l'idea A e poi ancora l'idea A. Se si tien conto del tempo trascorso in ogni ripetizione si ha una relazione di posizione non compresa nel concetto di semplice successione e di ordine, poiché il tempo trascorso nella prima ripetizione può essere differente da quello trascorso nella seconda." FG, p. 15.

¹⁰⁴ FG, p. 20, § 3, n. 41.

¹⁰⁵ FG, p. 20, § 3, n. 41.

ne delle loro parti.¹⁰⁶

Concludendo, il modo di posizione è una relazione astratta tra grandezze interpretabile come distanza spaziale tra due corpi, come intervallo temporale tra due istanti, come distanza tra due suoni (determinata dalla differenza del timbro). Il concetto di grandezza definito da Veronese richiama l'idea moderna di struttura algebrica: esso è determinato da cose pensate insieme in un tutto (gruppo di elementi), da una relazione di appartenenza di queste cose al tutto (inclusione), da una relazione di stare prima o poi (ordine) e da una relazione di modo di posizione (una generica altra relazione tra gli elementi). L'interesse del procedimento un po' confuso e sicuramente tortuoso di Veronese risiede proprio nella sua estrema generalità: non è necessario descrivere gli enti di cui si sta parlando ma è sufficiente ammettere che essi possano essere confrontati tra loro secondo certe relazioni. Ciò che vogliamo sottolineare è il tentativo di Veronese di costruire una teoria generale delle forme che non valga soltanto per le grandezze geometriche. La forma di Veronese (e prima ancora quella di Grassmann) è concepita come un ente definito dalle relazioni che esso intrattiene con altri enti e non più come il genere astratto sotto il quale rientrano vari oggetti concreti. Ben diversa era la nozione greca di grandezza, che si riferiva primariamente agli oggetti "portatori" di grandezza (cioè le figure); la grandezza (lunghezza, larghezza, profondità) era un genere all'interno del quale si potevano distinguere diverse specie di oggetti: linee, superfici, solidi.¹⁰⁷ Non esisteva presso i greci un concetto di grandezza completamente astratto dagli oggetti ai quali essa era attribuita: si affermava ad esempio che le aree di due figure erano uguali ma non identiche, perché le figure erano queste aree stesse, mentre per noi è assolutamente naturale affermare che due figure uguali relativamente all'area hanno aree identiche. Veronese fornisce un concetto generale di grandezza, affrancato dall'oggetto che lo può incarnare: una forma matematica è un qualunque ente astratto che possa essere confrontato con altri enti secondo i contrassegni parte,

¹⁰⁶ Bolzano, [1851], pp. 3-4 (trad. it., p. 3).

¹⁰⁷ Stein, [1990], pp. 164-165.

tutto, ordine e modo di posizione.

È interessante porre in relazione il concetto astratto di grandezza che occorre in Veronese con la sua trattazione sintetica della geometria e con la costruzione del continuo non archimedeo, la determinazione del quale non sarebbe stata possibile senza la definizione di un concetto generale di forma del quale il numero sia soltanto un caso particolare. Solo la definizione di un ente astratto le cui proprietà fossero indipendenti da quelle dei numeri reali poteva infatti permettere la negazione del postulato di Archimede, implicato nella definizione dedekindiana di numero reale. La riflessione di Veronese sul concetto di grandezza è legata alla scelta di studiare gli enti geometrici senza ricorrere alle coordinate numeriche: esiste una correlazione tra metodo sintetico e sviluppo della trattazione algebrica astratta della geometria, che in conformità con le previsioni di Grassmann soppiantò nel Novecento sia il metodo sintetico sia quello analitico.¹⁰⁸ Questa correlazione è rafforzata dal legame riscontrabile tra le ricerche di Veronese e lo studio di un sistema di grandezze non archimedee condotto da Hans Hahn nel 1907 e che lo condusse alla scoperta di particolari proprietà comuni a tutte le strutture algebriche ordinate.¹⁰⁹ L'interesse di Veronese per la definizione di una teoria generale delle forme si inserisce in un panorama più ampio di studi sul concetto di grandezza: tra i matematici che a fine Ottocento s'interessarono alla costruzione di una teoria astratta delle grandezze, ricordiamo in particolare Rodolfo Bettazzi, la cui opera presenta diversi punti di contatto con il sistema di Veronese.¹¹⁰ Entrambi ritengono indispensabile definire preliminarmente il concetto di grandezza: innanzi tutto — scrive Bettazzi nella *Teoria delle grandezze* — gli enti studiati da una scienza devono essere ideali e le loro proprietà devono essere espresse come contemporaneità di certi concetti con certi al-

¹⁰⁸ Si veda il § 4.4.

¹⁰⁹ Cfr. il § 2.5.

¹¹⁰ Riferendosi all'opera di Bettazzi, Veronese nota che egli ha formulato alcune idee simili alle proprie: in particolare Bettazzi studia "certe classi ad una dimensione di 2° specie che si decompongono in n sottoclassi principali di 1° specie (essendo n un numero intero finito), le quali considerate isolatamente sono continue nel senso ordinario." FG, p. XXVI, nota 1.

tri, il che ne costituisce la definizione.¹¹¹ Per dire quando un ente è una grandezza non è necessario definire l'ente in sé, ossia determinare le proprietà che si riferiscono all'ente come tale ma è sufficiente indicare le proprietà che descrivono le relazioni dell'ente considerato con altri enti già introdotti o della stessa categoria da definirsi. Ciò che importa non è il singolo oggetto concreto che gode di una certa proprietà ma la proprietà stessa affrancata dal tipo di oggetto che ne gode. Un esempio è fornito dalla definizione dell'operazione di somma in Bettazzi: dopo aver stabilito quale tipo di proprietà gli enti ideali debbano possedere per essere delle grandezze, egli introduce un'operazione (il collegamento di un certo numero di enti ben definiti ad altri enti dati) che chiama *somma*. Essa non è legata in alcun modo, come avviene invece in Veronese, alle operazioni del pensiero, ma è semplicemente un'operazione che gode sempre di due particolari proprietà: la commutatività e l'associatività. Qualunque operazione che goda di queste proprietà è una somma. Il procedimento di Bettazzi è più generale di quello di Veronese, che resta legato al tentativo di ricercare le premesse indispensabili allo sviluppo del suo sistema geometrico: nei *Fondamenti* non è mai escluso il riferimento privilegiato alla geometria e al continuo rettilineo. Uno studio di poco successivo sulla teoria delle grandezze risale a Otto Hölder, il quale si propone di fondare (proprio come si può fare per la geometria e la meccanica) la teoria delle grandezze misurabili su un certo numero di fatti, che egli chiama assiomi delle grandezze o della quantità: tale teoria intende essere valida "per il confronto e l'addizione di tempi, masse, linee contenute, ecc."¹¹² A differenza di Veronese e di Bettazzi, cui Hölder fa riferimento, quest'ultimo limita esplicitamente la propria trattazione alla determinazione dell'usuale continuità delle grandezze senza occuparsi di quelle particolari grandezze studiate dai primi.

1.3 IL NUMERO

Poiché rifiuta il metodo analitico e la definizione dedekin-

¹¹¹ Bettazzi, [1890], pp. 3-4.

¹¹² Hölder, [1901], p. 3.

diana di numero reale (che presuppone il principio di Archimede) Veronese si sofferma a lungo sul concetto di numero, che è un particolare tipo di forma matematica. Un intero capitolo dell'Introduzione, il terzo, è dedicato alla definizione del numero come gruppo ordinato di unità ottenuto per astrazione da un gruppo ordinato di oggetti:

Dato un gruppo ordinato di oggetti ... ABCDE... qualunque, e se si considera ciascuno di questi oggetti come unità e facendo astrazione dal modo con cui sono posti, non però dal loro ordine, in modo che oggetti distinti danno unità distinte, il gruppo ordinato di unità che così risulta si chiama numero del gruppo dato.¹¹³

La definizione di Veronese riecheggia quella di Cantor, che definisce numero ordinale o tipo d'ordine di un insieme M "il concetto generale che si ottiene da M quando si astrae soltanto dalla natura degli elementi m , ma non dall'ordine con cui sono dati".¹¹⁴ Cardine di entrambe le definizioni è il concetto di astrazione, ossia la presupposizione della facoltà del pensiero di considerare soltanto alcuni o tutti i contrassegni delle cose nell'operazione del paragonare. Il numero, definito come gruppo ordinato di unità, è sempre associato ad un gruppo ordinato di oggetti: considerando ciascuno di questi oggetti come una sola cosa si ottengono tante unità uguali e nello stesso tempo distinte.

Per ottenere il concetto di numero di un gruppo ordinato di oggetti occorre innanzi tutto considerare ciascuno degli oggetti del gruppo come unità, ossia come qualcosa che "è una anziché più cose". In secondo luogo occorre astrarre dal modo di posizione, perché il numero di un gruppo di oggetti dipende soltanto dall'ordine nel quale li contiamo e non dal luogo che essi occupano nello spazio. La definizione proposta, derivando dalla "funzione logica del numerare", implica il concetto di ordine. Veronese non si serve però di un particolare aggettivo per connotare il numero ordinale in contrapposizione a quello cardinale, anche se conosce molto bene, citandoli in nota, due articoli di Cantor del 1883 e del 1887, nei quali si distinguono

¹¹³ FG, p. 26, §§ 45, Def. II.

¹¹⁴ Cfr. Cantor, [1895-97].

due specie di numeri:

Il "Cardinalzahl" secondo Cantor si ottiene da una molteplicità di cose facendo astrazione e dalle proprietà di queste cose e dall'ordine di esse, e chiama uguali due molteplicità quando si corrispondono univocamente, e quindi ad esse corrisponde lo stesso "Cardinalzahl"; "Idealzahl" l'ottiene invece facendo astrazione dalle proprietà delle cose ma non dall'ordine in cui sono date o si considerano. Il "Cardinalzahl" così definito non deriva certo dalla funzione logica del numerare poiché quando si conta si conta in un dato ordine salvo poi a vedere se cambiando l'ordine del conteggio si ottiene lo stesso numero.¹¹⁵

Il numero è il risultato di una particolare operazione del pensiero, il numerare o contare gli oggetti di un gruppo ordinato, e dipende dall'ordine secondo il quale si effettua la numerazione. Si può però dimostrare che per particolari gruppi (quelli ordinati naturali) il numero ottenuto contando gli oggetti è sempre lo stesso indipendentemente dall'ordine. In tal caso è possibile fare astrazione dall'ordine nel quale si conta e si ottiene il concetto derivato di numero cardinale.¹¹⁶ Un'ultima condizione importante nella definizione di Veronese è che oggetti distinti diano unità distinte, ossia che la relazione che lega il gruppo ordinato di oggetti e quello di unità da essi ottenute sia una corrispondenza univoca.

Presupposto della definizione di numero è il concetto di gruppo di unità o di cose considerate ciascuna come "una anziché più cose". Tale espressione richiama un'affermazione di Schröder secondo la quale il numero è ricavato per astrazione dalla realtà rappresentando gli oggetti unitari con le unità dell'aritmetica;¹¹⁷ essa riveste un particolare interesse alla luce dell'ampia trattazione critica che ne hanno fatto Gottlob Frege nei *Grundlagen der Arithmetik* (anteriori alla pubblicazione dei *Fondamenti*) e Edmund Husserl nella *Philosophie der Arithmetik*. Il

¹¹⁵ FG, p. 34, § 2, n. 48, nota 1. Gli articoli di Cantor citati da Veronese sono "Grundlagen einer Mächtigkeitslehre", [1883] e "Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten", [1887-88].

¹¹⁶ Veronese non parla però né di numeri cardinali né di numeri ordinali, ma soltanto di numero di un gruppo, anche se ammette che in alcuni casi non ha importanza l'ordine degli oggetti che lo compongono.

¹¹⁷ Cfr. Schröder, *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, 1873, p. 6, cit. in Frege, [1884], p. 249.

concetto di unità deriva dall'applicazione dell'operazione di astrazione ad un qualunque oggetto (fisico o mentale) che è considerato per il solo fatto di essere una sola cosa, facendo astrazione da tutti i suoi contrassegni particolari:

Unità si chiama una cosa qualunque X data considerando che è una anziché più cose, facendo astrazione dagli altri suoi contrassegni.¹¹⁸

L'unità presuppone un'operazione di astrazione da tutte le proprietà particolari di un oggetto: in che modo allora potrà essere distinta da un'altra unità se si è fatta astrazione da tutti i contrassegni particolari dell'oggetto? Poiché qualunque cosa può essere chiamata unità, l'esser uno è un contrassegno di tutte le cose: ma che tipo di contrassegno è una proprietà che vale indistintamente per tutti gli oggetti? Questi due problemi sono evidenziati dalle critiche di Frege all'idea di unità ottenuta per astrazione dai contrassegni di un oggetto. Benché Veronese presumibilmente non conosca il testo di Frege, è interessante valutare la portata di queste obiezioni alla definizione cantoriana di numero alla quale Veronese si richiama.

La definizione di numero come gruppo di unità si trova già in Euclide: *μοναδες* è ciò in virtù di cui ciascuna delle cose esistenti è chiamata uno e una moltitudine di esse è ciò di cui ciascun numero è composto. Il termine unità ben traduce il *μοναδες* greco, perché come questo oscilla tra vari significati: l'oggetto da contare, una proprietà di esso, il numero uno. Schröder - e anche Veronese - chiama unità ciascuno degli oggetti che sono contati, ritenendo l'esser uno una proprietà di tali oggetti. Per Frege invece l'unità - e più in generale il numero - non è mai una proprietà attribuibile agli oggetti, perché

[...] sembra strano che ogni oggetto abbia la proprietà di essere uno; è infatti incomprendibile come mai, se tutti gli oggetti hanno questa proprietà, si persista ancora ad attribuirle loro espressamente.¹¹⁹

¹¹⁸ FG, p. 26, § 1, n. 43, Def. I.

¹¹⁹ Frege, [1884], p. 262. Il numero è per Frege una proprietà di concetti: l'attribuzione di un numero contiene sempre un'affermazione intorno ad un concetto Frege, [1884], p. 282.

Se l'unità fosse semplicemente un altro nome per il termine cosa, perché ostinarsi a definire il numero come insieme di unità anziché come insieme di oggetti? Il motivo della preferenza risiederebbe "nell'uguaglianza che [...] viene attribuita agli oggetti della numerazione":¹²⁰ le differenze tra gli oggetti sarebbero infatti inessenziali ai fini della determinazione del loro numero. Tale uguaglianza tra le unità che compongono il numero non può però in nessun caso essere assoluta, altrimenti con la diversità si perderebbe anche la pluralità che per Schröder e Jevons caratterizza il numero:

Il numero non è che un altro nome per la diversità. L'esatta identità è unità e con la differenza nasce la pluralità. [...] La pluralità nasce quando e soltanto quando scopriamo una differenza.¹²¹

L'uguaglianza non può allora essere che relativa: il numero si ottiene astruendo dalle differenze particolari tra gli oggetti (che determinano la molteplicità), tenendo conto soltanto del fatto che le differenze esistono: in questo modo Jevons arriva a definire il numero come "la forma vuota della differenza". Per poter riunire più oggetti in un tutto unico occorre prescindere dalle differenze particolari tra gli oggetti senza dimenticare che qualche diversità però sussiste. Se il numero è un gruppo di unità, occorre che le unità che lo compongono siano tra loro diverse (o almeno distinguibili); come è possibile se le unità sono ottenute per astrazione da tutte le caratteristiche particolari che differenziano gli oggetti tra loro? Dato un insieme di oggetti separati, astruendo dai caratteri che li differenziano non si ottiene il concetto di numero ma "il concetto generale in cui rientrano quei singoli oggetti".¹²² Husserl analizza un'altra possibile soluzione: il concetto di quantità (e dunque anche quello di numero come quantità di unità) è ottenuto per astrazione da certi insiemi di oggetti considerando non le note ad essi comuni ma la relazione che li lega insieme a formare un tutto.¹²³ Un insieme è dato da contenuti singolari e da

¹²⁰ Frege, [1884], p. 267.

¹²¹ Jevons, *The principles of science*, 1833, p. 156, cit. in Husserl, [1891], p. 50.

¹²² Frege, [1884], p. 268.

¹²³ Husserl, [1891], pp. 17-21.

una relazione collettiva che li lega in un tutto: ciò che più insiemi hanno in comune è proprio tale relazione collettiva [*collective Verbindung*], che è in un certo senso la relazione più lasca, esteriore e generale che può sussistere tra gli elementi di un insieme. Per unità si può allora intendere ogni insieme i cui oggetti siano legati da una relazione collettiva in modo da formare un tutto. Considerare una cosa come "uno" vorrebbe allora dire considerarla come un tutto le cui parti sono tra loro in una relazione generica che le unisce: le parti scivolano in secondo piano mentre l'attenzione resta concentrata sulla relazione. Le differenze tra un insieme e l'altro (e dunque tra un'unità e un'altra) sono ancora presenti ma non è ad esse che si rivolge il nostro interesse:

Il plurale "parti" implica senza dubbio (indipendentemente dalla sua correlazione al concetto di tutto) la rappresentazione generale di una quantità, ma non esprime ciò che caratterizza in modo particolare tale quantità in quanto quantità. Quando noi abbiamo aggiunto che le parti sono legate collettivamente, abbiamo rinvio al punto al quale conduce il nostro interesse particolare e in virtù del quale la quantità è caratterizzata in opposizione ad altri tutti precisamente in quanto quantità.¹²⁴

Accanto a questa caratterizzazione psicologica del numero, è possibile ricercare altri modi per distinguere tra loro le unità. Una prima strategia prende in considerazione le differenze spaziali e temporali tra gli oggetti, le quali non sono intrinseche ma esterne a ciascun oggetto perché riguardano i rapporti reciproci. Tale è l'opinione di Thomae:

Immaginiamo dato nello spazio un certo insieme di punti o di unità, e immaginiamo di contarli uno dopo l'altro, per la qual cosa è necessario un certo tempo; allora, malgrado qualunque astrazione, vi rimarrà pur sempre un carattere capace di distinguere l'un l'altra le diverse unità: la loro diversa posizione nello spazio e nel tempo.¹²⁵

Veronese non condivide questa opinione, perché ritiene che la ripetizione nel tempo sia un esempio di modo di posizione,

¹²⁴ Husserl, [1891], p. 21.

¹²⁵ Thomae, *Elementare Theorie der analytischen Funktionen*, 1880, p. 1, cit. in Frege, [1884], p. 274.

contrassegno dal quale occorre fare astrazione nella considerazione del numero. È piuttosto un concetto generale di successione generato dal susseguirsi degli atti di pensiero a garantire la distinguibilità delle unità che compongono il numero. Criticando la concezione di Hankel, Frege ritiene al contrario che per ordinare in successione degli oggetti occorre che questi siano già differenziati e tra loro distinti:

Allorché Hankel ci dice di pensare o porre un oggetto 1 volta, 2 volte, 3 volte ecc., anche questo suo metodo ha tutto l'aspetto di un tentativo rivolto a riunire negli oggetti numerati i due caratteri dell'uguaglianza e della distinguibilità. Ma si vede subito che anche questo tentativo non è riuscito; è chiaro infatti che queste successive rappresentazioni o intuizioni del medesimo oggetto devono risultare in qualche modo diverse l'una dall'altra, se non vogliamo che confluiscono in una rappresentazione unica.¹²⁶

Per Veronese, invece, la differenza tra oggetti identici, come ad esempio le unità, è garantita proprio dalla posizione che ciascuna di essa occupa nella successione delle cose pensate: è il pensiero a determinare una prima generale distinzione tra gli oggetti, perché il pensiero pensa prima una cosa e poi un'altra cosa. La differenza tra le unità è allora garantita dal posto che ciascun oggetto (e dunque ciascuna unità poiché la definizione richiede che oggetti distinti diano unità distinte) occupa nella successione dei nostri pensieri. In alcuni recenti articoli di William F. Lawvere e Colin McLarty si può trovare una nuova soluzione al problema di una giustificazione della diversità degli oggetti non distinguibili di un insieme: essi ricorrono al concetto di funtore proprio della teoria delle categorie. Data ad esempio un'immagine televisiva composta da un insieme di punti diversi per colore e luminosità, modificando il colore e il contrasto sullo schermo possiamo ottenere un insieme di punti privati delle loro qualità individuali ma ancora equinumerosi con i punti dell'immagine. I nuovi punti non sono tra loro distinguibili (e dunque si possono considerare uguali) ma si differenziano per il modo nel quale ciascuno di essi è stato ottenuto: ciò che individua ciascun punto del secondo in-

¹²⁶ Frege, [1864], p. 277. Il riferimento è a Hankel, *Theorie der complexen Zahlensysteme*, 1867, p. 1.

sieme è la freccia che lo collega ad un punto dell'insieme di partenza. Il tipo di corrispondenza sussistente tra i due insiemi permette di individuare gli oggetti del secondo insieme, proprio come la corrispondenza tra un gruppo di oggetti e il gruppo di unità che da essi si possono ottenere garantirebbe in Veronese la differenza tra le unità del numero associato al gruppo.¹²⁷

Prima di introdurre la definizione di uguaglianza tra numeri e la caratterizzazione che Veronese dà dei numeri naturali a partire da quelli ordinali finiti, confrontiamo brevemente il concetto fregeano di numero naturale per vedere in cosa si differenzi da quello di Veronese. Innanzi tutto Frege rifiuta la definizione del numero come rapporto tra grandezze, perché l'uguaglianza di rapporti è a sua volta definita (ad esempio in Euclide) mediante l'uguaglianza fra numeri naturali. Coscì di questa circolarità Veronese fornisce dapprima una definizione astratta di numero naturale e solo successivamente introduce geometricamente i numeri, mostrando che per i nuovi numeri associati ai segmenti della forma fondamentale valgono le stesse proprietà ed operazioni valide per i numeri dell'aritmetica.¹²⁸ In secondo luogo Frege rifiuta l'idea che il numero sia una proprietà degli oggetti ricavata da essi per astrazione al pari del colore o del peso. Il numero non è né qualcosa di fisico che risiede negli oggetti né una rappresentazione soggettiva ma contiene sempre un'affermazione intorno ad un concetto: quando affermiamo che il pianeta Venere ha zero satelliti, non attribuiamo una proprietà ai satelliti ma al concetto "satellite di Venere".¹²⁹ Frege dà la seguente definizione di numero naturale (il cui interesse principale risiede nella riconduzione della nozione di numero a quella di estensione e dunque di un concetto aritmetico ad uno logico): "Il numero naturale che spetta al con-

¹²⁷ Cfr. Lawvere, [1994], e McLarty, [1988].

¹²⁸ Si veda il § 2.2 nel quale mostriamo in che modo Veronese introduce oltre ai segmenti corrispondenti sulla retta ai numeri naturali anche dei nuovi segmenti ai quali sono associati numeri infiniti.

¹²⁹ Frege, [1884], p. 282. Husserl obietta a Frege che il numero non si rapporta al concetto [Begriff] degli oggetti numerati ma al loro insieme [Inbegriff]: non è il numero a enunciare qualcosa intorno al concetto di ciò che è numerato ma viceversa tale concetto ad enunciare qualcosa intorno al numero. Husserl, [1891], cap. IX, p. 201.

cetto F non è altro che l'estensione del concetto 'ugualmente numeroso ad F ', ove l'aggettivo *ugualmente numeroso* esprime la corrispondenza biunivoca tra gli oggetti che cadono sotto i concetti legati da tale relazione.¹³⁰ Già da questi pochi cenni emerge l'enorme differenza tra le posizioni di Frege e di Veronese. Frege è interessato a ricondurre l'aritmetica alla logica, ad attribuire un valore oggettivo al concetto di numero cardinale (inteso come numero degli oggetti che cadono sotto un concetto); l'uguaglianza è sempre assoluta, è un'identità. Veronese, al contrario, definisce dapprima il numero ordinale (risultato dell'operazione del contare) e lo ritiene associato ad un gruppo ordinato di oggetti; l'uguaglianza è sia assoluta sia relativa: in questo secondo caso è sufficiente che siano comuni alcuni contrassegni delle cose confrontate e non tutti.

1.3.1 L'uguaglianza fra numeri

Dato un gruppo (A) e dato il numero di quel gruppo, Veronese dimostra che esiste una corrispondenza univoca e nello stesso ordine tra gli oggetti del gruppo ordinato (A) e le unità del numero di (A). Tra i numeri, in quanto gruppi, si può stabilire la consueta relazione dell'esser parte tra gruppi: un numero a è parte di un numero b quando le unità di a sono unità di b . Si dimostra che i numeri corrispondenti ai sottogruppi di un gruppo ordinato A sono parti del numero del gruppo A; in particolare l'unità stessa è un numero ed è quello che corrisponde ad un gruppo di un solo elemento. L'uguaglianza tra numeri è determinata, come in generale ogni uguaglianza fra cose, dall'identità dei rispettivi concetti. Poiché i numeri sono gruppi, l'uguaglianza tra gruppi dipende dagli elementi che li costituiscono. Gli elementi dei numeri sono tutti uguali perché sono unità, vale a dire cose considerate per il solo fatto di essere una anziché più cose: rispetto a questo contrassegno ciascuna cosa è uguale ad ogni altra. Dunque poiché gli elementi hanno tutti la stessa natura, occorre analizzare l'ordine nel quale sono posti e il rapporto di tutto e parte che lega i rispettivi gruppi: due numeri o gruppi di unità sono uguali quando 1) le loro unità si corrispondono univocamente e 2)

¹³⁰ Frege, [1884], p. 306.

nello stesso ordine e 3) un numero non è parte o uguale ad una parte dell'altro.¹³¹

Questa definizione che appare ridondante nel caso dei numeri naturali o in quello dei numeri cardinali è valida anche per i numeri infiniti e infinitesimi che Veronese costruisce nel prosieguo dell'opera. Nel caso finito, la terza condizione è superflua, perché è sempre banalmente verificata ove sia verificata la prima; due numeri naturali in corrispondenza biunivoca non possono essere uno parte dell'altro perché nel finito il tutto è maggiore della parte. Nel caso dei numeri cardinali è invece superflua la seconda condizione perché si prescinde dall'ordine. Le condizioni necessarie per affermare l'uguaglianza di due numeri si riducono proporzionalmente ai concetti dai quali i numeri stessi dipendono:

Se il numero si fa dipendere invece dalla sola corrispondenza univoca e del medesimo ordine, o anche dalla sola corrispondenza univoca i numeri di (A) e di (B) sono uguali se vi è nel primo caso la corrispondenza univoca del medesimo ordine, e la sola corrispondenza univoca nel secondo caso.¹³²

Se nell'introduzione di numero di un gruppo si considerano soltanto particolari gruppi limitati, anziché gruppi qualunque e si fa astrazione dalla natura degli oggetti che li compongono ma non dall'ordine, i numeri così ottenuti (*finiti*) si dicono uguali quando si corrispondono biunivocamente e nello stesso ordine, mentre la condizione che uno non sia parte dell'altro è sempre banalmente verificata. Se invece per numero di un gruppo si intende un gruppo di unità ottenuto a partire da un numero di oggetti considerati soltanto per il fatto di essere ciascuno un'unità e prescindendo dall'ordine, due numeri (*cardinali*) saranno uguali quando si corrispondono biunivocamente. Ricordando che il numero è definito come un gruppo di unità associato ad un gruppo ordinato di oggetti, Veronese dimostra facilmente, nel caso di gruppi limitati, il criterio di uguaglianza di cui sopra grazie ad un teorema che afferma che ciascun numero è in corrispondenza biunivoca e nel medesimo ordine con il gruppo al quale è associato (vale a dire gli

¹³¹ FG, p. 27, § 1, n. 45, c.

¹³² FG, p. 27, § 1, n. 46, Oss. 1.

oggetti del gruppo corrispondono biunivocamente alle unità del numero). Da ciò deriva, per la transitività della corrispondenza biunivoca, che se due gruppi ordinati sono in corrispondenza biunivoca e nel medesimo ordine, allora i numeri ad essi associati sono uguali. Siano ad esempio A e B due gruppi ordinati che si corrispondono biunivocamente e nello stesso ordine e siano A' e B' i rispettivi numeri: A corrisponde biunivocamente e nello stesso ordine a A', A a B, B a B', dunque A' a B'. Se il teorema è ristretto al caso dei gruppi limitati, essendo soddisfatte le due prime condizioni, possiamo affermare che A' e B' sono uguali.

Si è visto che Veronese definisce l'uguaglianza tra numeri allo stesso modo dell'uguaglianza fra cose in generale e poi introduce come teorema un criterio di uguaglianza fondato sul concetto di corrispondenza tra numeri. In una nota egli critica una strategia contraria (rintracciabile nei testi di Cantor), la quale adotta la corrispondenza dei gruppi associati ai numeri come *definizione* dell'uguaglianza tra numeri anziché come *criterio* per determinarla:

Scegliendo come def. del numero la seguente: "Si dice che i gruppi ordinati qualunque (A) e (B) hanno lo stesso numero quando si possono far corrispondere univocamente e nel medesimo ordine" si incontrerebbe il difetto già notato altrove che si introdurrebbe il concetto d'identità, senza sapere se è in questo caso applicabile.¹³³

In primo luogo l'identità dei numeri risulterebbe introdotta per definizione, senza sapere se è applicabile perché non sono esplicitati i contrassegni in base ai quali confrontare gli oggetti: non si potrebbe pertanto stabilire l'identità dei rispettivi concetti.

Ciò potrebbe però essere giustificato facilmente. Ma così il numero verrebbe introdotto come un modo di dire per esprimere il concetto della corrispondenza univoca e del medesimo ordine, che non è ancora quello di numero da noi definito.¹³⁴

In secondo luogo ogni definizione non può che essere puramente nominale: essa può al più attribuire un nuovo nome

¹³³ FG, p. 27, § 1, n. 45, nota 1.

¹³⁴ FG, p. 27, § 1, n. 45, nota 1.

alla corrispondenza tra gruppi di oggetti ma non introdurre un nuovo ente. Dire che due gruppi ordinati che sono in corrispondenza univoca e nello stesso ordine hanno lo stesso numero significa rinominare la corrispondenza biunivoca mediante il termine "numero" e non spiegare cosa sia il numero di un gruppo ordinato.

1.3.2 I numeri naturali

Il numero è una forma in quanto gruppo: i gruppi sono cose che si possono confrontare tra loro secondo i contrassegni tutto e parte. Veronese precisa che non ogni forma che chiamiamo numero deve essere dedotta in questo modo (cioè come gruppo ordinato di oggetti considerati come unità) ma questa è la via più conveniente per introdurre i numeri naturali, che sono i gruppi di unità corrispondenti ai gruppi ordinati naturali. Il numero di un gruppo ordinato è determinato attraverso l'operazione del numerare o contare; il numero è il risultato dell'attività dell'uomo di contare gli oggetti e pertanto è, nella sua prima costruzione, un concetto che indica un'iterazione di oggetti secondo un certo ordine:

Il numero nella sua prima costruzione, o il numero naturale, è l'unione successiva di più unità ottenute colla semplice ripetizione limitata dell'unità.¹³⁵

La definizione del numero naturale come risultato dell'operazione del contare non implica che al concetto di numero corrisponda nella realtà un qualche oggetto concreto. Il numero è nella sua prima formazione il risultato della funzione del numerare oggetti, anche puramente astratti e appartiene alla categoria delle cose che "non hanno necessariamente un'immagine in un campo esistente effettivamente fuori del pensiero", perché esso può essere definito matematicamente "senza l'aiuto necessario dell'osservazione sensibile", ossia senza che vi sia "bisogno di alcun oggetto fuori del pensiero che debba rappresentarlo".¹³⁶

L'operazione del numerare o contare è definita come l'operazione

¹³⁵ FG, p. 27, § 2, n. 46 [corsivo nel testo].

¹³⁶ FG, p. VII.

con la quale si determina il numero di un gruppo ordinato. I numeri naturali sono i numeri che corrispondono ai gruppi ordinati naturali e risultano dall'operazione dell'unire le cose di una serie naturale secondo l'ordine della serie stessa.

I numeri naturali si possono far corrispondere univocamente e nel medesimo ordine ai sottogruppi di un gruppo ordinato illimitato di 1ª specie ed aventi con questo lo stesso primo elemento.¹³⁷

Tutti i numeri naturali formati attraverso la corrispondenza di cui sopra formano una serie illimitata di 1ª specie, che Veronese chiama *serie naturale* dei numeri naturali e indica con (I): ogni numero naturale può essere ottenuto unendo un'unità al numero che lo precede nella serie. Dopo aver dimostrato che l'operazione dell'unire un numero ad un altro numero è a senso unico, cioè dà un solo risultato, Veronese chiama quest'operazione *addizione* e introduce segni per indicare i numeri.¹³⁸ Mentre le cifre indicano un numero di posto determinato della serie, le lettere vengono usate per indicare un numero qualunque di essa. È possibile che due cifre diverse siano usate per indicare lo stesso numero: si scriverà $a=b$, il segno utilizzato è il simbolo dell'uguaglianza relativa. Nel caso dei numeri esso indica però anche l'uguaglianza assoluta, perché i contrassegni in base ai quali possiamo confrontare i numeri, vista la loro definizione, si riducono ad uno solo. Se due cose A e B sono confrontate in base ad un unico contrassegno, allora l'uguaglianza che può essere stabilita fra di esse è sempre assoluta e si può scrivere indifferentemente $A=B$ oppure $A\equiv B$.¹³⁹

Dopo aver dato una definizione generale di numero e una definizione di numero naturale come numero corrispondente ad un gruppo naturale, Veronese dimostra che due numeri na-

¹³⁷ FG, p. 27, § 2, n. 46, b.

¹³⁸ "I tedeschi hanno due vocaboli distinti per i numeri. Per quelli che si ottengono contando gli oggetti di un gruppo usano la parola "Anzahl" per i segni che li indicano il vocabolo "Zahl", e i due concetti sono ben distinti". FG, p. 29, § 2, n. 47, nota 2. Cfr. Du Bois-Reymond, [1882], p. 16: "[...] il concetto di numero [Anzahl] sorge dalla rappresentazione dell'essere separato degli oggetti della percezione e la comprensione di questo concetto ha luogo con l'aiuto delle parole o segni attraverso i quali sono rappresentati i numeri [Anzahlen] e che si chiamano numeri [Zahlen]."

¹³⁹ FG, pp. 4, 29.

turali sono uguali indipendentemente dall'ordine nel quale si corrispondono le loro unità. L'indipendenza dei numeri interi finiti dall'ordine deve essere dimostrata perché esistono dei numeri, come ad esempio quelli transfiniti di Cantor, che non sono indipendenti dall'ordine: 12345... ω ... e 2345... ω ... sono numeri ordinali differenti, anche se i loro elementi si corrispondono biunivocamente.

In generale nel numero degli oggetti di un gruppo non si tiene conto dell'ordine di questi oggetti, e non si segue il metodo di derivare le proprietà del numero dalla corrispondenza coi gruppi ordinati, mentre se il numero deriva nella sua più semplice costruzione dalla funzione logica del numerare, esso dipende dall'ordine degli elementi dei gruppi corrispondenti, ma ciò deve essere dimostrato, perché vi sono gruppi di elementi cui corrispondono i numeri transfiniti di G. Cantor, per i quali non ha più luogo questa proprietà.¹⁴⁰

Dimostrare che i numeri ordinali finiti sono indipendenti dall'ordine con cui si contano gli oggetti dei gruppi naturali cui corrispondono significa provare l'equivalenza, nel finito, di numeri ordinali e cardinali: tale teorema afferma che qualunque sia l'ordine in cui si considerano gli elementi di un gruppo ordinato naturale esso rappresenta lo stesso numero.¹⁴¹ Nel caso dei gruppi naturali, il numero (ordinale) associato al gruppo ordinato è lo stesso qualunque sia l'ordine nel quale si considerano gli elementi: dunque il numero ordinale associato al gruppo è uguale al cardinale o potenza del gruppo stesso.

Per Veronese, come per Helmholtz, gli ordinali costituiscono il punto di partenza della teoria dei numeri: essi sono il risultato dell'atto del contare, condizione di possibilità del quale è per Helmholtz il tempo, forma pura dell'intuizione, per Veronese l'attività del pensiero, che pone prima una cosa e poi un'altra determinando una successione di cose pensate e dunque un ordine.¹⁴² Entrambi riconoscono la necessità di dimostrare che nel caso finito il numero cardinale [Anzahl] de-

¹⁴⁰ FG, p. 34, nota 1.

¹⁴¹ FG, p. 33, § 2, n. 48, h.

¹⁴² Ciò che accomuna la concezione di Veronese e quella di Helmholtz è l'analisi psicologica con la quale si cerca di determinare l'atto del contare o numerare.

gli oggetti di un gruppo è determinato univocamente qualunque sia l'ordine secondo il quale gli oggetti vengono contati.¹⁴³ La teoria dei numeri è costruita per Helmholtz su fatti puramente psicologici, perché il numerare si fonda sulla nostra capacità di ritenere nella memoria la sequenza secondo la quale si sono succeduti nel tempo gli atti di coscienza; i numeri [*Zahlen*] vengono però considerati inizialmente come segni scelti arbitrariamente e fissati in un certo tipo di successione. La concezione di Helmholtz può essere allora definita formalista o nominalista nella misura in cui definisce innanzi tutto i numeri come segni arbitrari che designano in modo non arbitrario certi oggetti: ciascun segno è un segno d'ordine che designa un certo oggetto che occupi nella molteplicità che si vuole numerare la stessa posizione occupata dal numero nella serie dei segni.¹⁴⁴ Veronese si oppone con forza ad una tale posizione. La matematica non è un puro gioco di segni: le sue grandezze fondamentali e le sue operazioni rimandano ai concetti e alle operazioni fondamentali del pensiero. Egli critica la genesi del numero proposta da Helmholtz, Kronecker e Dedekind, "i quali trattano prima del numero come puro segno (*Zahl*), e poi del numero come "Anzahl" cioè del numero degli oggetti di un gruppo."¹⁴⁵ Il numero uno non è per Ver-

¹⁴³ Questo fatto — spiega Helmholtz — è ammesso semplicemente da tutti coloro che cominciano la teoria dei numeri a partire dai cardinali; il primo a riconoscere il problema nascosto in tale affermazione sarebbe stato Schröder (*Lehrbuch der Arithmetik*, Leipzig, 1873, p. 14). Cfr. Helmholtz, [1887], p. 729.

¹⁴⁴ Si veda anche la critica alla posizione di Helmholtz nell'Appendice alla prima parte di Husserl, [1891]. Husserl critica la concezione nominalista, che introduce i concetti dei numeri ordinali come se fossero semplicemente dei segni. Il significato del concetto che corrisponde al numero uno, due, tre si scopre, per Husserl, osservando che la successione dei numeri è fissa e ciascuno di essi indica una posizione all'interno della serie: "Il significato di ciascun segno si trova di conseguenza nel valore della sua posizione" (*ivi*, p. 194). A Helmholtz è attribuito l'errore di aver confuso i concetti di uno, due, tre, ecc. con quelli di primo, secondo, terzo, ecc. In modo analogo a Veronese Husserl conclude che, sia che si tratti di numeri cardinali o di numeri ordinali, è il riferimento ai concetti significati dai numeri che permette di individuare un certo ordine come naturale: "In ogni caso coloro che parlano di un ordine naturale del dominio dei numeri non pensano affatto all'ordine dei segni arbitrari, ma a quello di certi concetti designati per mezzo di quei segni. [...] Nel caso del numero cardinale per esempio il principio d'ordine consiste nel fatto che ciascun numero immediatamente posteriore nella serie è superiore di uno a un numero anteriore." (*ivi*, p. 196).

¹⁴⁵ FG, p. 39, § 3, n. 50, nota 1. Cfr. anche FG, p. 29, § 2, n. 47, nota 2.

nese arbitrariamente stabilito ma esprime il concetto legato alla parola *uno*, ossia il giudizio della nostra mente che stabilisce che un certo oggetto è uno anziché molti, senza più comprendere il riferimento all'oggetto particolare.¹⁴⁶ Il numero *uno* è introdotto da Veronese come il risultato di un giudizio che coglie la proprietà di un oggetto di essere un solo oggetto anziché molti: il numero due è ottenuto pensando prima un oggetto come uno e poi un altro come uno, ossia pensando il gruppo composto da tali oggetti e astraendo da tutte le caratteristiche particolari degli oggetti. In questo modo Veronese ottiene tutti i numeri naturali, i quali dipendono dall'operazione del contare, che è propria del pensiero.

¹⁴⁶ "[...] prima ancora di parlare di "Anzahl" essi usano continuamente nel discorso la parola *uno* (ad es. un oggetto A) la quale corrisponde ad un concetto fondamentale determinato e che dà precisamente l'Anzahl dell'oggetto A. L'Anzahl dell'oggetto A non è secondo me un segno o nome arbitrario scelto a caso per indicare il primo posto od oggetti di una serie, ma è *uno* intendendo con questa parola il concetto che vi è legato. E in questo concetto non vi è l'indicazione dell'oggetto ad es. *Papa, albero* ecc. ma il giudizio che esprime la nostra mente, che è cioè uno anziché più oggetti." FG, p. 39.

2. IL CONTINUO NON ARCHIMEDEO .

Dopo aver definito i concetti generali di gruppo, uguaglianza, grandezza, corrispondenza tra gruppi, Veronese costruisce un sistema continuo non archimedeo di grandezze cui dà il nome di forma fondamentale. Questo secondo capitolo è dedicato ad un'esposizione puntuale dei capitoli V-IX dell'Introduzione ai *Fondamenti di geometria*: dall'analisi e dal commento del testo (compiuti qui per la prima volta con ampiezza di dettagli) emerge l'originalità dell'opera di Veronese all'interno del dibattito sui fondamenti della matematica e della geometria di fine Ottocento.

2.1 LA FORMA FONDAMENTALE .

2.1.1 Sistemi di elementi

L'obiettivo di Veronese è la costruzione di un sistema di punti in grado di descrivere adeguatamente le caratteristiche del continuo intuitivo rettilineo. Per determinare in modo puramente astratto e con ipotesi semplici e indipendenti le proprietà del continuo, egli introduce la nozione di sistema di elementi ad una dimensione, caratterizzata da due proprietà essenziali: l'omogeneità e l'identità nella posizione delle parti. Per *elemento* (o *elemento fondamentale*) intende una prima forma *qualunque* data e assunta come determinante un sistema (un aggregato di forme). L'elemento fondamentale è una parte del sistema ma può a sua volta essere considerato un tutto scomponibile in parti. Il concetto di elemento è distinto da quello euclideo di punto inteso come ciò che non ha "in sé parte alcuna": qualunque forma (sia essa anche un sistema) può essere assunta come elemento fondamentale di un tutto. Tra gli elementi di sistemi diversi è definita una relazione di *coincidenza*: due elementi coincidono in modo assoluto se sono lo stesso elemento, men-

tre se possono essere considerati "in qualche modo" come un solo elemento si affermerà che essi sono "coincidenti rispetto al modo anzidetto" ossia coincidono in modo relativo.¹ Benché anche l'elemento sia una forma, Veronese intende d'ora in avanti per forma un sistema determinato da elementi. È bene precisare che uno stesso sistema può essere assunto talvolta come elemento talvolta come forma, secondo un modo di procedere mutuato dalla geometria proiettiva: possiamo considerare come elementi i punti e come sistema una linea, oppure come elementi le linee e come sistema una superficie, o ancora come elementi le superfici e come sistema un solido. Due forme si dicono coincidenti quando coincidono gli elementi che le determinano, mentre hanno *posizione diversa* quando sono determinate da elementi differenti (anche qualora siano identiche). Poiché gli elementi di due forme, essendo tra loro uguali, possono differire solo per la posizione, anche due forme possono al massimo differire, per quanto concerne gli elementi, per la posizione. Ciascuna forma può però essere distinta dalle altre mediante un insieme di contrassegni che ne costituisce la *legge di determinazione*: "la rappresentazione in parole" di tale legge è la *definizione della forma*.² Poiché a sua volta una forma (ad esempio un sistema di sistemi) può essere composta di altre forme, si dirà che due forme sono identiche quando sono identiche le forme che le determinano e per evitare petizioni di principio si chiameranno *forme fondamentali* le forme (tutte identiche tra loro) che servono a determinare le prime.³ In questo modo l'identità di due forme è sempre ricondotta all'identità delle forme fondamentali, che costituiscono una sorta di grandezza di riferimento per mezzo della quale costruire e determinare i rapporti tra le altre grandezze.⁴

¹ FG, p. 50, § 2, n. 57.

² FG, pp. 50-51, § 2, nn. 57-58.

³ FG, pp. 52-53, § 3, n. 60. "È chiaro che i principi suddetti danno l'identità di due forme mediante l'identità di altre forme, e quindi se dovessero servire per stabilire l'identità di tutte le forme conterrebbero una petizione di principio. Vedremo al n. 71 come possano servire colla considerazione della forma fondamentale." Cfr. FG, p. 67, § 3, n. 71.

⁴ Per la costruzione del continuo astratto possiamo, con una notevole approssimazione e in modo meramente intuitivo, considerare che gli elementi siano punti (ricordando però che essi non sono né il minimo sensibile né elementi ultimi indivisibili in senso assoluto).

Un sistema si dice *ad una dimensione* quando consiste in un gruppo ordinato di elementi determinato da una serie e dalla serie inversa:

La forma data da una serie qualunque di elementi che ha o non ha un primo ed ultimo elemento e il cui ordine a cominciare da un suo elemento qualunque è contrassegno dato della forma, e dalla serie inversa, chiamasi *sistema ad una dimensione*.⁵

Contrassegno del sistema, come già del gruppo ordinato, è l'ordine, ma poiché qui gli ordini sono due, quello dato e quello inverso, Veronese li chiama *versi* e li considera uno opposto all'altro. Per parti del sistema si possono intendere gli elementi (A, B, C...) ma anche certi gruppi ordinati di elementi (AB, BC, ABC...) il cui ordine è determinato da quello degli elementi del sistema. Tra le parti del sistema assumono particolare importanza i *segmenti*, ossia le parti che contengono almeno due elementi distinti (se questi limitano il segmento si chiamano estremi). Se tra A e B non vi sono altri elementi della forma data, (AB) è detto *indivisibile*. Un segmento indivisibile può essere scomponibile in parti ma tali parti non sono segmenti del sistema considerato; analogamente esso può contenere altri elementi oltre agli estremi ma tali elementi non sono elementi del sistema dato.

Quando, dato un elemento A di un sistema, costruiamo l'elemento consecutivo B, "appliciamo la legge di costruzione del sistema a cominciare dall'elemento A nel verso dato". Se dopo aver ottenuto tutti gli elementi otteniamo di nuovo A, il sistema si dice *chiuso*, in caso contrario il sistema si dice *aperto* ed è illimitato, ossia non ha né un primo né un ultimo elemento.⁶ Un esempio di sistema aperto è la retta, un esempio di sistema chiuso è il cerchio. *Semplice* è ogni sistema ad una dimensione che non ha alcun elemento ripetuto: il verso di un tale sistema è immediatamente determinato quando, dato un elemento, si scelga come secondo elemento quello, se esiste, consecutivo all'elemento dato; il verso di un segmento è determinato dai suoi estremi. Un segmento è univocamente determinato da due elementi se è parte di un sistema sempli-

⁵ FG, p. 55, § 4, n. 62, Def. I.

⁶ FG, p. 56, § 4, n. 62, Def. VI, n. 63, Def. I.

cemente aperto, da tre elementi se è parte di un sistema semplicemente chiuso: ad esempio un segmento di retta (sistema aperto) è determinato da due punti, un arco di cerchio (sistema chiuso) da almeno tre punti.

Un sistema si dice *omogeneo in un verso dato* se in quel verso "esistono due segmenti identici ad ogni segmento dato nello stesso verso, aventi l'uno per primo l'altro per secondo estremo un elemento qualunque dato A."⁷ In un sistema omogeneo due segmenti identici in un verso sono identici anche nel verso opposto; da ciò non deriva però che un segmento considerato in un verso sia identico allo stesso segmento considerato nel verso opposto: qualora questa proprietà sia verificata, il sistema si dirà *identico nella posizione delle sue parti*.⁸ Nel linguaggio del movimento un sistema è identico nella posizione delle sue parti quando "una sua parte può muoversi o scorrere mantenendosi identica a sè [sic] stessa ossia mantenendosi invariabile."⁹ Dopo aver definito i sistemi ad una dimensione e le loro prime proprietà, Veronese ripete le definizioni esprimendole nel linguaggio del movimento. Anziché dire, ad esempio, che applicando la legge di costruzione del sistema a partire da un dato elemento si ottengono in un dato verso gli elementi del sistema, nel linguaggio del movimento si dice che gli elementi del sistema sono le posizioni differenti assunte nel tempo da uno stesso elemento che si muove secondo la legge del sistema. Particolarmente importante per la costruzione del continuo non archimedeo è la definizione di segmento *variabile*: segmenti consecutivi di un sistema in un dato verso (non necessariamente identici) possono essere considerati come posizioni differenti assunte da un unico segmento che si muove o varia nel sistema in quel verso, ossia come gli stati di tale segmento variabile. Le definizioni espresse nel linguaggio del movimento appaiono più comode e più chiare perché rimandano al movimento dei corpi nel mondo esterno. L'elemento geometrico, però, non è un corpo che muovendosi può acquistare successivamente le posizioni degli altri elementi ma è una forma astratta, alla quale attribuiamo una proprietà,

⁷ FG, p. 62, § 1, n. 68, Def. I.

⁸ FG, p. 63, § 2, n. 70, Def. I.

⁹ FG, p. 66, § 2, n. 70, Def. II.

quella del movimento, che in realtà non possiede. In geometria occorre pertanto usare questo linguaggio "coi dovuti riguardi, per non confondere questo movimento nominale con quello reale dei corpi":¹⁰ non si può infatti introdurre il linguaggio del movimento senza assumere come postulato teorico il principio del libero movimento dei corpi rigidi, necessario invece soltanto per le applicazioni pratiche.¹¹

2.1.2 Le ipotesi della forma fondamentale

Il primo passo nella costruzione di una teoria generale delle forme matematiche astratte è l'affermazione dell'esistenza di una forma fondamentale che ci permetta di costruire e confrontare le forme tra loro. La prima ipotesi del sistema di Veronese postula l'esistenza di una forma determinata solo da se stessa e dai suoi elementi e tale da poter determinare tutte le altre. Tale forma, detta fondamentale per il ruolo che svolge come materiale di costruzione di ogni altra grandezza, è identica per ipotesi ad ogni altra forma che sia considerata come fondamentale, ossia come determinante altre forme. L'ipotesi I afferma l'esistenza di una classe di forme fondamentali tra loro identiche:

Ip. I. Vi è una forma che serve a determinare tutte le altre. Chiameremo questa forma *forma fondamentale*. Le forme fondamentali sono identiche.¹²

Le proprietà della forma fondamentale sono stabilite da otto ipotesi suggerite dall'osservazione del continuo empirico: il sistema di grandezze così caratterizzato costituisce un'adeguata descrizione astratta del continuo intuitivo. Veronese non raggruppa tutte le ipotesi all'inizio ma le introduce gradualmente per esplicitare il procedimento di successiva restrizione che conduce all'individuazione di un oggetto particolare all'interno di una classe più ampia di oggetti. La proprietà della forma fondamentale descritta nell'ipotesi II deriva da un'osservazione empirica: guardando un filo teso riceviamo l'impressione che la parte (AB) percorsa da B verso A sia identica alla stessa par-

¹⁰ FG, pp. 61-62, § 5, n. 67, nota 1.

¹¹ Cfr. § 3.1.3.

¹² FG, p. 66, § 2, n. 70, p. 1. [grassetto nel testo]

te percorsa da A verso B.¹³ Questa impressione ci spinge a determinare la forma fondamentale in modo da conservare questa proprietà:

Ip. II. La forma fondamentale è un sistema ad una dimensione identico nella posizione delle sue parti.¹⁴

Prima di procedere all'effettiva costruzione di un continuo non archimedeo (a partire dalle ipotesi III e IV di esistenza e costruzione di segmenti infiniti) Veronese introduce due operazioni tra segmenti, dette rispettivamente dell'unire e del togliere. L'unione è definita inizialmente soltanto per i segmenti dello stesso verso e consecutivi (che hanno un solo elemento in comune); il risultato dell'operazione è un segmento che ha per primo estremo il primo estremo del primo segmento e per secondo estremo il secondo estremo del secondo segmento:

Il risultato inoltre dell'unione sulla forma fondamentale del segmento (BC) al segmento (AB) dello stesso verso è il segmento (AC) che ha per parti consecutive (AB) e (BC).¹⁵

Dopo aver elencato diverse proprietà dell'addizione, Veronese introduce l'operazione del togliere applicata ai segmenti della forma fondamentale: togliere un segmento (BC) da un segmento (AC) "significa nel senso fin qui usato, scomporre (AC) in due parti consecutive di cui l'ultima sia (BC) e far poi astrazione da (BC)".¹⁶ L'operazione del togliere è definita come l'operazione inversa dell'unire e, anche se non sono specificate condizioni restrittive, essa può essere applicata solo a segmenti particolari, le cui caratteristiche dipendono dalle condizioni poste sull'operazione inversa: l'unione. Del resto è evidente che l'operazione del togliere, in quanto corrisponde ad un atto del pensiero che astrae da qualcosa che prima era stato posto, può essere definita soltanto tra un tutto e una sua parte. Nel caso dei segmenti l'operazione del togliere, detta *sottrazione*, può essere introdotta soltanto se uno dei due è parte dell'altro: il risultato si chiama *differenza* o *resto*. Un caso

¹³ FG, p. 66, § 2, n. 70, Oss. IV.

¹⁴ FG, p. 66, § 2, n. 70, Ip. II. [grassetto nel testo]

¹⁵ FG, p. 68, § 4, n. 72, Oss. I.

¹⁶ FG, p. 70, § 4, n. 74, Oss. I.

limite è quello della sottrazione di un segmento da se stesso, perché il segmento risultante ha gli estremi coincidenti in un solo elemento; "onde non fare eccezione" anche questo caso è ammesso come possibile e la differenza è il *segmento nullo* o *zero*.¹⁷ Si dimostra che il segmento nullo può essere ottenuto come risultato della sottrazione di qualunque segmento da se stesso, ossia che tutti i segmenti nulli sono tra loro uguali: da ciò si ricava che, poiché gli elementi sono tutti uguali fra loro nella forma fondamentale, l'elemento rappresenta il segmento nullo (che infatti è espresso mediante il segno (AA), ossia mediante due estremi coincidenti). Questa precisazione è importante perché sarà utile nella costruzione di un tipo di segmenti infinitamente piccoli rispetto ad un segmento dato della forma. Intuitivamente e con molta approssimazione possiamo immaginare il segmento nullo come un segmento così piccolo che i suoi estremi, confrontati con segmenti molto più grandi, coincidono in un unico punto: tale punto, a sua volta, può essere inteso come un segmento contenente altre parti.

Le operazioni di addizione e sottrazione finora definite non valgono in generale: non è possibile sommare due segmenti aventi parti comuni così come non è possibile sottrarre un segmento maggiore da uno minore. Queste limitazioni dipendono dalla derivazione diretta delle operazioni tra segmenti dalle operazioni generali del pensiero, il quale unisce più cose date e toglie alcune delle cose prima poste. Queste definizioni ristrette di addizione e sottrazione possono però essere ampliate mediante ulteriori definizioni, che se per un verso sono convenzionali, per l'altro mostrano la diretta dipendenza del consueto significato algebrico e geometrico di somma e differenza dalle leggi logiche del pensiero stesso. Rivelando un interesse comune anche a Grassmann, Veronese s'impegna nella costruzione di operazioni matematiche generali in grado di rispecchiare gli atti essenziali del pensiero: riunire e separare, raccogliere e scomporre. Le regole dell'uso algebrico dei segni + e - non sono convenzioni arbitrarie nate per semplificare i calcoli; benché sviluppate per analogia dai casi più semplici e immediati a quelli più complessi, esse hanno origine nel pensiero.

¹⁷ FG, p. 71, § 4, n. 76, Def. I.

L'operazione di addizione può essere estesa considerando la differenza di un segmento (BC) da un segmento (AC) come l'unione del segmento maggiore e dell'opposto del minore.¹⁸ L'addizione di segmenti di verso opposto con un estremo comune non rispetta l'idea che l'unire sia il pensare insieme più parti separate fino a formare un tutto maggiore delle parti. È possibile che la somma di due segmenti risulti minore di uno dei due: "naturalmente" — precisa Veronese — in questo caso l'unione non ci dà il tutto dalle parti.¹⁹ Nel caso particolare del segmento nullo con la nuova definizione di addizione si può affermare che esso è ottenuto unendo ad un segmento il suo opposto, che è lo stesso che dire sottraendo sé a se stesso. Con un'ulteriore definizione si estende anche il significato del togliere, che d'ora in avanti si applicherà anche ai casi nei quali un tutto è sottratto da una sua parte, contro la caratterizzazione iniziale del togliere come atto del pensiero che, dato un tutto precedentemente posto, fa astrazione da alcune delle sue parti:

Ma siccome ad un segmento (AC) si può aggiungere un segmento qualunque (CB) per l'estensione data a questa operazione, ciò vale anche se (CB) è diretto in verso opposto ad (AC), e quindi *estendiamo l'operazione del togliere supponendo che (BC) sia maggiore di (AC), e per risultato della sottrazione si ha il segmento (AB) percorso in tal caso nel verso (CB).*²⁰

Le regole dei segni + e -, corrispondenti rispettivamente alle operazioni di addizione e sottrazione, sono state determinate, lo ripetiamo, non dall'arbitrio del matematico, ma dalle leggi che governano l'associazione e la separazione delle cose nel pensiero. I segni + e - assumono un significato geometrico più preciso qualora s'intendano come determinanti il verso di un segmento indicato mediante i suoi estremi: il segno - preposto ad un segmento (AB) indicherà che il segmento deve essere percorso nel verso opposto a quello indicato dalla successione dei suoi estremi, ossia nel verso (BA).

¹⁸ FG, p. 71, § 4, n. 77, Def. I.

¹⁹ FG, p. 72, § 4, n. 77, Oss. I.

²⁰ FG, p. 72, § 4, n. 77, Def. II.

2.2 SEGMENTI INFINITI E INFINITESIMI ATTUALI

2.2.1 Le ipotesi di esistenza e costruzione di segmenti infiniti

Per semplificare l'esposizione delle proprietà della forma fondamentale e la dimostrazione dei teoremi ad esse relative, Veronese suppone innanzitutto che la forma fondamentale sia un sistema aperto; quanto egli deriva può essere però esteso, previa alcune considerazioni e restrizioni, anche ad un sistema chiuso quale il cerchio geometrico.²¹ La formulazione delle ipotesi III e IV, dette anche di esistenza e costruzione di segmenti infiniti, richiede l'introduzione dei concetti di multiplo e sottomultiplo di un segmento, di unità, origine e campo di una scala.

Un segmento (AC) è un *multiplo* secondo il numero n di un altro segmento (AB) della stessa o di un'altra forma fondamentale, se è somma di n segmenti consecutivi uguali ad (AB).²² In simboli $(AC) = (AB) \cdot n$. Il segmento (AB) si chiama *summultiplo* di (AC) secondo il numero n e si scrive $(AB) = 1/n$ (AC). Dopo aver dimostrato diversi teoremi sui multipli e sottomultipli di un segmento dato, Veronese definisce *scala* con unità di misura (AB) e origine A una serie illimitata di 1° specie di segmenti consecutivi uguali ad (AB).²³ Si dimostra che a partire dall'origine gli *elementi di divisione*, vale a dire i secondi estremi dei segmenti della scala uguali all'unità, e questi segmenti stessi e quelli formati dall'origine e dagli elementi di divisione corrispondono univocamente e nello stesso ordine ai numeri della serie dei naturali (l'origine rappresenta il numero zero). Ciò significa che è possibile indicare con i numeri naturali della

²¹ Noi non ci occuperemo di questo punto, brevemente sviluppato da Veronese alla fine del quinto capitolo dell'*Introduzione*.

²² "Se nella forma fondamentale aperta da un dato elemento A si considera un numero n di segmenti consecutivi nel medesimo verso ed uguali ad un segmento dato (AB) dello stesso verso, il segmento risultante (AD) dall'addizione successiva degli n segmenti si chiama *segmento multiplo* del segmento dato (AB) secondo il numero n ; e diremo che (AD) contiene n volte il segmento (AB)." FG, p. 74, § 5, n. 79, Def. I.

²³ "A cominciare da un elemento A nella forma fondamentale in un dato verso si consideri una serie illimitata di 1° specie di segmenti consecutivi uguali ad un segmento dato (AB). Questa serie si chiama *scala*, della quale (AB) si chiama *unità di misura* o *unità*, e l'elemento A, *origine*." FG, p. 77, § 5, n. 80, Def. I.

serie (I) gli elementi di divisione, a partire dall'origine, che rappresentano i segmenti sulla forma fondamentale: "in siffatta corrispondenza i segmenti corrispondenti ai numeri godono le stesse proprietà dei numeri di (I) rispetto all'addizione e sottrazione."²⁴ Veronese fa corrispondere i numeri ai segmenti dopo aver introdotto le operazioni fondamentali direttamente su questi ultimi: solo così infatti può dimostrare l'indipendenza del continuo geometrico da quello numerico sul quale è fondata ogni trattazione analitica della geometria. Da ultimo Veronese introduce il concetto di *campo* di una scala, definito come il segmento illimitato determinato da tutti i segmenti consecutivi della scala, ossia come un gruppo ordinato di segmenti.²⁵ Il campo di una scala non ha un ultimo elemento perché deriva da una serie illimitata di 1^a specie: esso non è infinito ma indefinitamente grande perché è maggiore di ogni segmento limitato i cui estremi appartengono al campo stesso e di ogni segmento illimitato dello stesso verso che abbia come primo estremo un elemento (appartenente al campo) che non coincide con l'origine della scala.²⁶

Si dimostra che due campi sono *uguali* quando hanno unità uguali: se hanno la stessa origine si dicono uguali *in senso assoluto*; se hanno origine diversa si dicono uguali *in senso relativo* o *relativamente alla serie dei segmenti delle due scale*, perché facendo coincidere le origini è possibile "stabilire una corrispondenza d'identità fra i segmenti consecutivi uguali all'unità nell'una e i segmenti consecutivi uguali nell'altra scala."²⁷ Si può dimostrare l'uguaglianza di due campi anche quando le rispettive unità AB e CD sono diverse purché sia soddisfatta la condizione seguente: se $AB < CD$ allora esiste un numero naturale n tale che $n(CD) > (AB)$.²⁸ Questa condizione è equivalente alla formulazione euclidea del *principio di Archimede*: "Si dice che

²⁴ FG, p. 79, § 5, n. 80, Oss. III.

²⁵ "Per campo della scala intendiamo il segmento illimitato della forma fondamentale determinato da tutti i segmenti consecutivi della scala nel verso di essa." FG, p. 78, § 5, n. 80, Def. III.

²⁶ FG, p. 78, § 5, n. 80, a.

²⁷ FG, p. 79, § 5, n. 81.

²⁸ "Date due scale colle unità (AB) e (A'B') tali che $(A'B') < (AB)$, $n(A'B') > (AB)$ essendo n un numero qualunque della serie dei numeri naturali, i campi delle due scale sono uguali in generale rispetto alla serie dei segmenti delle due scale." FG, p. 79, § 5, n. 81, b.

hanno fra loro rapporto (o *ragione*) le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente."²⁹ Due campi sono dunque uguali tra loro se le rispettive unità sono grandezze che hanno un rapporto, ossia sono grandezze confrontabili in senso archimedeo. Veronese non assume il principio di Archimede come ipotesi ma lo introduce come criterio per determinare l'uguaglianza o la diversità fra due campi di scala. Si può infatti dimostrare anche il teorema inverso: se le unità non soddisfano al principio di Archimede, i campi sono diversi o se i campi sono uguali, le unità sono confrontabili in senso archimedeo.

Dopo aver dimostrato altri teoremi che forniscono criteri di uguaglianza tra campi, Veronese introduce la definizione di *segmento generatore* del campo di una scala. Data una scala con unità (AB) e origine A, si dice che un segmento (CD) genera il campo della scala se il campo generato da un segmento identico a (CD) ma avente l'origine in A e stesso verso di (AB) è uguale al campo della scala con unità (AB) e origine A.³⁰ Se un segmento genera una scala di unità (AB), allora soddisfa al principio di Archimede rispetto a (AB); viceversa se due segmenti soddisfano al principio di Archimede, uno genera il campo della scala che ha l'altro segmento per unità.³¹ Da questi teoremi emerge il legame sussistente tra l'appartenenza di due segmenti ad uno stesso campo di scala e la possibilità di confrontarli secondo il principio di Archimede; tutti i segmenti che possono generare il campo di una scala sono tra loro legati da una relazione di confrontabilità archimedeo perché soddisfano al principio di Archimede rispetto all'unità della scala stessa.

Aggiungendo alle ipotesi del sistema l'assioma di Archimede nella sua tradizionale enunciazione (se (AB) e (CD) sono due segmenti rettilinei, e $(AB) < (CD)$ si ha sempre un numero n tale che $(AB)n > (CD)$) si ottiene l'uguaglianza tra tutti i campi, cioè l'esistenza di un solo campo di scala. Ammettere la validità del principio di Archimede per la forma fondamentale equivale ad escludere la possibilità dell'esistenza di altri seg-

²⁹ Euclide, [(1970). libro V, def. 4, p. 296.

³⁰ FG, p. 81, § 5, n. 81, Def. I.

³¹ FG, p. 81, § 5, n. 81, d.

menti al di fuori del campo della scala, vale a dire di segmenti non confrontabili con i generatori del campo perché incomparabilmente grandi o piccoli rispetto ad essi.

Fino a questo punto per scala della forma fondamentale si è intesa una serie illimitata di 1° specie di segmenti consecutivi uguali ad un segmento dato (AB). Poiché non è stata fatta ancora alcun'ipotesi su tale segmento (AB), resta finora indeterminato se tutti gli elementi della forma siano contenuti in tale scala o possano anche trovarsi fuori di essa. Applicando il principio della continuità del pensiero,³² Veronese postula l'esistenza sulla forma fondamentale di un elemento al di fuori del campo di una scala data. Se la scala è una serie illimitata di 1° specie, nulla vieta di immaginare che essa sia parte di un'altra serie limitata o illimitata, "dunque siamo condotti spontaneamente da questa considerazione ad assoggettare la forma fondamentale alla seguente condizione":

Ip. III. In un verso della forma fondamentale esiste almeno un elemento fuori del campo della scala rispetto ad ogni segmento limitato come unità.³³

L'ipotesi afferma che, qualunque sia l'unità scelta e il campo di scala ottenuto, esiste sempre una serie che contiene la scala data perché esiste almeno un elemento che non è contenuto nel campo della scala data. Seguendo un'indicazione di Veronese stesso, potremmo considerare il campo della scala come una retta illimitata. La condizione imposta alla forma fondamentale è che essa si estenda al di là della retta, che abbia cioè almeno un altro punto che non appartiene alla retta. Possiamo immaginarlo situato su di una retta parallela alla prima e percorsa nello stesso verso (infatti, data l'ipotesi III si dimostra immediatamente che fuori del campo della scala non esiste un unico elemento ma, per l'omogeneità della forma fondamentale, più elementi distinti).

Data una scala di unità (AA_1) e origine A esiste sempre un elemento, che chiameremo genericamente A^∞ , fuori del campo di detta scala: poiché il segmento (AA^∞) non soddisfa al principio di Archimede rispetto all'unità della scala (per ogni n

³² Cfr. § 1.1.2.

³³ FG, p. 84, § 1, n. 82 [grassetto nel testo].

appartenente alla serie dei numeri naturali si ha $(AA_1)_n < (AA^\infty)$, esso non è confrontabile e dunque è infinito rispetto all'unità (AA_1) e rispetto ad ogni segmento contenuto nel campo della scala con tale unità. La terza ipotesi non contraddice alle precedenti (e dunque è per ciò stesso matematicamente possibile)³⁴ né è derivabile da esse, perché la definizione di sistema omogeneo non implica un modo determinato di costruzione della scala: siamo liberi di immaginarla come una serie a sua volta contenuta in una serie. Se esistono più elementi distinti fuori del campo della scala, esistono anche più segmenti distinti aventi per primo estremo l'origine del campo e per secondo estremo uno di tali elementi. Questi segmenti limitati aventi un estremo nel campo della scala e uno fuori di esso non soddisfano al principio di Archimede rispetto ai segmenti generatori del campo ma per definizione sono maggiori di ogni segmento limitato avente entrambi gli estremi nel campo della scala. I nuovi segmenti sono chiamati *infiniti attuali* rispetto all'unità della scala, che a sua volta è *infinitesima attuale* rispetto ad essi. Intendendo per segmenti tra loro finiti tutti i segmenti generatori di un campo di scala di data unità, si dimostra che se un segmento è infinito o infinitesimo rispetto ad un segmento dato, lo è anche rispetto a tutti i segmenti finiti con quello dato. La relazione di finitezza è una relazione di equivalenza, perché è riflessiva, simmetrica (se un segmento è finito rispetto ad un altro, questo è finito rispetto al primo), transitiva (due segmenti finiti con un terzo sono finiti tra loro) e chiusa rispetto all'addizione (l'addizione di due segmenti finiti del medesimo verso dà un segmento finito).³⁵ È allora possibile costruire una partizione in classi di equivalenza dei segmenti: apparterranno ad una stessa classe i segmenti tra loro finiti, ossia confrontabili in senso archimedeo; poiché gli elementi di ciascuna classe generano un unico campo di scala, è possibile assumere come rappresentante di ciascuna classe l'unità del campo.

³⁴ "Questa ipotesi soddisfa a tutte le condizioni di una ipotesi matematicamente possibile, che si riducono in fondo non a considerazioni d'ordine filosofico sull'origine delle idee matematiche, ma all'assenza di ogni contraddizione." FG, p. 86, § 1, n. 82, nota 1.

³⁵ FG, p. 88, § 1, n. 82, g. h. i.

Il campo di una scala è infinito rispetto all'unità della scala: esso non va confuso con il segmento variabile crescente ottenuto dall'unione successiva dei segmenti consecutivi della scala, che Veronese chiama *campo finito* della scala.³⁶ Il campo della scala è il *limite* al quale tende il campo finito, che cresce indefinitamente senza mai uscire dalla finitezza. I campi finito e infinito della scala stanno tra loro nella stessa relazione che lega l'indefinitamente piccolo (o grande) e l'infinitamente piccolo (o grande), la variabile di Cauchy e l'infinitesimo leibniziano: il primo è infinito soltanto in potenza, l'altro in atto.

Data una scala di unità (AA_1) l'ipotesi III garantisce l'esistenza di un segmento infinito (AA^∞) rispetto ad (AA_1) : poiché il segmento (AA^∞) genera un nuovo campo di scala, per l'ipotesi III esisterà un altro segmento infinito rispetto ad (AA^∞) e così via. Sappiamo dunque che esistono più segmenti infiniti rispetto all'unità e che essi non appartengono tutti ad uno stesso campo di scala (non sono cioè tutti tra loro finiti). Ciò che nell'ipotesi III resta indeterminato è l'esistenza di segmenti infiniti rispetto ad (AA_1) e infinitesimi rispetto ad (AA^∞) : a questo scopo Veronese introduce una quarta ipotesi, la quale postula che il più piccolo segmento infinito rispetto all'unità data (AA_1) sia contenuto nel campo generato da (AA^∞) .

Ip. IV. Se in un campo all'infinito rispetto ad una qualunque unità (AA_1) 1. si sceglie un qualunque elemento B^∞ , allora esiste nel segmento (AB^∞) un certo elemento X , tale che (AX) e (XB^∞) siano entrambi infiniti rispetto ad (AA_1) e 2. esiste un certo elemento A^∞ , tale che il segmento (AX) , per ogni X , sia finito rispetto ad (AA^∞) .³⁷

La prima parte dell'ipotesi stabilisce che dato un qualunque elemento fuori del campo di unità (AA_1) esiste sempre un altro elemento fuori di questo campo che precede il primo, vale

³⁶ «Il segmento che si ottiene dunque a partire dall'origine con questa operazione [di ripetere i segmenti consecutivi e unirli successivamente in un tutto con quelli già posti] è un segmento variabile sempre crescente che chiameremo *campo finito* della scala.» FG, p. 89, § 1, n. 83, Def. V.

³⁷ CG, p. 106 [grassetto nel testo]. Poiché l'ipotesi IV è espressa in modo oscuro nei *Fondamenti*, mentre è stata riveduta e corretta nell'edizione tedesca, abbiamo preferito riportare quest'ultima. Si veda anche la versione italiana in FG, p. 92, § 1, n. 85, ip. IV.

a dire che la serie degli elementi all'infinito non ha un primo elemento: dato un segmento infinito rispetto all'unità ve ne è sempre un altro più piccolo. La seconda parte afferma che esiste un opportuno elemento A^∞ fuori del campo della scala di unità (AA_1) , tale che ogni segmento infinito che precede (AA^∞) è finito rispetto ad esso, ossia appartiene al campo della scala generato da (AA^∞) . In altre parole, non esistono segmenti infiniti rispetto all'unità che non siano contenuti né nel campo dell'unità né in quello generato da (AA^∞) , cioè non esistono segmenti infiniti rispetto all'unità e infinitesimi rispetto ad (AA^∞) , o ancora, intuitivamente, il tipo di infinito proprio di (AA^∞) è il più piccolo possibile rispetto all'unità (AA_1) . Ricorrendo ad una rappresentazione geometrica, si può considerare il campo della scala di unità (AA_1) come parte di una retta a . Dall'ipotesi III sappiamo che esiste almeno un punto al di fuori della retta a , anzi ne esistono più di uno e li possiamo immaginare disposti su una retta b parallela alla a : la prima parte dell'ipotesi IV afferma che dato un punto B^∞ al di fuori di a , ad esempio proprio su b , ne esiste un altro su b che lo precede, dunque la retta b non ha un primo elemento; la seconda parte dell'ipotesi IV esclude che un qualunque elemento che non appartiene ad a e che precede B^∞ si trovi su una retta parallela ad a situata tra questa e b , vale a dire la retta b è la prima retta parallela ad a : fra di esse non vi è nessun'altra retta. In virtù della prima parte dell'ipotesi IV la forma fondamentale risulta densa ma non bene ordinata: dato un elemento all'infinito, vi è sempre un elemento che lo precede, ma non ne esiste un primo. La seconda parte dell'ipotesi fissa invece le condizioni per riconoscere gli infiniti che sono tra loro finiti: applicando ripetutamente l'ipotesi si costruisce una gerarchia di infiniti sempre più grandi. Non esiste un primo segmento infinito più piccolo di ogni altro segmento infinito e più grande di tutti i segmenti finiti rispetto all'unità e, più in generale, non esiste un elemento separatore fra due classi di segmenti infiniti di ordine diverso.

Dato l'elemento all'infinito A^∞ è possibile considerare la scala avente per origine A e per unità il segmento (AA^∞) : l'ipotesi III garantisce l'esistenza di un elemento fuori del campo di questa scala, mentre l'ipotesi quarta garantisce l'esistenza di un opportuno elemento all'infinito A^{2^∞} rispetto al campo generato da (AA^∞) tale che ogni altro elemento all'infinito che lo prece-

de appartiene al campo generato da (AA^{2^n}) , ossia è finito rispetto a questo segmento. L'applicazione successiva dell'ipotesi quarta conduce alla costruzione di un primo campo di segmenti infiniti rispetto ad un'unità data e tutti finiti tra loro, quindi di un secondo campo di segmenti infiniti rispetto ai segmenti infiniti precedentemente determinati e di nuovo tutti finiti tra loro, e così via. I segmenti della forma fondamentale sono ripartiti in classi di equivalenza, ciascuna delle quali contiene segmenti (siano esso finiti, infiniti o infinitesimi) tra loro finiti, detti anche segmenti *della stessa specie*.³⁸ I segmenti infiniti rispetto ad (AA_1) e finiti rispetto ad (AA^m) sono della stessa specie e prendono il nome di *segmenti infiniti di 1° ordine* rispetto all'unità (AA_1) . I segmenti costruiti con l'applicazione dell'ipotesi quarta ad un segmento infinito di primo ordine considerato come unità sono infiniti di primo ordine rispetto a tale unità e finiti rispetto a (AA^{2^n}) e tra loro: essi sono tutti della stessa specie e sono chiamati *segmenti infiniti di 2° ordine* rispetto alla precedente unità (AA_1) . Reiterando l'applicazione dell'ipotesi IV si ottengono segmenti di ordine via via superiore: in generale un segmento infinito di primo ordine rispetto ad un segmento infinito di ordine $m-1$ sarà detto segmento infinito di ordine m rispetto all'unità (AA_1) , ove m e $m-1$ appartengono alla serie dei numeri naturali e dunque sono numeri finiti.³⁹ L'ordine d'infinità di ciascun segmento è relativo all'unità che si sta considerando: per costruire una gerarchia di infiniti occorre pertanto fissare un'unità (AA_1) da cui partire.

La gerarchia di infiniti costruita da Veronese rende ragione dell'esistenza di infiniti tra loro diversi intuita già da Bolzano, trattata matematicamente mediante lo studio di funzioni da Du Bois-Reymond e costruita da Cantor negli studi sui numeri ordinali (la seconda parte dell'ipotesi quarta ha significato analogo al terzo principio di limitazione di Cantor).⁴⁰ Gli infiniti sono tra loro diversi non solo nel senso che uno può essere

³⁸ FG, p. 94, § 1, n. 85, f; p. 97, § 1, n. 86, Def. 1.

³⁹ È bene ricordare che m è finito, perché in seguito, grazie all'ipotesi V, Veronese amplierà la gerarchia degli infiniti fino a comprendere infiniti non più soltanto di ordine finito m , ma di ordine infinito n , ove n rappresenta un particolare numero infinito.

⁴⁰ Cantor, [1883], pp. 79-80, 114-118.

parte dell'altro (come già Galileo aveva osservato) ma anche nel senso che esiste una relazione che lega fra loro infiniti di uno stesso genere, suddividendoli in classi di equivalenza. Un altro punto filosoficamente centrale concerne la relazione tra il finito e l'infinito: come è possibile studiare l'infinito se esso assorbe in sé e annulla il finito? Dato un campo di unità (AA_1) e origine A e un elemento qualunque B di esso, si dimostra che "il campo della scala a cominciare da A nel verso di (AB) è uguale alla parte dello stesso campo a partire da B rispetto ad una serie di segmenti consecutivi di esso."⁴¹ Dunque rispetto alla disposizione in serie dei segmenti consecutivi si può fare astrazione da (AB) , che viene detto *nullo o trascurabile* rispetto al segmento (illimitato) rimanente a cominciare da B nel verso della scala. Intuitivamente questo significa che, dato il campo di una scala (che è un segmento illimitato e infinito), se astraggo da una parte iniziale finita di esso, ottengo un campo (illimitato e infinito) che può essere messo in corrispondenza biunivoca con quello dato; la parte finita è trascurabile rispetto a quella infinita del campo. Una volta introdotte le ipotesi terza e quarta sull'esistenza e sulla costruzione di segmenti infiniti, la stessa proposizione può essere dimostrata per i segmenti infiniti limitati: un segmento finito è nullo rispetto ad un segmento infinito (limitato).⁴² In particolare un'unità finita è nulla rispetto a tutti i segmenti infiniti che sono fra loro uguali rispetto a tale unità. Con questo teorema Veronese determina il rapporto tra finito e infinito: il primo è nullo o trascurabile rispetto al secondo perché aggiungendo o sottraendo un segmento finito ad un segmento infinito si ottiene ancora un segmento infinito.⁴³ L'infinito è modificato dal finito ma questa modificazione può apparire solo rispetto all'unità di misura dell'infinito stesso e non a quella del finito, perché la parte finita dell'infinito resta invariata. Veronese introduce una differenza molto sottile tra identità assoluta di due segmenti infiniti limitati e identità degli stessi rispetto ad un'unità di misura e spiega perché dal punto di vista dell'unità finita tutti i segmenti infiniti appaiano uguali. Rispetto ad un segmento qualunque finito

⁴¹ FG, p. 82, § 5, n. 81, f.

⁴² FG, p. 94, § 1, n. 85, g.

⁴³ FG, p. 95, § 1, n. 85, Def. II, g. g'.

assunto come unità i segmenti infiniti limitati sono effettivamente tutti uguali e dunque gli elementi all'infinito che li determinano coincidono in un solo elemento: è come se per il finito tutto l'infinito si concentrasse in un unico punto irraggiungibile.

2.2.2 Numeri infiniti di diverso ordine

Veronese ha dimostrato l'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di divisione di una scala di unità (AA_1) e i numeri naturali della serie (I): per analogia associa dei numeri anche agli elementi all'infinito.

«Come ogni elemento di divisione della scala a partire dall'origine rappresenta un numero della serie (I) $1, 2, \dots, n$, così il segno ω che serve ad indicare il posto di un elemento nel campo all'infinito rappresenta un nuovo numero dato dall'insieme delle unità corrispondenti ai secondi estremi dei segmenti $1, 2, \dots, n, \dots, \omega$ »⁴⁴

Ai segmenti infiniti non è possibile associare i numeri naturali della serie (I), perché non sarebbe conservata la proprietà essenziale dei segmenti infiniti: la non confrontabilità in senso archimedeo con i segmenti finiti. I numeri naturali soddisfano infatti al principio di Archimede. Occorre introdurre convenzionalmente una nuova serie di numeri tali da rispecchiare le proprietà dei segmenti infiniti. I segmenti del campo di scala di unità (AA_1) sono rappresentati adeguatamente dai numeri della serie (I) perché si dimostra che l'addizione e la sottrazione tra segmenti godono delle stesse proprietà dell'addizione e sottrazione tra numeri naturali. Per garantire che i nuovi numeri rappresentino efficacemente i segmenti infiniti, occorre definire due analoghe operazioni di addizione e sottrazione tra i numeri con le stesse proprietà delle operazioni sui segmenti infiniti. In questo modo soltanto è possibile e legittimo confrontare i segmenti mediante i numeri ad essi associati. È importante sottolineare l'anteriorità logica della costruzione dei segmenti rispetto a quella dei numeri, che sono soltanto strumenti di descrizione dei rapporti tra segmenti: affrontare la geometria

⁴⁴ FG, p. 99, § 2, n. 87, Oss. I.

con metodo sintetico significa infatti anteporre lo studio delle proprietà dei segmenti a quelle dei numeri, introdotti solo per rispecchiare le prime.

Innanzitutto Veronese introduce un nuovo numero corrispondente ad un generico segmento (AA^ω), il cui secondo estremo sia fuori del campo della scala di unità (AA_1): questo nuovo numero è chiamato *infinito* per distinguerlo dai numeri corrispondenti ai segmenti della scala di unità (AA_1) che sono invece finiti. Le proprietà valide per i segmenti finiti e infiniti restano valide anche per i numeri ad essi corrispondenti: un numero infinito è sempre maggiore di uno finito, tra un numero finito e uno infinito ce sono sempre altri numeri infiniti, un numero finito in senso relativo è nullo rispetto ad un numero infinito, aggiungendo un numero finito ad un numero infinito si ottiene il numero infinito stesso, ecc. Anche i numeri infiniti come i rispettivi segmenti possono essere suddivisi in classi di equivalenza (numeri della stessa specie): due numeri appartengono alla stessa classe quando sono tra loro finiti. L'individuazione di numeri infiniti tra loro distinti presuppone la determinazione dei campi delle scale dei numeri infiniti rispetto al campo della scala nell'unità primitiva.⁴⁵

Per distinguere gli elementi dei campi all'infinito di diverso useremo segni diversi. Indicheremo col simbolo comune ω , o anche ω quelli all'infinito di 1° ordine. Dato uno di questi elementi $A^{(\omega)}$, gli elementi che si ottengono unendo o togliendo a cominciare da $A^{(\omega)}$ l'unità primitiva (AA_1) li indicheremo coi simboli

$$\omega_1+1, \omega_1+2, \dots, \omega_1+n, \dots$$

$$\omega_1-1, \omega_1-2, \dots, \omega_1-n, \dots$$

Prendendo come unità ($AA^{(\omega)}$) e costruendo la scala di origine A, indicheremo gli elementi di divisione coi segni:

$$\omega_1, 2, \omega_1, 3, \dots, \omega_1 n_1 \pm n_2$$
⁴⁶

Veronese intende costruire un primo segmento all'infinito che soddisfi alle condizioni dell'ipotesi IV: sia esso ad esempio (AA^ω), del quale si può affermare che contiene ω , volte l'unità (AA_1). A partire da A^ω come origine si costruisce una

⁴⁵ Cfr. FG, p. 101, § 2, n. 88, Oss. I.

⁴⁶ FG, p. 101, § 2, n. 89, Ind. I.

scala avente per unità (AA_1) , ottenendo una serie di numeri infiniti data dai segmenti consecutivi identici ad (AA_1) ma appartenenti al campo con origine in $A^{(1)}$. Tutti questi numeri sono della stessa specie di ω_1 , vale a dire sono di primo ordine. Se ora si prende come unità il segmento $(AA^{(1)})$, al quale corrisponde il numero ω_1 , si può ottenere una nuova scala con origine in A e i cui segmenti contengono ciascuno un numero intero n di volte il segmento preso come unità, ossia $(AA^{(1)})$. Dunque Veronese fa corrispondere al secondo estremo di ciascuno di questi segmenti tutti identici fra loro un numero infinito multiplo di ω_1 , ossia $\omega_1 2, \omega_1 3$, ecc. Anche questi numeri, come i segmenti ai quali corrispondono, sono di primo ordine perché appartengono tutti al campo avente come unità $(AA^{(1)})$.

In modo analogo Veronese introduce i numeri infiniti di secondo ordine, che indica con il simbolo generale ω_2 , quindi quelli di ordine successivo ecc., fino all'ordine generale m , indicato con il simbolo ω_m . In tale campo avremo dunque numeri del tipo:

$$\omega_1^m \pm n_1,$$

$$\omega_1^m \pm \omega_1 n_1 \pm n_2,$$

$$\omega_1^m \pm \omega_1^2 n_1 \pm \omega_1 n_2 \pm n_3,$$

.....

$$\omega_1^m \pm \omega_1^{m-1} n_1 \pm \dots \pm \omega_1 n_{m-1} \pm n_m, \dots$$

$$\omega_1^m n \pm \omega_1^{m-1} n_1 \pm \dots \pm \omega_1 n_{m-1} \pm n_m$$

ove n, n_1, n_2, \dots, n_m sono numeri della serie (I) e n_1, n_2, \dots, n_m possono essere zero.⁴⁷

Ciascun numero infinito di ordine inferiore è nullo o trascurabile rispetto a quello di ordine superiore considerato come unità: si ha qui la trasposizione del rapporto tra segmenti infiniti di ordini diversi, ma è importante ricordare che ciò vale solo rispetto ad una particolare unità e non in assoluto. Ad esempio i due numeri $m_1 + \omega_1 m_2 + \omega_1^2 m_3$ e $\omega_1^2 m_3$ sono uguali soltanto rispetto all'unità ω_1^2 .

Un modello abbastanza chiaro e intuitivo dei numeri finiti e

⁴⁷ RG, p. 101, § 2, n. 89, ind. III.

infiniti di ordine m è stato costruito da Bruno Busulini in un interessante articolo sulla retta non archimedeo di Veronese. Busulini costruisce un sistema formato da tre assi cartesiani, tale che l'origine degli assi corrisponda all'elemento A considerato come origine della prima scala finita (fig. 1).

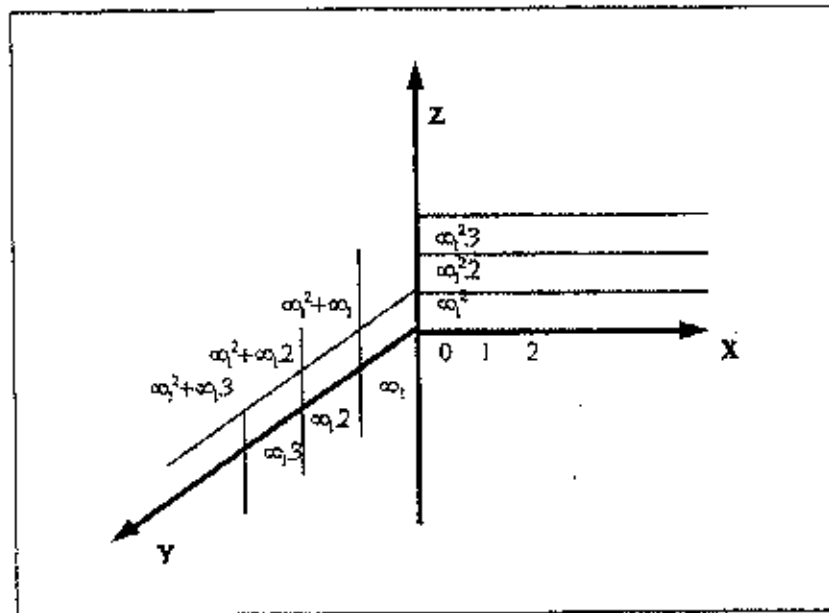


Fig. 1. L'asse X rappresenta la classe dei segmenti primitivi. Il piano XY la classe dei segmenti infiniti di primo ordine, lo spazio tridimensionale XYZ la classe dei segmenti infiniti di secondo ordine rispetto all'unità (AA_1) .

L'asse delle ascisse rappresenta il campo di origine A e unità (AA_1) , vale a dire la serie dei numeri naturali; il piano XY contiene tutti i segmenti infiniti di primo ordine, il piano parallelo ad XY e avente la terza coordinata uguale ad 1 contiene tutti i segmenti, e dunque i numeri infiniti, di secondo ordine; mediante una serie di piani paralleli sono rappresentati tutti gli altri segmenti infiniti di ordine finito e i numeri corrispondenti. Busulini si richiama alla rappresentazione geometrica di una parte del continuo assoluto proposta dallo stesso Veronese in una nota dei *Fondamenti*:

Non tenendo conto degli infinitesimi rispetto ad un'unità fon-

damentale tutti i segmenti del campo finito e infinito d'ordine finito m possono essere rappresentati univocamente e nel medesimo ordine in un sistema di parallele dello spazio euclideo a m dimensioni.⁴⁸ (fig. 2)

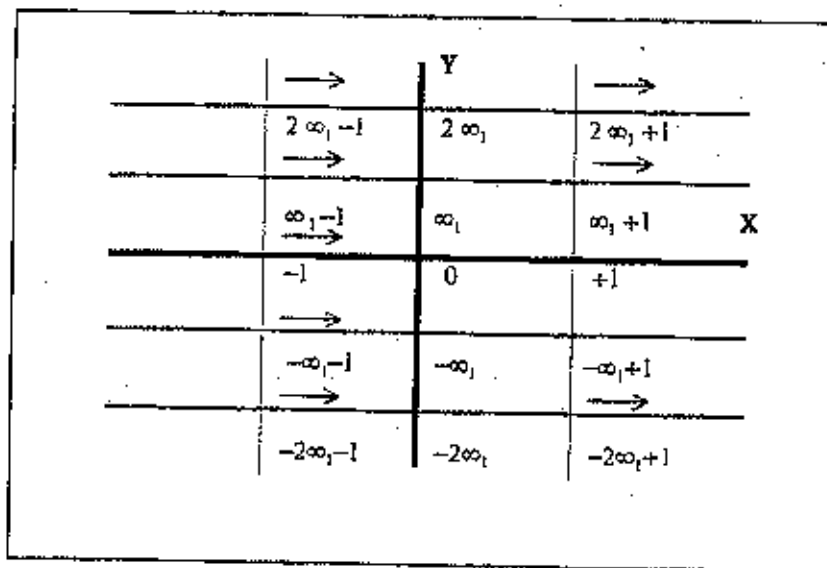


Fig. 2. Un sistema di parallele dello spazio euclideo a m dimensioni.

Poiché lo stesso esempio è ripreso, in modo più chiaro, da Gino Fano in un articolo sulle geometrie non euclidee e non archimedee, riportiamo la sua descrizione, fedele al testo di Veronese, di un modello geometrico del continuo non archimedeo:

Pensiamo una successione di rette, in numero finito o infinito, disposte in un ordine determinato, e che, per fissare le idee, possiamo supporre parallele ed equidistanti. Si fissi ancora, su queste parallele, uno dei due versi comuni, p. es. nella fig. 9 (si veda la fig. 3) quello da sinistra a destra; e i punti di tutte queste rette complessivamente si pensino disposti in un ordine unico; p. es. così: i punti di ogni singola retta si succedano da sinistra a destra nell'ordine consueto; e inoltre tutti precedano, o rispettivamente seguano quelli di ogni altra retta che, nell'ordine prestabilito

delle rette (p. es. dall'alto al basso), segua o rispettivamente preceda la prima. Per questo insieme di punti si può anche parlare di segmenti congruenti, definendo come tali due segmenti i cui estremi (anche se appartenenti a rette a, b, \dots distinte) possano rispettivamente sovrapporsi con una traslazione del piano; e tuttavia esso è un insieme non archimedeo, perché qualunque multiplo di un segmento avente i 2 estremi sopra una stessa retta sarà minore di un qualsiasi segmento avente gli estremi sopra rette diverse.⁴⁹

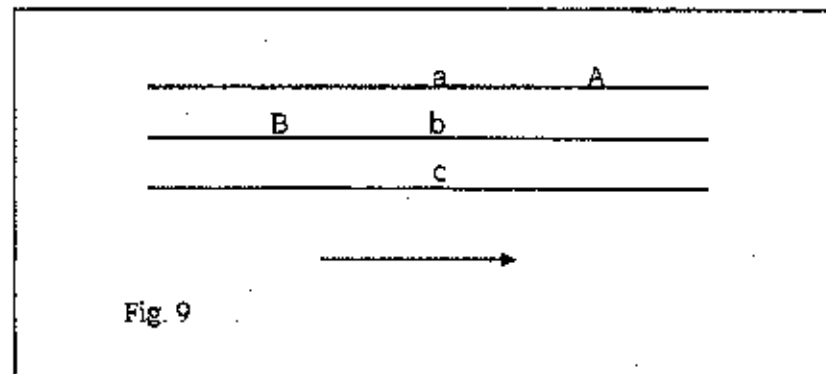


Fig. 9

Fig. 3. Il modello geometrico del continuo non archimedeo di Gino Fano

Per capire in che modo l'ipotesi V (che ci accingiamo a presentare) permetta il passaggio dai segmenti infiniti di ordine m (con m finito) ai segmenti infiniti di ordine η infinito (ove η può essere tanto un numero infinito del tipo introdotto nel precedente paragrafo quanto un nuovo numero infinito che sarà definito a partire dall'ipotesi stessa), riassumiamo il significato delle condizioni finora introdotte. Nelle ipotesi III e IV Veronese ha postulato l'esistenza di certi segmenti infiniti e ha fornito un modo per costruire delle classi di segmenti della stessa specie legati da una particolare relazione che associa due segmenti quando sono tra loro finiti; quindi ha introdotto dei numeri associati ai segmenti infiniti: poiché i numeri godono delle stesse proprietà dei segmenti, le due ipotesi citate

⁴⁸ G. Fano, "Geometrie non euclidee e non archimedee", in *Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi*, a cura di L. Berzolari, G. Vivanti e D. Gigli, Milano, Hoepli, vol. II, parte II, art. XXXVIII, p. 501.

⁴⁹ FG, p. 166, § 10, n. 105, nota 1 [corsivo nel testo]. Cfr. Busulini, [1969-70].

possono essere tradotte in linguaggio numerico.⁵⁰ L'ipotesi III postula che esista sempre un numero infinito; la prima parte dell'ipotesi IV richiede che, dato un qualunque numero infinito, ci sia sempre un altro numero infinito che lo precede, ossia un numero più piccolo ma sempre infinito; ne deriva che non esiste un primo numero infinito. La seconda parte dell'ipotesi IV postula l'esistenza di un opportuno numero infinito tale che ogni numero infinito che lo precede (più piccolo) sia della stessa specie, ossia di primo ordine; in altre parole al di fuori della serie dei numeri naturali finiti esiste sempre un numero infinito che non è il primo in senso assoluto, ma è tale che ogni altro numero infinito più piccolo di esso sia infinito dello stesso ordine; quindi se non esiste un primo numero infinito, esiste però una prima classe di numeri infiniti che contiene tutti i numeri infiniti di primo ordine.

Applicando successivamente l'ipotesi quarta a numeri non più finiti come quello corrispondente all'unità (AA_1), ma a numeri a loro volta infiniti di primo ordine, si può ottenere una nuova classe di numeri infiniti di primo ordine rispetto a quelli di primo ordine, e così via. Applicando un numero di volte intero finito m l'ipotesi suddetta si perviene perciò a classi di numeri infiniti di ordine m , ove m è un qualunque numero della serie naturale. Perché non applicare allora l'ipotesi IV "un numero di volte infinito già ottenuto" η , ove η rappresenta un qualunque numero infinito finora introdotto ω , ω^2 , ..., ω^n ? Poiché i numeri infiniti introdotti grazie all'ipotesi IV sono a tutti gli effetti numeri ordinali come quelli naturali, Veronese ammette la possibilità di reiterare l'ipotesi IV un numero infinito di volte. L'ipotesi V determina in modo unico la costruzione dei segmenti infiniti individuando nell'applicazione ripetuta dell'ipotesi IV il solo modo per generare segmenti infiniti di ordine superiore.

Ip. V. Ogni segmento infinito che non sia già d'ordine finito m si ottiene applicando il principio dell'ipotesi IV un numero di volte infinito già ottenuto o un numero di volte infinito che si

⁵⁰ In un certo senso parlare di numeri anziché di segmenti è improprio ma per ragioni di chiarezza in alcuni casi tradurremo direttamente il significato delle ipotesi applicandolo ai numeri, fermo restando che le ipotesi sono condizioni imposte alla forma fondamentale e alle sue parti, che sono sempre segmenti.

deduce dai nuovi segmenti così costruiti.⁵¹

Quest'ipotesi postula che ogni segmento infinito sia ottenuto a partire dall'applicazione (ripetuta un certo numero di volte) dell'ipotesi IV all'interno del campo all'infinito rispetto ad un dato segmento finito (AA_1) preso come unità. Essa determina un unico modo di generazione dei segmenti infiniti escludendo l'esistenza di segmenti (AA^∞) che non si ottengano mediante l'applicazione ripetuta dell'ipotesi IV. Da un lato dunque limita e precisa il modo di generazione dei segmenti infiniti, dall'altro lo estende, postulando che l'ipotesi suddetta possa essere applicata non soltanto un numero di volte finito, ma anche un numero di volte infinito η ottenuto dall'applicazione dell'ipotesi IV un numero di volte $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. L'ipotesi V precisa così la strada lungo la quale si possono ottenere, costruttivamente, numeri infiniti sempre più grandi,⁵² perché ai nuovi segmenti infiniti ottenuti corrisponderanno a loro volta dei nuovi numeri infiniti. Non solo, essa postula che l'ipotesi precedente possa essere applicata anche un numero di volte infinito "che si deduce dai nuovi segmenti così costruiti" e dunque determinato da uno qualunque di questi nuovi numeri, ad esempio ω^n , e così via senza limite.

Per facilitare la comprensione del significato di quest'ipotesi, ricostruiremo una serie di successive applicazioni dell'ipotesi IV secondo le indicazioni dell'ipotesi V stessa, ottenendo tutti i segmenti finiti e infiniti della forma fondamentale e l'intera serie dei numeri finiti e infiniti interi, che Veronese indica con il simbolo (II) per contrapporla a quella dei numeri naturali (I).

1. Alla prima classe di segmenti della forma fondamentale che abbiamo considerato appartengono tutti i segmenti finiti rispetto all'unità data (AA_1) contenuti nel campo della scala di origine A e unità (AA_1). Ai secondi estremi di questi segmenti abbiamo fatto corrispondere i numeri finiti della serie illimitata di prima specie naturale: $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots$. A partire dai segmenti finiti abbiamo costruito (per le ipotesi III e IV) un segmento infinito rispetto ad (AA_1) e finito rispetto ad ogni al-

⁵¹ FG, p. 106, § 4, n. 91, [p. V (grassetto nel testo)].

⁵² Cfr. Busulini, [1969-70], pp. 254-257.

tro segmento che lo precede fuori del campo della scala di unità (AA_1), ottenendo così una prima classe di *segmenti infiniti di primo ordine* il cui rappresentante è ($AA^{(1)}$). Indicando l'elemento A_{ω_1} , secondo estremo del segmento ($AA^{(1)}$), con il numero infinito ω_1 e costruendo la scala di origine A^0 e unità (AA_1), abbiamo ottenuto una prima serie di numeri infiniti corrispondenti alla classe dei segmenti infiniti di primo ordine: $\dots, \omega_1 - n, \dots, \omega_1 - 2, \omega_1 - 1, \omega_1, \omega_1 + 1, \omega_1 + 2, \dots, \omega_1 + n, \dots$. Costruendo poi la scala di unità ($AA^{(1)}$) e origine A^0 , abbiamo derivato i numeri $\omega_1 2, \omega_1 3, \dots, \omega_1 m$ e costruendo le scale di unità (AA_1) e origine negli elementi $A^{\omega_1 2}, A^{\omega_1 3}, \dots, A^{\omega_1 m}$ corrispondenti a ciascuno di questi nuovi numeri, abbiamo ottenuto l'intera classe dei numeri corrispondenti a tutti i segmenti infiniti di primo ordine:²³

$\dots, \omega_1 - n, \dots, \omega_1 - 2, \omega_1 - 1, \omega_1, \omega_1 + 1, \omega_1 + 2, \dots, \omega_1 + n, \dots$
 $\dots, \omega_1 2 - n, \dots, \omega_1 2 - 2, \omega_1 2 - 1, \omega_1 2, \omega_1 2 + 1, \omega_1 2 + 2, \dots, \omega_1 2 + n, \dots$
 $\dots, \omega_1 m - n, \dots, \omega_1 m - 2, \omega_1 m - 1, \omega_1 m, \omega_1 m + 1, \omega_1 m + 2, \dots, \omega_1 m + n, \dots$
 \dots

3. Finora l'ipotesi IV è stata applicata una sola volta, ossia soltanto rispetto all'unità (AA_1). Considerando successivamente come unità ($AA^{(1)}$) l'ipotesi IV determina la classe di tutti i segmenti infiniti di secondo ordine e tutti i numeri ad essa associati. Prendendo infatti il segmento ($AA^{(1)}$) come unità di una nuova scala con origine in A , per l'ipotesi IV si ha che al di fuori del campo di tale scala esiste un segmento ($AA^{(2)}$) infinito di primo ordine rispetto all'unità ($AA^{(1)}$) tale che ogni altro segmento infinito di primo ordine rispetto all'unità ($AA^{(1)}$) che lo precede è della stessa specie. Questi segmenti infiniti sono di secondo ordine: il segmento ($AA^{(2)}$) è il rappresentante di tale classe. Indicando l'elemento $A^{\omega_1 2}$ con il numero infinito ω_1^2 , possiamo anche dire che al di fuori della classe dei numeri infiniti di primo ordine esiste un numero infinito di primo ordine ω_1^2 , tale che ogni numero più piccolo e infinito di primo ordine rispetto ad un numero infinito di primo ordine sia dello stesso ordine; il numero ω_1^2 può essere preso come rappresentante di questa classe di numeri detti in-

²³ Nella rappresentazione di Busuñi, i numeri così introdotti sono tutti quelli corrispondenti ai punti del piano ω . Cfr. la fig. 3.1.

finiti di secondo ordine:

$\dots, \omega_1^2 - n, \dots, \omega_1^2 - 2, \omega_1^2 - 1, \omega_1^2, \omega_1^2 + 1, \omega_1^2 + 2, \dots, \omega_1^2 + n, \dots$
 $\dots, \omega_1^2 2 - n, \dots, \omega_1^2 2 - 2, \omega_1^2 2 - 1, \omega_1^2 2, \omega_1^2 2 + 1, \omega_1^2 2 + 2, \dots, \omega_1^2 2 + n, \dots$
 \dots
 $\dots, \omega_1^2 m - n, \dots, \omega_1^2 m - 2, \omega_1^2 m - 1, \omega_1^2 m, \omega_1^2 m + 1, \omega_1^2 m + 2, \dots, \omega_1^2 m + n, \dots$
 \dots

4. Fino a questo punto abbiamo applicato l'ipotesi IV due volte, una prima volta relativamente alla scala di unità (AA_1) e una seconda volta relativamente alla scala di unità ($AA^{(1)}$). Applicando successivamente 1, 2, ..., m volte l'ipotesi alle scale di unità ($AA^{(2)}$), ($AA^{(3)}$), ..., ($AA^{(m)}$), ... otteniamo tutte le classi di segmenti infiniti di ordine finito m e le classi corrispondenti di numeri infiniti di ordine m , ove m è un numero naturale e perciò è finito.

$\dots, \omega_1 - n, \dots, \omega_1 - 2, \omega_1 - 1, \omega_1, \omega_1 + 1, \omega_1 + 2, \dots, \omega_1 + n, \dots$
 $\dots, \omega_1 2 - n, \dots, \omega_1 2 - 2, \omega_1 2 - 1, \omega_1 2, \omega_1 2 + 1, \omega_1 2 + 2, \dots, \omega_1 2 + n, \dots$
 \dots
 $\dots, \omega_1 m - n, \dots, \omega_1 m - 2, \omega_1 m - 1, \omega_1 m, \omega_1 m + 1, \omega_1 m + 2, \dots, \omega_1 m + n, \dots$
 \dots
 $\dots, \omega_1^2 - n, \dots, \omega_1^2 - 2, \omega_1^2 - 1, \omega_1^2, \omega_1^2 + 1, \omega_1^2 + 2, \dots, \omega_1^2 + n, \dots$
 $\dots, \omega_1^2 2 - n, \dots, \omega_1^2 2 - 2, \omega_1^2 2 - 1, \omega_1^2 2, \omega_1^2 2 + 1, \omega_1^2 2 + 2, \dots, \omega_1^2 2 + n, \dots$
 \dots
 $\dots, \omega_1^2 m - n, \dots, \omega_1^2 m - 2, \omega_1^2 m - 1, \omega_1^2 m, \omega_1^2 m + 1, \omega_1^2 m + 2, \dots, \omega_1^2 m + n, \dots$
 \dots
 $\dots, \omega_1^m - n, \dots, \omega_1^m - 2, \omega_1^m - 1, \omega_1^m, \omega_1^m + 1, \omega_1^m + 2, \dots, \omega_1^m + n, \dots$
 $\dots, \omega_1^m 2 - n, \dots, \omega_1^m 2 - 2, \omega_1^m 2 - 1, \omega_1^m 2, \omega_1^m 2 + 1, \omega_1^m 2 + 2, \dots, \omega_1^m 2 + n, \dots$
 \dots
 $\dots, \omega_1^m m - n, \dots, \omega_1^m m - 2, \omega_1^m m - 1, \omega_1^m m, \omega_1^m m + 1, \omega_1^m m + 2, \dots, \omega_1^m m + n, \dots$
 \dots

5. Ancora non è stata applicata l'ipotesi V, la quale riguarda solo i segmenti infiniti che non siano già di ordine m finito. Essa permette di reiterare l'applicazione dell'ipotesi IV non più soltanto un numero finito di volte, ma "un numero di volte infinito già ottenuto" e cioè $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ volte. I numeri corrispondenti ai secondi estremi di tali segmenti saranno indicati con i simboli:

$\omega, \omega, \omega^2, \omega, \omega^3, \dots, \omega, \omega^m, \dots$

Infine l'ipotesi IV può essere applicata "un numero di volte infinito che si deduce dai nuovi segmenti così costruiti",

ossia $\infty, \infty^2, \infty^3, \dots, \infty^m$ volte, ecc.: otterremo ancora dei nuovi numeri infiniti di ordine superiore, che indicheremo con i simboli:

$$\infty \infty^{\infty}, \infty \infty^{\infty^2}, \dots, \infty \infty^{\infty^m}$$

La classe contenente tutti i numeri finiti e infiniti così ottenuti è la classe (II) dei numeri interi:

$$0, 1, 2, \dots, n, \dots, \infty_1 - 1, \infty_1, \infty_1 + 1, \dots, \infty_1^m - 1, \infty_1^m, \infty_1^m + 1, \dots$$

$$\dots, \infty_1 \infty_1^{\infty_1 - 1}, \infty_1 \infty_1^{\infty_1^m}, \infty_1 \infty_1^{\infty_1^{\infty_1 + 1}}, \dots$$

$$\dots, \infty_1 \infty_1^{\infty_1^{(m-1)}}, \infty_1 \infty_1^{\infty_1^{(m)}}, \infty_1 \infty_1^{\infty_1^{(m+1)}}, \dots$$

Ciascun numero della classe è della forma:

$$Z = \infty_1^{\mu} n_1 \pm \infty_1^{\mu-1} n_2 \pm \dots \pm \infty_1^{\mu - \mu + 1} n_{\mu-1} \pm \dots \pm n_{\mu+1}$$

Dati tutti questi segmenti infiniti di ordine determinato benché infinito, Veronese dimostra che la forma fondamentale in un verso a partire da un suo elemento qualunque dato è maggiore di ogni segmento dato (AB) su di essa. Infatti, essendo illimitata in ambedue i versi, è più grande di ogni suo segmento, anche infinito di qualunque ordine, e lo contiene; per questo è detta infinita assoluta o infinita d'ordine indeterminato (per distinguerla dai campi della scala che sono infiniti di ordine dato).

I numeri infiniti costruiti da Veronese godono di proprietà analoghe ai numeri finiti: l'operazione di somma è associativa e se il numero degli addendi è finito anche commutativa; la moltiplicazione è commutativa e distributiva. La possibilità di estendere all'infinito le proprietà del finito differenzia i numeri infiniti di Veronese dai transfiniti di Cantor, con i quali sono stati spesso confusi. Non avvedendosi dell'impossibilità di costruire con i transfiniti una geometria non archimedea e ignorando un intero paragrafo dei *Fondamenti di geometria* esplicitamente dedicato al confronto tra le due teorie, Poincaré giudicò il lavoro di Veronese come un tentativo di applicare alla geometria i numeri di Cantor.

Infine devo citare il libro del sig. Veronese sui fondamenti della geometria nel quale l'autore applica per la prima volta alla

geometria i numeri transfiniti di Cantor.⁵⁴

Ribattendo alle affermazioni di Poincaré, Veronese scrive:

[...] risulta invece che non solo i numeri transfiniti di Cantor non hanno un ufficio preponderante nella mia teoria, ma che anzi i miei numeri sono di natura affatto diversa. Nella mia introduzione vi è, è vero, un paragrafo nel quale ho trattato dei numeri di G. Cantor, ma l'ho scritto appunto per far rilevare la differenza delle due teorie [...].⁵⁵

Pur riconoscendo il debito di Veronese nei confronti di un fondamentale articolo di Cantor del 1883 (*Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*), nel quale compaiono per la prima volta in modo esplicito dei numeri infiniti, non si possono ignorare le differenze tra i rispettivi lavori. Per prolungare "la successione dei numeri interi effettivi nell'infinito" Cantor utilizza due principi di produzione in grado "di infrangere ogni limite che si frapponga alla costruzione concettuale di numeri interi effettivi" e un principio di limitazione o restrizione mediante il quale regolare il processo di creazione dei numeri infiniti, ottenendo una partizione dei numeri in classi numeriche.⁵⁶ Il primo principio consiste nella possibilità di aggiungere sempre un'unità a un numero dato e produce la serie dei numeri naturali ν della classe (I). Il secondo principio di produzione crea un nuovo numero ω , "il quale esprima il fatto che è data secondo una legge l'intera classe (I) nella sua successione naturale".⁵⁷ Il numero ω , a differenza di ∞_1 , non ha numeri infiniti che lo precedono, ma in quanto "limite" al quale tende la serie naturale è il primo numero infinito.⁵⁸ Mediante l'applicazione del primo e del secondo principio di applicazione Cantor ottiene una successione, priva di massimo, di numeri ordinali infiniti: $\omega+1, \omega+2, \dots, 2\omega, 2\omega+1, \dots, 3\omega, 3\omega+1, \dots, \mu\omega, \mu\omega+1, \dots, \omega^\omega$ ecc. il prin-

⁵⁴ Poincaré, "Rapport sur les travaux de M. Hilbert", *Bulletin de la Société Physico-Mathématique de Kazan*, (2), 14, pp. 10-48, cit. in GNA, p. 348.

⁵⁵ GNA, p. 349.

⁵⁶ Cantor, [1992], pp. 78-80.

⁵⁷ Cantor, [1992], p. 115.

⁵⁸ "È senz'altro lecito pensare questo numero ω appena creato come il limite al quale tendono i numeri ν , se con ciò si intende solamente che ω dev'essere il primo numero intero che segue tutti ν , ovvero è da considerarsi maggiore di tutti essi." Cantor, [1992], p. 115.

cipio di restrizione o limitazione richiede che, dato un qualunque numero α della successione creata, "Insieme dei numeri che precedono α nella successione numerica abbia la potenza della prima classe numerica (I)."⁵⁹ Questo terzo principio pone un limite alla costruzione di nuovi numeri interi infiniti, perché

[...] impone di intraprendere, con l'ausilio di uno degli altri due principi, la creazione di un nuovo numero intero solo quando la totalità dei numeri già percorsi ha, presa nella sua intera estensione, la potenza di una classe numerica definita già data.⁶⁰

Veronese analizza i numeri transfiniti di Cantor e dimostra che non si può rappresentare "in senso assoluto col numero ω un elemento all'infinito del sistema omogeneo".⁶¹ Se esistesse un primo elemento all'infinito verrebbe meno la proprietà di omogeneità imposta alla forma fondamentale in analogia con le nostre osservazioni empiriche.⁶² Associando ai segmenti della forma i numeri di Cantor,

la retta non mantiene nei punti all'infinito la sua omogeneità e intorno ai punti all'infinito non possono essere quindi conservate le proprietà che derivano dall'esperienza.⁶³

I numeri di Veronese, oltre ad accordarsi con le proprietà del continuo intuitivo rettilineo, estendono all'infinito molte proprietà dei numeri finiti: in particolare conservano la commutatività della somma e del prodotto, mentre le operazioni definite sui transfiniti di Cantor "sono soggette in generale alla legge associativa ma non a quella commutativa".⁶⁴

⁵⁹ Cantor, [1992], p. 117.

⁶⁰ Cantor, [1992], p. 120.

⁶¹ FG, p. 103, § 3, n. 90, b.

⁶² "Ora ammettendo l'infinito attuale sulla retta la prima ipotesi che si presenta è quella che essa conservi la sua omogeneità anche all'infinito, e che quindi i suoi punti all'infinito siano assoggettati alla definizione del sistema omogeneo, indipendentemente, come dissi, dal concetto di finito e infinito che deriva da quello di scale." FG, p. 105, § 3, n. 90, nota 1.

⁶³ FG, p. 105, § 3, n. 90, nota 1.

⁶⁴ Cfr. Cantor, [1992], p. 122: $i + \omega = \omega \neq \omega + 1$, così come $2 \cdot \omega = \omega \neq \omega \cdot 2 = \omega + \omega$.

2.3 LA CONTINUITÀ DELLA FORMA FONDAMENTALE

Si è affermato che tra le ipotesi della forma fondamentale non compare il principio di Archimede. Si può però dimostrare un principio più generale, il quale afferma che, dati due segmenti diversi, esiste sempre un multiplo dell'uno che supera l'altro: tale multiplo è inteso però secondo il numero η della classe (II) anziché secondo il numero n . Grazie all'introduzione dei nuovi numeri infiniti Veronese garantisce la confrontabilità di segmenti finiti e infiniti, perché trasforma questi ultimi in segmenti finiti la cui infinità è semplicemente relativa all'unità di misura fissata. Per comprendere la possibilità di questa relativizzazione dell'infinito, è essenziale analizzare una distinzione tra *finitzza assoluta* e *finitzza relativa* che Veronese introduce quando affronta la questione della continuità della forma fondamentale.

In analogia con la definizione di campo finito di una scala (il segmento variabile sempre crescente ottenuto sommando ciascun segmento consecutivo al tutto ottenuto dalla somma dei precedenti) Veronese introduce il concetto di *campo finito assoluto*, sciolto dal riferimento ad un'unità, il campo finito assoluto è un segmento variabile che scorre sull'intera forma fondamentale: a ciascuno stato di esso corrisponde un segmento limitato, che è *finito in senso assoluto* ma può essere infinito rispetto ad uno stato precedente o infinitesimo rispetto ad uno stato successivo.⁶⁵ Finito in senso assoluto significa perciò appartenente alla forma fondamentale, la quale è un campo infinito assoluto generato da un segmento che prende il nome di *unità assoluta*. Pur essendo tutti finiti assoluti, alcuni segmenti della forma fondamentale crescono indefinitamente, ossia diventano più grandi di ogni altro segmento finito dato: si dice che hanno per *limite* "tutta la forma fondamentale a partire dall'origine A nel verso della scala assoluta, vale a dire l'infinito assoluto".⁶⁶ Il limite del campo finito assoluto della

⁶⁵ "Chiameremo [...] *campo finito assoluto* in un dato verso a partire da un elemento dato il campo dei segmenti limitati a due estremi nel verso dato, nello stesso modo che abbiamo il campo relativo ad una data unità (AA). S'intende che due segmenti di questo campo possono essere infiniti l'uno rispetto all'altro." FG, p. 112, § 4, n. 92, Def. IV.

⁶⁶ FG, p. 113, § 4, n. 92, Def. VI.

scala è l'*infinito assoluto*, vale a dire la forma fondamentale stessa. Uno stesso segmento può dunque essere finito assoluto rispetto all'unità assoluta e finito, infinito, infinitesimo relativo rispetto a un'unità relativa. L'unico segmento infinito assoluto è la forma fondamentale stessa; l'unico segmento infinitesimo assoluto è il segmento nullo rispetto all'unità assoluta.

2.3.1 Il continuo rettilineo intuitivo

Per garantire continuità alla forma fondamentale Veronese introduce tre ipotesi suggerite dall'esperienza del continuo intuitivo: nell'accordo con l'esperienza egli individua infatti una ragione empirica per la costruzione di una grandezza ordinata, non archimedea e continua. Le riflessioni sulla natura del continuo intuitivo giocano un ruolo importante nella costruzione effettiva del sistema non archimedeo e confermano un tratto caratteristico dell'epistemologia di Veronese: il richiamo all'intuizione nella giustificazione della scelta delle premesse fondamentali della geometria. Il tentativo di riprodurre astrattamente le proprietà degli oggetti concreti osservati nell'esperienza dipende dalla scelta metodologica di fondare il continuo geometrico sul continuo intuitivo anziché su una legge del pensiero e instaura un equilibrio fecondo tra forma e contenuto. Se la traduzione della geometria in forma assiomatica prevede l'espunzione del ricorso implicito all'intuizione nella formulazione delle ipotesi e nella dimostrazione dei teoremi, l'intuizione permette però un'interpretazione privilegiata delle forme astratte, delle quali evoca in modo immediato le proprietà.

Quotidianamente – afferma Veronese – facciamo esperienza di oggetti ai quali attribuiamo il collegamento continuo tra le parti. L'intuizione di questa forma di continuità è anteriore alla sua definizione matematica perché chiunque può comprenderne il significato pensando al continuo come attributo di grandezze quali il tempo o lo spazio occupato da un filo teso o da un segmento rettilineo.⁶⁷ La definizione matematica del

continuo nasce dalla traduzione delle caratteristiche di alcuni oggetti reali concreti in proprietà astratte, valide indipendentemente dall'intuizione del significato empirico dei termini che le esprimono. L'insistenza di Veronese sul legame di stretta dipendenza della teoria delle forme matematiche astratte dalla realtà empirica osservabile è coerente con la concezione della geometria come scienza mista, il cui compito comprende da un lato la descrizione delle proprietà degli oggetti concreti, dall'altro l'astrazione dalle imperfezioni e dalle irregolarità di questi oggetti stessi. Il richiamo all'evidenza intuitiva del continuo empirico è però motivato anche dall'esigenza di trovare un fondamento plausibile alla teoria non archimedea delle grandezze, la quale introduce concetti "paradossali" come l'infinito e l'infinitesimo attuale. Mentre la possibilità del primo era già stata avanzata da Cantor, l'esistenza di segmenti infinitesimi era molto più difficile da sostenere dopo la determinazione rigorosa del continuo dei numeri reali ad opera di Dedekind, Weierstrass e Cantor. Per difendersi dall'accusa di aver introdotto in geometria un concetto assurdo, Veronese intende mostrare la compatibilità della propria teoria con le proprietà degli oggetti continui osservati. Se la continuità non archimedea permette di descrivere con efficacia gli oggetti osservabili, essa non può essere confutata dal semplice fatto che *non vediamo* gli infinitesimi, i quali sono anzi di necessità fuori del campo della nostra percezione perché per definizione trascurabili rispetto al finito.

La determinazione del concetto astratto di continuo prende le mosse da una preliminare enucleazione delle caratteristiche attribuite nell'osservazione sensibile a un oggetto rettilineo e si conclude con la traduzione di queste caratteristiche in proprietà astratte indipendenti dall'intuizione. Perché il ricorso a nozioni apprese mediante l'esperienza sensibile non infici la validità e l'astrattezza dei concetti matematici che ad esse corrispondono, occorre infatti che le definizioni e le dimostrazioni matematiche

forma più semplice come contrassegno comune a più cose concrete, quali sono, per dar esempio di talune fra le più semplici, il tempo e il luogo occupato nell'ambiente esterno dall'oggetto qui tracciato (un segmento rettilineo), od a quello di un filo a piombo, di cui non si tenga conto delle sue qualità fisiche e della sua grossezza (in senso empirico)." FG, p. 45, § 1, n. 35.

⁶⁷ "Che cosa è il continuo? Ecco una parola il cui significato senza bisogno di alcuna definizione matematica tutti intendiamo, perché intuiamo il continuo nella sua

siano indipendenti dall'intuizione e dall'osservazione empirica:

Rilevando le particolarità di questo continuo intuitivo dobbiamo cercare una definizione astratta del continuo, nella quale non entri più come elemento necessario l'intuizione o la rappresentazione sensibile, in modo che inversamente questa definizione possa servire astrattamente con pieno rigore logico alla deduzione di altre proprietà dello stesso continuo intuitivo.⁶⁸

La definizione matematica di continuo, se non vuole essere una semplice convenzione linguistica che rinomina arbitrariamente un oggetto, deve prendere le mosse dall'analisi delle proprietà che caratterizzano il continuo intuitivo per poi tradurle in termini rigorosi: in questo modo non sarà puramente nominale ma come gli altri concetti primitivi della geometria avrà un contenuto empirico determinato. Se il continuo matematico comprende come caso particolare il continuo intuitivo, la teoria non archimedea astratta che legittima l'introduzione degli infiniti e infinitesimi attuali sarà ancorata alla realtà sensibile.⁶⁹

Per individuare le principali caratteristiche del continuo intuitivo, Veronese analizza le proprietà di un oggetto rettilineo empirico che conosciamo grazie all'osservazione sensibile: lo studio di un segmento rettilineo conduce ad osservare che il continuo "si può ritenere composto di una serie di parti consecutive identiche *a, b, c, d* ecc. disposte da sinistra verso destra" o da destra verso sinistra.⁷⁰ Questa proprietà, che caratterizza una grandezza continua come sistema ad una dimensione identico nella posizione delle parti, è attribuita alla forma fondamentale con l'ipotesi II: i segmenti sono uguali considerati sia in un verso sia nel verso opposto. Ciascuna delle parti di un oggetto rettilineo concreto è a sua volta continua come il tutto che concorre a formare; date due parti consecutive, inoltre, non c'è nessun'altra parte che stia tra di esse e se una qua-

⁶⁸ FG, P. 45, § 1, n. 55.

⁶⁹ "D'altra parte se la definizione del continuo non è puramente nominale e vogliamo invece corrispondere a quello intuitivo suddetto, deve evidentemente scaturire dall'esame di questo, anche se poi la definizione astratta in conformità ai principi matematicamente possibili comprenderà questo continuo come caso particolare." FG, P. 45, § 1, n. 55. Questo passo mostra con chiarezza che Veronese fonda il continuo sull'intuizione e non su una legge del pensiero: cfr. il § 1.1.2.

⁷⁰ FG, P. 45, § 1, n. 55.

lunque parte viene tolta il tutto perde la sua continuità.⁷¹ Questo significa – continua Veronese – che non esiste un altro tutto che abbia le stesse proprietà dell'oggetto rettilineo e le cui parti siano tali da separare due parti consecutive: ne risulta un continuo composto di parti consecutive non ulteriormente scomponibili, che chiamiamo indivisibili, intendendo con ciò delle parti più piccole di ogni altra parte data e dunque indefinitamente piccole. Poiché ciò che appare indivisibile ad un'osservazione si può rivelare divisibile secondo un'osservazione compiuta con strumenti più precisi, "è l'esperienza stessa che ci spinge a cercare l'indivisibile in modo da non poterlo ottenere praticamente": dunque chiamiamo indivisibile ogni cosa più piccola di una qualunque parte osservabile del continuo.⁷² L'indivisibile può essere inteso come il limite sperimentale di un processo di divisione in parti di un certo oggetto: l'oggetto al quale perveniamo (pensiamo ad esempio alla scomposizione della materia in atomi, per lungo tempo ritenuti indivisibili) potrebbe anche avere parti (nucleo, elettroni) ma noi stabiliamo che esso sia la parte più piccola rispetto ad ogni altra che siamo in grado di ottenere (tuttora l'atomo può essere considerato la parte più piccola di un elemento che conservi le proprietà chimiche dell'elemento stesso).⁷³ L'indivisibile è

⁷¹ Si veda la definizione data da Aristotele nel capitolo V della *Fisica*, ove si esamina il concetto di movimento: "Consecutivo" è ciò che viene dopo il punto di inizio, o per posizione o per specie o in altro modo, cosicché non sia separato da niente di intermedio tra ciò che appartiene al medesimo genere e ciò che gli è consecutivo. Intendo, ad esempio, che non vi sia una linea dopo una o più linee, o un'unità dopo l'unità o più unità, o una casa dopo una casa. (Mentre niente vieta che vi sia un termine intermedio di tipo diverso)." Aristotele, *Fisica*, V 3, 226b 35-227 a 5, [1995], p. 259. La stessa definizione è ripresa all'inizio del capitolo successivo, nel quale Aristotele introduce il continuo: "consecutivo è ciò in cui non esiste come intermedio nulla che abbia la stessa natura". *Fisica*, VI 1, 230 a 20-25, [1995], p. 289. Se tra due parti consecutive del continuo non può esistere un'altra parte dello stesso genere, allora tra due segmenti consecutivi di una linea non può esistere un altro segmento: ciò che permette di distinguere una parte dall'altra può essere solo qualcosa che non è dello stesso genere del segmento, ad esempio un punto. Il punto allora non può essere a sua volta una parte della linea, perché altrimenti i due segmenti precedenti non sarebbero consecutivi, in quanto tra di loro vi sarebbe "una realtà della medesima natura".

⁷² FG, p. 46, § 1, n. 55.

⁷³ L'analogia con l'atomo chiarisce perché l'indivisibile sia da considerarsi come una parte della linea più piccola di ogni parte data, ma tale da rimanere sempre della stessa specie rispetto alla linea. L'indivisibile per quanto piccolo è sempre

allora o il risultato di una scelta convenzionale o la necessaria conseguenza di un limite fisico alla divisibilità della materia: in ogni caso è distinto dall'infinitesimo attuale, rispetto al quale è piuttosto un indefinitamente piccolo e non il limite dato di un processo all'infinito che non può mai essere completato. Il segmento indivisibile di Veronese presenta delle analogie con gli indivisibili di Cavalieri, proprio perché non è un infinitesimo attuale, bensì una parte piccolissima del continuo che lo costituisce. La superficie, per Cavalieri, era l'unione di tutte le linee infinite intercettate da un sistema (discreto) di rette parallele: le linee formano il continuo perché in realtà ciascuna di esse è considerata come una superficie sottilissima e non come una semplice lunghezza. Veronese chiama indivisibili gli infiniti punti considerabili come segmenti piccolissimi nei quali la linea può essere divisa: la loro unione produce il continuo soltanto in quanto essi sono segmenti e dunque parti della stessa natura del continuo che concorrono a formare. L'indivisibile non è l'infinitesimo attuale, perché non è un indefinitamente piccolo, ma un indefinitamente piccolo: è un segmento i cui estremi tendono a coincidere in un unico punto, senza che ciò possa mai avvenire. Gli indivisibili sono sempre parti del continuo, a differenza dei segni di separazione di due parti consecutive, i quali sono frutto della capacità di astrazione della nostra mente; questi segni, chiamati anche punti, permettono semplicemente di distinguere due parti consecutive l'una dall'altra e appartengono a queste parti, delle quali costituiscono le estremità, ma non al continuo. Dall'osservazione di un filo teso ricaviamo che i punti servono soltanto ad indicare al nostro occhio l'inizio e la fine di una parte in modo che noi possiamo considerarla distinta dalle altre e indipendente da esse: in un certo senso è come se i punti non ci fossero neppure nel continuo, ma fossimo noi, con un'operazione di astrazione, ad inserirveli per riuscire a distinguerne le diverse parti. Se il punto non è parte del continuo e non ha esso stesso parti, in nessun caso un sistema o insieme di punti può formare un continuo.⁷⁴ Già Aristotele in

un segmento e non un punto, perché altrimenti perderebbe le sue proprietà caratteristiche.

⁷⁴ FG, p. 47, § I, n. 55.

un passo della *Fisica* affermava che la linea, poiché era continua, non poteva essere costituita di punti indivisibili.⁷⁵ Veronese ammette che la linea non sia formata da punti ma ritiene il continuo composto da indivisibili: ove per indivisibile intende non il punto ma un segmento piccolissimo che non può essere scomposto in parti rispetto all'unità di misura fissata. È però vero che un sistema di punti può rappresentare con un'approssimazione sufficiente il continuo geometrico se si conviene di considerare come parti del continuo non i punti stessi ma le parti di cui essi sono estremi:

[...] troviamo che un sistema di punti può rappresentare sufficientemente il continuo nelle ricerche geometriche. Il continuo rettilineo non è mai composto dai suoi punti ma dai tratti che li congiungono due a due e che sono pur essi continui. In questo modo il mistero della continuità viene ricacciato da una parte data e costante della retta ad una parte indeterminata quanto piccola si vuole, che è pur sempre continua, e dentro alla quale non ci è permesso di entrare più oltre con la nostra rappresentazione. Ed è in questo mistero che si avvolge in fondo il concetto fondamentale di limite.⁷⁶

Il continuo non è composto da punti, ma da tratti indivisibili congiungenti dei punti: questi tratti, più piccoli di ogni altro tratto dato, sono a loro volta continui, ma non sono ulteriormente scomponibili; questo non significa che non abbiano parti ma soltanto che tali parti, se esistono, non sono parti del continuo (ad esempio una linea indivisibile può essere scomposta in punti ma i punti non sono parti del continuo). Il concetto di indivisibile ha un valore relativo e non assoluto: indivisibile non è necessariamente il punto, ossia ciò che non ha parti, ma piuttosto ciò che è considerato come non avente parti rispetto al continuo dato. È proprio a partire dalla considerazione dei segmenti indivisibili come parti del continuo non contenenti altre parti dello stesso continuo che si può ritenere opportuno rappresentarli mediante punti: parti che non

⁷⁵ "[...] risulta impossibile che qualcosa di continuo sia costituito da indivisibili, come ad esempio la linea da punti, se la linea è continua e il punto è indivisibile." Aristotele, *Fisica*, VI I, 231 a 20-25.

⁷⁶ FG, p. 48, § I, n. 55.

hanno a loro volta parti.⁷⁷ Adottare un sistema di punti per rappresentare il continuo è dunque possibile solo a condizione che i punti siano concepiti come elementi di divisione di segmenti consecutivi indivisibili e identici e non come parti del continuo perché la loro unione, per quanti essi siano, non costituisce il continuo.

2.3.2 Continuità relativa e continuità assoluta

La continuità attribuita alla forma fondamentale dalle ipotesi VI-VIII dei *Fondamenti* è diversa dalla continuità dei numeri reali, la quale presuppone la validità del principio di Archimede. Dopo aver dimostrato un principio generale di confrontabilità che comprende il principio di Archimede come caso particolare, Veronese introduce un postulato generale che comprende l'usuale continuità analitica come caso particolare. Prima di introdurre le ipotesi suggerite dall'esperienza, stabilisce di adottare convenzionalmente come unità di misura un segmento che contiene almeno un infinitesimo di primo ordine. L'esistenza di questo segmento è garantita dalle ipotesi III e IV. Non è per ora necessario assumere che ogni segmento della forma contenga un infinitesimo: è sufficiente scegliere come unità di misura di riferimento un segmento infinito rispetto all'unità (AA_1).

Una caratteristica essenziale del continuo intuitivo è la divisibilità di ogni parte limitata da due punti. La forma fondamentale gode di un'analoga proprietà dimostrabile come conseguenza delle ipotesi di esistenza e costruzione dei segmenti infiniti: "un segmento finito della forma fondamentale può essere scomposto in un numero intero finito di parti finite consecutive ciascuna più piccola di qualsiasi segmento finito dato."⁷⁸ Scomponendo un segmento dato (AB) in parti via via più piccole si ottiene una serie di segmenti finiti (AX), che "si può immaginare generata da un segmento variabile sempre decrescente nella quale A è sempre lo stesso e X varia in modo che in ogni stato (AX) è un segmento della serie minore di ogni

⁷⁷ Si ricordi la definizione euclidea del punto come ciò che non ha parti. Cfr. Euclide, *Elementi*, Libro I, Def. I., [1970], p. 65.

⁷⁸ FG, p. 126, § 7, n. 95, b.

segmento precedente".⁷⁹ Il segmento variabile decrescente (AX) poiché diventa più piccolo di ogni segmento finito dato diventa *indefinitamente piccolo* rispetto all'unità data, scelta in modo da contenere almeno un segmento infinitesimo. Il segmento variabile non è mai esso stesso un infinitesimo o infinitamente piccolo ma tende a diventarlo: si dice che ha per *limite* un *segmento infinitesimo di primo ordine*. L'esistenza di questo segmento è garantita dalla scelta dell'unità di misura.⁸⁰ Veronese passa poi a considerare un altro tipo di segmento variabile, ove a variare non sia più un solo estremo ma entrambi. Dato un segmento (XX') avente gli estremi da parti opposte rispetto ad A (supposto contenuto in (XX')), e tali che si avvicinano indefinitamente in versi opposti, si dimostra che il segmento (XX') diventa più piccolo di ogni segmento dato e che il suo limite è il segmento nullo. Se A è fuori del campo di variabilità dei suoi estremi, si dimostra in particolare che A è l'unico limite di (XX').⁸¹

Il teorema sopra enunciato presuppone l'esistenza dell'elemento A all'interno del segmento variabile (XX') che diventa indefinitamente piccolo ma tale esistenza non è affatto garantita: ancora una volta è l'esperienza del continuo intuitivo a suggerirci di ammettere come ipotesi che tale elemento esista sempre all'interno del segmento (l'unicità è già garantita dal teorema precedente, il quale afferma che se esiste un elemento fuori del campo di variabilità degli estremi esso è l'unico limite).⁸²

lp. VI. Ogni segmento il quale avendo gli estremi sempre variabili in versi opposti diventa indefinitamente piccolo contiene un elemento fuori del campo di variabilità degli estremi stes-

⁷⁹ FG, p. 126, § 7, n. 95, Oss. I.

⁸⁰ FG, pp. 126-127, § 7, n. 95, Def. I-III.

⁸¹ "Un segmento che diventa indefinitamente piccolo rispetto ad una data unità cogli estremi variabili in versi opposti e contiene un elemento A fuori del campo di variabilità dei suoi estremi ha per limite il solo elemento A rispetto a questa unità." [corsivo nel testo] FG, pp. 126-127, § 7, n. 95, g.

⁸² "Ricorrendo al continuo intuitivo determinato dai punti dell'oggetto rettilineo noi siamo condotti ad ammettere che in ogni caso il segmento variabile (XX') contenga degli elementi fuori del campo di variabilità fra X e X'." FG, p. 128, § 7, n. 96, Oss. I.

si.⁸³

Questo è l'enunciato del postulato di continuità relativo al campo di una scala: esso garantisce che, data un'unità di misura contenente un infinitesimo, tutti i segmenti del campo generato da quell'unità siano continui. Più precisamente postula l'esistenza di un elemento separatore di due classi di segmenti tali che i secondi estremi dei segmenti della prima classe e i primi estremi dei segmenti della seconda si avvicinano senza mai coincidere. Un sistema omogeneo che goda di questa proprietà è detto *continuo rispetto all'unità data o continuo relativo*, perché l'ipotesi è definita relativamente ad un'unità data in rapporto alla quale il segmento variabile diventa indefinitamente piccolo. Proprio questa limitazione è essenziale per comprendere la differenza tra il continuo ordinario e quello di Veronese. Brouwer espone con estrema chiarezza la peculiarità di quest'ultimo:

Il continuo non archimedeo possiede invece la *continuità di Veronese*, che può essere così definita: se l'insieme dei punti del continuo è diviso in due parti in modo tale che ciascun punto di una parte è maggiore di ciascun punto dell'altra e se inoltre posso scegliere da entrambe le parti due punti la cui differenza può essere resa più piccola di ogni quantità data, allora o la parte minore ha un massimo e la parte maggiore non ha un minimo o la parte maggiore ha un minimo e la parte minore non ha un massimo. (Se la condizione che la differenza possa essere resa indefinitamente piccola non è soddisfatta, allora può accadere che la parte minore non abbia un massimo e la parte maggiore non abbia un minimo.)⁸⁴

La continuità di Dedekind non è più valida in generale, perché è possibile individuare due classi tali che tutti i punti dell'una siano minori di tutti i punti dell'altra senza che la maggiore abbia un minimo o la minore un massimo. Se concepiamo la forma fondamentale come un fascio di rette parallele sul quale sia stato fissato un verso di percorrenza da sinistra a destra, e consideriamo due rette parallele r e s , esse costituiscono rispettivamente due classi A e B tali che tutti i

punti di A sono minori di tutti i punti di B , eppure non esiste un massimo della prima né un minimo della seconda. Se invece posso scegliere due punti appartenenti uno ad una classe e l'altro all'altra tali che la loro differenza diventi indefinitamente piccola (ossia i due punti appartengono ad una stessa scala), allora il tutto composto dalle due classi sarà continuo nel senso di Dedekind. Tale condizione è soddisfatta soltanto quando le due classi appartengono ad una stessa retta ossia nel caso contemplato dal continuo ordinario. Poiché la differenza diventa indefinitamente piccola rispetto ad un'unità di misura e non in assoluto, il continuo è relativo.

Dall'ipotesi VI deriva un teorema fondamentale per la determinazione del continuo numerico: tutti gli elementi di un segmento dato possono essere ottenuti o come elementi di divisione delle sue parti o come limiti di particolari serie di esse.

*Dividendo un segmento AB in n parti uguali e le parti risultanti in n parti uguali e così via, si ottiene un gruppo di elementi del segmento dato compresi gli estremi i cui altri elementi sono elementi limiti del gruppo dato rispetto all'unità di misura.*⁸⁵

Gli elementi di divisione di tali parti via via più piccole formano un insieme di elementi il quale non esaurisce il segmento (AB): intorno a ciascun elemento di divisione rimangono sempre infiniti altri elementi, che però possono essere ottenuti mediante il passaggio al limite di opportune successioni di elementi di divisione. Traducendo in un linguaggio geometrico non rigoroso, potremmo dire che in un segmento ci sono dei punti che possiamo ottenere mediante la divisione del segmento stesso in un numero intero di parti finite, uguali tra loro e consecutive: a questi punti corrispondono i numeri razionali, che infatti esprimono il rapporto tra la parte del segmento e il segmento. Ci sono però infiniti altri punti che non possono essere raggiunti mediante la suddivisione in parti finite del segmento: essi sono gli estremi di quelle parti che chiamiamo incommensurabili rispetto al segmento, perché il loro rapporto non è esprimibile mediante i soli numeri interi; a tali punti corrispondono numeri irrazio-

⁸³ FG, p. 128, § 7, n. 96, [p. VI] [grassetto nel testo].

⁸⁴ Brouwer, [1907], pp. 49-50.

⁸⁵ FG, p. 138, § 8, n. 99, b.

nali. Ciascuna delle parti (AX) del segmento (AB) può essere rappresentata dal simbolo *razionale*:

$$(AB) \left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^n} \right)$$

(ove le $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono uguali a 0 o a 1, ma non sono tutte zero), se X è un elemento della divisione successiva di (AB) per metà. Negli altri casi le parti di (AB) possono essere rappresentate mediante il seguente simbolo, che si dice *irrazionale*:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (AB) \left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \dots \right)$$

Tutti i numeri razionali e irrazionali costituiscono insieme i numeri reali, che "si possono far corrispondere univocamente e nel medesimo ordine a tutti gli elementi del continuo a partire da un dato elemento come origine fondamentale";⁸⁶ dunque si può affermare che "tutti i numeri reali, ordinati in modo che ogni numero minore precede ogni altro numero maggiore di esso, costituiscono il *continuo numerico*".⁸⁷

Per l'ipotesi VI il campo della scala di unità (AB) è continuo, ma il campo della scala generata da un segmento infinitesimo contenuto in (AB) è anch'esso continuo? Poiché Veronese postula l'esistenza del limite soltanto in una scala la cui unità contenga almeno un infinitesimo, per estendere il postulato della continuità a tutte le scale deve stabilire se esse contengono tutte dei segmenti infinitesimi o se non esiste piuttosto un ultimo campo infinitesimo che contiene un segmento non ulteriormente divisibile (infatti se non c'è continuità vuol dire che esisteranno due elementi tra i quali non ve ne è nessun altro e dunque il segmento che ha quei due elementi per estremi è indivisibile). Per mantenere l'uniformità della forma fondamentale e garantire le stesse proprietà a tutti i suoi segmenti rispetto alla scomposizione in campi infinitesimi, Veronese postula l'ipotesi:

⁸⁶ FG, p. 197, § 4, n. 121, c'.

⁸⁷ FG, p. 197, § 4, n. 121, Def. III.

ip. VII. Il segmento (AB) che ha servito a costruire la prima scala contiene infinitesimi dello stesso ordine di quelli di ogni altro segmento limitato della forma fondamentale maggiore di (AB).⁸⁸

L'unità di misura (AB) contiene per definizione un segmento infinitesimo di 1° ordine (YY'), dunque un segmento (AAⁿ) infinito di 1° ordine rispetto ad (AB) conterrà almeno un segmento infinitesimo di 2° ordine; allora anche (AB) deve contenere un segmento infinitesimo di 2° ordine e così via. Questa ipotesi afferma in sostanza che l'unità di misura contiene una serie illimitata di infinitesimi di ordine 1, 2, ..., n, ..., ∞, ∞², ... (per tutti i numeri della serie II) e si lascia "frantumare in infinitesimi di qualsiasi ordine".⁸⁹ Tutte le scale della forma fondamentale saranno pertanto continue e dati due elementi di esse vi sarà sempre un altro elemento compreso tra i due: in particolare - osserva Veronese - "dall'ipotesi stessa risulta che non vi è un ultimo segmento dato (AB) indivisibile, cioè un segmento (AB) più piccolo di ogni segmento dato".⁹⁰ L'ipotesi VII non introduce ancora il concetto di continuità assoluta ma estende ad ogni campo di scala la continuità relativa. Se il campo di una scala la cui unità contiene almeno un infinitesimo è continuo e tutte le scale hanno unità contenenti almeno un infinitesimo, allora tutti i campi di scala della forma fondamentale sono continui, ciascuno relativamente alla sua unità.

Per introdurre la continuità assoluta della forma fondamentale, occorre innanzi tutto definire cosa s'intende per *infinitesimo assoluto* o infinitesimo rispetto all'unità assoluta, che può essere scelta tra tutti i segmenti finiti assoluti della forma. Poiché non esiste un primo campo infinitesimo ma ogni segmento contiene segmenti infinitesimi di ordine infinito, propriamente "non abbiamo un infinitesimo rispetto all'unità assoluta", vale a dire non esiste un segmento che sia più piccolo di ogni altro segmento della forma fondamentale e che sia contenuto nella forma stessa. Tuttavia, dato che esiste un infinito assoluto, che è la forma stessa considerata nella sua totalità,

⁸⁸ FG, p. 147, § 9, n. 100, ip. VII [grassetto nel testo].

⁸⁹ Busullini, [1969-70], p. 261.

⁹⁰ FG, p. 147, § 9, n. 100, Oss. II.

[...] per uniformità di linguaggio possiamo dire che vi è un *infinitesimo assoluto* i cui estremi dobbiamo però ritenerli come un solo elemento in senso assoluto in base a principi già ammessi, vale a dire l'*infinitesimo assoluto è nullo rispetto all'unità assoluta*, ossia rispetto ad ogni segmento (AB) come unità di misura.⁹¹

Per mantenere l'uniformità, suggerita dall'intuizione, tra le parti infinitamente piccole del continuo rettilineo, Veronese attribuisce alla forma fondamentale un'ultima essenziale proprietà: la continuità assoluta.

Ip. VIII. Ogni segmento (XX') cogli estremi variabili in versi opposti che diventa indefinitamente piccolo in senso assoluto contiene un elemento fuori del campo di variabilità dei suoi elementi.⁹²

Dato un segmento finito assoluto della forma fondamentale che tende a diventare indefinitamente piccolo in senso assoluto, esso contiene un elemento fuori del campo di variabilità dei suoi estremi e precisamente un segmento infinitesimo assoluto, ossia il segmento nullo rispetto all'unità assoluta.

Per distinguere la forma fondamentale da tutti gli altri sistemi continui ad una dimensione identici nella posizione delle parti, Veronese aggiunge un'ultima ipotesi, che riguarda il numero di elementi dai quali devono essere determinate le sue parti:

Ip. IX. La forma fondamentale è il sistema continuo ad una dimensione identico nella posizione delle sue parti determinate dal minor numero di elementi.⁹³

Se le parti della forma fossero determinate da tre elementi anziché da due, sarebbe infatti necessario ricorrere al continuo numerico per confrontare la loro grandezza intensiva. Ogni forma ha infatti *grandezza estensiva*, che è la forma "considerata nelle relazioni di posizione fra le sue parti, astrazione fatta dalle relazioni di uguaglianza e di disuguaglianza con le altre forme", e *grandezza intensiva*, detta anche quantità, che è la forma "considerata come sostituibile ad un'altra forma identica in ogni unione

⁹¹ FG, p. 148, § 9, n. 100, Def. I.

⁹² FG, p. 150, § 9, n. 101, Ip. VIII [grassetto nel testo].

⁹³ FG, p. 202, § 1, n. 122, Ip. IX [grassetto nel testo].

con altre forme, astrazione fatta quindi dalle relazioni di posizione".⁹⁴ Mentre la grandezza estensiva dipende dalle relazioni interne fra gli elementi della forma, la grandezza intensiva dipende da un confronto numerico con altre forme. Se consideriamo una figura determinata da tre elementi, come il cerchio, notiamo che mentre le grandezze estensive di tutti i cerchi sono uguali, perché ciascuno è determinato da un gruppo di tre elementi, le grandezze intensive possono essere diverse: per confrontarle occorre scegliere un'unità di misura e valutare se un cerchio possa essere espresso come parte di un altro. Al contrario tutte le rette determinate da due elementi sono tra loro uguali sia estensivamente sia intensivamente e le relazioni quantitative sono determinabili senza ricorrere ad un confronto numerico. Proprio per questo in geometria sarà preferibile adottare come forma fondamentale la retta anziché il cerchio.⁹⁵

2.4 L'INFINITESIMO ATTUALE

La portata rivoluzionaria del continuo non archimedeo di Veronese risiede da un lato nell'affermazione dell'esistenza dell'infinitesimo attuale, negata da una lunga tradizione matematica e filosofica, dall'altro nella determinazione di un postulato di continuità che non contiene il principio di Archimede. Che una grandezza possa essere moltiplicata tante volte finché supera ogni altra grandezza data dello stesso tipo è un principio assunto implicitamente negli *Elementi* di Euclide e utilizzato da Eudosso nella teoria delle proporzioni.⁹⁶ Otto

⁹⁴ FG, p. 178-179, § 2, n. 111, Def. I-II.

⁹⁵ "Dopo ciò è chiaro che se il sistema identico nella posizione delle sue parti è determinato dal minor numero di elementi ed è anche tale che tutti i sistemi così determinati sono uguali, non occorrerà ricorrere al continuo numerico per stabilire la loro differenza essendo già uguali, e dati due segmenti uguali di tali sistemi, tenuto conto dell'osservazione precedente, potremo sostituirla l'uno all'altro nella costruzione delle forme identiche. Un tale sistema sarà da preferirsi come forma fondamentale. Ciò succede appunto nella geometria per la retta." FG, p. 203, § 2, n. 123.

⁹⁶ Cfr. Geymonat [1948], pp. 24-25, 32-33. Alcuni storici (tra i quali Paul Tannery) ne scorgono una formulazione in negativo addirittura negli argomenti contro il moto di Zenone: la dicotomia e l'Achille. Entrambi gli argomenti criticano infatti la concezione della pluralità propria dei pitagorici (per i quali il punto è l'elemento costitutivo dei corpi) fondandosi sull'impossibilità di occupare successivamente un

Stolz, scoprendo che il principio era stato formulato in modo esplicito nelle opere del matematico siracusano, lo ribattezzò "principio di Archimede".⁹⁷ Negli *Elementi* di Euclide esso compare come una definizione del concetto stesso di rapporto: due grandezze disuguali sono tra loro confrontabili o hanno un rapporto quando è possibile trovare un multiplo dell'una che superi l'altra.⁹⁸ In Euclide il principio di Archimede è dunque sinonimo di confrontabilità: due grandezze che non soddisfano alla condizione del principio non hanno un rapporto hanno natura diversa, sono non omogenee (ad esempio non è possibile determinare il rapporto tra un segmento e un'area, o tra un'area e un volume, perché queste grandezze non sono dello stesso tipo). Il principio compare nell'antichità anche come condizione essenziale nel procedimento per esaurimento, con il quale i greci determinavano, in modo rigoroso e senza ricorrere al processo di passaggio al limite, il rapporto tra una certa grandezza ignota (ad esempio l'area di una figura curva) ed una grandezza conosciuta (l'area di un poligono).⁹⁹ Il metodo per esaurimento, quasi un primo passo nella direzione del calcolo integrale, permetteva di determinare aree e volumi senza ricorrere al concetto di infinito attuale perché evitava di introdurre il cerchio come limite di una serie di poligoni inscritti; esso ricorreva piuttosto ad una dimostrazione indiretta, che dalla falsità della tesi derivava un assurdo, vale a dire la negazione del principio di Archimede e l'esistenza di infinitesimi

numero infinito di posizioni in un tempo finito e dunque escludono l'ipotesi dell'infinità attuale dello spazio concepito come somma di punti, ognuno dei quali potrebbe essere considerato come grandezza infinitesima. Cfr. anche Tannery, [1885].

⁹⁷ Si veda l'articolo di Otto Stolz, "Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes", [1882].

⁹⁸ Euclide, [1970], libro V, Def. 4., p. 298. Cfr. § 2.2.1. La confrontabilità non va confusa con la commensurabilità, che lega due grandezze confrontabili aventi un rapporto come quello che un numero intero ha con un altro numero intero. Le cosiddette grandezze incommensurabili, come ad esempio la diagonale e il lato del quadrato, sono tra loro confrontabili nel senso che esiste sempre un multiplo (il doppio) del lato che è maggiore della diagonale del quadrato.

⁹⁹ Il termine esaurimento, che rimanda all'idea che i successivi poligoni inscritti esauriscano il cerchio, non si trova né in Euclide né in Eudosso, al quale si attribuisce la paternità del metodo cosiddetto per esaurimento, ma compare soltanto molto più tardi nell'opera di alcuni matematici del Seicento che si occuparono degli indivisibili.

attuali.¹⁰⁰ È Aristotele ad affermare con decisione l'impossibilità dell'infinito attuale di contro all'esistenza di un'infinità potenziale:

Infinita è dunque quella grandezza della quale, rispetto alla quantità data, è possibile continuare a prendere una parte sempre nuova.¹⁰¹

L'infinito in potenza di Aristotele è l'infinito di una grandezza che diventa più grande di ogni grandezza data senza uscire mai dalla finitezza o di una grandezza che può essere suddivisa in parti sempre più piccole senza che sia mai raggiunta una parte ultima indivisibile. L'infinito non è inteso come espressione di un'infinità di parti in atto ma come un finito che cresce indefinitamente, ove l'infinità rimanda all'attività del pensiero che va oltre ogni quantità data finita aggiungendovi o sottraendovi un'altra quantità finita, senza che questo processo arrivi mai a compimento. L'infinito non ammette allora un termine finale perché il suo sviluppo indefinito esclude che un insieme illimitato di grandezze (ad esempio i poligoni inscritti in un cerchio) comprenda un termine ultimo (il cerchio stesso considerato come poligono con un numero infinito attuale di lati).¹⁰²

Il termine infinitesimo comparve soltanto nel Seicento insieme alle prime ricerche infinitesimali relative allo studio geometrico di lunghezze di curve, aree e volumi. Senza ripercorrere l'intera storia delle origini del calcolo infinitesimale,¹⁰³ ci limiteremo a riassumere brevemente il ruolo del concetto di infinitesimo nella determinazione del continuo geometrico.

¹⁰⁰ Ripercorrendo l'affascinante storia dell'infinito Paolo Zellini sottolinea l'impenetrabilità al pensiero che rende difficile nominare l'infinito stesso e coglie in questa inaccessibilità il motivo del rifiuto ad accoglierne l'esistenza attuale: "I Greci preferirono invece designare questa impenetrabilità con l'assurdo, facendone l'inaccettabile alternativa di dimostrazioni orientate a riconoscere rapporti armonici e proporzioni finite." Zellini, [1990], p. 37.

¹⁰¹ Aristotele, *Fisica*, III 6, 207 a 5-10, [1995], p. 145.

¹⁰² Cfr. Zellini, [1990], p. 31 e ss. L'idea di considerare il cerchio come un poligono con un numero infinito di lati risale al sofista Antifonte attivo verso la fine del V secolo.

¹⁰³ Sull'origine del calcolo infinitesimale esiste un'ampia bibliografia, alla quale rimandiamo; si vedano in particolare Geymonat, [1948]; Castelnuovo, [1962]; Baron, [1969], nonché per una breve presentazione generale Kline, [1972], cap. 17, pp. 399-455.

richiamando il significato e le applicazioni del metodo detto degli indivisibili nel calcolo di aree e volumi. Il calcolo di superfici e volumi mediante l'uso di infinitesimi risale in realtà ai greci (che però non introdussero il termine "infinitesimo"). Antifonte vi ricorse nel tentativo di dimostrare la quadratura del cerchio mentre Archimede nel *Metodo sui teoremi meccanici* considerò le figure come composte o riempite di tutti i loro elementi: una superficie di linee e un solido di superfici.¹⁰⁴ Benché non parlasse esplicitamente di somma, Archimede considerava le figure come composte di un numero infinito di elementi infinitamente sottili (che nel Seicento presero il nome di infinitesimi). Quest'idea, bandita dalla geometria greca euclidea attraverso l'accettazione del rigoroso metodo di Eudosso, ricomparve nei lavori di Kepler e di Cavalieri.¹⁰⁵ Abbandonando il metodo per esaurimento ogni volta che esso si rivelava insufficiente alla risoluzione di un problema particolare, Kepler ricorse agli infinitesimi con estrema disinvoltura, considerando ad esempio l'area di un cerchio come l'area di un numero infinito di triangoli aventi un vertice nel centro e base sulla circonferenza (dunque altezza uguale al raggio).¹⁰⁶ Cavalieri ebbe invece il merito di indicare un procedimento generale per il confronto di aree e volumi, detto metodo degli indivisibili: esso asserisce che un'area piana è costituita dalle infinite corde intercettate entro l'area da un sistema di rette parallele, qualora ciascuna di quelle corde, detta *indivisibile*, sia pensata come un rettangolo di spessore infinitesimo. Cavalieri tuttavia negò di aver fatto uso dell'infinitesimo attuale, perché il suo procedimento si fondava sul confronto tra un'infinità *discreta* di indivisibili di una figura e l'analoga infinità di una seconda fi-

¹⁰⁴ Il *Metodo* di Archimede fu scoperto a Costantinopoli da Heiberg nel 1906 in un palinsesto della biblioteca del Metochion. Cfr. Rufini, [1961], p. 83.

¹⁰⁵ Vari riferimenti al metodo cosiddetto degli Indivisibili e all'uso di considerazioni relative agli infinitesimi compaiono in verità in un numero ben più ampio di autori, tra i quali sarebbe opportuno citare almeno i nomi di Galileo, Torricelli, Pascal, Gregorio da San Vincenzo, Roberval, Wallis; in proposito rimandiamo alla bibliografia citata nella nota 103.

¹⁰⁶ È interessante ricordare che le ricerche di Kepler sui problemi di aree e volumi, contenute nella *Nova Stereometria Doliorum* del 1615, trassero origine dal problema pratico di trovare un modo preciso per determinare il volume delle botti di vino, la cui capacità era allora misurata con procedimenti puramente empirici. Castelnuovo, [1962], p. 42 e ss.

gura. L'indivisibile così concepito non è un infinitesimo attuale perché l'infinità è discreta e non continua: ciò non impedisce però che l'unione di tutte le corde, che sono in numero infinito, possa formare il continuo, perché ciascuna di esse è considerata come una superficie sottilissima e non come una semplice lunghezza.

Poiché la nostra indagine non è rivolta allo studio dell'affermazione del concetto di infinitesimo nella storia della matematica ma più semplicemente alla presentazione del significato geometrico del termine in Veronese, trascureremo gli altri autori che nel Seicento hanno ripreso l'idea degli infinitesimi attuali come elementi ultimi di un processo di divisibilità all'infinito considerato come compiuto, limitandoci a ricordare il ruolo centrale che l'infinitamente piccolo riveste nella costruzione leibniziana del calcolo infinitesimale.¹⁰⁷ Partendo dall'idea di Cavalieri di considerare un'area come la somma di tutte le infinite corde tagliate su un fascio di rette parallele, Leibniz adottò il simbolo *omn. y* (poi */y*) per indicare tutte (*omnes*) le corde *y* (le ordinate in un sistema di assi cartesiani) la cui somma costituiva l'area data: in questo modo introdusse un simbolo per rappresentare la somma di un numero infinito di lunghezze indivisibili. Dalla considerazione del triangolo di Pascal come elemento caratteristico di ogni curva,¹⁰⁸ Leibniz fu indotto a studiare non più soltanto le somme ma anche i rapporti degli infinitesimi e ad osservare che tali quantità infinitamente piccole, benché non siano considerate uguali a zero quando se ne cerca il rapporto, possono tuttavia essere trascurate non appena com-

¹⁰⁷ Questi brevi cenni sull'origine degli infinitesimi sono purtroppo insufficienti per un inquadramento storico adeguato di tale concetto, ma non intendono nemmeno avere questa pretesa. In particolare si noterà l'assenza di un riferimento a Newton: ciò dipende dal fatto che il suo calcolo infinitesimale si fonda sulle nozioni di flussioni e fluenti, che rimandano al movimento e sono pertanto più lontane dall'idea di infinitesimo attuale statico di Veronese, che peraltro cita al riguardo Leibniz e non Newton. Leibniz infatti fa un uso più diretto degli infinitesimi nel calcolo considerandoli come grandezze che sono qualcosa eppure possono essere considerate nulle: dai suoi testi emerge con più forza tutta la paradosalità dell'infinitesimo attuale.

¹⁰⁸ Il triangolo caratteristico di una curva piana riferita ad un sistema di assi è formato dagli incrementi delle coordinate e dall'incremento dell'arco. Lo studio delle curve mediante tale metodo è svolto da Pascal negli scritti relativi al calcolo infinitesimale contenuti nelle *Lettres de A. Dettonville*, pubblicate nel 1659.

paiono accanto a quantità incomparabilmente più grandi, vale a dire a quantità finite.¹⁰⁹ Una prima difficoltà del calcolo di Leibniz consisteva proprio nell'affermare l'uguaglianza di due quantità che differivano tra loro per un'altra quantità piccola quanto si vuole ma definita: come era possibile che due cose diverse per una quantità infinitesima fossero uguali? Una seconda anomalia dell'infinitesimo risiedeva nella sua irriducibilità al criterio di confrontabilità tra grandezze omogenee fondato da Euclide sul principio di Eudosso-Archimedeo: una quantità infinitamente piccola è non archimedeo perché moltiplicata per se stessa un qualunque numero intero di volte è sempre nulla o trascurabile rispetto ad una grandezza finita. Manca ogni possibilità di confronto tra finito e infinitesimo perché quest'ultimo, pur essendo qualcosa, è sempre nullo rispetto al primo. Queste difficoltà insite nel concetto di trascurabilità dell'infinitesimo rispetto al finito rafforzano la descrizione leibniziana delle nuove grandezze come finzioni o "entità immaginarie non corrispondenti per necessità a cose attualmente esistenti al di fuori della mente" che le ha concepite.¹¹⁰ L'affermazione dell'esistenza di linee infinitamente grandi e infinitamente piccole è di carattere astratto e non implica l'esistenza concreta e reale dei concetti ideali di infinito e infinitesimo, che servono soltanto ad abbreviare il ragionamento:

Donde segue che se qualcuno non ammette affatto linee infinite e infinitamente piccole a rigore metafisiche e come cose reali, egli può senz'altro servirsene come nozioni ideali che abbreviano il ragionamento, simili a ciò cui si dà il nome di radici immaginarie nell'analisi comune (come per esempio $\sqrt{-2}$).¹¹¹

L'infinitesimo attuale dell'analisi, che secondo quanto affermava lo stesso Leibniz poteva essere sostituito con l'infinito potenziale delle dimostrazioni per esaurimento di Eudosso, fu effettivamente eliminato dal calcolo grazie alla nuova definizione di limite data da Cauchy nel suo *Cours d'analyse*:

¹⁰⁹ Leibniz, *Lettera a Wallis del 30 marzo 1699*, [1961], IV, p. 63.

¹¹⁰ Zellini, [1990], pp. 147-158.

¹¹¹ Leibniz, *Lettera a Varignon del 2 febbraio 1702*, in [1961], IV, p. 92. Si veda anche il seguente passo della già citata lettera a Wallis: "Verae Interim an fictitiae sint quantitates inassignabiles, non disputo; sufficit servire ad compendium cogitandi. [...]". Leibniz, *Lettera a Wallis del 30 marzo 1699*, in [1961], IV, p. 63.

Allorché i valori successivamente assunti da una stessa variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fissato, si da differirne alla fine tanto poco quanto si vorrà, quest'ultima quantità è chiamata il limite di tutte le altre.¹¹²

Grazie all'introduzione del concetto di limite, l'infinitesimo può essere definito come una quantità variabile i cui valori numerici successivi decrescono indefinitamente fino a diventare minori di ogni numero dato. La paradossalità dell'infinitesimo attuale è ricondotta alla legittimità dell'infinito potenziale: il limite è situato al di fuori della successione di valori che la variabile assume e dunque non è mai dato in atto come termine di una serie illimitata; l'infinitesimo è ridotto ad una quantità variabile finita che decresce al di sotto di ogni quantità data senza raggiungere mai il limite del processo stesso. L'infinitesimo di Cauchy e dell'analisi dell'Ottocento non è un *infinitamente* piccolo ma soltanto un *indefinitamente* piccolo: il primo è più piccolo di ogni quantità finita (e infatti è trascurabile rispetto ad essa), il secondo invece *tende* solo a diventarlo, ma resta sempre confrontabile con una grandezza finita.

Affermando senza esitazione l'esistenza attuale degli infinitesimi, Veronese si prefiggeva di risolvere una questione a lungo dibattuta senza alcun esito, a causa sia della scarsa chiarezza nella posizione del problema sia delle complicazioni filosofiche intrecciate alla questione puramente matematica:

La questione del segmento infinitesimo attuale è antica; ma né i sostenitori né gli oppositori di tale idea ne hanno mai provata la possibilità o la impossibilità geometrica, perché essi non hanno posta la questione in modo chiaro e determinato, complicandola anzi talvolta con considerazioni filosofiche ad essa estranee.¹¹³

Per difendere i propri segmenti infinitesimi attuali dall'accusa di assurdità, Veronese analizza alcune tradizionali obiezioni smascherandone i presupposti o dimostrando che la propria trattazione non presta il fianco a simili critiche. Contro l'infinito determinato in matematica si era pronunciato Gauss in una

¹¹² Cauchy, *Cours d'analyse algèbre*, p. 4, cit. in Bottazzini, [1990], p. 99.

¹¹³ Veronese, [1898], p. 79.

lettera a Schumacher del 1831,¹¹⁴ nella quale sosteneva che l'infinito è soltanto un modo di esprimersi; quando una quantità cresce indefinitamente la si chiama infinita per intendere che, non potendo raggiungere mai il limite al quale si avvicina, varia all'infinito. Se – obietta Veronese – all'interno del campo finito, l'infinito e l'infinitesimo sono soltanto potenziali, ossia sono segmenti che crescono o decrescono indefinitamente, nulla nega che possa esistere al di fuori del campo del finito un altro segmento che sia infinito o infinitesimo attuale e dunque sia dato, determinato, raggiunto. Altre obiezioni all'esistenza degli infinitesimi e degli infiniti attuali non sono neppure prese in considerazione, perché essendo rivolte alla critica di concezioni fallaci o sistemi contraddittori cadono insieme con questi: ad esempio le critiche mosse al sistema di Fontenelle¹¹⁵ sono legittime, perché i suoi infiniti sono contraddittori, ma perdono ogni validità contro altri modi di concepire l'infinito. Sarebbe in ogni caso interessante – aggiunge Veronese – “fare una critica alla critica, perché se certi autori hanno avuto delle idee preconcepite, i loro critici non ne sono andati esenti”. Il caso del cardinale Gerdil è esemplare: in una memoria sull'infinito assoluto considerato come grandezza egli sfiora l'idea sviluppata da Cantor di un numero infinito attuale che rappresenti l'intera serie naturale considerata come un tutto dato, ma non ne comprende il significato, perché è sviato dal suo intento di confutare la tesi dell'eternità dell'universo (se il mondo è stato creato non può essere eterno e dunque infinito nel tempo), mentre vi sarebbe riuscito se “avesse esaminato questa discussione con spirito critico alto e imparziale”.¹¹⁶ Tra i matematici che credevano nell'esistenza

¹¹⁴ FG, p. 619.

¹¹⁵ Fontenelle, *Éléments de la géométrie de l'infini*, 1727, cit. in FG, p. 620. Accanto all'attività di scrittore Fontenelle (1657-1756) svolse nel Settecento anche il ruolo di divulgatore scientifico e filosofico; dal 1699 in qualità di segretario perpetuo della Académie des sciences curò i resoconti dei lavori accademici e compose gli elogi dei colleghi defunti; a questo periodo risale (oltre ai citati *Éléments de la géométrie de l'infini*) anche la *Histoire de l'Académie royale des sciences depuis 1666 jusqu'en 1699*, pubblicata nel 1733.

¹¹⁶ FG, p. 621. Da questo passo emerge il valore della critica come superamento dei preconcetti e della parzialità di giudizio: l'adesione ad una concezione del mondo può oscurare la visione di una verità differente o più ampia. La memoria di Gerdil cui si fa riferimento è “De l'infini absolu considéré dans le grandeur”, in

dell'infinitesimo attuale, Veronese cita anche Johann Bernoulli, il quale pur non definendo l'infinitesimo crede alla sua esistenza:

Affermo [...] che non si può dimostrare che gli infiniti e gli infinitamente piccoli esistono, ma anche che non si può dimostrare che non esistono; tuttavia [dico che] probabilmente esistono. Se tutti i termini di questa progressione $1/2, 1/4, 1/8, 1/16$ ecc. esistono in atto, allora esiste l'infinitesimo. [...] Se i termini sono dieci esiste senz'altro il decimo, se i termini sono cento esiste senz'altro il centesimo, ..., dunque se i termini sono in numero infinito, esiste l'infinitesimo.¹¹⁷

Oltre a Bernoulli, anche Du Bois-Reymond crede nell'esistenza dell'infinitesimo:

“La proprietà che il numero dei punti di divisione dell'unità di misura è infinito, genera con logica necessità la credenza all'infinitamente piccolo:” e per infinito egli intende ogni gruppo di elementi illimitato nella rappresentazione che considerato indipendentemente dall'esistenza di esseri pensanti oltrepassa ciò che è misurabile mediante misure fisse.¹¹⁸

Tra le obiezioni più recenti all'esistenza di segmenti infinitesimi attuali sulla retta Veronese analizza in particolare le dimostrazioni di Cantor, di Stolz e di Vivanti: tutte queste confutazioni ammettono il continuo ordinario che presuppone il principio di Archimede escludendo gli infinitesimi attuali. Stolz, che come abbiamo visto è il primo ad attribuire il nome di Archimede al principio in questione, in un articolo del 1883 sulla geometria degli antichi scrive:

È già stato rilevato più volte [da Stürmli, Nizze, Hankel] che Euclide fa un uso implicito del principio: una grandezza può essere moltiplicata tante volte finché supera ogni altra grandezza dello stesso tipo.

Miscellanea Taurinensis, 1760-61. Giacinto Sigismondo Gerdil (1718-1802), barnabita, fu professore di filosofia nelle Università di Macerata e di Torino e precettore del principe di Piemonte, poi divenuto re col nome di Carlo Emanuele IV. La sua opera più importante sono le *Réflexions sur la théorie et la pratique de l'éducation, contre les principes de J.-J. Rousseau* (Torino, 1763, ripubblicato col titolo di *Anti-Émile* nella raccolta completa delle opere) nel quale sottopone ad una minuziosa critica la teoria pedagogica di Rousseau.

¹¹⁷ Bernoulli, *Leibnizii et Johannis Bernoulli - Commercium philosophicum et mathematicum*, Losanna e Ginevra, 1745, t. I, p. 402, cit. in FG, p. 621.

¹¹⁸ Du Bois-Reymond, [1882], p. 70, cit. in FG, p. 621. Cfr. § 4.6.

In Archimede si incontra un'ipotesi simile che concorda con quel principio, che quindi può essere indicato in breve come assioma di Archimede.¹¹⁹

Per Stolz il principio di Archimede non è in generale una condizione per stabilire la confrontabilità delle grandezze, dato che l'opera di Du Bois-Reymond testimonia la possibilità di paragonare tra loro anche grandezze non soddisfacenti al principio suddetto. Tali grandezze non sono però lineari come quelle geometriche, che per Du Bois-Reymond sono confrontabili soltanto se vale il principio di Archimede. Sulla scorta di questa distinzione tra grandezze lineari e non lineari, Stolz dimostra che è la proprietà di *continuità* attribuita alle prime a presupporre la validità del principio in questione:

un sistema di grandezze assolute deve soddisfare all'assioma di Archimede se si vuole postularne la continuità.¹²⁰

Egli dimostra infatti che assumendo alcune proprietà delle grandezze (tricotomia, unicità della somma, ...) e il principio di continuità di Dedekind è possibile derivare il principio di Archimede. In un articolo del 1890 sul continuo intuitivo rettilineo Veronese obietta a Stolz che la dimostrazione è possibile per il semplice fatto che il principio di Archimede è già contenuto nel principio di Dedekind.¹²¹ Stolz accoglie la correzione di Veronese e in un articolo pubblicato l'anno successivo precisa che il principio di Archimede è equivalente alla condizione che dato un sistema *linearmente ordinato* [*zusammenhängendes System*] *II* di grandezze e una *lacuna* [*Lücke*] (P_1, P_2) di esso, allora per ogni grandezza *D* di *II* è possibile determinare le grandezze in modo che $P_2 - P_1 < D$.¹²² Un sistema di grandezze si dice *linearmente ordinato* quando sono soddisfatte le proprietà: 1) date due grandezze del sistema *II* esse possono essere uguali o disuguali; in quest'ultimo caso una delle due può essere designata come maggiore; 2) le grandezze possono essere ad-

¹¹⁹ Stolz, [1882], p. 504.

¹²⁰ Stolz, [1882], p. 507.

¹²¹ Cfr. CRA. Secondo Veronese il principio di Archimede è contenuto anche nel principio di continuità di Cantor, mentre si può dimostrare l'indipendenza. Geymonat, [1948], pp. 266-277.

¹²² Stolz, [1891].

dizionate esattamente nello stesso modo dei numeri naturali; 3) se $A < B$ allora esiste nel sistema *II* una, e per la 2) soltanto una, grandezza *X* tale che $A + X = B$; 4) tra due grandezze disuguali c'è sempre ancora una grandezza del sistema e oltre a quella grandezza ne esiste una minore, ma nessuna che sia la minore. Si chiama invece *lacuna* [*Lücke*]¹²³ ogni divisione delle grandezze *P* che appartengono a *II* in due gruppi P_1 e P_2 con le seguenti proprietà: 1) ogni grandezza *P* appartiene ad uno e a un solo gruppo; 2) se P_1 è una grandezza del primo gruppo allora lo è anche ogni grandezza più piccola di P_1 e se P_2 è una grandezza del secondo gruppo lo è anche ogni grandezza più grande di P_2 ; 3) al primo gruppo appartiene oltre a P_1 una grandezza più grande di P_1 e al secondo gruppo oltre a P_2 una grandezza più piccola di P_2 .¹²⁴ Il principio di Archimede esprime allora una proprietà delle *lacune* di un sistema, la quale afferma che ai due gruppi appartengono sempre due grandezze tali che la loro differenza sia più piccola di un'altra grandezza data del sistema, ma non richiede l'esistenza nel sistema *II* di una e una sola grandezza *S* più grande di tutte quelle del primo gruppo e più piccola di tutte quelle del secondo gruppo (proprietà quest'ultima garantita dal postulato di continuità di Dedekind).

Su un'argomentazione analoga si fonda la risposta di Veronese all'obiezione di Cantor, che crede di aver dimostrato l'impossibilità dei segmenti infinitesimi attuali ricorrendo a teoremi relativi ai numeri transfiniti.¹²⁵ L'intera dimostrazione è inutile - obietta

¹²³ Il termine lacuna con il quale traduciamo letteralmente il tedesco *Lücke* è preferibile a sezione, che traduce il tedesco *Schnitt*. È però opportuno ricordare che per lacuna Stolz non intende il risultato di una partizione del sistema in due classi di grandezze tali che la prima non abbia un ultimo elemento e la seconda non ne abbia un primo.

¹²⁴ In nota Stolz precisa che Dedekind chiama sezioni [*Schnitte*] le *lacune* del sistema dei numeri razionali: "Quest'ultimo concetto è più generale, mentre questo sistema può ad esempio essere diviso in modo da ottenere come primo gruppo tutti i numeri più piccoli di un certo numero razionale e questo numero stesso." Stolz, [1891], p. 109. Dedekind chiama *sezione* una partizione del sistema *R* dei numeri razionali in due classi A_1, A_2 caratterizzate soltanto dalla proprietà che ogni numero a_1 in A_1 è minore di ogni numero a_2 in A_2 . Le sezioni del sistema dei numeri razionali godono della proprietà che o tra i numeri della prima classe esiste un massimo o tra i numeri della seconda esiste un minimo. Dedekind, [1872], p. 70.

¹²⁵ Cantor, "Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten", [1887-88], p. 112 (cit. in FG,

Veronese – perché in essa la validità del principio di Archimede deriva immediatamente dalle proprietà del continuo dei numeri reali (che si presuppone corrisponda al continuo della retta). L'errore di Cantor, come già quello di Dedekind, consiste nella determinazione delle caratteristiche del continuo geometrico mediante le proprietà del continuo numerico che contiene il principio di Archimede. Anche l'argomentazione di Vivanti¹²⁶ contro l'esistenza di segmenti infinitesimi attuali è sterile perché ammettendo la definizione del continuo ordinario esclude per ciò stesso la possibilità di ciò che vorrebbe confutare.¹²⁷

L'intento di Veronese è speculare a quello di Dedekind, che intendeva escludere dalla trattazione rigorosa dell'analisi ogni riferimento a grandezze geometriche. In un celebre saggio del 1872, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, egli osserva che

ogni punto della retta determina una suddivisione della retta in due parti, in modo tale che ogni punto di una parte giace a sinistra di ogni punto dell'altra.¹²⁸

Dall'analisi della retta come modello di dominio matematico continuo, Dedekind ricava le proprietà generali della continuità ossia l'essenza del continuo, che egli ritiene consista nell'inversione della proprietà suddetta:

Se tutti i punti della retta si ripartiscono in due classi tali che ogni punto di una classe giace a sinistra di ogni punto dell'altra, allora esiste uno e un solo punto che determina questa partizione di tutti i punti in due classi, questa scomposizione della retta in due parti.¹²⁹

Questa proprietà deve essere assunta come assioma se si vuole garantire continuità ad una certa struttura; tale proprietà non è postulata in nessuna parte degli *Elementi* e infatti, precisa Dedekind, non vale necessariamente per ogni dominio per il quale siano veri gli enunciati di Euclide. In *Was sind und was sollen die Zahlen?* Dedekind costruisce uno spazio disconti-

p. 622).

¹²⁶ Cfr. Vivanti, "Sull'infinitesimo attuale", [1891].

¹²⁷ FG, p. 622.

¹²⁸ Dedekind, [1872], p. 69.

¹²⁹ Dedekind, [1872], p. 69.

nuo nel quale "tutte le costruzioni che compaiono negli elementi di Euclide sono perfettamente eseguibili" e ne deriva che "nella scienza di Euclide non ci si accorgerebbe neppure della discontinuità dello spazio".¹³⁰ Dedekind intende fondare la costruzione del continuo numerico in modo completamente indipendente dal concetto di grandezza geometrica ponendo fine alla mancanza di rigore del calcolo differenziale, alcune dimostrazioni del quale "fanno appello, più o meno consapevolmente, a rappresentazioni geometriche o suggerite mediante la geometria".¹³¹ La nozione di continuo non è puramente intuitiva se "per poter percepire l'essenza della continuità" occorre conoscere i numeri che esprimono i rapporti tra le grandezze.

Tanto più mi appare meraviglioso che l'uomo, senza alcuna rappresentazione delle grandezze misurabili, possa pervenire alla creazione del dominio puro e continuo dei numeri attraverso un sistema finito di semplici atti di pensiero; e, secondo me, questo è il vero modo in cui egli riesce a rendere chiara la rappresentazione del continuo.¹³²

Antitetica è la posizione di Veronese, che ribatte:

E d'altronde sarebbe veramente meraviglioso che una forma astratta così complessa qual è il continuo numerico ottenuto non solo senza la guida di quello intuitivo, ma come si fa oggi da alcuni autori, da pure definizioni di segni si trovasse poi d'accordo con una rappresentazione così semplice e primitiva qual è quella del continuo rettilineo.¹³³

Per Veronese l'accordo tra le proprietà del continuo numerico e quelle del continuo intuitivo si spiega solo attraverso la mediazione del continuo astratto, le cui caratteristiche non si riducono a quelle dell'insieme dei numeri reali:

Secondo Dedekind per chiarire [...] la rappresentazione del

¹³⁰ Dedekind, [1888], p. 83. Riportiamo il riassunto che ne fa Veronese: "A Dedekind sembra anche che dati tre punti A, B, C non in linea retta in modo che i rapporti delle loro distanze siano numeri algebrici, i rapporti delle loro distanze dai punti dello spazio dai tre punti alla distanza AB possono essere soltanto numeri algebrici – di modo che lo spazio a tre dimensioni e quindi anche la retta sarebbero discontinui." FG, p. 48, § 1, n. 55, nota 1.

¹³¹ Dedekind, [1872], pp. 63-64.

¹³² Dedekind, [1888], pp. 83-84.

¹³³ FG, p. 48, § 1, n. 55, nota 1.

continuo dello spazio occorre il continuo numerico. Secondo me invece è il continuo intuitivo rettilineo mediante l'idea di punto senza parti rispetto al continuo stesso che serve a darci le definizioni astratte del continuo, di cui quello numerico non è che un caso particolare.¹³⁴

L'insistenza di Veronese sull'indipendenza del continuo geometrico da quello dei numeri reali si fonda su varie ragioni: in primo luogo essa è essenziale alla costruzione di un continuo non archimedeo, perché se la definizione della retta dipendesse da quella di numero reale e dunque dal principio di Archimede sfumerebbe l'intero progetto di una forma fondamentale contenente segmenti infiniti e infinitesimi gli uni rispetto agli altri. In secondo luogo l'insistenza sulla dipendenza delle proprietà del continuo geometrico da quelle del continuo intuitivo serve a evidenziare, come già abbiamo detto, la natura peculiare della geometria, che resta una scienza legata, almeno per l'origine delle sue teorie, all'esperienza e alla realtà esterna:

In questo modo le definizioni non appaiono come uno sforzo della mente nostra, ma trovano la loro piena giustificazione nella rappresentazione sensibile del continuo [...]¹³⁵

In terzo luogo Veronese rifiutando di introdurre "pure definizioni di segni", ricerca una ragione per la scelta della propria definizione del continuo e crede di trovarla nella fedeltà con la quale la forma fondamentale descrive la realtà empirica.

Il metodo più naturale per determinare questo continuo è appunto quello che ricava le varie proposizioni fondamentali (postulati o ipotesi) dall'osservazione, di guisa che esse o esprimano dei fatti semplici da tutti osservati, sia pure facendo astrazione da alcune qualità degli oggetti a cui si riferiscono, oppure esprimano delle proprietà che non contraddicano a quelle le quali servono a costruire o a determinare la figura corrispondente al campo della nostra osservazione.¹³⁶

Il continuo geometrico non archimedeo di Veronese ammette l'esistenza di segmenti infiniti e infinitesimi attuali, che nei

¹³⁴ FG, P. 48, § 1, n. 55, nota 1.

¹³⁵ FG, P. 48, § 1, n. 55, nota 1.

¹³⁶ PC, pp. 161-162.

trattati di geometria elementare sono banditi perché si ammette il postulato d'Archimede:

Nei trattati elementari viene ammesso tacitamente ed esplicitamente il postulato V d'Archimede, il quale stabilisce che se A e B sono due segmenti rettilinei qualunque ed è $A < B$, vi è un numero n finito tale che è $nA > B$. Esso esclude appunto ogni segmento limitato infinitesimo (ed anche infinito), per il quale non vi è alcun numero n , per quanto grande, che soddisfi alla condizione anzidetta.¹³⁷

Il problema che Veronese intende innanzi tutto affrontare riguarda la dipendenza o indipendenza del postulato di Archimede dagli altri postulati della geometria elementare:

Se non si dia il postulato della continuità, quello d'Archimede è indipendente dai rimanenti. Se è dato nella forma proposta da Dedekind, [...] l'enunciato stesso del postulato di Dedekind esclude la proposizione contraria a quella di Archimede. Ma il concetto del continuo si rende indipendente da questo assunto quando si dà nella forma della mia ipotesi VIII o VI dell'introduzione.¹³⁸

Le due ipotesi suddette stabiliscono rispettivamente la continuità assoluta della forma fondamentale (che corrisponde alla retta nella geometria) e la continuità relativa. La prima è "la continuità in un campo finito, per tutti i segmenti del quale vale il postulato d'Archimede", la seconda è la continuità che vale "quando si ammettono i segmenti infiniti e infinitesimi attuali".¹³⁹ È allora possibile introdurre dei segmenti astratti (per i quali continuano a valere tutti gli altri postulati della geometria elementare) tra loro infiniti, finiti o infinitesimi. Da tali segmenti è possibile derivare un nuovo sistema di numeri complessi ad infinite unità, per i quali valgono le leggi ordinarie delle operazioni fondamentali dell'aritmetica e che costituiscono un continuo assoluto differente da quello ordinario dei numeri reali. I segmenti astratti così introdotti sono possibili matematicamente ma anche geometricamente perché non contraddicono all'intuizione spaziale: il passaggio da un seg-

¹³⁷ OPG, p. 206.

¹³⁸ OPG, pp. 206-207.

¹³⁹ PC, p. 161.

mento finito a uno infinito o quello dallo spazio a tre dimensioni ad un punto fuori di esso non è intuitivo ma "è determinato da un atto mentale o da una corrispondente operazione simbolica possibile."¹⁴⁰

A conclusione di queste osservazioni sul concetto di infinitesimo attuale è interessante individuare i presupposti che hanno permesso di affermare l'esistenza geometrica di segmenti infinitamente piccoli: il metodo sintetico, la ricostruzione del continuo matematico a partire dal continuo intuitivo, la riflessione sul concetto di grandezza, la determinazione della relazione di uguaglianza tra segmenti, la legge della continuità del pensiero. La *trattazione sintetica della geometria* permette di svolgere ogni passo del ragionamento senza perdere di vista il significato delle espressioni che vi compaiono: la costruzione delle figure e le osservazioni empiriche che identificano gli oggetti concreti corrispondenti alle nozioni ideali astratte sono l'espressione di un modo di procedere dalla realtà intuita attraverso i sensi alla descrizione puramente astratta e rigorosa di essa. L'analisi del continuo intuitivo rettilineo è un chiaro esempio di quest'impostazione: dalle caratteristiche degli oggetti fisici continui occorre risalire alle proprietà della continuità astratta, che è fondata sulla corrispondenza con l'intuizione. Con un procedimento genetico si costruisce il continuo attraverso la determinazione di un segmento, poi di una scala o serie di segmenti consecutivi, quindi di un altro segmento al di fuori della scala e di una nuova scala generata da esso, e così all'infinito determinando segmenti limitati infinitamente grandi e infinitamente piccoli rispetto al primo segmento individuato come unità. Le ipotesi che definiscono le proprietà della forma fondamentale a più unità rettilinee derivano dal tentativo di tradurre in linguaggio matematico le caratteristiche che nell'osservazione attribuiamo agli oggetti rettilinei: gli infinitesimi non sono il frutto di una scelta puramente arbitraria del soggetto che suppone dato un insieme infinito di elementi o considera percorsa l'intera serie dei numeri naturali, né hanno origine soltanto dalla negazione di un postulato per scoprire quale sistema derivi dall'assunzione della proposizione contraria. L'esistenza degli infinitesimi è

¹⁴⁰ OPG, p. 208.

compatibile con una spiegazione astratta del *continuo intuitivo* corrispondente al continuo reale osservabile: pur non avendo necessariamente un'esistenza reale i segmenti infinitamente piccoli sulla forma fondamentale possono essere concepiti, sommati, moltiplicati esattamente come i consueti segmenti finiti, anzi in senso assoluto sono essi stessi finiti. Per arrivare a concepire un'idea di continuità non archimedeo e introdurre geometricamente gli infinitesimi occorre prescindere dal concetto di numero e fondarsi sulla nozione più generale di grandezza. Mentre la geometria greca attribuiva alle grandezze un rapporto soltanto quando soddisfacevano alla condizione espressa dal principio di Archimedeo, Veronese afferma che due grandezze possono avere un rapporto anche in caso contrario. Tale rapporto non è espresso da una frazione o da un numero irrazionale ma da un nuovo numero introdotto per permettere il confronto delle grandezze "non confrontabili" (proprio come il numero irrazionale era stato introdotto per confrontare due grandezze geometriche incommensurabili come il lato e la diagonale del quadrato). Il confronto tra le grandezze implica la possibilità di determinare l'uguaglianza o la diversità delle stesse. L'uguaglianza (congruenza) è definita come corrispondenza fra le parti dei segmenti: essa non implica l'identità assoluta dei segmenti ma solo l'uguaglianza relativa. La distinzione tra uguaglianza *relativa* e *assoluta* è fondamentale: due segmenti sono uguali in senso assoluto quando sono uguali rispetto a tutti i contrassegni rilevanti, mentre sono uguali in senso relativo quando sono uguali soltanto rispetto ad alcuni contrassegni. La congruenza è un'uguaglianza relativa come la relazione che sussiste tra i segmenti (AA_1) e (A_1A_2) i cui elementi si corrispondono biunivocamente. Tali segmenti appartengono ai campi di due scale aventi stessa unità ma diversa origine: ammettendo il principio del trasporto senza deformazione dei corpi è possibile sovrapporre i due segmenti con un movimento per traslazione fino a farli coincidere. Essi sono uguali in senso relativo ma non in senso assoluto perché il primo è infinitesimo rispetto al secondo. Il concetto di "relativo ad un'unità" è centrale nella determinazione del rapporto reciproco dei segmenti limitati della forma fondamentale: essi sono tutti finiti in senso assoluto ma, se considerati nella loro relazione reciproca, possono essere finiti, infinitesimi, infiniti. I concetti di finitezza e infinità (sia nel grande come nel piccolo) sono relativi ad un'unità di misura e

al campo della scala che essa determina: uno stesso segmento può essere finito o infinitamente grande o infinitamente piccolo. In senso assoluto invece tutti i segmenti sono finiti rispetto alla forma fondamentale stessa, che è infinita assoluta. Un ultimo presupposto essenziale è la *legge della continuità del pensiero*, grazie alla quale è possibile immaginare un elemento al di fuori del campo della prima scala. L'accettazione di questa legge è necessaria sia per la determinazione degli spazi a più di tre dimensioni sia per l'ipotesi dell'esistenza di segmenti infiniti e infinitesimi: su di essa poggia l'intero sistema di Veronese. Per mezzo della legge della continuità del pensiero il geometra trascende ogni limite imposto alla sensibilità.

2.5 LA TEORIA GENERALE DELLE GRANDEZZE

Negli ultimi decenni dell'Ottocento diversi sono i lavori matematici concernenti la possibilità dell'esistenza di grandezze infinite e infinitesime attuali e la costruzione di un continuo non archimedeo. Pur senza fare riferimento a numeri infiniti attuali Du Bois-Reymond introdusse già nel 1871 un criterio per confrontare due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ che diventano infinite o si annullano per $x = \infty$. Attraverso lo studio del limite del quoziente delle funzioni è possibile confrontare l'infinità delle stesse e ordinarle in modo analogo ai numeri reali: la consueta relazione d'ordine $<$ tra numeri è sostituita dalla nuova relazione \prec tra funzioni così definita: $f(x) \prec \varphi(x)$ quando il limite del quoziente $f(x)/\varphi(x)$ è infinito e $f(x) \sim \varphi(x)$ quando tale limite è finito e diverso da zero.¹⁴¹ Grazie a questo criterio le funzioni divergenti possono essere ordinate in base alla loro "infinità". In un successivo articolo del 1875 è presentato un risultato più generale, chiamato poi da Borel e da Hardy "teorema di Du Bois-Reymond": data una qualunque scala di funzioni ci sono funzioni che crescono o decrescono più lentamente o più rapidamente di ogni funzione della scala.¹⁴² Il confronto tra

¹⁴¹ Du Bois-Reymond, [1870-71], pp. 338-9. Un ottimo articolo che espone il contenuto dei lavori di Du Bois-Reymond e la ricezione critica che essi hanno avuto a fine Ottocento è Fisher, [1981].

¹⁴² Fisher, [1981], p. 106.

questo teorema e i lavori di Veronese è interessante perché, benché i due sistemi siano molto differenti, essi poggiano sulla comune idea che, data una successione indefinita di elementi ordinati secondo una relazione tale che ogni elemento della successione è maggiore degli elementi che lo precedono, esiste qualcosa (una funzione per Du Bois-Reymond, un segmento per Veronese) che è maggiore di tutti gli elementi della successione. Come ben sintetizza Zellini, il teorema di Du Bois-Reymond da un lato "trasferisce al rango di 'fatto' matematico la regola che sottende ogni tentativo attendibile di esibire l'infinito attuale come evento concreto", dall'altra "allude alla possibilità di superare ogni limite immaginabile" perché data una qualsiasi successione infinita numerabile di funzioni crescenti esiste una funzione che è maggiore di tutte le funzioni date ma non appartiene a tale successione.¹⁴³ L'analogia con l'ipotesi terza di Veronese è evidente: qualunque sia l'unità scelta e il campo di scala ottenuto, esiste almeno un elemento che non è contenuto nel campo della scala data.

In un articolo del 1877 intitolato "Über die Paradoxien des Infinitärcalculs" Du Bois-Reymond indaga le conseguenze del confronto tra la rappresentazione geometrica di curve che crescono all'infinito e l'analisi delle funzioni rappresentate da esse. Da questo confronto tra rappresentazione geometrica e numerica delle grandezze derivano interessanti osservazioni sulla continuità numerica e sull'introduzione dei numeri irrazionali. I numeri razionali con numeratori e denominatori piccoli sono come le stelle luminose che colpiscono per prime la nostra vista; poiché con un'osservazione più precisa o per mezzo del telescopio possiamo scoprire nel buio che tra di esse esistono nuovi punti luminosi, la nostra immaginazione riempie il buio che ancora sussiste tra queste nuove stelle con altre stelle e così via, fino a riempire di materia tutto il cielo. Analogamente i numeri razionali e irrazionali e la continuità numerica sorgono dal tentativo della nostra mente di riempire tutti i buchi tra i numeri: "possiamo scorgere nell'inserimento dei numeri irrazionali tra i razionali solo un adattamento successivo del concetto razionale di numero al concetto geometrico di

¹⁴³ Zellini, [1980], p. 201.

grandezza che è innato o acquisito in fasce".¹⁴⁴ A causa di quest'adattamento del concetto di numero a quello di grandezza, Du Bois-Reymond non esclude che il confronto di grandezze numeriche e geometriche possa portare in luce altre difficoltà rilevanti. La convinzione che la continuità geometrica non possa essere ricondotta in modo acritico alla continuità numerica è un insegnamento che Veronese trae dall'opera di Du Bois-Reymond. Nella *Allgemeine Functionentheorie* si attribuisce all'idealista, uno dei due personaggi del dialogo sui concetti di limite e di grandezza, un argomento a favore della realtà dell'infinitesimo assoluto.¹⁴⁵ Lo presentiamo nella riformulazione di Fisher.¹⁴⁶ Un segmento unitario che contiene punti corrispondenti a tutti i decimali (finiti o infiniti) tra 0 e 1 deve contenere qualcosa oltre a questi punti poiché una lunghezza unitaria non può essere composta di punti senza lunghezza. La nostra intuizione geometrica suggerisce che questo qualcosa deve essere un tipo di segmento. Tra due punti P e Q qualunque e distinti corrispondenti ai decimali dovrebbe esserci almeno uno di questi nuovi segmenti perché se così non fosse, il segmento da P a Q sarebbe composto solo di punti e avrebbe lunghezza zero anziché una lunghezza positiva. Ne deriva che i nuovi segmenti sono in numero infinito perché prendendo una sequenza di segmenti aperti è possibile trovare un nuovo segmento in ciascuno di essi. Affrontando il problema di come potremmo immaginare questo infinitamente piccolo, Du Bois-Reymond presenta una soluzione che sarà ripresa da Veronese. Benché non siamo in grado di formarci un'immagine mentale della relazione tra finito e infinitamente piccolo, possiamo però visualizzare l'infinitamente piccolo in se stesso esattamente allo stesso modo del finito: "l'infinitamente piccolo è una grandezza matematica e ha tutte le sue proprietà in comune con il finito."¹⁴⁷ Dalla considerazione dei rapporti tra grandezze infinitamente piccole, finite e infinitamente grandi, derivano interessanti direzioni di ricerca: il calcolo infinitario di Du Bois-Reymond ha per oggetto proprio

¹⁴⁴ Du Bois-Reymond, [1977], p. 150.

¹⁴⁵ Cfr. il § 4.6.

¹⁴⁶ Fisher, [1981], pp. 114-5.

¹⁴⁷ Du Bois-Reymond, [1882], p. 75.

il confronto tra differenti tipi di grandezze.

Questo calcolo prende in considerazione le relazioni delle grandezze infinite e infinitesime da tipo a tipo e questi tipi mostrano delle connessioni gli uni con gli altri che non cadono sotto il concetto ordinario di grandezza. I passaggi di un tipo nell'altro non presentano ad esempio la continuità di cambiamento delle grandezze matematiche anche se non si produce alcun cambiamento a salti.¹⁴⁸

Due sono le differenze principali nel caso di grandezze infinitamente piccole: l'ordine di infinità è più denso rispetto a quello dei numeri ordinari e l'approssimazione ha proprietà diverse rispetto all'approssimazione nel caso di quantità lineari. Queste due differenze costituiscono i "paradossi del calcolo infinitario" che già nel 1877 Du Bois-Reymond indica come differenze essenziali tra le nuove entità infinite e gli ordinari numeri reali.¹⁴⁹

Un altro autore che studiò una teoria generale delle grandezze ed introdusse un sistema di numeri associato a classi di grandezze a più dimensioni fu Rodolfo Bettazzi. La *Teoria delle grandezze* di Bettazzi fu pubblicata nel 1890 quando gran parte dell'Introduzione ai *Fondamenti* era stata già stampata. Benché i principi e il metodo di dimostrazione di Bettazzi "siano diversi dai nostri - scrive Veronese - pure in questa parte ci siamo incontrati in alcune idee."¹⁵⁰ Bettazzi introduce dapprima il concetto di grandezza in analogia con la definizione di Grassmann: "grandezza è ognuno degli enti di una certa categoria, di due qualunque dei quali può dirsi se sono eguali o diseguali".¹⁵¹ Bettazzi dà una definizione di grandezza che non richiede la determinazione di cosa sia l'ente in sé. Il primo esempio di un ente che può esser definito 'grandezza' senza precisare che cosa sia in sé è l'ordine d'infinitesimo (delle funzioni studiate da Du Bois-Reymond):

P. es. data due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$, che per x tendente a zero tendano al limite zero, e il cui quoziente per x tendente a zero

¹⁴⁸ Du Bois-Reymond, [1882], p. 76.

¹⁴⁹ Fisher, [1981], p. 116.

¹⁵⁰ PG, p. XXVI, nota I.

¹⁵¹ Bettazzi, [1890], p. 4.

abbia un limite, se nel caso in cui questo limite è finito e diverso da zero si dice che le due funzioni hanno eguali ordini d'infinitesimo, e nel caso in cui quel limite è zero o infinito che hanno ordini d'infinitesimo diseguali, non si viene con questo a dire che cosa s'intende per ordine d'infinitesimo; [...] ciò basta per poter considerare come grandezza un ente da ammettersi col nome di ordine d'infinitesimo, il quale viene quindi introdotto mediante il postulato che ne ammette l'esistenza e mediante relazioni fra esso e i suoi consimili.¹⁵²

Due grandezze sono definite dalla possibilità di determinare una relazione di uguaglianza o diversità tra di esse. Anziché definire inizialmente un sistema di cose e poi verificare se esso è un sistema di grandezze, Bettazzi introduce dapprima un certo ente che sia una grandezza, quindi stabilisce un'operazione tra grandezze chiamata *S*, infine definisce la classe di grandezze rispetto a tale operazione. Una categoria di enti tale che, "prese quante si vogliano grandezze di quella categoria, delle quali alcune o tutte possono anche esser uguali, esiste sempre in essa una grandezza uguale alla loro risultante [rispetto all'operazione *S*]" è una classe di grandezze rispetto a *S*.¹⁵³ Le classi tali che, "prese nella classe due grandezze qualunque *A* e *B*, deve necessariamente aver luogo uno dei tre casi: $A > B$, $A = B$, $A < B$ " si dicono classi ad una dimensione. Le grandezze di una classe ad una dimensione sono omogenee: un esempio è fornito dalla classe di tutti i segmenti.¹⁵⁴ Le classi a più dimensioni sono invece le classi nelle quali esistono "almeno due grandezze disuguali *X* e *Y*, per le quali non possa dirsi qual è la maggiore e quale la minore." Per alcune classi a più dimensioni è possibile individuare delle sottoclassi ad una dimensione. Un esempio di classe a due dimensioni è la classe che contiene tutti i segmenti, tutti gli angoli e tutti i possibili gruppi di un angolo e di un segmento; un esempio di classe a tre dimensioni è quella dei segmenti dello spazio "quando essi si decompongono nelle loro proiezioni su tre assi qualunque, e si prenda quindi per operazione *S* quella corrispondente all'ordinaria composizione delle forze, e per

¹⁵² Bettazzi, [1890], p. 5.

¹⁵³ Bettazzi, [1890], p. 15.

¹⁵⁴ Bettazzi, [1890], p. 17.

uguaglianza l'uguaglianza di grandezza e di direzione. Le tre sottoclassi elementari sono quelle formate dai segmenti nelle direzioni rispettivamente dei tre assi scelti per la decomposizione."¹⁵⁵ Mentre Veronese studia anche sistemi di grandezze a infinite dimensioni, Bettazzi si limita allo studio di classi ad *n* dimensioni. Come Veronese egli associa però dei numeri complessi alle classi a più dimensioni e dimostra che ciascuna sottoclasse di una classe a più dimensioni è continua nel senso ordinario. Un'altra differenza riguarda il modo di procedere: mentre Veronese, in particolare nell'articolo "Il continuo rettilineo e l'assioma V di Archimede", presenta il principio di Archimede come un assioma, Bettazzi lo dimostra dopo aver introdotto altre proprietà di continuità delle classi quali la connessità.¹⁵⁶ Veronese osserva che la condizione di connessità è un altro modo per esprimere il principio di Archimede perché essa esclude la proprietà contraria a quest'ultimo.¹⁵⁷ In un articolo del marzo 1891 Vivanti aveva individuato in modo chiaro la differenza nel modo di procedere tra la *Teoria delle grandezze* di Bettazzi e "Il continuo rettilineo e l'assioma di Archimede" di Veronese e aveva osservato la sostanziale equivalenza delle due definizioni.¹⁵⁸ per entrambe le vie Vivanti riteneva di poter giungere "alla conclusione che non esiste un segmento rettilineo attualmente infinitesimo".¹⁵⁹ Bettazzi difende strenuamente la

¹⁵⁵ Bettazzi, [1890], p. 18.

¹⁵⁶ Una classe *G* è connessa "se tutte le possibili divisioni in gruppi conducono a collegamenti od a sezioni, cioè non conducono mai a successioni od a salti". Bettazzi, [1890], p. 40.

¹⁵⁷ FG, p. 624.

¹⁵⁸ "[Il continuo] è un insieme di grandezze ad una dimensione avente certe proprietà determinate. Fra queste Bettazzi sceglie le seguenti a costituire la definizione del continuo: a) L'insieme considerato è una classe propria *C*; b) *C* è connessa; c) *C* è chiusa. Definito così il continuo, si può dimostrare che per esso ha luogo il postulato d'Archimede. Veronese definisce invece il continuo colle proprietà seguenti: a) Esso è una classe propria *C*; b) *C* è illimitata; c) *C* è chiusa; d) *C* gode della proprietà enunciata nel postulato d'Archimede. (nota 21: L'equivalenza delle due definizioni si dimostra immediatamente, osservando che ogni classe propria illimitata che soddisfa al postulato d'Archimede è connessa, e reciprocamente.) Avviene qui dunque il fatto che si era segnalato in generale; la proprietà costituente il postulato d'Archimede figura nell'esposizione di Bettazzi come un teorema, mentre in quella di Veronese è una delle proprietà che servono a definire il continuo." Vivanti, [1891], p. 140.

¹⁵⁹ Vivanti, [1891], p. 141. Per un'esposizione più ampia della polemica tra Vivanti e Bettazzi cfr. Palladino-Vallebona, [1987].

possibilità dell'infinitesimo attuale; chiarissima è la sua risposta alle obiezioni di Vivanti:

1° l'esistenza dell'infinitesimo attuale non involge contraddizioni, e quindi l'infinitesimo attuale esiste. 2° Non è conveniente ammettere l'esistenza di un segmento infinitesimo attuale, solamente se si vuole una geometria che rappresenti i fatti più comuni delle nostre ordinarie limitate osservazioni. 3° Non può dedursi niente contro l'infinitesimo attuale dalla teoria delle probabilità e dei numeri transfiniti. 4° il calcolo infinitesimale non abbisogna degli infinitesimi attuali, ma potrà usarli quando ne sia stato fatto completo lo studio, restando poi da decidersi se meglio si svolga con essi o cogli infinitesimi potenziali di cui si serve ordinariamente.¹⁶⁰

La validità delle consuete operazioni dell'aritmetica nel caso dei numeri infiniti e infinitesimi fu dimostrata da un allievo di Veronese, Tullio Levi-Civita, studente del terzo anno di matematica, il quale compì (due anni dopo la pubblicazione dei *Fondamenti*) un tentativo di "aritmetizzazione dei numeri non archimedeei".¹⁶¹ Nel suo scritto "Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici" Levi-Civita ricorda i risultati di Cantor, di Stolz e di Du Bois-Reymond, i quali sono pervenuti alla determinazione di sistemi di numeri per i quali non valgono le usuali proprietà dell'aritmetica. Tali sistemi sono confrontati con il continuo non archimedeo di Veronese, che dopo aver introdotto dei segmenti infiniti e infinitesimi ha associato ad essi dei numeri tra i quali si possono stabilire le consuete operazioni aritmetiche di somma, prodotto, moltiplicazione e differenza. Ritenendo impresa troppo difficile lo svolgere un vero e proprio calcolo con i numeri stabiliti da Veronese, "da un lato per la loro origine essenzialmente geometrica [...], dall'altro per la mancanza di simboli o convenzioni, onde riescano compendiosamente rappresentati."¹⁶²

¹⁶⁰ Bettazzi, [189?], p. 182.

¹⁶¹ Levi-Civita, [1892-93]. Per un'interpretazione di questo scritto di Levi-Civita e della nota pubblicata cinque anni dopo sullo stesso argomento (Levi-Civita, [1898]) si veda Laugwitz [1975]. Laugwitz insiste sulla natura puramente algebrica della ricerca di Levi-Civita, la quale ha percorso i tempi e costituito una tappa fondamentale nello sviluppo delle ricerche sulle strutture ordinate di Hans Hahn.

¹⁶² Levi-Civita, [1892-93], p. 2.

Levi-Civita si propone di costruire, a partire dai soli numeri reali, un campo non archimedeo che possa servire da strumento nel calcolo sia aritmetico sia geometrico.¹⁶³ Completando in maniera puramente analitica la teoria dei numeri infiniti di vario ordine costruita dal suo maestro,¹⁶⁴ Levi-Civita dimostra la possibilità della geometria non archimedeo e fornisce a Veronese un buon argomento di difesa dagli attacchi ai *Fondamenti*. Esibendo un modello numerico che soddisfa alle ipotesi di Veronese, egli ha posto fine alle accuse di assurdità mosse all'ipotesi dell'esistenza di infinitesimi attuali. Oltre ad aver fondato in modo rigoroso la geometria non archimedeo, la ricerca di Levi-Civita ha condotto anche ad altri sviluppi: in particolare ha fornito un contributo fondamentale alla nascita delle ricerche algebriche sulle strutture ordinate.¹⁶⁵ Hans Hahn, il cui scritto del 1907 è considerato il primo lavoro esplicitamente dedicato alle strutture algebriche ordinate (anche se la terminologia oggi comunemente adottata fu introdotta successivamente), si richiama sia al lavoro di Veronese sia a quello di Levi-Civita. Quest'ultimo merita di essere ricordato non solo perché ha costruito un modello numerico del sistema di Veronese ma soprattutto perché nella nota del 1898 si è espresso in termini di strutture algebriche generali e ha definito ciò che noi oggi chiamiamo 'campo' proponendo di considerare un insieme di elementi con le consuete quattro operazioni dell'aritmetica e la relazione $<$ con le usuali proprietà.¹⁶⁶ Nello scritto del 1892-93 Levi-Civita costruisce un campo ordinato non archimedeo che si può far corrispondere all'insieme delle serie di potenze con coefficienti reali e esponenti interi; nello scritto del 1898 generalizza tale campo facendo variare i coefficienti su un qualunque campo ordinato arbitrario e gli esponenti su un gruppo ordinato arbitrario. Nel primo articolo costruisce un sistema di numeri finiti, infiniti e infinitesimi, che chiama *numeri monosemii del continuo numerico di seconda specie*,

¹⁶³ Laugwitz, [1975], p. 298.

¹⁶⁴ "E mentre io seguì il metodo sintetico nulla ammettendo di noto, il Levi-Civita, nel 1893 e poi nel 1898, svolse, completandola, la teoria dei miei numeri partendo da concetti puramente aritmetici valendosi per la loro costruzione dei numeri reali ordinari." GNA, pp. 347-351.

¹⁶⁵ Laugwitz, [1975], p. 297.

¹⁶⁶ Levi-Civita, [1898], pp. 316 e ss.

per il quale valgono tutte le ordinarie regole di calcolo. Ciascuno di questi enti è ottenuto pensando insieme un numero reale a , detto *caratteristica*, ad un numero reale ν , detto *indice* (a_ν , ove $a \in \mathcal{R}$ e $\nu \in \mathcal{N}$): gli usuali numeri reali sono i monosemii con indice zero. Tra i monosemii è possibile stabilire una relazione di uguaglianza, che ben esprime la doppia condizione che caratterizza l'identità dei segmenti della forma fondamentale di Veronese: la congruenza (se trasportati l'uno sull'altro i due segmenti coincidono) e l'appartenenza allo stesso campo di scala. Due monosemii sono uguali se e soltanto se hanno stessa caratteristica e stesso indice ($a_\nu = b_\mu$ sse $a=b$ e $\nu=\mu$). Al pari dell'uguaglianza può essere estesa dai reali ai monosemii anche la relazione d'ordine: innanzi tutto si definisce maggiore di zero un monosemio con caratteristica maggiore di zero, poi si distinguono due casi possibili nel confronto tra due monosemii qualunque. Se essi hanno stesso indice, si confrontano le caratteristiche: il monosemio con caratteristica maggiore (minore) sarà maggiore (minore); se i monosemii hanno indice diverso e supposto che le caratteristiche siano entrambe positive si considera maggiore (minore) quello di indice maggiore (minore). Se le caratteristiche fossero di segno diverso o entrambe negative si procederebbe analogamente, salvo poi modificare la relazione in base ai segni, proprio come si fa per i numeri reali.

In simboli: sia $a_\nu \neq b_\mu$

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 1. supponendo che $\nu=\mu$, | se $a=b$, allora $a_\nu = b_\mu$ |
| | se $a < b$ allora $a_\nu < b_\mu$ |
| | se $a > b$ allora $a_\nu > b_\mu$ |
| 2. supponendo che $\nu \neq \mu$ e $a, b > 0$, | se $\nu < \mu$ allora $a_\nu < b_\mu$ |
| | se $\nu > \mu$ allora $a_\nu > b_\mu$ |

Successivamente Levi-Civita introduce un'operazione di somma tra monosemii dello stesso indice, il cui risultato si ottiene sommando insieme le caratteristiche e attribuendo al totale l'indice dato: $a^1_\nu + a^2_\nu + \dots + a^n_\nu = (a^1 + a^2 + \dots + a^n)_\nu$. Per la somma così definita valgono tutte le proprietà dell'addizione ordinaria.¹⁶⁷ In modo analogo Levi-Civita introduce l'operazione

¹⁶⁷ Levi-Civita, [1892-93], pp. 2-4.

di prodotto, poi quella di limite; egli studia infine dei particolari gruppi di monosemii che chiama ellittici e iperbolici. Poiché il sistema di monosemii così costruito non rappresenta "l'intero edificio di Veronese", nell'articolo del 1898 ritorna sull'argomento completando la propria ricerca. Supponendo che A sia l'insieme in cui variano le caratteristiche e N quello in cui variano gli indici, i monosemii prima costruiti formano un nuovo insieme A' . Levi-Civita fa variare le caratteristiche dei monosemii anche su A' e quelle degli indici su A e ottiene un nuovo insieme di monosemii A'' . Successivamente costruisce un altro insieme A''' di monosemii facendo variare le caratteristiche su A' e gli indici su A . Continuando all'infinito si ottengono i numeri corrispondenti ai segmenti infiniti di vario ordine di Veronese.

Aggiungiamo anche un breve cenno agli studi compiuti da Hans Hahn sulle grandezze non archimedee sia perché la trattazione algebrica contribuisce alla comprensione del sistema di Veronese sia perché, come si è detto, Hahn si richiama esplicitamente alla costruzione del continuo non archimedeo compiuta nei *Fondamenti* e al tentativo di Levi-Civita di costruire un modello dapprima numerico e poi puramente algebrico dei segmenti infiniti e infinitesimi attuali della forma fondamentale. Nella ricerca "Über die Nichtarchimedischen Grössensysteme", presentata all'Accademia reale delle Scienze di Vienna nel 1907, Hahn costruisce un sistema di grandezze semplicemente ordinato, non archimedeo e completo e confuta l'opinione di quanti ritenevano impossibile l'esistenza di un sistema non archimedeo per il quale potesse valere l'assioma di completezza. Poiché la formulazione di tale assioma data da Hilbert nelle *Grundlagen der Geometrie* presupponeva la validità del principio di Archimede, Hahn ha innanzi tutto espresso la completezza in una forma generale valida sia per i sistemi archimedei sia per quelli non archimedei. Di questi ultimi ha costruito un semplice modello costituito dal sistema dei numeri complessi con n unità e con coefficienti che variano su tutti i numeri reali. Il risultato più importante di Hahn consiste nello studio delle proprietà delle strutture non archimedee (anche se egli non adotta questo termine ma parla semplicemente di sistemi di grandezze tra le quali sia possibile stabilire una relazione d'ordine e un'operazione di addizione che soddisfi a sei condizioni) e nella scoperta che certe proprietà dei numeri reali sono casi particolari di proprietà più generali valide per strutture

In cui il campo dei numeri reali è immerso. Il procedimento adottato da Hahn non solo è utile per comprendere gli sviluppi successivi delle teorie relative alle grandezze non archimedee ma getta anche luce sulla costruzione di Veronese. La relazione detta di uguale, maggiore o minore altezza tra grandezze traduce in modo rigoroso l'idea base dei *Fondamenti* di correlare il principio di Archimede alla finitezza delle grandezze.¹⁶⁸

Hahn definisce innanzi tutto *sistema di grandezze* [Grössensystem] un sistema di cose tali che, date due di esse, sia possibile definire l'una uguale o disuguale rispetto all'altra. La relazione di uguaglianza è definita dalle due condizioni di riflessività e transitività.¹⁶⁹ Hahn prende in considerazione solo i *sistemi semplicemente ordinati* [einfach geordnete Systeme], ossia quei sistemi nei quali, date due cose tra loro disuguali, è possibile stabilire in base ad una certa regola che una cosa è minore e l'altra maggiore. La relazione d'ordine gode della proprietà transitiva [se $a > b$, $b > c$ allora $a > c$] e soddisfa alla condizione che se $a > b$ e $a = a'$, $b = b'$ allora anche $a' > b'$. Oltre alla relazione d'ordine tra le grandezze del sistema si può definire anche un'operazione di addizione [$+ : (a, b) \rightarrow a + b$] che ha le seguenti proprietà: chiusura [se $a, b \in S$ allora $(a + b) \in S$], compatibilità con un'uguaglianza [se $a = a'$, $b = b'$ allora $a + b = a' + b'$], associatività [$(a + b) + c = a + (b + c)$], commutatività [$a + b = b + a$], esistenza per ciascun elemento di un unico inverso [dati a e $c \exists b$ t.c. $a + b = c$ e se $\exists b'$ t.c. $a + b' = c$ allora $b = b'$], compatibilità con l'ordine [se $b > b'$ allora $a + b > a + b'$]. Un sistema di grandezze semplicemente ordinato e non archimedeo può allora essere inteso come un gruppo ordinato nel quale non si assuma la validità del principio di Archimede: date due grandezze a e b del sistema si avrà che se $a < b$ allora per ogni n intero $na < b$.

Hahn introduce tre relazioni, che denotiamo con i simboli \sim , $>$ e $<$.

1) a e b sono della stessa altezza [sind von derselben Höhe] se esiste sempre un multiplo di a che supera ogni multiplo di b e un multiplo di b che supera ogni multiplo di a : si scriverà $a \sim b$.

2) a è di altezza minore [ist von geringerer Höhe] rispetto a b se esiste un multiplo di b che supera ogni multiplo di a ma non

viceversa: scriveremo $a < b$ oppure $b > a$;

3) b è di altezza minore rispetto ad a se esiste un multiplo di a che supera ogni multiplo di b ma non viceversa: scriveremo $b < a$ oppure $a > b$.¹⁷⁰

Date due grandezze positive del sistema, tra di esse sussisterà sempre una delle tre relazioni: $a \sim b$ oppure $a < b$ oppure $a > b$. Se poniamo tutte le grandezze che hanno la stessa altezza in una unica classe (ad esempio la classe di tutti gli $a \sim a$), possiamo dimostrare che in un sistema non archimedeo esistono almeno due classi; tra queste classi stabiliamo una relazione corrispondente a quella tra le grandezze che le compongono: siano $a \in A$ e $b \in B$, se $a < b$ allora $A < B$; se $a \sim b$ allora $A \sim B$. Date due classi del sistema fra loro differenti avremo sempre $A < B$ oppure $A > B$.

Le classi di equivalenza così determinate formano un insieme semplicemente ordinato al quale si può associare un certo tipo d'ordine: chiameremo *tipo delle classi* [Klassentypus] del sistema non archimedeo il tipo d'ordine dell'insieme costituito da tutte le classi di equivalenza costruite con la relazione $<$. Ad esempio ogni sistema di grandezze archimedeo ha una sola classe e dunque ha tipo di classe 1. Un esempio di sistema di grandezze non archimedeo di tipo di classe 2 è costituito dall'insieme dei numeri complessi con una relazione d'ordine: la classe con altezza minore è la classe dei numeri puramente immaginari (non esiste un multiplo di $0 + bi$ che superi $a + bi$, ove $a \neq 0$); la classe con altezza maggiore è la classe dei numeri complessi con parte reale diversa da zero (per ogni n intero $n(a + bi) > 0 + bi$, se $a \neq 0$). Un esempio di sistema di grandezze non archimedeo di tipo di classe n finito è dato dal sistema di numeri ad n unità: $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$, con addizione e relazione d'ordine; la classe con altezza più piccola sarà costituita dalle grandezze del tipo $a_n e_n$, la classe con altezza appena più grande dalle grandezze del tipo $a_{n-1} e_{n-1} + a_n e_n$ con $a_{n-1} \neq 0$; la classe di altezza maggiore sarà costituita da tutte le grandezze del tipo $a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ con $a_1 \neq 0$. Hahn fornisce infine anche un esempio (molto complesso) di un sistema di grandezze non archimedeo con tipo di classe più che finito

¹⁶⁸ Quest'aspetto dell'opera di Veronese è stato apprezzato, come si è visto, anche da Natorp.

¹⁶⁹ Hahn, [1907], p. 605.

¹⁷⁰ Hahn, [1907], p. 607.

[*liberendlich*] \mathcal{F} : è l'idea, espressa algebricamente, che in un sistema non archimedeo esistano segmenti infiniti di ordine infinito.¹⁷¹

Dopo aver dimostrato che ciascun sistema di grandezze non archimedeo può essere rappresentato mediante numeri complessi le cui unità formano un insieme semplicemente ordinato (in generale infinito) il cui tipo d'ordine coincide con il tipo di classe del sistema di grandezze dato,¹⁷² Hahn affronta la questione della possibilità di definire una proprietà di completezza per i campi ordinati non archimedei. L'assioma di completezza formulato da Hilbert nelle *Grundlagen der Geometrie* non è soddisfatto in un sistema non archimedeo per il semplice fatto che tale postulato presuppone la validità del principio di Archimede. Esso afferma infatti che un sistema è completo quando non è possibile ampliarlo con nuove grandezze in modo che tutti gli assiomi continuino a valere. In un articolo del 1906 Schoenflies nega la possibilità che esistano sistemi non archimedei per i quali vale l'assioma di completezza.¹⁷³ Hahn riformula il problema trovando una nuova soluzione: l'assioma di completezza formulato per i sistemi archimedei richiede che l'assioma di Archimede resti valido, ossia che le nuove grandezze introdotte siano finite rispetto a quelle già comprese nel sistema di partenza. Per i sistemi non archimedei questo fatto può essere tradotto nella richiesta che le nuove grandezze introdotte ricadano in una delle classi di equivalenza già date nel sistema, ossia siano finite, infinite o infinitesime di un ordine già dato nel sistema di partenza rispetto alle grandezze ivi contenute. Se il principio di Archimede richiede, tradotto nel nuovo linguaggio di Hahn, che il sistema abbia tipo di classe I, un analogo principio può sostituirlo nel caso di un sistema non archimedeo: la richiesta che il sistema abbia un tipo di classe determinato. A questo punto l'assioma di completezza può

¹⁷¹ Hahn, [1907], pp. 609 e ss.

¹⁷² Hahn stesso riconosce che a indicare i numeri da lui stesso stabiliti come numeri complessi con infinite unità era stato per primo Veronese, mentre noti da più lungo tempo erano i sistemi rappresentabili con numeri complessi ad n unità.

¹⁷³ Schoenflies, "Über die Möglichkeit einer projektiven Geometrie bei transfiniten (nicht archimedischen) Massbestimmung", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 15 (1906), pp. 26-47.

essere formulato in modo più generale così da valere sia per i sistemi archimedei sia per quelli non archimedei:

Con l'aggiunta di nuove grandezze alle grandezze del nostro sistema non si può ottenere un sistema semplicemente ordinato più ampio nel quale vi è ancora un'addizione che soddisfa alle nostre sei condizioni, senza che con ciò sorgano nuove classi di grandezze.¹⁷⁴

La nuova formulazione dell'assioma di completezza reinterpretata il principio di Archimede, il quale esclude l'introduzione di grandezze infinitesime: l'assioma di completezza applicato ad un sistema archimedeo afferma che, se noi ampliamo il sistema introducendo nuove grandezze, queste dovranno soddisfare all'ulteriore condizione di essere finite rispetto a quelle già date. Nel caso dei sistemi non archimedei si stabilisce che vi siano infiniti (e dunque anche infinitesimi) di un determinato ordine; la proprietà di completezza afferma che le nuove grandezze introdotte ampliando il sistema non devono essere infinite o infinitesime di un nuovo ordine rispetto a quello delle grandezze già date nel sistema, vale a dire non devono determinare una nuova classe di equivalenza rispetto alla relazione "essere della stessa altezza". L'aspetto più importante di questa traduzione dell'assioma di completezza consiste nell'osservazione che i sistemi semplicemente ordinati archimedei e quelli non archimedei hanno le stesse proprietà (ad eccezione ovviamente del principio di Archimede): da questa considerazione nascerà l'idea, sviluppata soprattutto a partire dagli anni Trenta con i lavori di Wolfgang Krull, di studiare le proprietà del campo \mathfrak{R} dei numeri reali in relazione a quelle dei campi ordinati non archimedei completi, scoprendo tra l'altro che alcune importanti proprietà di \mathfrak{R} costituiscono dei casi particolari di proprietà più generali dei sistemi algebrici ordinati.

Hilbert, come già si è accennato nell'introduzione, costruì una geometria non archimedeo per dimostrare l'indipendenza del postulato di Archimede dai rimanenti. Egli riconobbe tuttavia la priorità di Veronese:

G. Veronese nel suo profondo lavoro *Fondamenti della Geometria* ha pure cercato di costruire una geometria che fosse indipen-

¹⁷⁴ Hahn, [1907], p. 646.

dente dall'assioma archimedeo.¹⁷⁵

La geometria non archimedea di Hilbert è fondata sui numeri complessi del dominio $\Omega(t)$ costituito da tutte le funzioni algebriche di t che provengono da t mediante le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione e dall'ulteriore operazione $\sqrt{1+\omega^2}$, ove ω indica una qualsiasi funzione formata mediante quelle operazioni. In tale dominio i numeri 1 e t sono tali che un qualsiasi multiplo del primo è sempre minore del secondo. Hilbert considera un sistema di tre numeri (x, y, z) del dominio $\Omega(t)$ come un punto, i rapporti di quattro numeri qualsiasi $(u:v:w:r)$ di $\Omega(t)$ come un piano (se u, v, w sono tutti nulli), l'equazione $ux+vy+wz+r=0$ che esprime che il punto sta nel piano. Retta è la totalità dei punti che stanno in due piani con diversi $u:v:w$. In questo modo Hilbert costruisce una geometria che soddisfa agli assiomi di collegamento, di ordinamento, di congruenza, delle parallele ma non all'assioma di Archimede.¹⁷⁶

Anche Poincaré suggerisce la possibilità di un continuo non archimedeo. Come la nozione di spazio geometrico è derivata dalla nozione di spazio fisico ma non ha le stesse proprietà di quest'ultimo (cfr. il § 3.3.2), così la nozione di continuo matematico è derivata da quella di continuo fisico ma ha caratteristiche molto diverse. Il continuo matematico

è una collezione di elementi disposti in un certo ordine che pur essendo in numero infinito sono gli uni *esterni* agli altri. Non è questa la concezione comune, dove si suppone che fra gli elementi del continuo vi sia una specie di intimo legame che ne fa un tutto, dove il punto non preesiste alla linea, ma la linea al punto.¹⁷⁷

Il continuo matematico non è "una pura creazione dell'intelligenza dove l'esperienza non avrebbe alcuna parte": l'occasione per la sua creazione è fornita dal continuo fisico. L'esperienza rivela che è impossibile distinguere le impressioni prodotte da due corpi il cui peso differisca per un solo grammo, mentre è possibile distinguere corpi il cui peso differisca per una quantità maggiore. Pertanto

¹⁷⁵ Hilbert, [1899], p. 48, nota 3.

¹⁷⁶ Hilbert, [1899], pp. 48-9.

¹⁷⁷ Poincaré [1902a], p. 71.

se A, B, C sono pesi rispettivamente di 10, 11 e 12 grammi, l'esperienza fisica determina la seguente equazione: $A=B$, $B=C$, $A < C$, che Poincaré assume come formula del continuo fisico. Poiché tale formula è palesemente contraddittoria, la necessità di eliminare tale assurdità ha condotto alla creazione del continuo matematico. Un primo ordine del continuo si ha con l'introduzione dei numeri razionali; un secondo con l'aggiunta dei numeri incommensurabili. I lavori di Du Bois-Reymond dimostrano però che la potenza creatrice dell'intelligenza non si esaurisce con la creazione del continuo di secondo ordine ma introduce infinitesimi di diverso ordine creando una specie di *continuo di terzo ordine*.¹⁷⁸ Tale continuo di terzo ordine è però giudicato "troppo poco utile per acquisire diritto di cittadinanza" e considerato come "una semplice curiosità".¹⁷⁹ Poincaré non fa riferimento ai lavori di Veronese, che probabilmente non conosceva bene (abbiamo ricordato nel § 2.2.2 che egli confonde i numeri di Veronese con un'applicazione alla geometria dei transfiniti di Cantor). Entrambi pongono tuttavia l'accento sulla rilevanza del continuo sensibile nella determinazione delle proprietà del continuo matematico e ricordano che le proprietà di quest'ultimo non coincidono con quelle del primo ma le estendono senza contraddire alle proprietà intuitive. Il complicato sistema di simboli che l'uomo ha immaginato per descrivere il continuo fisico

non solo è privo di contraddizioni interne [...] ma non è neppure in contraddizione con le diverse proposizioni, dette intuitive, ricavate da nozioni empiriche più o meno elaborate.¹⁸⁰

Veronese come Poincaré separa il continuo matematico dal continuo rettilineo: il mistero della continuità nel quale è compreso il concetto di limite matematicamente "non ha alcuna importanza, poiché ci basta la determinazione del continuo mediante un sistema ordinato ben definito di punti."¹⁸¹ Il continuo matematico è una costruzione, è una determinazione astratta, mentre il continuo sensibile è dato nell'intuizione in modo

¹⁷⁸ Poincaré [1902a], pp. 76-9.

¹⁷⁹ Poincaré [1902a], p. 79.

¹⁸⁰ Poincaré [1902a], p. 77.

¹⁸¹ FG, p. 48, nota 1. Cfr. § 2.3.1.

indipendente da ogni formulazione matematica.¹⁶²

¹⁶² Questa concezione del continuo presenta alcune affinità con le idee espresse da Brouwer nella tesi del 1907 (*Sui fondamenti della matematica*): il continuo geometrico è fondato dall'intuizione temporale e non costruito con un'azione dell'intuizione matematica che non potrebbe creare altro che un insieme numerabile di punti: "Comunque, il continuo come un tutto ci è dato dall'intuizione; una costruzione di esso, un'azione che creerebbe dall'intuizione matematica tutti i suoi punti come individuali, è inconcepibile e impossibile." Brouwer, [1907], p. 45. Per una ricostruzione delle diverse posizioni assunte da Brouwer riguardo al concetto di continuo si veda Franchella, [1994] (in particolare il paragrafo 4.2).

3. GEOMETRIA E SPAZIO

Dopo aver presentato (nei capitoli 1 e 2 della prima parte) i risultati matematici cui Veronese perviene attraverso la riflessione sui fondamenti, introdurremo in questo capitolo i presupposti filosofici della sua concezione della geometria: la nozione di scienza mista, il rilievo attribuito all'intuizione nella determinazione del concetto geometrico di spazio, il ruolo della formulazione assiomatica delle teorie matematiche. La discussione di tali presupposti è fondata sulla lettura della Prefazione ai *Fondamenti di geometria* e sul commento di alcuni testi pubblicati tra il 1889 e il 1909: "Il continuo rettilineo e l'assioma V di Archimede" [CRA], "Osservazioni sui principii della geometria" [OPG], Prefazione a *Elementi di Geometria, ad uso dei licei e degli istituti tecnici (primo biennio), trattati con la collaborazione di P. Gazzaniga* [EG], *Appendice agli Elementi di Geometria* [AEG], "Les postulats de la Géométrie dans l'enseignement" [PGE], "La geometria non-Archimedea. Una questione di priorità" [GNA₁], *Il vero nella matematica* [VM], "La geometria non-Archimedea" [GNA₂].

3.1 LA CLASSIFICAZIONE DELLE SCIENZE

Veronese distingue le scienze in due categorie: le scienze *formali* (o esatte) riguardano enti puramente astratti; quelle *sperimentali* descrivono i fenomeni del mondo esterno. Alla prima classe appartengono la logica e la matematica pura, alla seconda la fisica e la meccanica. Il termine *formale* connota le discipline astratte che studiano le *forme*, ossia ogni ente ideale che non provenga dall'osservazione del mondo esterno ma sia un prodotto del puro pensiero. La verità delle scienze formali

"scaturisce dall'armonia dei diversi atti del pensiero", ossia dipende esclusivamente dalla non contraddittorietà reciproca dei concetti e delle proposizioni.¹ Le premesse delle scienze esatte sono false se sono autocontraddittorie oppure se attribuiscono ad un ente una proprietà negata in un'altra proposizione primitiva. Poiché gli enti ideali sono libere creazioni della nostra mente, non ci sono limiti al numero e al tipo di proprietà ma, conformemente alle regole logiche del discorso, non è possibile attribuire contemporaneamente proprietà contrarie ad uno stesso oggetto. Le premesse delle scienze formali si dicono anche *definizioni* o *ipotesi* perché con un atto creativo stabiliscono le proprietà degli enti puramente ideali di cui parlano. Dalle premesse deriva la verità di altre proposizioni per dimostrazione, ossia mediante la semplice combinazione di diversi atti del pensiero: per l'indipendenza dall'esperienza le scienze formali sono anche chiamate *esatte*.

Il termine *sperimentale* connota invece le scienze che studiano i fenomeni naturali e le leggi che regolano le relazioni fra gli oggetti del mondo esterno. Le proposizioni delle scienze sperimentali sono vere quando descrivono le caratteristiche di un oggetto in armonia con i risultati dell'osservazione empirica: la verità dipende dall'accordo tra pensiero e rappresentazioni mentali dell'oggetto reale esistente al di fuori del pensiero.² Tra le premesse è necessario assumere delle proposizioni primitive non dimostrabili, dette *assiomi*, che descrivono in modo approssimato le proprietà di un certo oggetto reale e che sono accettate come vere per la loro evidenza intuitiva.³

¹ "Le cose pensate o hanno o non hanno necessariamente un'immagine in un campo esistente effettivamente fuori del pensiero; [...] Le cose della seconda categoria si chiamano *forme*, e le scienze che si occupano delle forme scienze *formali*. Tali sono la logica e la matematica pura. In queste scienze la verità scaturisce dall'armonia dei diversi atti del pensiero." FG, p. VII.

² "Le scienze di oggetti esistenti effettivamente fuori del pensiero si chiamano sperimentali. La verità in queste scienze riposa invece sull'armonia del pensiero con l'oggetto fuori di esso, e quindi siamo costretti a ritenere in esse come impossibile tutto ciò che è in contraddizione colle leggi del pensiero stesso e dell'oggetto, o per meglio dire della rappresentazione mentale di esso." FG, p. VII.

³ "Siccome nelle scienze sperimentali vi deve essere armonia tra l'oggetto ed il pensiero, esse si fondano su quelle verità che si intuiscono con la percezione di quell'oggetto, ma che non possono essere dedotte le une dalle altre." FG, p. VIII.

La distinzione delle scienze in formali e sperimentali e la contrapposizione tra definizioni con funzione creativa e assiomi con funzione descrittiva è una rielaborazione della divisione delle scienze in *reali* e *formali* proposta da Grassmann nell'Introduzione alla *Ausdehnungslehre*:

Le prime si figurano l'essere nel pensiero, un essere che è esso stesso indipendente da quel pensiero, e la loro verità è data dalla concordanza del pensiero con l'essere; le seconde invece hanno per oggetto ciò che è posto dal pensiero stesso e la loro verità è data dalla concordanza fra loro dei processi di pensiero.⁴

Mentre Grassmann parla di scienze 'reali', insistendo sulla realtà degli enti esistenti fuori del pensiero di contro all'idealità degli enti posti dal pensiero stesso, Veronese utilizza il termine 'sperimentale', ponendo l'accento sul legame di dipendenza dall'esperienza che caratterizza gli oggetti della fisica rispetto agli oggetti della matematica pura. La differenza terminologica rivela l'intenzione di rivendicare idealità anche agli oggetti delle scienze sperimentali: ciò che contraddistingue gli oggetti della fisica non è l'esistenza empirica ma l'accordo con le proprietà degli oggetti reali corrispondenti. La sostanza della distinzione resta comunque la medesima: da un lato le scienze la cui verità è determinata soltanto dalla legge logica di non contraddizione, ossia quelle il cui oggetto è creato dal pensiero stesso, dall'altro le scienze la cui verità dipende dalle proprietà di un essere esterno al pensiero. Nella *Ausdehnungslehre* le due classi sono distinte in base alle premesse, ossia alle proposizioni assunte come primitive: le scienze formali si fondano su delle *definizioni*, mentre le scienze reali su degli *assiomi*. Anche nei *Fondamenti* la distinzione risiede nella diversa funzione delle premesse: creativa nel primo caso e descrittiva nel secondo. La separazione tra scienze che creano i propri oggetti e scienze che si limitano a descriverli non è però ingenua, perché si ammette che gli enti siano prodotti del pensiero: nel primo caso la produzione è regolata dal principio di non contraddizione, mentre nel secondo dall'accordo con alcune verità empiriche che appaiono inconfutabili per la loro evidenza

⁴ Grassmann, [1844], p. VII.

intuitiva. La distinzione delle scienze in formali e sperimentali è insufficiente a caratterizzare la geometria. L'analisi degli enti e delle premesse geometriche impone la necessità di individuare una categoria trasversale alla quale appartengono le scienze costituite sia da premesse descrittive sia da premesse "creative".

3.1.1 Gli enti geometrici

I concetti geometrici punto, retta, piano sono ottenuti da corpi fisici mediante diverse operazioni di astrazione. L'idea di retta è ad esempio fornita dall'applicazione dell'astrazione all'osservazione di oggetti rettilinei quali un filo teso, un'asta sottilissima, una linea tracciata dalla matita sul foglio. Per ottenere il concetto di retta occorre innanzi tutto astrarre da tutte le proprietà fisiche dell'oggetto concreto ad esclusione dell'estensione. Per quanto fine sia la punta della matita, il segno lasciato sul foglio non è così sottile da avere larghezza nulla. Per ottenere il concetto geometrico di lunghezza senza larghezza occorre un *passaggio al limite*: se si rende sempre più fine la punta della matita, la larghezza della linea tracciata diviene sempre più piccola e quando la punta tende a diventare puntiforme, la larghezza della linea tende ad annullarsi. L'idea di retta comporta inoltre che la linea sia priva di gobbe o rientranze: per considerare rettilineo il segno della matita occorre prescindere da tutte le sue imperfezioni con un ulteriore processo di astrazione. Dall'osservazione di un oggetto concreto limitato quale la linea tracciata dalla matita sul foglio è possibile ottenere soltanto il concetto di segmento di retta. Per derivare l'idea di retta illimitata occorre un'ulteriore operazione che ci permetta di uscire dal campo della nostra esperienza: un passaggio all'illimitato che estenda idealmente il segno tracciato sul foglio da entrambe le parti. Riassumendo, la retta geometrica è un concetto ottenibile mediante quattro interventi dell'operazione di astrazione: in primo luogo si astrae da tutte le proprietà fisiche (peso, colore, temperatura, elasticità, rigidità, ...) di un oggetto ad eccezione dell'estensione; in secondo luogo si opera un passaggio al limite, considerando nulla la larghezza della linea empirica; in terzo luogo si astrae da tutte le imperfezioni dell'oggetto; infine si passa all'illimitato immaginando che la retta si estenda in entrambe le direzioni al di fuori del nostro campo percettivo. Quest'ultimo atto di astrazione

costituisce quella legge mentale di generalizzazione alla quale Veronese si riferisce come al fondamento del passaggio all'illimitato e del principio matematico di induzione completa. Benché suggerito dall'esperienza, il principio di induzione è un prodotto del pensiero.⁵

La retta illimitata della geometria non è un corpo fisico, un oggetto del quale si considerano soltanto alcune caratteristiche, ma un nuovo oggetto (illimitato e privo di imperfezioni) creato per idealizzazione in conformità ai dati osservativi dell'esperienza. Analogamente il punto geometrico non è un corpo fisico, benché sia ottenuto per astrazione dall'osservazione di certi oggetti reali esistenti fuori di noi nel mondo esterno: l'estremità di un filo o di una punta sottile, un granello di sabbia, un corpo che si consideri come non scomponibile in parti, un piccolo segno tracciato sul foglio dalla punta di una matita. Tutti questi oggetti di natura diversa possono risvegliare in noi l'idea di punto e sono detti *punti materiali*. Il punto geometrico non coincide con nessuno di essi ma è piuttosto un ente puramente ideale, un'immagine mentale ottenuta dalle rappresentazioni dei punti materiali, un *tipo* rispetto al quale un punto materiale costituisce un'approssimazione imperfetta.⁶ A questo proposito Veronese critica la posizione rigidamente empiristica di Pasch, che sostiene l'originaria corrispondenza tra oggetti empirici e oggetti geometrici:⁷ chiamando punti i corpi la cui divisione

⁵ "Se pure si ammette che l'idea di successione, anche di oggetti astratti successivamente pensati, ottenuti per es. colla ripetizione dello stesso atto del pensiero, provenga dalle sensazioni, che secondo l'Ardigò, ne danno il ritmo, il passaggio però dalla successione limitata fornita dalle sensazioni a quella illimitata [...] dipende, se vuolsi, da una legge mentale di *generalizzazione*, colla quale dai casi particolari, ad es. dall'aggiunta di un'unità ad un dato numero, passiamo al caso generico, cioè ad ogni numero; ma questa legge di generalizzazione, se è suggerita dall'esperienza, appare però un prodotto proprio del pensiero." VM, pp. 31-32, nota 3.

⁶ "Secondo il concetto più moderno del punto, che è quello da me usato nella Geometria a più di tre dimensioni, il punto, e quindi anche la figura, non è un oggetto esteriore del quale si faccia astrazione di alcune qualità fisiche, ma l'*immagine* che noi abbiamo di esso." AEG, p. 2. Dall'osservazione dell'estremità di un filo deriva ad es. l'idea di punto come limite, elemento di separazione tra segmenti, dalla considerazione del segno tracciato sul foglio da una matita deriva invece l'idea di punto *inesteso*.

⁷ "I concetti geometrici originariamente corrispondevano esattamente agli oggetti empirici, anche se gradatamente sono stati rivestiti con una rete di concetti artificiali per favorire lo sviluppo teoretico." Pasch, [1884], p. V.

non è compatibile con i limiti dell'osservazione, le più piccole estensioni che possiamo percepire, i minimi sensibili, Pasch introduce l'incertezza e l'inesattezza dell'osservazione negli assiomi e nelle dimostrazioni.⁸

Le idee geometriche punto, retta, piano sono dunque nozioni *ideali*: dato che esse sono presenti nell'uomo fin dai primi anni di vita, se ne deve concludere che sono innate?⁹ Poiché la costruzione deduttiva della geometria non richiede la determinazione dell'origine delle idee geometriche, Veronese lascia indeterminata la questione se esse siano idee innate che emergono a coscienza grazie all'osservazione di certi oggetti empirici che le rievocano oppure idee che si formano in noi in seguito all'osservazione degli oggetti esterni. Egli ritiene infatti che un matematico debba astenersi dalla discussione sulla genesi a priori o a posteriori dei concetti geometrici. A Veronese preme evitare l'accusa di aver fondato una teoria matematica su un'ipotesi filosofica: una volta chiarita l'indipendenza della prima dalla seconda, egli non nasconde però la propria predilezione per una concezione empirista dell'origine della geometria. Ritourneremo su questo punto nel quarto capitolo. Ciò che qui preme sottolineare è la duplice natura degli enti geometrici: da un lato essi sono enti puramente ideali quali gli oggetti delle scienze formali, dall'altro sono ottenuti per astrazione dall'osservazione di oggetti fisici concreti dei quali conservano alcune proprietà. Se duplice è la natura degli oggetti geometrici, ancora più complessa è, come vedremo, quella delle premesse, assimilabili in parte alle definizioni delle scienze formali, in parte agli assiomi delle scienze sperimentali.

⁸ "Ciò che distingue anzitutto il metodo del Pasch, si è che egli non riconosce nella geometria una scienza astratta la cui forme siano tipi a cui si accostino gli oggetti reali stessi fuori di noi, ma sono per lui questi oggetti medesimi." FG, pp. 584-585 [corsivo mio]. E ancora: "Non si può ricondurre tutta la geometria al puro empirismo, riguardando cioè quali oggetti di essa i corpi dello spazio fisico con le loro imperfezioni, se deve essere una scienza deduttiva, e se in essa la legge di astrazione e quella dell'illimitato, che sono necessità della nostra mente, non hanno il loro pieno svolgimento." VM, p. 15.

⁹ Cfr. FG, p. 210.

3.1.2 Le premesse

Euclide fondava la geometria su assiomi, cioè su proposizioni intuitive la cui verità fosse immediatamente evidente, e su nozioni comuni, ossia proposizioni di carattere generale comunemente accettate per vere. Veronese opera una serie più complessa di distinzioni e individua sei tipi differenti di premesse scientifiche: logiche, materiali, empiriche, semiempiriche, astratte, pratiche. Questa classificazione non compare in Veronese, ma è suggerita in un articolo di Aldo Brigaglia, che vede nella serie lunghissima di distinzioni di Veronese uno strumento che anziché rendere più chiaro il problema dei fondamenti della geometria ne complica la soluzione.¹⁰ La classificazione delle premesse, benché un po' confusa, non costituisce un'inutile complicazione del problema dei fondamenti, perlomeno non sul piano filosofico: essa contribuisce infatti alla determinazione dell'oggetto e della natura della geometria e costituisce un'applicazione della concezione epistemologica di Veronese fondata sulla rilevanza dell'intuizione nella formulazione di ogni teoria geometrica.¹¹

1) Alcune delle proposizioni che Euclide includeva nelle nozioni comuni, come ad esempio la proposizione "due cose uguali ad una terza sono uguali fra loro", sono per Veronese *premesse logiche* e non geometriche. Poiché costituiscono il fondamento di ogni ragionamento, esse sono comuni a tutte le scienze senza caratterizzarne nessuna. Premesse logiche sono sia i

¹⁰ "In effetti il punto di vista del matematico veneto [...] rischiava di impantanarsi in una serie lunghissima di definizioni ed assiomi empirici, semi-empirici, logici, materiali ecc., che in fin dei conti niente aggiungevano all'intelligibilità delle questioni trattate." Brigaglia, [1994], p. 256. Il punto di vista al quale Brigaglia si riferisce è quello, a suo giudizio matematicamente sterile, che cerca di conciliare nella ricerca dei fondamenti della geometria l'indirizzo astratto con quello fisico-geometrico. In questo lavoro s'intende dimostrare che al contrario il tentativo di conciliare i due diversi indirizzi è fecondo ed ha aperto la strada alle ricerche algebriche sulle strutture ordinate.

¹¹ Vedremo che due sono i principi epistemologici fondamentali che guidano i *Fondamenti*: 1) la validità delle premesse non va fondata sull'evidenza ma piuttosto sulla non contraddittorietà logica; 2) tutte le proposizioni geometriche devono essere compatibili con la nostra intuizione dello spazio. La prima di queste due regole riguarda il problema della giustificazione della "verità" delle premesse, mentre la seconda riguarda in particolare modo la genesi di essa, sottolineando la necessità che la geometria rimanga fedele alle proprie origini empirico-intuitive. Cfr. Brigaglia, [1998], p. 255.

principi logici (come l'assioma d'identità o il principio di non contraddizione) e le proposizioni che ne derivano, sia le operazioni logiche (l'unire e il paragonare). Le proposizioni logiche evidenziano il rapporto tra i concetti primitivi e derivati di una scienza e la struttura dei nostri pensieri: sono assunzioni necessarie per la costituzione di ogni discorso e caratterizzano indirettamente il processo secondo il quale il nostro pensiero si sviluppa. Il pensiero unisce, paragona, si spinge al di là di ogni limite intrinseco pensando il prodotto di un precedente pensiero. Tra le premesse logiche Veronese include il principio della continuità del pensiero, che comporta alcune conseguenze geometriche molto interessanti: la possibilità degli iperspazi e di grandezze continue non archimedee.

2) Vi sono poi *premesse materiali* che derivano direttamente dall'esperienza: ad esempio la proposizione "un'asta rigida è determinata da due suoi punti". Tali premesse sono proprie delle scienze sperimentali in genere ma non della geometria, la quale studia enti puramente ideali (punti e linee senza estensione) anziché i corrispondenti oggetti fisici concreti (granelli di sabbia, aste rigide...). Le premesse materiali sono giustificate dall'osservazione delle proprietà di determinati oggetti (meglio sarebbe dire non confutate, dato che nessuna proposizione universale può essere confermata empiricamente): sono delle generalizzazioni a un numero indeterminato di oggetti di qualcosa che è stato sperimentato in alcuni casi particolari.¹² Nelle proposizioni materiali non compaiono gli enti ideali propri della geometria ma sono descritte le proprietà geometriche di certi oggetti fisici reali con le loro imperfezioni e approssimazioni: ad esempio le proprietà di un bastone, che non è mai perfettamente diritto né sufficientemente sottile da poter essere considerato una lunghezza senza larghezza né spessore.

3) Il terzo gruppo è costituito dalle premesse empiriche (analoghe agli assiomi delle scienze sperimentali) in senso stretto, ossia quelle verità primitive che noi cogliamo mediante l'intuizione e

¹² Ad es. dopo aver ripetutamente osservato che un bastone con una sola estremità fissata è soggetto a rotazioni mentre un bastone che abbia entrambe le estremità fissate non può ruotare, si conclude che tutti i bastoni sono determinati univocamente da due estremi.

che accompagnano la percezione di certi fatti fisici: ad esempio la proposizione "la retta, nel campo della nostra osservazione esterna, è determinata da due qualunque dei suoi punti".¹³ La geometria, avendo tra le proprie premesse tali assiomi empirici, è una scienza *sperimentale* almeno nella sua origine o nel suo nucleo originario costituito da verità indimostrabili, intuite tramite l'osservazione di certi oggetti esterni. La certezza di tali verità non è generalmente messa in dubbio perché può essere controllata empiricamente. È infatti sufficiente afferrare e muovere un'asta rigida per verificare che la retta limitata, ossia l'ente ideale geometrico ottenuto per astrazione dall'oggetto fisico 'asta', è determinata da due qualunque dei suoi punti.

4) Altre premesse, dette *semiempiriche*, hanno origine empirica ma fuoriescono dal campo limitato della nostra esperienza. La loro verità può essere messa in dubbio perché non sono controllabili empiricamente: non si ha cioè alcuna garanzia che l'estensione alla totalità dello spazio di leggi valide in una parte limitata e osservabile di esso sia legittima. Un esempio di premessa semiempirica è la proposizione seguente, ove per *retta* si intenda non più un segmento di retta, ma una linea illimitata: "la retta è determinata da due qualunque dei suoi punti".¹⁴ Questo ente sfugge alla nostra osservazione perché

¹³ "Mentre nelle scienze formali la verità risulta dall'accordo tra diverse concezioni primitive, tutte riconosciute come vere, nelle scienze sperimentali essa proviene dall'accordo tra l'osservazione e il pensiero, di modo che queste scienze sono basate su certe verità primitive, l'intuizione delle quali accompagna la percezione di certi fatti. Queste verità primitive, che non possono essere dedotte le une dalle altre, sono gli assiomi propriamente detti. Per esempio, la proposizione seguente: "la retta, nel campo della nostra osservazione esterna, è determinata da due qualunque dei suoi punti" è un assioma, quando non è riducibile alle premesse." PGE, p. 435. L'espressione "retta nel campo della nostra osservazione esterna" designa la retta limitata da due estremi o segmento di retta. Cfr. anche FG, p. VIII. Il discorso di Veronese è reso poco chiaro dall'uso che egli fa del termine *assioma* sia come sinonimo di premessa in generale, sia nel senso specifico di premessa empirica.

¹⁴ "In geometria vi sono anche altri assiomi che risultano anch'essi dall'osservazione diretta degli oggetti esteriori all'interno del campo limitato della nostra osservazione, ma che noi estendiamo in seguito ad oggetti che si trovano al di fuori di questo campo e dunque al di là della nostra portata effettiva: questo è quanto avviene nel caso dell'assioma relativo alla retta che abbiamo appena citato, quando noi lo estendiamo ad una retta illimitata, ossia allo spazio nella sua totalità, che non possiamo osservare." PGE, pp. 435-436. Si veda

noi non possiamo percepire altro che segmenti limitati. La distinzione tra premesse empiriche e premesse semiempiriche trova applicazione nel caso della geometria non euclidea sferica, la quale non include tra le premesse l'ipotesi semiempirica euclidea che "una retta terminata (= finita) si possa prolungare continuamente in linea retta", ma include la correlata premessa empirica "che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto".¹⁵ La separazione tra premesse empiriche e semiempiriche, di centrale importanza per capire sia la natura della geometria rispetto alle scienze formali e sperimentali sia il ruolo dell'intuizione, è con ogni probabilità ispirata agli *Elementi*. L'esempio che Veronese introduce per spiegare la differenza tra premesse empiriche e semiempiriche ricalca la distinzione euclidea tra 'retta' nel significato di segmento di retta e 'retta illimitata' nel significato di retta prolungata indefinitamente da entrambe le parti.¹⁶

5) La geometria comprende infine fra le proprie premesse anche delle proposizioni che riguardano oggetti puramente astratti, esistenti soltanto fuori del campo delle nostre osservazioni, ossia oggetti che non possiamo osservare e nemmeno possiamo ottenere per astrazione da oggetti fisici reali.¹⁷ Chiamiamo tali proposizioni *premesse astratte* per porre l'accento sull'indipendenza da ogni contenuto concreto: la loro verità non è legata all'esistenza nel mondo esterno degli oggetti ai quali si riferiscono. Esempi di premesse astratte sono il postulato del continuo nella forma di Dedekind o quello dello spazio a quattro dimensioni, ma anche l'ipotesi delle parallele e quella della divisibilità in parti di ogni tratto rettilineo, le ipotesi dell'infinito e dell'infinitesimo attuali.¹⁸ Questi esempi sono sufficienti a chiarire l'importanza della giustificazione delle premesse astratte: sono in gioco la fondazione della teoria degli iperspazi, la validità delle geo-

anche VM, p. 12.

¹⁵ Euclide, [1970], p. 71.

¹⁶ Veronese è convinto della opportunità di un generale ritorno ad Euclide (promosso in Italia già nel 1868 con la pubblicazione di una nuova edizione degli *Elementi* a cura di Betti e Brioschi) e riecheggia formulazioni euclidee in molti passi dei *Fondamenti di geometria*.

¹⁷ "Vi sono infine altri assiomi che non si riferiscono né agli oggetti esterni né al campo geometrico corrispondente a quello della nostra osservazione [...]" PGE, p. 436.

¹⁸ PGE, p. 436. Si veda anche VM, p. 16.

metrie non euclidee, l'esistenza dell'infinitesimo attuale, la possibilità della geometria non archimedeica, il rifiuto della verità di tali proposizioni comporta l'esclusione di molte ricerche ottocentesche ma anche il rifiuto di quella parte della geometria euclidea che si fonda sul postulato delle parallele. L'ammissione della verità di tali proposizioni richiede d'altra parte la giustificazione teorica di alcuni concetti controversi, quali lo spazio a più di tre dimensioni e l'infinitesimo attuale, e soprattutto un ripensamento teorico dello scopo della geometria, non più riducibile alla descrizione dello spazio fisico.¹⁹ Se la geometria si fondasse solo su premesse empiriche, essa si ridurrebbe alla geometria sperimentale che s'insegna ai bambini: una teoria dello spazio molto elementare che comprende soltanto concetti finiti e descrive oggetti interni al nostro campo percettivo.²⁰ Non potendo sottoscrivere questa limitazione dell'ambito di ricerca proprio della geometria, il matematico ha il diritto di introdurre premesse semiempiriche e astratte. Tali proposizioni non sono imposte dall'esperienza ma sono scelte in analogia con quanto accade nel finito: condizione di possibilità delle premesse è la conformità alla nostra intuizione dello spazio ossia alle proprietà intuitive espresse nelle premesse empiriche.²¹

3.1.3 La geometria come scienza 'mista'

Di tutti i tipi di premesse che abbiamo individuato solo tre sono posti da Veronese a fondamento della geometria:

– le premesse empiriche che si intuiscono immediatamente

¹⁹ "[...] se è vero che uno degli scopi della matematica è anche questo [cioè, lo studio dei fenomeni naturali nel campo delle attuali osservazioni], e certo di molto rilievo, non è però il solo, giacché in tal caso vi sarebbero molte teorie matematiche [come la geometria non euclidea e l'ipergeometria] che avrebbero per ora almeno o poca o nessuna importanza." OPC, p. 203.

²⁰ Veronese attribuisce grande importanza all'insegnamento graduale della geometria e ritiene più facile per l'allievo apprendere prima soltanto le verità che egli è in grado di verificare empiricamente attraverso l'osservazione di oggetti reali corrispondenti agli enti ideali geometrici: l'insegnamento con metodo intuitivo della sola parte sperimentale della geometria dovrebbe precedere quello dell'intera teoria geometrica svolto con metodo razionale rigoroso. Cfr. PGE e NEG.

²¹ Valuteremo il significato e le conseguenze di questa condizione che Veronese impone alle premesse geometriche nel § 3.3.

dall'osservazione degli oggetti del mondo esterno, dette *assiomi*:

– le premesse semiempiriche che, pur essendo ottenute a partire dall'osservazione di oggetti concreti, descrivono oggetti che escono dal campo della nostra esperienza;

– le premesse astratte, che riguardano certi oggetti immaginati esistenti al di fuori del campo della nostra osservazione.

Premesse semiempiriche ed astratte sono dette *postulati* o *ipotesi* per distinguerle dagli *assiomi*, che sono accettati in base alla loro evidenza.²² La geometria comprende sia *assiomi* (premesse proprie delle scienze sperimentali) sia *ipotesi* (premesse proprie delle scienze formali).²³ Poiché duplice è la natura dei suoi enti e delle sue premesse, la geometria ha una natura mista. Le sue premesse, pur essendo simili a quelle delle scienze sperimentali, sono esatte come quelle delle scienze formali e riguardano sia oggetti "risvegliati in noi dall'esperienza" sia oggetti che "non hanno [...] necessariamente una rappresentazione fuori del pensiero, ma sono costruiti coi principi della logica pura".²⁴ I suoi enti sono tutti ideali, ma alcuni, come il segmento di retta, sono ottenuti per astrazione da oggetti "esistenti effettivamente fuori del pensiero", mentre altri, come i punti immaginari della geometria proiettiva o i punti con i quali si costruiscono gli spazi a più di tre dimensioni, sono libere creazioni del pensiero alle quali non corrisponde alcun oggetto reale. La geometria è una scienza formale perché i suoi enti sono puramente ideali e perché contiene premesse astratte; essa è però anche una scienza sperimentale perché le proprietà di certi suoi enti sono ottenute per astrazione dalle proprietà degli oggetti fisici e perché alcune sue premesse sono empiriche. In quanto scienza sperimentale, ossia relativamente alle premesse empiriche, la verità della geometria dipende dall'armonia tra il pensiero e l'oggetto, ossia tra le ipotesi pensate e lo spazio fisico esistente al di fuori del pensiero. In quanto scienza formale, ossia relativamente alle premesse semiempiriche e astratte, la verità della geometria è re-

²² "Gli assiomi delle due ultime categorie sono più propriamente dei postulati o delle ipotesi." PGE, p. 436.

²³ FG, p. VIII.

²⁴ VM, p. 10.

golata dal principio di non contraddizione: tali premesse non possono contraddire a quelle empiriche e devono essere in armonia con la nostra rappresentazione intuitiva dello spazio.

Tra le premesse della geometria Veronese include, in verità, anche gli *assiomi pratici*, cosiddetti perché necessari soltanto per le applicazioni pratiche della geometria alla fisica.²⁵ L'assioma delle parallele, quello del libero movimento dei corpi rigidi e quello della tridimensionalità dello spazio caratterizzano la geometria applicata ma non sono necessari per lo sviluppo teoretico della geometria.²⁶ Benché ricorra all'osservazione esterna per stabilire gli assiomi, la geometria *teoretica* si rende subito indipendente dall'esperienza "considerando non già i corpi stessi bensì il luogo che essi occupano nello spazio intuitivo vuoto".²⁷ La fisica, al contrario è una scienza sperimentale che ha per oggetti certi enti concreti; anche la meccanica teorica riguarda sempre i corpi e non soltanto il luogo che essi occupano. La geometria dunque "non è una parte della meccanica, come riteneva il Newton, e non dipende dalla fisica come opinava l'Helmholtz".²⁸ La caratterizzazione della geometria come scienza mista e il rifiuto di considerare la geometria teoretica come una scienza sperimentale alla stregua della fisica e della meccanica allontanano Veronese dalla posizione di Grassmann e di Helmholtz. Grassmann include la geometria tra le scienze sperimentali perché essa ha per oggetto lo spazio e lo spazio non può essere in alcun modo generato dal pensiero ma è sempre un essere dato che gli sta di fronte.²⁹ La teoria dell'estensione, la quale è un sistema generale e astratto che studia le leggi della somma e del prodotto di segmenti orientati, è invece una scienza formale, prioritaria e indipendente rispetto alla geometria. Veronese concede che la geometria sia, in quanto studio dello spazio, una scienza sperimentale

²⁵ "Noi distinguiamo [...] nettamente la geometria dalle sue pratiche applicazioni, e troviamo appunto assiomi che non sono necessari per lo svolgimento scientifico della geometria, mentre lo sono per le sue pratiche applicazioni." FG, p. IX.

²⁶ Cfr. FG, pp. 262, 279, 454.

²⁷ FG, p. IX.

²⁸ GNA, p. 202 (i nomi propri sono in maiuscolo nel testo). Cfr. anche FG, pp. XXXVI (nota 1), 615-617 e VM, p. 15.

²⁹ Grassmann, [1844], p. III. Cfr. anche Flament, [1992], p. 210 e ss.

ma a differenza di Grassmann ritiene che, in quanto teoria di enti puramente ideali, essa possa essere annoverata tra le scienze formali. Le scienze sperimentali, infatti, pur essendo approssimate, tanto più si avvicinano all'esattezza delle scienze formali quanto più adottano assiomi semplici e intuitivi e, sostituendo i propri oggetti con forme astratte, si sottraggono alla dipendenza dall'esperienza.²⁰ Una scienza sperimentale, al limite, può trasformarsi in una scienza esatta, se agli oggetti reali che essa originariamente descrive sostituisce oggetti puramente ideali che mantengano alcune delle proprietà degli oggetti concreti ma perdano le imperfezioni che li caratterizzano. Proprio per questa ragione la geometria, che quanto alla sua genesi è sperimentale, può essere classificata tra le scienze esatte: essa stabilisce le premesse dei propri ragionamenti in base all'osservazione delle proprietà di determinati oggetti concreti ma poi, liberandosi dell'approssimazione sperimentale, sceglie di sostituirli con enti puramente ideali. Ciò che avvicina la geometria alle scienze esatte è proprio la sua capacità di sostituire agli oggetti reali delle forme astratte e di dimostrare le verità intorno ad esse in modo indipendente dalla realtà esterna.²¹ Parte della fisica potrà essere al più la geometria applicata, la quale cerca una costruzione empirica delle verità alle quali conduce la geometria teoretica, ossia cerca degli oggetti concreti che corrispondano agli enti ideali geometrici ed abbiano le stesse proprietà che sono state ricavate per questi ultimi in modo indipendente dall'esperienza. La geometria applicata non costituisce però un banco di prova per la geometria teoretica, la cui validità si fonda sul principio di non contraddizione e non sul successo delle proprie applicazioni pratiche. L'impossibilità di verificare nell'esperienza un'ipotesi che fuoriesce dal campo osservabile è ovvia e "non infirma per nulla le verità già acquisite

²⁰ "Le scienze formali sono per noi esatte, quelle sperimentali sono tanto più esatte quanto più semplici e intuitivi sono gli assiomi propriamente detti sui quali esse si appoggiano e quanto prima esse possono sostituire i loro oggetti mediante forme astratte e svolgersi col metodo deduttivo". Grassmann, [1844], p. III.

²¹ "La scienza sperimentale più esatta è la geometria, perché gli oggetti fuori del pensiero, che servono alla determinazione degli assiomi, vengono sostituiti nella nostra mente da forme astratte, e quindi le verità degli oggetti si dimostrano colla combinazione delle forme già ottenute indipendentemente da ciò che succede fuori." FG, p. IX.

in un campo astrattamente più ampio". Al contrario è possibile che le ipotesi astratte della geometria teorica possano rivelarsi utili nello studio del mondo fisico, come è avvenuto con l'uso di alcuni concetti iperspaziali.²²

Alla geometria teoretica, collocata in una terra di mezzo tra scienze formali e sperimentali, è riservato un ruolo privilegiato: da un lato essa è libera di creare nuovi concetti astratti indipendentemente dalle loro possibili applicazioni pratiche, dall'altro essa formula ipotesi in grado di ampliare la nostra conoscenza del mondo reale. Questo ruolo privilegiato è concesso alla geometria solo a patto di separare la parte teoretica dalle applicazioni pratiche. La classificazione delle premesse (logiche, materiali, empiriche, semiempiriche, astratte, pratiche) fornisce una nuova giustificazione alla distinzione, introdotta in seguito alla scoperta delle geometrie non euclidee, tra geometria pura e geometria applicata. Come vedremo meglio nel prossimo paragrafo analizzando la condizione di possibilità delle premesse semiempiriche e astratte, la riflessione sulle proposizioni primitive conduce Veronese a cogliere la specificità della geometria nei confronti della matematica. L'analisi delle premesse e degli enti di cui esse descrivono le proprietà conferisce alla geometria una posizione a sé all'interno della classificazione delle scienze: essa è distinta dalla fisica, dalla meccanica, dalle applicazioni pratiche allo spazio fisico, dalla matematica stessa.

3.2 LA FORMA ASSIOMATICA

Una teoria assiomatica, così come noi oggi la intendiamo, si fonda su alcuni concetti primitivi non definiti (considerati come entità astratte, senza riferimento al loro significato) e su

²² "[...] le ipotesi astratte possibili che allargano il campo della geometria possono servire alla ricerca del vero nel campo concreto più ristretto". FG, p. XII. Si veda anche ciò che ha scritto Aldo Brigaglia in proposito: "Penso che Veronese abbia in questo contesto in mente l'uso che la geometria ha fatto ormai da lungo tempo di elementi ideali (il punto all'infinito, il punto immaginario), che senza ambire ad uno status di verità empirica si sono rivelati strumenti fondamentali per risolvere concreti problemi della geometria 'reale'. E certamente egli ha in mente l'uso dei concetti iperspaziali fatto da Cayley e Plücker, [...]". Brigaglia, [1994], p. 242.

proposizioni primitive non dimostrate all'interno della teoria stessa (considerate come né vere né false, ossia indipendentemente dal loro valore di verità). Negli *Elementi* di Euclide al contrario i concetti primitivi hanno un significato determinato in virtù del quale sono stati scelti come enti fondamentali della teoria; le proposizioni primitive sono vere in base alla loro evidenza e proprio perciò sono assunte senza dimostrazione. La concezione di Veronese, come mostreremo commentando le condizioni di possibilità matematica e geometrica imposte alle ipotesi di una teoria nelle "Osservazioni sui principii della geometria" e nella Prefazione ai *Fondamenti di geometria*, non è assimilabile a nessuna di queste due posizioni ma costituisce un momento importante nel processo storico che ha condotto dalla assiomatica euclidea a quella moderna. Distinguendosi da Peano e dalla sua scuola Veronese individua nella forma assiomatica uno strumento per la creazione e la giustificazione della possibilità di nuove teorie piuttosto che per la riformulazione rigorosa di teorie già esistenti: il suo contributo più rilevante consiste nell'applicazione delle nozioni d'indipendenza e di non contraddittorietà alla costruzione di nuove teorie (geometrie iperspaziale e non archimedea). Nonostante quest'elemento radicalmente innovativo Veronese è lontano dalla concezione della geometria come sistema ipotetico-deduttivo. Le premesse empiriche sono ammesse come verità e non come assunzioni arbitrarie: esse non possono essere modificate né tantomeno sostituite da ipotesi contrarie senza che la teoria perda il nome di geometria. Il ruolo rilevante assegnato all'intuizione nella determinazione della possibilità delle ipotesi geometriche e l'introduzione di osservazioni empiriche come definizioni nominali dei concetti primitivi non sono frutto di un ingenuo retaggio euclideo ma strumenti per la determinazione della specificità della geometria rispetto alla matematica.

3.2.1 Possibilità e indipendenza delle ipotesi

Nelle scienze formali la possibilità delle ipotesi è determinata dal principio di non contraddizione. In particolare, un'ipotesi matematica è possibile (vale a dire può essere assunta tra le proposizioni primitive della teoria) quando non contiene contraddizioni al suo interno né contraddice le regole logiche, le altre premesse o qualcuna delle conseguenze che ne derivano:

Quand'è che un'ipotesi matematica è possibile? Nel campo matematico è possibile la definizione, il postulato o l'ipotesi ben determinata, i cui termini non si contraddicono fra loro e non contraddicono ai principi, alle operazioni logiche e alle ipotesi già stabilite, e alle verità che da esse derivano.³³

La non contraddittorietà è una condizione sufficiente di possibilità per le ipotesi matematiche ben determinate, a ciascuna delle quali corrisponde un solo concetto.³⁴ La richiesta dell'univocità semantica evita l'ambiguità del linguaggio comune, il quale contiene termini che possono avere più significati sia in uno stesso contesto sia in contesti differenti. Nello stesso passo dei *Fondamenti* Veronese aggiunge però che le ipotesi devono anche essere tra loro indipendenti (un'ipotesi A è logicamente indipendente da un'altra ipotesi B quando da B non si deducono A o la sua contraria $\neg A$).³⁵

Una nuova forma, o una proprietà di una forma stabilita per mezzo di un'ipotesi, non deve essere unicamente dipendente dalle verità già premesse, perché in questo caso o è conseguenza immediata di quelle verità, o non è tale, ed allora deve essere dedotta dalle premesse.³⁶

L'indipendenza è una condizione necessaria per differenziare i postulati dai teoremi: i primi non sono dimostrabili all'interno del sistema, mentre i secondi sono dedotti come conseguenza logica dai primi. In un articolo del 1894 l'indipendenza dalle altre premesse è esplicitamente citata tra le condizioni necessarie perché una proposizione sia assunta come ipotesi in una teoria matematica:³⁷ se un postulato è indipendente dagli altri, è possibile sostituirlo con un altro anch'esso "possibile coi rimanenti" e analizzare "il sistema di proprietà che ne derivano".³⁸ Più che per eliminare le premesse superflue riducendo le ipotesi al minor numero necessario (preoccupazione assai viva nei lavo-

³³ FG, p. IX [corsivo nel testo].

³⁴ "Ben determinata vuol dire che corrisponde ad un solo concetto, senza cioè che vi sia dubbio sul suo significato". FG, p. IX.

³⁵ "Un'ipotesi [A] è indipendente da un'altra ipotesi B quando A o la sua contraria (non-A) non si deduce da B." FG, p. X.

³⁶ FG, p. IX.

³⁷ "Per postulato intendosi astrattamente parlando una proposizione logicamente possibile e indimostrabile colle premesse." OPG, p. 195.

³⁸ OPG, p. 196.

ri di Peano e della sua scuola), l'indipendenza permette di stabilire se l'aggiunta di una certa ipotesi ad una teoria sia possibile o implichi contraddizione. Se ad un insieme coerente di postulati aggiungiamo un postulato indipendente dai primi, esso "non conduce necessariamente a contraddizioni" ma conserva la coerenza del sistema.³⁹ Se si prova l'indipendenza di una certa ipotesi dalle altre premesse di una certa teoria, allora è possibile negare o sostituire tale ipotesi con un'altra senza contraddire alle restanti premesse. Proprio secondo questo procedimento Veronese costruisce la geometria non archimedeica: dopo aver dimostrato che il principio di Archimede è indipendente da quello di continuità, sostituisce al primo la sua negazione ed ottiene un nuovo insieme coerente di postulati.

Il valore delle ricerche di Veronese sull'indipendenza tra le premesse di una teoria risiede principalmente nelle finalità alle quali esse sono rivolte: la costruzione e la giustificazione logica di nuove teorie piuttosto che la formulazione assiomatica definitiva delle geometrie già esistenti. Benché le riflessioni di Veronese non siano comparabili con i risultati di Hilbert, sussiste a nostro parere una finalità comune nell'applicazione della dimostrazione di indipendenza per stabilire la possibilità di nuove teorie. L'intuizione di Veronese è valida soprattutto a livello metodologico ed epistemologico: mentre la presentazione assiomatica della geometria fornita nei *Fondamenti* non ha avuto seguito, l'idea di costruire nuove teorie attraverso lo studio dell'indipendenza delle ipotesi si è rivelata particolarmente feconda. Lo studio delle relazioni di dipendenza tra le premesse era in quegli stessi anni ben più sviluppato nella scuola di Peano, ove era finalizzato alla ricerca del minor numero possibile di assiomi e di concetti primitivi necessari per la presentazione assiomatica della geometria. Se si ammette che tra i motivi che hanno determinato il successo della scuola tedesca di Hilbert a scapito della scuola italiana nel raggiungimento di una compiuta assiomatizzazione della geometria vi sia stata anche la diversa finalità delle riflessioni fondazionali, in un caso applicate alla valutazione della possibilità di nuove teorie e nell'altro alla rigorizzazione di teorie esistenti, ben si

³⁹ "Un'ipotesi indipendente dalle precedenti, e in sé non contraddittoria, non conduce necessariamente a contraddizioni." FG, p. X. [corsivo mio].

comprendono l'originalità e la forza dell'intuizione di Veronese, che egli però non seppe sviluppare fino in fondo. Anche le ricerche sulla non contraddittorietà delle premesse hanno al più un valore epistemologico perché non si sono incarnate in risultati concreti. Veronese, infatti, non fornisce una dimostrazione di coerenza per la geometria non archimedeica nel suo complesso (è Levi-Civita a dimostrare la possibilità del continuo non archimedeo costruendone un modello),⁴⁰ però ritiene che una tale dimostrazione sia indispensabile. La coerenza delle ipotesi non può essere giustificata solo con l'esperienza diretta o mediante l'induzione della verità, perché

se un'ipotesi anche dopo una lunga serie di ricerche non ha condotto ad alcuna contraddizione, si ha l'induzione della possibilità ma non la certezza che essa non possa condurre con ulteriori sviluppi a qualche contraddizione.⁴¹

Benché l'esistenza di un modello o di una rappresentazione concreta assicuri talvolta, come nel caso della geometria, la non contraddittorietà delle premesse, occorre tuttavia fare il massimo sforzo per accertare in anticipo la non contraddittorietà dei postulati:

[...] Ma veramente non si deve essere contenti finché non si è data una dimostrazione per via puramente logica. [...] e quando non la si può dare, è bene fare dei tentativi, che ad altri possono servire in ulteriori ricerche.⁴²

Meno avanzata è la posizione di Veronese per quanto riguarda la geometria, perché egli ritiene che sia sempre possibile esibire un modello reale che soddisfi almeno agli assiomi empirici:

⁴⁰ Cfr. il § 2.5.

⁴¹ PG, pp. X-XI. È interessante osservare che Hugo Bergmann cita nel 1909 queste parole di Veronese per mostrare la correlazione tra l'esigenza bolzaniana di rigore e le tendenze contemporanee della matematica. Scrive infatti Bolzano: noi "non possiamo credere, poiché una verità appare già per sé evidente, di non essere tenuti a fornirle di una sua propria dimostrazione, anche se in altro modo è supposta una ragione per la quale la cosa si comporta proprio così." Cfr. "Versuch einer objectiven Begründung der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte". Abh. D. k. Böhm. Ges. D. Wiss. V. 2 (1842), cit. in Bergmann. [1909], pp. 162-63.

⁴² PG, pp. X-XI.

Se manca una dimostrazione che giustifichi l'ipotesi, basta poterla giustificare con l'esperienza diretta, come avviene ad es. per gli assiomi geometrici; appunto per l'armonia che abbiamo detto esiste fra la percezione degli oggetti e le leggi logiche del pensiero stesso.⁴³

La coerenza del nucleo empirico della geometria può essere dimostrata attraverso l'individuazione di un modello reale (la parte osservabile dello spazio conosciuta per intuizione) che soddisfa alle condizioni espresse dai postulati. Mentre le premesse empiriche sono giustificate dall'evidenza empirica, le premesse semiempiriche e le premesse astratte sono giustificate soltanto in base al principio di non contraddizione rispetto alle premesse precedenti: condizione di possibilità geometrica è dunque l'accordo con le proprietà intuitive dello spazio contenute nelle premesse empiriche.

Per i caratteri che distinguono la geometria, un'ipotesi astratta è *geometricamente possibile* quando essa non contraddice agli assiomi necessari allo svolgimento teorico della geometria, che prendiamo dall'esperienza, ossia alle proprietà dell'intuizione spaziale nel campo limitato di essa, corrispondente a quello delle nostre osservazioni esterne.⁴⁴

La geometria, in quanto scienza sperimentale che ha per oggetto lo spazio, si fonda su delle verità che s'intuiscono in modo immediato insieme alla percezione degli oggetti esterni, ossia su degli *assiomi* che descrivono le proprietà intuitive dello spazio osservabile. Come si è visto nel § 3.1, la geometria si fonda anche su premesse semiempiriche e astratte, le quali possono essere accettate come verità geometriche fondamentali se, oltre a non contraddire ai principi e alle operazioni logiche, non sono in contraddizione con le proprietà dello spazio, o meglio con le proprietà della rappresentazione mentale che noi abbiamo di esso. Le ipotesi geometriche non sono libere creazioni del pensiero ma proposizioni volte, almeno originariamente, alla descrizione della realtà esterna e delle rappresentazioni spaziali intuitive che si sono formate in noi a partire dall'osservazione empirica degli oggetti concreti.

⁴³ FG, pp. X-XI.

⁴⁴ FG, p. XI-XII [corsivo mio].

La scelta delle premesse di una teoria geometrica non è convenzionale: "da una pura combinazione di segni o di oggetti senza un'idea direttiva nulla si può ricavare".⁴⁵ Una teoria astratta che contraddica agli assiomi empirici non può essere chiamata *geometria*. Ad esempio Veronese rifiuta il nome di geometria alla teoria dell'iparboloido ad una falda di Poincaré o alla teoria non arguesiana di Hilbert, fondate rispettivamente sulla negazione dell'ipotesi euclidea che una retta coincida con se stessa dopo una rotazione reale di 180° attorno ad uno dei suoi punti e sulla negazione del teorema di Desargues.⁴⁶ Tra le geometrie possibili Veronese include invece la geometria non euclidea, la geometria iperspaziale, la geometria non archimedea, perché in queste "i dati dedotti dall'esperienza sono mantenuti".⁴⁷

Dopo aver chiarito le condizioni di possibilità delle ipotesi (non contraddittorietà, indipendenza, conformità all'intuizione spaziale), Veronese aggiunge alcuni suggerimenti metodologici. Per presentare la geometria in forma assiomatica occorre innanzitutto separare i postulati geometrici dagli assiomi logici e dalle verità da essi derivabili per mezzo di sole operazioni logiche. Questa condizione esclude dall'ambito geometrico una serie di proposizioni comuni ad altre scienze, come ad esempio la proprietà di due grandezze uguali ad una terza di essere uguali tra loro,⁴⁸ proposizione che deriva dall'assioma logico d'identità. In questo modo Veronese riduce il numero degli assiomi ed enuncia chiaramente le operazioni e i principi logici che stanno a fondamento del processo dimostrativo. In secondo luogo occorre escludere gli assiomi necessari soltanto per le applicazioni pratiche, quali l'ipotesi delle paral-

⁴⁵ FG, p. XI.

⁴⁶ FG, p. XIII, 599. Il teorema di Desargues afferma che se abbiamo due triangoli tali che le rette che congiungono vertici corrispondenti passano per un punto O, allora i lati corrispondenti s'intersecano in tre punti che stanno su una retta. Cfr. Poincaré, [1887], p. 82; Hilbert, [1899], p. 89 e GNA₂, p. 202, nota 1. Altre proposizioni geometricamente impossibili sono, per Veronese, l'ipotesi che il cerchio non sia una linea chiusa, quella che il cerchio abbia asintoti reali, quella, infine, che la linea più semplice (la retta) sia determinata da tre punti indipendenti anziché da due.

⁴⁷ GNA₁, p. 351.

⁴⁸ Si tratta della proprietà transitiva dell'uguaglianza, espressa da Euclide nella prima delle nozioni comuni. Cfr. Euclide, [1970], p. 73.

lele, quella delle tre dimensioni dello spazio e quella del libero movimento dei corpi rigidi.⁴⁹ Gli assiomi devono essere semplici e dati subito all'inizio "in modo da lasciar campo ai diversi possibili sistemi geometrici".⁵⁰ La semplicità degli assiomi rende più agevole l'indagine di un'eventuale dipendenza reciproca e agevola la valutazione della possibilità di costruire nuovi sistemi geometrici mediante la negazione di un postulato indipendente dagli altri. L'ordine di presentazione degli assiomi non è irrilevante: occorre evitare di introdurre una proprietà dimostrata soltanto in seguito o di utilizzare un concetto non ancora definito. Questa richiesta di chiarezza e di ordine nell'esposizione permette di eliminare le petizioni di principio e di evitare che nelle dimostrazioni siano tacitamente introdotte ipotesi non dimostrate o concetti non definiti. Il metodo di trattazione deve essere elementare e basato sul processo costruttivo dell'intuizione spaziale, ossia deve essere sintetico anziché analitico. Nel quarto capitolo vedremo quali sono le proprietà di questo metodo e i risultati della sua applicazione alla geometria.

3.2.2 Intuizione e formalismo

Elemento essenziale dell'assiomatizzazione di una teoria geometrica è per Veronese la formulazione rigorosa di definizioni, postulati, teoremi e dimostrazioni. La comprensione dei postulati non può presupporre la conoscenza del significato intuitivo dei concetti primitivi che in essi occorrono né la validità delle dimostrazioni può essere fondata sul significato di

⁴⁹ Veronese caratterizza la geometria elementare per mezzo dei seguenti assiomi: I. Esistono punti distinti. Tutti i punti sono identici. II. Esiste un sistema di punti ad una dimensione e identico nella posizione delle sue parti determinato da due dei suoi punti e continuo. Questo si chiama linea retta o retta. II₆. Esistono punti fuori della retta. Ogni punto che non appartiene alla retta determina con ogni punto di essa un'altra retta. III. Se due rette qualunque hanno un punto in comune A, ad un segmento (AB) dell'una è identico un segmento (A'B') dell'altra. IV. Se un lato di un triangolo qualunque diventa indefinitamente piccolo, la differenza degli altri due lati diventa pure indefinitamente piccola. V. Se in due coppie di raggi qualunque AB, AC, A'B', A'C', scelte due coppie di punti B e C, B' e C' tali che: (AB) = (A'B'); (AC) = (A'C'), il segmento (BC) sia identico a (B'C'), le due coppie di rette sono identiche. La geometria euclidea è ottenuta con l'aggiunta dei tre assiomi pratici citati nel testo.

⁵⁰ FG, p. XVI.

certi concetti non definiti o essere ottenuta per mezzo di proposizioni non dimostrate. Tutti i concetti che occorrono nelle dimostrazioni devono essere primitivi o definiti a partire dai concetti primitivi; tutte le proposizioni devono essere postulati o teoremi. Condizione per la fondazione della geometria come scienza rigorosa è, infatti,

"[...] che gli assiomi, i teoremi e le dimostrazioni fin da principio non contengano alcun elemento indeterminato, in modo cioè che facendo astrazione dall'intuizione, dal sistema geometrico rimanga un sistema di verità puramente astratte, nel quale gli assiomi occupino il posto di definizioni o ipotesi astratte ben determinate."⁵¹

La geometria è una scienza deduttiva solo se i suoi assiomi svolgono il ruolo di definizioni e se astraendo dall'intuizione che attribuisce ai termini il consueto significato geometrico essa diviene un sistema deduttivo coerente di verità astratte. Una formulazione chiara di queste idee si trova già in Pasch: un procedimento dimostrativo rigoroso esclude il ricorso a nozioni o proprietà che non siano state esplicitate come concetti o proposizioni primitive della teoria. Una deduzione valida non presuppone né il significato geometrico dei termini né il riferimento ad una figura.

Se la geometria deve essere veramente deduttiva, occorre in effetti che la deduzione sia ovunque indipendente dal significato [Sinn] dei concetti geometrici, così come deve essere indipendente dalle figure; possono essere considerate solo le relazioni poste nelle proposizioni e nelle definizioni utilizzate.⁵²

Benché i concetti primitivi abbiano un significato empirico, tale significato non deve svolgere alcun ruolo necessario nello svolgimento della dimostrazione. Se la dimostrazione si fonda sul ricorso all'intuizione, è probabile che l'elenco di proposizioni assunte come primitive sia insufficiente.⁵³ Pasch non

⁵¹ FG, p. XVI.

⁵² Pasch, [1884], p. 90. Per un'interpretazione dell'opera di Pasch si veda Freudenthal, [1957], p. 110 e ss. Cf. anche Contro, [1975-76], pp. 283-295.

⁵³ "A dire il vero, durante la deduzione è ammissibile e utile, ma in nessun modo necessario, pensare al significato dei concetti geometrici che vi compaiono; così che, non appena ciò diventa necessario, ne deriva la lacunosità della deduzione e in certi casi perfino l'insufficienza delle proposizioni premesse come strumenti

considera gli enti primitivi come entità astratte prive di significato. I concetti primitivi hanno un significato sensibile ed empirico, che è necessario esplicitare formalmente e in modo esaustivo nelle premesse. Solo così è possibile evitare il ricorso all'intuizione per determinare il significato di termini non definiti:

le proposizioni nucleari devono comprendere il materiale dell'esperienza sul quale la matematica lavora in modo così completo che, una volta che esse siano state stabilite, non occorra più ritornare alle percezioni sensibili.⁵⁴

La geometria non è, per Pasch, una scienza puramente astratta: considerare il significato fisico dei termini che compaiono nelle proposizioni è legittimo, purché ciò non sia necessario nella deduzione. La geometria è una scienza rigorosa solo se è formulata assiomaticamente, vale a dire se dalle premesse è possibile derivare le conseguenze con semplici operazioni logiche, indipendentemente dal significato delle proposizioni e dagli oggetti che esse descrivono. La dimostrazione è tanto più esatta quanto più indipendente dalla figura particolare presa in esame.⁵⁵ Di parere ben diverso è Felix Klein, che giudica impossibile risolvere un problema geometrico senza tenere continuamente davanti agli occhi la figura cui il problema si riferisce; a meno che non si tratti di geometria analitica, che però, a suo dire, non merita neppure il nome di geometria.⁵⁶ Veronese concorda con Klein per quanto riguarda l'utilità delle figure: "l'uso delle figure tracciate sul foglio del disegno aiuta moltissimo la mente nelle indagini geometriche, e i disegni ed oggetti simili sono necessari per stabilire gli assiomi"⁵⁷ ma ritiene, con Pasch, che la dimostrazione geometrica debba esserne indipendente. Anzi - aggiunge - l'indipendenza dalle figure e dall'intuizione sensibile va estesa anche alla formulazione degli assiomi.⁵⁸

della dimostrazione." Pasch, [1884], p. 90.

⁵⁴ Pasch, [1884], p. 16.

⁵⁵ Cfr. Freudenthal, [1957], p. 115.

⁵⁶ Klein, [1890], p. 381.

⁵⁷ FG, p. 212, nota 2.

⁵⁸ "Egli [Klein] è contrario alle vedute del signor Pasch in quanto riguarda la dimostrazione geometrica, che secondo noi debbono anzi essere estese agli stessi

[...] la deduzione delle proprietà fondamentali, specialmente quando non sono stabiliti ancora tutti gli assiomi bisogna che sia indipendente dalla osservazione o dall'intuizione della figura affine di non introdurre fin da principio concetti non ancora definiti, oppure affine di non ritenere dimostrata una proprietà che sia derivata invece dall'osservazione della figura.⁵⁹

In accordo con Pasch, Veronese ritiene che l'intuizione spaziale debba essere tutta contenuta negli assiomi, senza più intervenire in alcun passo della dimostrazione. Solo così la geometria può essere considerata una scienza rigorosa ed esatta:

[...] per essere esatta la geometria deve rappresentare gli oggetti forniti dall'osservazione per mezzo di forme astratte o mentali e gli assiomi con ipotesi bene determinate, indipendenti cioè dall'intuizione spaziale, cosicché la geometria diventi parte della matematica pura, ossia dell'estensione astratta (*Ausdehnungslehre*), dove il geometra proceda nelle sue costruzioni senza vedere se esse abbiano o no una rappresentazione esteriore, finché non le applichi al mondo fisico, senza per questo che egli abbia ad abbandonare la visione delle figure e tutti i vantaggi che derivano dall'uso dell'intuizione nella ricerca geometrica.⁶⁰

L'adozione di un metodo sintetico e il richiamo costante alle figure nella soluzione dei problemi geometrici non implicano il ricorso all'intuizione nelle dimostrazioni, che devono essere svolte in modo puramente logico: "se l'intuizione è necessaria per l'essenza della geometria, non deve però essere elemento necessario, per quanto utile, nello svolgimento logico della geometria."⁶¹

Un secondo aspetto essenziale dell'assiomatizzazione di una teoria è la determinazione del ruolo delle definizioni. Le definizioni euclidee di punto come ciò che non ha parti e di linea come lunghezza senza larghezza spiegano i concetti di punto e linea mediante i concetti di lunghezza e di larghezza, che non

assiomi, sebbene ci appoggiamo sempre al processo costruttivo dell'intuizione spaziale." FG, p. 586.

⁵⁹ FG, p. 212, corsivo mio.

⁶⁰ GNA₂, p. 201.

⁶¹ FG, p. XVII.

sono più chiari dei precedenti. Le definizioni euclidee di punto e di linea – scrive Pasch nelle *Vorlesungen über die neuere Geometrie* – fanno riferimento a proprietà che non solo non chiariscono i concetti ma sono inutili nello sviluppo deduttivo della teoria:

Quando Euclide negli *Elementi* dice: "il punto è ciò che non ha parti; la linea è lunghezza senza larghezza; la linea retta è quella che giace uniformemente rispetto ai suoi punti", egli chiarisce i concetti citati mediante proprietà che non sono adatte a nessun utilizzo e che, infatti, non sono mai da lui utilizzate nello sviluppo successivo.⁶²

Le definizioni di Euclide non determinano il significato degli enti fondamentali mediante concetti più semplici perché non è chiaro che cosa debba intendersi, ad esempio, per lunghezza senza larghezza. Chi non si sia formato in precedenza la rappresentazione di linea che si crea a partire dall'osservazione di particolari oggetti concreti non può comprendere né apprendere nulla dagli *Elementi* di Euclide. Mediante le definizioni di punto e di retta

il lettore non potrebbe imparare nulla dagli *Elementi*, se non si fosse prima formato una rappresentazione dei concetti geometrici primitivi attraverso ripetute osservazioni; tutt'al più tali affermazioni possono ricordare al lettore la relativa rappresentazione e indurlo a limitarla o completarla conformemente alle richieste scientifiche.⁶³

La definizione euclidea non produce la rappresentazione di una linea ma può evocarla, perché l'espressione "lunghezza senza larghezza" richiama alla mente certi oggetti concreti lunghi e sottili che hanno proprietà simili a quelle del concetto geometrico di linea. La soluzione di Pasch, così come quella di ogni moderna teoria assiomatica formale, riposa su un'idea di definizione come abbreviazione, ossia come determinazione di un nuovo nome per un insieme complesso di termini già noti: ciò comporta la necessità di individuare un gruppo ristretto di termini il cui significato possa essere ritenuto universalmente noto o almeno non ulteriormente defini-

⁶² Pasch, [1884], p. 15.

⁶³ Pasch, [1884], p. 15.

bile, pena il regresso all'infinito delle definizioni. Pasch definisce tutti i concetti geometrici ad eccezione di quelli di punto, segmento rettilineo e superficie piana, che assume come concetti primitivi o "nucleari" [*Kernbegriffe*]. Questi non possono essere a loro volta definiti, perché non esistono concetti più semplici e intuitivi che ne chiariscano il significato, ma possono essere compresi attraverso il rimando ad opportuni oggetti concreti. Veronese ammette l'impossibilità di definire tutte le espressioni di una teoria, eppure introduce nel testo la definizione di punto e di retta. Queste definizioni, in linea con quanto affermato dallo stesso Pasch, non spiegano i concetti primitivi mediante altre nozioni più semplici, bensì mediante il rimando a particolari oggetti concreti: a ciascun concetto primitivo è attribuito un nome che evoca la rappresentazione dell'oggetto concreto dalla cui osservazione ha avuto origine. Ad esempio, attribuendo il nome 'punto' al concetto geometrico di elemento fondamentale con il quale tutti gli altri enti sono costruiti, si ottiene il risultato di richiamare alla mente una serie di oggetti concreti di natura diversa che risvegliano in noi quell'idea: l'estremità di un filo o di una punta sottile, un granello di sabbia, un corpo che si consideri come non scomponibile in parti, un piccolo segno tracciato sul foglio dalla punta di una matita. Alcune definizioni sono precedute da un'osservazione empirica, nella quale Veronese descrive gli oggetti concreti che hanno dato origine alla rappresentazione astratta nominata nella definizione. Le osservazioni empiriche servono appunto "per chiarire il significato delle nozioni comuni, dei postulati e di alcune definizioni";⁶⁴ esse hanno lo scopo di "mettere in evidenza i caratteri [del concetto] necessari allo svolgimento della geometria."⁶⁵ Di un oggetto possiamo avere più rappresentazioni mentali differenti, se diverse sono le note dell'oggetto alle quali prestiamo attenzione.⁶⁶ L'osservazione empirica indica per ciascun oggetto empirico quali contrassegni considerare per ottenere il corrispondente ente geometrico. Il punto geometrico, ad esempio,

⁶⁴ EG, p. VII.

⁶⁵ AEG, p. VI.

⁶⁶ Ogni cosa è peragonata e distinta dalle altre secondo certe note o contrassegni, che la determinano. FG, p. 3.

è una particolare rappresentazione di quello materiale ottenuta facendo astrazione da tutte le note fisiche dell'oggetto ad eccezione della posizione.⁶⁷ La geometria, pur essendo divenuta una teoria matematica astratta, sopravvive come scienza dello spazio grazie alle definizioni: per il tramite delle osservazioni empiriche esse collegano gli oggetti puramente astratti di cui parlano gli assiomi con gli oggetti reali e con le nostre rappresentazioni intuitive di essi. Le definizioni di Veronese servono, come quelle euclidee, a esibire un oggetto che goda delle proprietà espresse dagli assiomi e forniscono una sorta d'interpretazione o modello agli assiomi geometrici empirici.

Se le definizioni hanno un valore nominale, gli assiomi hanno il valore di definizioni o ipotesi astratte che determinano le proprietà degli enti primitivi. Veronese sembra preludere alla concezione hilbertiana degli assiomi intesi come definizioni implicite d'enti puramente astratti e determinati indipendentemente da ogni contenuto. Le prime parole delle *Grundlagen* tagliano però in modo ben più netto il "cordone ombelicale tra geometria e realtà":

Consideriamo tre diversi sistemi di oggetti: chiamiamo *punti* gli oggetti del primo sistema e li indichiamo con A, B, C, \dots ; chiamiamo *rette* gli oggetti del secondo sistema e li indichiamo con a, b, c, \dots ; chiamiamo *piani* gli oggetti del terzo sistema e li indichiamo con $\alpha, \beta, \gamma, \dots$; i punti si chiamano anche gli *elementi della geometria della retta*, i punti e le rette gli *elementi della geometria piana*, i punti, le rette e i piani gli *elementi della geometria solida o dello spazio*.⁶⁸

Hilbert non fa riferimento alcuno alla realtà: il verbo "considerare" nel testo originale è *sich denken*, ossia supporre, immaginare con uno sforzo del pensiero. Egli postula l'esistenza di enti puramente astratti e indipendenti dagli oggetti reali concreti perché prodotti da una libera attività della mente. La natura degli enti considerati non è precisata né dai nomi che sono loro imposti né da un qualunque richiamo all'esperienza a partire dalla quale sarebbero sorti.⁶⁹ Veronese invece, come anche Pasch, stabilisce

⁶⁷ FG, pp. 209-210.

⁶⁸ Hilbert, [1899], p. 3. Cfr. Freudenthal, [1957], p. 111.

⁶⁹ Cfr. l'introduzione di Carlo Felice Manara all'edizione italiana delle *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert: "È evidente che in questa impostazione si rinuncia del

uno stretto legame tra l'intuizione spaziale e i concetti geometrici: questi ultimi sono derivati dall'osservazione e presentati come il risultato dell'analisi del materiale d'esperienza. La geometria è per Veronese la scienza dello spazio: i suoi postulati astratti devono soddisfare alla condizione di non contraddire agli assiomi empirici che formulano le proprietà dell'intuizione spaziale. Egli è ancora distante dalla concezione di Hilbert, per il quale la geometria non ha più un oggetto privilegiato ma è una teoria matematica pura le cui proposizioni possono essere considerate vere per tutti i tipi di enti astrattamente pensabili che soddisfano alle caratteristiche espresse dai postulati.⁷⁰ Veronese dunque si avvicina all'impostazione formale hilbertiana ma se ne distacca ribadendo continuamente l'importanza dell'intuizione: "ogni considerazione geometrica si deve interpretare nel senso che in essa si debba avere sempre la figura dinanzi agli occhi."⁷¹

3.3 L'INTUIZIONE GEOMETRICA DELLO SPAZIO

Veronese è noto per gli studi di geometria proiettiva e iperspaziale. La nozione di spazio geometrico astratto, sulla quale egli fonda la giustificazione della possibilità di geometrie a più dimensioni, può essere compresa soltanto in relazione all'idea di *intuizione spaziale*. Poiché in molti studi ottocenteschi sui fondamenti della geometria lo stesso termine è utilizzato in significati diversi, è opportuno analizzare brevemente il concetto di intuizione utilizzato da Veronese, segnalando anche due autori, Helmholtz e Klein, ai quali egli fa riferimento.

3.3.1 L'intuizione

Intuizione empirica è per Kant l'apprensione immediata e diret-

tutto a precisare la natura delle cose che si prendono in considerazione; o meglio ancora, si rinuncia a precisare tale natura all'inizio del discorso: essa viene precisata, ma non univocamente, dagli assiomi che vengono enunciati e non dai nomi che vengono dati alle cose né da un richiamo alla esperienza od alla realtà esteriore". Hilbert, [1899], p. XII.

⁷⁰ È nota l'affermazione di Hilbert secondo la quale "si deve essere in grado di dire ogni volta. Invece di "punti, rette e piani", "tavoli, sedie e boccali di birra". Hilbert, [1935], p. 403.

⁷¹ FG, p. 612.

ta degli oggetti che percepiamo con i sensi senza la mediazione della conoscenza discorsiva.⁷² Chiameremo *immediata* questa intuizione sensibile kantiana: essa concerne sempre un oggetto particolare, la rappresentazione del quale viene a coscienza contemporaneamente alla percezione dell'oggetto come qualcosa di semplicemente dato, senza deliberazione o sforzo da parte del soggetto.⁷³ Chi accetta questa definizione di intuizione ammette la percettibilità immediata come condizione dell'intuibilità di un oggetto. Gli enti geometrici astratti non sono immediatamente percepibili: non percepiamo una linea inestesa, ma solo aste rigide sottili o segni tracciati da una matita su un foglio, vale a dire oggetti che oltre alla lunghezza hanno un'estensione. Secondo la definizione d'intuizione proposta non è dunque possibile intuire né gli oggetti geometrici né le loro proprietà descritte negli assiomi.

Helmholtz affronta il problema proponendo un criterio d'intuibilità diverso dalla percettibilità immediata: un oggetto è intuibile se noi siamo in grado di formulare e specificare in modo non ambiguo le impressioni sensoriali che la presenza di quell'oggetto determinerebbe nei nostri organi di senso.⁷⁴ In questo modo l'intuibilità è estesa anche agli oggetti non osservabili, ma sorge il problema di come determinare la serie di impressioni sensoriali che un tale oggetto produrrebbe in noi: a guidarci è il concetto di tale oggetto.⁷⁵ Chiameremo *mediata* questo tipo di in-

⁷² Kant, [1787], p. 53.

⁷³ Nella *Logik* Kant definisce l'intuizione come "una rappresentazione singola (*repraesentat. singularis*)", mentre il concetto è una "rappresentazione universale (*repraesentat. per notas communes*) o riflessa (*repraesentat. discursiva*)". Parte I, Cap. I, § 1. Kant, [1800], p. 83.

⁷⁴ "Come prova di intuibilità io chiedo solo che si sia in grado di formulare in modo determinato e non ambiguo, per ogni tipo di osservazione, quali impressioni sensoriali essa genera, ricorrendo, se necessario, alla conoscenza scientifica delle leggi (che presiedono alla loro formazione): dalle impressioni sensoriali seguirebbe, almeno per chi conoscesse tali leggi, che l'oggetto in questione, o la relazione da intuire, è effettivamente presente." Helmholtz, [1878], p. 231.

⁷⁵ "Se la serie delle impressioni sensoriali può essere formulata in modo completo e non ambiguo, allora si deve, a mio giudizio, dichiarare che l'oggetto è intuitivamente rappresentabile. Poiché, per presupposizione, si tratta di un oggetto che si pensa non sia mai stato osservato finora, nessun'esperienza precedente può venire in nostro aiuto e guidare la nostra fantasia alla ricerca della serie richiesta di impressioni; al contrario ciò può avvenire soltanto per mezzo del concetto dell'oggetto o della relazione da rappresentare." Helmholtz, [1878], p. 230.

tuizione perché non è un'apprensione diretta di un oggetto, ma è mediata da un concetto al quale dobbiamo ricorrere per poterci rappresentare l'oggetto. Tale è per Helmholtz l'intuizione *geometrica*.

Anche Klein in uno studio sulle geometrie non euclidee distingue tra un'intuizione concreta che accompagna la percezione degli oggetti reali nell'osservazione empirica e un'intuizione spaziale geometrica che è l'apprensione immediata di certi oggetti ideali, ossia una sorta d'intuizione astratta che, benché inesatta, è essenziale alla trattazione della geometria.⁷⁶ In un successivo articolo Klein distingue l'intuizione geometrica in *ingenua* [naïve] e *raffinata*: la prima è la facoltà propria di ogni adulto normale di formare immagini geometriche secondo un modello fisso. Si tratta di un talento innato che l'esperienza accresce e sviluppa: in particolare le esperienze meccaniche, come ad esempio la manipolazione di corpi solidi, contribuiscono a formare le nostre ordinarie intuizioni metriche, mentre quelle con i raggi di luce e con le ombre spiegano lo sviluppo dell'intuizione proiettiva.⁷⁷ L'intuizione *raffinata*, invece, si sviluppa dalla familiarità con gli oggetti ideali, propri della geometria, ottenuti mediante idealizzazione dei dati intuitivi stessi: essa non sarebbe propriamente neppure un'intuizione, dato che gli enti geometrici ideali, in quanto esatti, non sono percepibili dai nostri sensi approssimati e imprecisi.⁷⁸

⁷⁶ "Nel mio studio sul concetto generale di funzione, [...], ho chiarito dettagliatamente (e in ciò sono d'accordo con il signor Pasch) che io considero l'intuizione spaziale come qualcosa di essenzialmente inesatto - sia che si parli dell'intuizione astratta, che è divenuta usuale attraverso l'abitudine, sia che si parli dell'intuizione concreta, che si è fatta valere nelle osservazioni empiriche." Klein, [1890], p. 381. Lo studio al quale Klein fa riferimento è "Über den allgemeinen Functionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve", *Mathematische Annalen*, 22 (1883), pp. 249-259, rist. in Klein [1921-23], II, pp. 214-224.

⁷⁷ Nel saggio "Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria" Federico riprende la classificazione, compiuta da Klein, delle intuizioni in metriche e grafiche, ma vi aggiunge le intuizioni topologiche: "I tre gruppi di rappresentazioni che si legano ai concetti posti a base della teoria del continuo (Analysis situs), della Geometria metrica (o metrica-differenziale) e della proiettiva, si possono rattaccare immediatamente a tre gruppi di sensazioni: rispettivamente alle sensazioni generali tattili-muscolari, a quelle del tatto speciale e della vista." Enriques, [1901], p. 178 [corsivo nel testo].

⁷⁸ Klein, [1893], p. 225 e ss. Cfr. Torretti, [1978], pp. 147-148.

Veronese, come Klein, distingue (benché non esplicitamente) tra intuizione in senso proprio (o empirica) e intuizione geometrica. Il concetto d'intuizione *empirica* compare in un passo dei *Fondamenti* ove si afferma che le scienze sperimentali si fondano su delle conoscenze acquisite intuitivamente insieme alla percezione sensibile,⁷⁹ mentre il concetto d'intuizione *geometrica* emerge da un confronto diretto con le affermazioni di Klein. Nell'Appendice ai *Fondamenti* Veronese afferma:

Sono [...] pienamente d'accordo con Klein quando dice che gli assiomi sono la *domanda* mediante la quale *stabiliamo* delle affermazioni esatte nell'intuizione inesatta. Io mi esprimo invece dicendo che gli assiomi sono il risultato dell'intuizione e dell'astrazione insieme, che così sono formati gli oggetti geometrici, i quali non chiamiamo comunemente astratti ma intuitivi, dando la prevalenza all'intuizione.⁸⁰

Gli oggetti geometrici, benché chiamati comunemente intuitivi, sono enti astratti che non possiamo apprendere in modo immediato attraverso le sensazioni. La facoltà mediante la quale possiamo rappresentarci non è l'intuizione empirica immediata bensì quella *geometrica*, che è intuizione ed astrazione insieme: essa combina l'apprensione degli oggetti sensibili con la capacità di trascurare tutte le loro qualità ad eccezione dell'estensione.⁸¹ Mediante l'intuizione geometrica possiamo intuire enti non percepibili, quali linee senza larghezza e punti senza dimensioni, perché essa combina intuizione sensibile ed astrazione. Con un'intuizione sensibile si intuiscono certi oggetti reali (ad es. aste rigide o fili tesi), poi prescindendo da alcune proprietà si ottiene la rappresentazione degli enti geometrici astratti (le linee inestese della geometria).

⁷⁹ Cfr. FG, p. VIII.

⁸⁰ FG, p. 586. Il brano di Klein al quale Veronese fa riferimento è il seguente: "L'assioma per me è la richiesta, in virtù della quale introduco affermazioni esatte nell'intuizione inesatta." Klein, [1890], p. 381. Gli assiomi, per essere esatti, non possono comprendere soltanto il materiale dell'esperienza, che è inesatto; essi devono formulare in modo esatto "ciò che è dato nell'intuizione o nell'esperimento in modo soltanto approssimativo." *ivi*, p. 382.

⁸¹ "Noi ci assicuriamo della presenza degli oggetti esterni per mezzo dei sensi, e delle qualità delle sensazioni che in noi producono tratteniamo coll'astrazione soltanto quella di estensione per avere le prime forme geometriche." VM, pp. 13-14.

Come per Klein, così per Veronese gli enti geometrici sono ottenuti per astrazione dall'esperienza.⁸² Il concetto geometrico di punto è ottenuto facendo astrazione dalle qualità fisiche di certi oggetti esistenti nel mondo esterno, come ad esempio l'estremità di un filo:

Il concetto dell'elemento fondamentale della scienza di cui vogliamo ora dare i principi, [...] ci viene fornito da oggetti effettivamente esistenti fuori di noi nel mondo esterno, ad es. dall'estremità di un filo [...]. Facendo astrazione dalle sue qualità fisiche, l'estremità del filo, o ciò che segna la separazione di due delle sue parti consecutive, risveglia in noi l'idea di ciò che considereremo quale elemento fondamentale, ossia del punto.⁸³

Anche il concetto geometrico di segmento rettilineo (linea retta limitata) è risvegliato in noi da certi oggetti esterni come un filo teso alle estremità, lo spigolo di un dado, un raggio solare che entri in una camera oscura attraverso un piccolo foro.⁸⁴ Astrarre dalle qualità fisiche di tali oggetti significa tenere conto della sola estensione, ossia considerare non tanto gli oggetti, quanto il luogo che essi occupano nello spazio.⁸⁵ Da strisce sottili si possono ottenere, tenendo conto della sola lunghezza, linee senza larghezza. Tali linee, però, sono necessariamente limitate perché l'intuizione non può uscire dal campo percettivo.

Ma per quanto perfetta sia la nostra intuizione, non intuiamo mai la retta illimitata, bensì la retta sotto forma di oggetto sensibile, sia pure idealizzato dall'astrazione.⁸⁶

⁸² "Ciò che noi nell'intuizione empirica chiamiamo curva è innanzitutto una striscia, cioè una parte di spazio le cui altre dimensioni scompaiono in confronto alla dimensione di lunghezza, [...]. Ma se la curva deve diventare oggetto di una considerazione matematica esatta, dobbiamo idealizzarla proprio come avviene all'inizio della geometria con il punto." Klein, [1897], p. 387. Cfr. i §§ 3.1 e 4.2.

⁸³ FG, p. 210. Si veda anche la fine del § 3.1.1.

⁸⁴ FG, p. 213.

⁸⁵ "Il segmento rettilineo, come il punto, piuttosto che corrispondere al filo teso o allo spigolo di un dado o ad altri oggetti simili, corrisponde al luogo occupato da questi oggetti nello spazio intuitivo." FG, p. 213. Si è visto nel § 3.1.3 che lo studio del luogo dei corpi anziché dei corpi stessi distingue la geometria dalla meccanica.

⁸⁶ VM, pp. 13-14.

Non possiamo, in altre parole, ottenere il concetto di linea illimitata a partire dalle sole sensazioni. L'intuizione empirica è sempre rivolta ad un oggetto particolare e non alla totalità dello spazio, perché la percezione che l'accompagna è per sua natura limitata e non può estendersi oltre lo spazio finito. L'astrazione, combinata con l'osservazione, ci permette di prescindere da certe proprietà dell'oggetto ma non di passare da una successione limitata di sensazioni ad una illimitata. A permettere la rappresentazione dell'illimitato è

una legge mentale di *generalizzazione*, colla quale dai casi particolari, ad es. dall'aggiunta di un'unità ad un dato numero, passiamo al caso generico, vale a dire ad *ogni* numero; ma questa legge di generalizzazione, se è suggerita dall'esperienza, appare però un prodotto proprio del pensiero.⁸⁷

Essa è frutto di una forma *logica* d'intuizione, della quale non si può dire se derivi dai sensi.⁸⁸ La possibilità dell'estensione di un postulato dall'ambiente esterno (nel quale se ne può provare approssimativamente la validità) ad uno spazio illimitato non è garantita, dunque, né dall'intuizione empirica né da quella geometrica. Il postulato euclideo delle parallele, in particolare, non si fonda su di una necessità soggettiva, ma sulla possibilità logica, vale a dire sulla non contraddittorietà, che deve essere dimostrata:

[...] se vogliamo estendere geometricamente il postulato a tutto lo spazio illimitato, non possiamo affidarci ad una necessità intuitiva, non concessa da tutti, come è invece concessa la necessità dei principi della logica; dobbiamo bensì *provare* in qualche modo che tale estensione è possibile logicamente.⁸⁹

Definendo l'intuizione geometrica come il risultato di un processo che coinvolge sia l'intuizione empirica (e dunque l'osservazione) sia l'astrazione, Veronese rifiuta la concezione aprioristica dello spazio:

⁸⁷ VM, pp. 13-14.

⁸⁸ "Si può ammettere anche un'intuizione logica distinta da quella proveniente dai sensi, e per quanto abbiamo detto nel testo sulla legge dell'illimitato, che è una necessità mentale, non possiamo ancora dire se la prima intuizione derivi necessariamente dalla seconda" VM, p. 35, nota 12.

⁸⁹ VM, pp. 35-36, nota 12. Cfr. il paragrafo 3.2.

La nostra intuizione spaziale non è una forma *a priori* trascendentale del nostro spirito, bensì è prodotta dall'osservazione combinata coll'astrazione.⁹⁰

L'intuizione delle relazioni spaziali fra gli oggetti non è, infatti, una qualità innata nell'uomo, ma si sviluppa con l'abitudine e con l'esperienza. I geometri ed i pittori che esercitano quotidianamente l'intuizione geometrica la possiedono in grado più alto:

La intuizione spaziale non è sviluppata allo stesso grado di perfezione in tutti gli uomini, come nei geometri e nei pittori; è noto infatti che persone cieche da giovani, riacquistando la vista, hanno una intuizione imperfetta delle forme più semplici. Essa è, dunque, il prodotto di una lunga esperienza, e se l'adoperiamo senza riflettere, non significa che sia una forma *a priori* dello spirito. [...].⁹¹

L'intuizione spaziale geometrica dipende sia dalla conformazione dei nostri organi di senso (un cieco ha una percezione alterata dei rapporti spaziali) sia dall'uso che facciamo dell'intuizione stessa. Vedremo nei prossimi paragrafi che per Poincaré essa dipende anche dall'ambiente nel quale viviamo.

3.3.2 L'origine delle rappresentazioni spaziali

Per comprendere il significato del ruolo che Veronese attribuisce all'intuizione occorre considerare alcuni tratti della discussione filosofica ottocentesca sulla natura dello spazio geometrico. All'intuizione è infatti legato il concetto di spazio astratto sul quale si fondano sia la legittimità delle geometrie iperspaziale e non archimedea sia la distinzione tra geometria e matematica. Non essendo questo il luogo per una presentazione, sia pur succinta, dei tratti salienti della filosofia dello spazio e della geometria nell'Ottocento, rimandiamo al classico lavoro di Torretti: *Philosophy of geometry from Riemann to Poincaré*. Qui ci limiteremo a brevi cenni alle concezioni di alcuni autori con i quali Veronese si confronta direttamente: Helmholtz, il quale individua un gruppo minimale di assiomi che descri-

⁹⁰ VM, pp. 13-14.

⁹¹ VM, pp. 13-14. Sull'esperimento con i ciechi nati si veda Dufour, *Bulletin de la Société médicale de la Suisse Romande*, 1876, citato anche in Helmholtz, [1878], p. 704.

vano le proprietà a priori dello spazio, e Poincaré, che separa lo spazio geometrico astratto da ogni vincolo intuitivo. Mentre il primo esclude dall'ambito della geometria le teorie iperspaziali, il secondo include anche teorie contrarie all'intuizione. Veronese sviluppa una concezione di spazio geometrico astratto e di spazio intuitivo che estende l'intuibilità alle geometrie iperspaziali con il duplice scopo di legittimare lo studio (contro Helmholtz) e di individuare nell'intuizione un discrimine tra la geometria nel suo complesso e la matematica pura (contro Poincaré). Il fondamento intuitivo che in Kant costituiva un tratto comune a geometria e matematica diventa ora la principale differenza tra le due discipline.

La geometria era per Kant la scienza che determina le proprietà dello spazio e ne fornisce una conoscenza sintetica a priori. Poiché lo spazio è una forma a priori dell'intuizione, ogni conoscenza geometrica, essendo fondata sull'intuizione, ha evidenza immediata.⁹² La scoperta di diverse geometrie alternative coerenti diede origine ad un dibattito filosofico sulla validità e sull'adeguatezza della geometria euclidea nella descrizione della realtà fisica. La geometria euclidea da scienza dello spazio divenne scienza di uno spazio geometrico astratto, applicabile con buona approssimazione alla descrizione dello spazio fisico. In questa distinzione tra spazio fisico e spazio geometrico è contenuto un mutamento concettuale rilevante: la separazione tra mondo reale e descrizione teorica di esso e l'esigenza di giustificare il rapporto privilegiato tra spazio euclideo e spazio fisico. Dapprima la geometria fu considerata una scienza sperimentale avente per fine la descrizione dello spazio fisico: la geometria euclidea era ritenuta la vera scienza dello spazio perché sembrava candidata a una più probabile conferma empirica. Poiché la verità dell'ipotesi euclidea delle parallele non poteva essere determinata a priori mediante una dimostrazione di necessità, si sperava di poterne trovare una conferma speri-

⁹² "Se non che, è pure da considerare che l'uso del concetto, in questa scienza, concerne solamente il mondo sensibile esterno, del quale lo spazio è la forma pura della sua intuizione, in cui perciò ogni conoscenza geometrica, fondandosi nell'intuizione a priori, ha evidenza immediata e gli oggetti (per la forma) sono già dati nell'intuizione, mediante la stessa conoscenza a priori." Kant, [1787], p. 104.

mentale nello studio dei moti celesti.⁹³ La preminenza della geometria euclidea poteva essere salvata non per una necessità logica ma per la sua presunta corrispondenza con la realtà. La conoscenza geometrica dello spazio non era necessaria non era né necessaria (in quanto era il frutto di una generalizzazione empirica)⁹⁴ né suscettibile di una fondazione a priori perché la sua verità dipendeva dalle proprietà dello spazio fisico.⁹⁵ Conseguenza della scoperta delle geometrie non euclidee fu dunque inizialmente la ricerca di una conferma del rapporto privilegiato tra spazio euclideo e spazio fisico.

La scoperta dell'impossibilità di stabilire empiricamente la verità della geometria euclidea e la dimostrazione della coerenza delle metageometrie mediante la costruzione di modelli euclidei da parte di Beltrami e di Klein resero necessarie giustificazioni della validità delle geometrie non euclidee e acuirono l'interesse per le discussioni sul significato del concetto di spazio geometrico astratto. Da un punto di vista filosofico la validità di una teoria geometrica astratta fu posta in relazione con la concordanza rispetto non più allo spazio fisico ma alla nostra rappresentazione intuitiva di esso. Proprio in questo legame tra intuibilità e possibilità astratta è presente il segno dell'eredità kantiana: l'indagine filosofica sulla natura dello spazio era associata allo studio delle nostre facoltà conoscitive e dei nostri organi sensoriali, alle condizioni di possibilità della conoscenza. L'affrancamento della geometria astratta dalla limitatezza dell'esperienza avveniva attraverso

⁹³ È lo stesso Veronese a notare che ormai tutti i geometri (tra cui Gauss e Grassmann) erano concordi nell'ammettere l'origine empirica della geometria, ossia l'impossibilità di fondarla a priori. FG, p. VIII, nota 1. Cfr. anche OPG, pp. 195-216 e VM, p. 17.

⁹⁴ Non solo le proprietà di un oggetto singolare sono estese ad una pluralità illimitata di oggetti, ma le proprietà di un oggetto immerso nello spazio limitato sono estese allo stesso oggetto immaginato immerso in uno spazio illimitato. La generalizzazione è dunque duplice: dal singolare all'universale e dal limitato all'illimitato.

⁹⁵ Cfr. Lettera a Bessel del 9 aprile 1830, in Gauss, [1900], VIII, p. 201, cit. in FG, p. VIII, nota 1: "Dobbiamo umilmente concedere che se il numero è un semplice prodotto del nostro spirito lo spazio ha anche una realtà al di fuori del nostro spirito e di tale realtà noi non possiamo descrivere le leggi a priori, non completamente." [corsivo mio]. Si veda anche Lettera a Bessel del 27 gennaio 1829, in Gauss, [1900], p. 200, cit. in FG, p. VIII, nota 1: "La mia convinzione che noi non possiamo fondare la geometria completamente a priori è divenuta, se possibile, ancora più salda."

l'accordo con l'intuizione: si imponeva una scissione tra spazio intuitivo – che corrisponde allo spazio kantiano, del quale ha perso la necessità ma non la rappresentabilità geometrica – e spazio fisico. Lo spazio reale poteva avere un'unica descrizione assolutamente vera, mentre lo spazio intuitivo era descritto adeguatamente sia dalla geometria euclidea sia da quella iperbolica sia da quella riemanniana. Poiché tutto ciò che noi sappiamo degli oggetti collocati nello spazio esterno proviene dalle sensazioni e dall'intuizione che le accompagna, la nostra conoscenza non arriverà mai a decidere quale rappresentazione geometrica è più adeguata alla realtà, dato che tutte concordano con la nostra intuizione dello spazio. Questa posizione, sostenuta in particolare da Helmholtz, da un lato assumeva l'esistenza di uno spazio rappresentativo come condizione imprescindibile della nostra conoscenza (simile alla forma trascendentale kantiana), dall'altro rifiutava di ammettere l'apriorità delle sue determinazioni garantendo la possibilità di una descrizione plurivoca dello stesso e ricorrendo all'esperienza per garantire la probabile veridicità della caratterizzazione euclidea.⁶⁶ Per sostenere la distinzione tra una forma dello spazio conosciuta a priori mediante l'intuizione e le proprietà euclidee della stessa apprese invece a posteriori, Helmholtz distingueva lo spazio *rappresentativo* o *intuitivo* dallo spazio geometrico. Lo spazio rappresentativo è unico ed è la condizione della possibilità dell'esperienza mentre lo spazio geometrico è una descrizione astratta del primo. Poiché sono possibili descrizioni diverse dello spazio rappresentativo, tutte logicamente coerenti, lo spazio geometrico non è unico, ma vi sono spazi geometrici differenti: lo spazio euclideo, lo spazio riemanniano, lo spazio iperbolico. Le tre teorie sono tutte compatibili con la nostra intuizione dello spazio perché possiamo rappresentarci un corpo immerso in uno spazio non euclideo.⁶⁷ La scelta della geometria di Euclide come migliore

⁶⁶ "[...] la domanda se gli assiomi della geometria siano proposizioni trascendentali o empiriche [...] deve essere del tutto separata da quella [...] se lo spazio sia in generale una forma trascendentale dell'intuizione oppure no. [...] dal fatto che lo spazio sia una forma dell'intuizione non segue assolutamente nulla riguardo ai fatti espressi dagli assiomi." Helmholtz, [1878], pp. 700-701.

⁶⁷ Helmholtz propone l'esempio del nostro mondo ordinario riflesso attraverso l'immagine di uno specchio convesso. Helmholtz, [1870], pp. 24-25.

rappresentazione dello spazio fisico dipende, in ultima analisi, dalle leggi della meccanica perché gli assiomi geometrici descrivono non solo certe relazioni dello spazio ma anche il comportamento meccanico dei corpi rigidi nel movimento.⁶⁸

L'affermazione dell'esistenza di uno spazio intuitivo adeguatamente descritto dalle tre geometrie euclidea, iperbolica e riemanniana comporta un duplice vantaggio dal punto di vista filosofico: individua un possibile oggetto delle metageometrie e spiega in modo plausibile perché la verità della geometria euclidea non sia dimostrabile a priori. La possibilità di uno spazio geometrico astratto è però ancora dipendente dall'accordo con l'intuizione. L'operazione di affrancamento del concetto astratto di spazio geometrico dall'intuizione euclidea non giunge ancora a compimento nell'opera di Helmholtz: la tridimensionalità resta una caratteristica essenziale dello spazio rappresentativo perché si ritiene che a causa della propria struttura corporea l'uomo sia incapace di rappresentarsi una quarta dimensione. Poiché lo spazio geometrico è una descrizione dello spazio rappresentativo, non ha senso parlare di uno spazio a quattro dimensioni che non potremmo rappresentarci: non solo non potremmo mai averne esperienza diretta, ma neppure potremmo immaginare la sequenza di impressioni sensoriali che esso produrrebbe in noi. Se da un lato Helmholtz prospetta la possibilità di spazi geometrici alternativi sganciando l'intuibilità delle teorie astratte dalla loro realtà fisica concreta, dall'altro limita il numero di tali spazi ricorrendo ad alcune condizioni, come la tridimensionalità, tratte dalla consuetudine con l'intuizione euclidea. Mentre nega l'esistenza di un'unica interpretazione astratta dello spazio fisico, Helmholtz resta kantiano nel rifiuto di concepire uno spazio che trascenda completamente l'esperienza: non ha senso costruire una geometria a quattro dimensioni perché lo spazio geometrico deve essere una descrizione dello spazio intuitivo e quest'ultimo non può che avere tre dimensioni. Il superamento della posizione di Helmholtz e di conseguenza l'accettazione della geometria iperspaziale può avvenire in

⁶⁸ "Gli assiomi geometrici non parlano soltanto delle relazioni dello spazio, ma contemporaneamente anche del comportamento meccanico dei nostri corpi rigidi nei movimenti." H. Helmholtz, [1870], p. 29.

due modi: scindendo lo spazio intuitivo tridimensionale dallo spazio geometrico astratto o affrancando l'intuizione dal limite fisico della tridimensionalità.

Poincaré si avventura per la prima strada individuando alcune differenze essenziali tra spazio geometrico e spazio rappresentativo. Lo spazio geometrico è continuo, infinito, tridimensionale, omogeneo (cioè tale che tutti i suoi punti siano identici fra loro) e isotropo (non c'è una direzione privilegiata). Lo spazio rappresentativo, invece, è "il quadro delle nostre rappresentazioni e delle nostre sensazioni", la cornice nella quale sono localizzate le immagini che noi abbiamo degli oggetti esterni.⁹⁹ Poiché rende possibile la formazione delle immagini degli oggetti esterni, lo spazio rappresentativo è una condizione di possibilità dell'esperienza ma anche un prodotto dell'esperienza, perché non dipende solo dalla struttura dei nostri organi di senso bensì anche dall'ambiente esterno nel quale viviamo. Lo spazio rappresentativo non è omogeneo né isotropo né tridimensionale; esso ha una triplice forma: visiva, tattile e motrice. Lo spazio visivo puro è il quadro all'interno del quale sono localizzate le impressioni puramente visive dovute "ad un'immagine che si forma sul fondo della retina": esso non è omogeneo perché i punti sull'orlo e quelli al centro della retina non concorrono allo stesso modo nella formazione delle immagini visive di un oggetto. Lo spazio motorio è il quadro corrispondente alle sensazioni muscolari che accompagnano tutti i nostri movimenti, dall'associazione delle quali si forma "l'immagine della direzione"; lo spazio motorio non è isotropo, perché in esso è possibile distinguere la destra dalla sinistra, l'alto dal basso e dunque vi è una direzione privilegiata. Le leggi che regolano l'associazione delle sensazioni muscolari sono il risultato di un'abitudine:

se l'educazione dei nostri sensi si fosse compiuta in un ambiente diverso dove avessimo subito impressioni differenti, sarebbero, senza dubbio, nate abitudini contrarie e le nostre sensazioni muscolari si sarebbero associate secondo altre leggi.¹⁰⁰

In particolare la tridimensionalità generalmente attribuita al

⁹⁹ Poincaré, [1902a], pp. 96-97.

¹⁰⁰ Poincaré, [1902a], p. 99.

nostro spazio rappresentativo è "anche un fatto d'esperienza esterna", ossia non dipende soltanto dalla struttura dei nostri organi sensoriali, ma anche dal tipo di mondo esterno nel quale siamo collocati, ossia da una sorta di adattamento all'ambiente circostante che tali organi sviluppano.¹⁰¹ Poincaré mostra chiaramente che lo spazio geometrico è un'astrazione che non conserva fedelmente le proprietà dello spazio rappresentativo. Se non descrive più né lo spazio fisico né lo spazio rappresentativo, la geometria perde ogni legame con il suo oggetto originario: lo spazio. Per geometria occorre allora intendere qualunque teoria matematica non contraddittoria che stabilisca delle relazioni spaziali tra gli enti.¹⁰²

Veronese evita queste conclusioni assumendo una diversa distinzione tra spazio fisico, intuitivo e geometrico, possibile in virtù della definizione di intuizione spaziale geometrica come combinazione di intuizione ed astrazione. La posizione di Veronese è più vicina a Helmholtz che a Poincaré, perché come il primo mantiene l'idea che lo spazio geometrico costituisca una possibile descrizione di quello intuitivo. L'errore di Helmholtz consisterebbe nell'aver attribuito allo spazio intuitivo tutte le caratteristiche della descrizione euclidea dello spazio fisico ad eccezione della proprietà espressa nel postulato delle parallele. In Veronese lo spazio fisico tridimensionale si distingue invece nettamente dallo spazio intuitivo, che al pari di quello geometrico non ha un numero definito di dimensioni. Il fondamento della legittimità degli iperspazi è ricondotto alla determinazione di un concetto astratto di intuizione spaziale distinto da quello di intuizione empirica proprio della geometria euclidea. La distinzione tra spazio fisico, intuitivo e geometrico assume nell'opera di Veronese un nuovo significato: essa non serve più soltanto a rendere conto della differenza fra l'unicità dello spazio rappresentativo e la molteplicità degli spazi geometrici astratti (inclusi gli iperspazi) ma anche a spiegare la ragione della separazione tra geometria teoretica e geometria pratica o applicata (la prima ha per oggetto lo spazio geometrico, la seconda ha per oggetto lo spazio fisico) e la

¹⁰¹ Poincaré, [1902a], p. 98. Si veda anche Magnani, [1991], pp. 185-222.

¹⁰² Si vedano ad es. la geometria dell'iperboloide ad una falda di Poincaré e le critiche di Veronese cui si è fatto cenno nel § 3.2.1.

conseguente individuazione di un gruppo di postulati necessario alla trattazione della seconda ma non della prima.¹⁰³ Nel primo libro dei *Fondamenti* Veronese introduce lo spazio intuitivo come ciò che contiene i corpi che noi percepiamo nella sensazione, come l'ambiente esterno nel quale localizziamo i corpi percepiti, assegnando a ciascuno di essi un certo 'posto':

Alla presenza dei corpi fuori di noi, che ci appaiono per mezzo dei sensi, specialmente per mezzo della vista e del tatto, è collegata l'idea di ciò che li contiene, e si chiama ambiente esterno o spazio intuitivo, nel quale i corpi occupano ciascuno un determinato posto o luogo.¹⁰⁴

Nel discorso inaugurale del 1905¹⁰⁵ e nella relazione letta al IV Congresso internazionale dei Matematici tenutosi a Roma nel 1908, compare anche una chiara distinzione tra spazio intuitivo e spazio fisico,¹⁰⁶ del quale il primo sarebbe una 'rappresentazione idealizzata':

[...] bisogna distinguere lo spazio fisico dallo spazio intuitivo, che è una rappresentazione idealizzata del primo, ed è un'intuizione, e lo spazio intuitivo dallo spazio geometrico astratto, che è un concetto.¹⁰⁷

Lo spazio fisico non è definito: con tale espressione Veronese intende l'ambiente che contiene i corpi fisici reali, esistenti fuori di noi e dunque l'oggetto della nostra conoscenza fisica, considerato indipendentemente dalla nostra percezione di esso. Lo spazio intuitivo, 'rappresentazione idealizzata' dello spazio

¹⁰³ "La distinzione dello spazio fisico dallo spazio geometrico porta con sé dei postulati che sono necessari soltanto per le pratiche applicazioni della geometria, come quello approssimativo del movimento dei corpi rigidi, quello delle tre dimensioni, quello pure d'ARCHIMEDE, mentre vi sono postulati dello spazio geometrico, come quelli dello spazio generale, del continuo non-archimedeo, che non abbiamo bisogno di ammettere per lo spazio fisico." GNA_v, p. 202 [corsivo nel testo].

¹⁰⁴ GNA_v, p. 210.

¹⁰⁵ VM, pp. 14-15.

¹⁰⁶ Un'analoga distinzione si trova in Enriques: "Veramente occorre qui una distinzione critica, fra: lo spazio fisico (supposto conforme alla tesi realistica nella teoria della conoscenza) di cui la geometria può esser nota soltanto in via approssimata; la rappresentazione sensibile, alquanto approssimativa anch'essa, che ci forniamo dello spazio, o meglio le rappresentazioni spaziali; il concetto o i concetti che cadono sotto l'intuizione geometrica del matematico." Enriques, [1901], p. 172.

¹⁰⁷ GNA_v, p. 202.

fisico, è l'ambiente che contiene le rappresentazioni dei corpi che abbiamo percepito nella sensazione. Esso è un'intuizione che accompagna sempre la percezione sensibile e ne dipende. Lo spazio geometrico è astratto e, a differenza degli altri due, può essere definito perché è un concetto, un prodotto della mente dell'uomo indipendente dalle sensazioni.¹⁰⁸ Esso è

[...] quella parte dell'estensione pura nella quale è rappresentato lo spazio intuitivo, ma che a sua volta non ha per tutte le sue forme una rappresentazione effettiva neppure approssimativa, e non è necessario la abbia nello spazio fisico o intuitivo.¹⁰⁹

Lo spazio geometrico nasce per astrazione da quello intuitivo ma non contiene soltanto enti ottenuti dall'osservazione empirica dei corpi che percepiamo nella sensazione. Esso non contiene gli oggetti fisici reali né le loro rappresentazioni sensibili bensì degli enti puramente astratti. Lo spazio geometrico è definito come un sistema di punti tale che per ogni figura costruibile vi sia almeno un punto fuori di essa. Poiché data una figura a n dimensioni, è sempre possibile costruirla una a $n+1$ dimensioni, lo spazio geometrico non è necessariamente tridimensionale ma ha un numero indeterminato di dimensioni.

Lo spazio generale è dato da un sistema di punti tale che, data o costruita una figura qualunque vi è almeno un altro punto fuori di essa; le cui proprietà non dimostrabili derivano in parte dall'osservazione esterna e in parte da principi astratti che non contraddicono alle prime; e le figure, finché il punto conserva il suo primitivo significato sono sempre accompagnate dall'intuizione spaziale.¹¹⁰

Lo spazio geometrico può avere un numero qualunque di dimensioni perché è distinto dallo spazio fisico tridimensionale. La distinzione tra spazio fisico e geometrico si riflette nella trattazione dell'ordinaria geometria elementare. Nei *Fondamenti* lo spazio geometrico a tre dimensioni non è determinato come adeguata descrizione dello spazio fisico ma è co-

¹⁰⁸ "E mentre lo spazio fisico e quello intuitivo non possono essere definiti, può essere invece definito lo spazio geometrico" VM, pp. 14-15.

¹⁰⁹ GNA_v, p. 202 [corsivo nel testo].

¹¹⁰ FG, p. 211.

struito come caso particolare di una forma geometrica astratta: lo spazio generale ad un numero indeterminato di dimensioni.¹¹¹ Lo spazio intuitivo non ha un numero di dimensioni predefinito: ad esso corrisponde lo spazio geometrico generale che ha un numero indeterminato di dimensioni. Come lo spazio intuitivo che ci formiamo ad immagine dello spazio fisico è indeterminato, così è indeterminato lo spazio geometrico astratto che costruiamo ad immagine dello spazio intuitivo o per descrivere adeguatamente lo spazio intuitivo. Lo spazio geometrico mantiene certe caratteristiche dell'intuizione che non possiamo abbandonare: ad esempio l'idea che un segmento di retta sia determinato da due suoi punti o che un cerchio sia determinato da tre. Come estendiamo allo spazio tridimensionale le proprietà reciproche di due enti immersi in uno spazio a due dimensioni, così richiediamo che i postulati dello spazio tridimensionale continuino a valere in uno spazio a quattro dimensioni. Proprio perché nasce da una combinazione di intuizione empirica (limitata alle tre dimensioni) e di intuizione astratta, lo spazio geometrico non può mai negare le proprietà che intuitivamente attribuiamo agli oggetti immersi in uno spazio tridimensionale. L'accordo con l'intuizione spaziale è la caratteristica che distingue la geometria dalle altre teorie matematiche.

3.3.3 L'intuizione di una quarta dimensione

La costruzione di modelli euclidei della geometria iperbolica e di quella ellittica fornì una prima rappresentazione intuitiva degli spazi non euclidei. Di più difficile soluzione fu il caso della geometria iperspaziale, sia perché vi era chi considerava la tridimensionalità una condizione imprescindibile della nostra intuizione, sia perché l'idea di una quarta dimensione appariva o come un puro trastullo logico o come una fantasmatica legata allo spiritismo. A proposito delle vivaci polemiche suscitate dal termine "spazio a più di tre dimensioni", Ve-

¹¹¹ Cfr. Palatini, [1904], p. 149: "[...] mentre secondo il metodo tradizionale si considera lo spazio geometrico a tre dimensioni come una forma data dallo spazio fisico, invece secondo il metodo del Veronese esso è una forma geometricamente costruita e le cui proprietà dipendono appunto dalla sua costruzione e non coincidono di necessità con quelle dello spazio fisico."

ronese riporta un'affermazione di Lotze:

[...] chiamare ancora spazio un sistema di quattro o cinque dimensioni è un trastullo logico. Bisogna guardarsi da tutti i tentativi del genere; sono smorfie della scienza che intimidiscono la coscienza comune con paradossi del tutto inutili e la illudono oltre il suo diritto nella delimitazione del concetto.¹¹²

Secondo Helmholtz, che ritorna più volte su questo problema, è possibile intuire le geometrie non euclidee,¹¹³ anche se ciò avviene con un certo sforzo da parte del soggetto e in un modo molto diverso da quello nel quale intuivamo la geometria ordinaria. Un oggetto è intuibile quando sappiamo formulare e specificare in modo non ambiguo le impressioni sensoriali che la presenza di quell'oggetto determinerebbe nei nostri organi di senso. La rappresentazione degli spazi non euclidei è possibile perché sappiamo ricavare dalle leggi che regolano la percezione la serie di impressioni sensoriali che produrrebbe in noi un mondo pseudosferico o sferico, qualora esistesse.¹¹⁴ L'obiezione che la rappresentazione di tali spazi, richiedendo un certo esercizio nella comprensione di metodi analitici, costruzioni prospettiche e fenomeni ottici, comporterebbe necessariamente deliberazione e sforzo, svanisce qualora si pensi che i bambini apprendono spontaneamente una cosa così complessa come il linguaggio.¹¹⁵ Diverso è invece il caso delle tre dimensioni dello spazio, perché l'uomo a causa della sua particolare struttura corporea è incapace di rappresentarsi la serie di impressioni sensoriali che una figura a quattro dimensioni produrrebbe in lui:

Poiché tutti i nostri mezzi dell'intuizione sensibile si estendono solo fino a uno spazio di tre dimensioni e poiché la quarta dimensione non sarebbe un semplice mutamento di qualcosa di già dato, bensì qualcosa di completamente nuovo, così ci troviamo, se non altro a causa della nostra organizzazione corporea, nell'assoluta impossibilità di rappresentarci un modo di

¹¹² Lotze, *Logik*, cit. in FG, p. 614.

¹¹³ Per geometrie non euclidee intenderemo nel seguito la geometria ellittica e quella iperbolica, distinguendole dalle geometrie iperspaziali o geometrie a più di tre dimensioni, benché anche queste siano non euclidee.

¹¹⁴ Helmholtz, [1870], p. 28.

¹¹⁵ Helmholtz, [1878], p. 702.

intuire una quarta dimensione.¹¹⁶

Poincaré non concorda con Helmholtz su questo punto perché ritiene che la tridimensionalità dello spazio rappresentativo sia un fatto contingente; se noi vivessimo in un ambiente esterno differente, avremmo anche una struttura percettiva diversa con la quale potremmo forse rappresentarci un mondo a quattro dimensioni:

Degli esseri la cui intelligenza fosse fatta come la nostra e che avessero gli stessi nostri sensi, ma che non avessero ricevuto alcuna educazione preliminare, potrebbero ricevere da un mondo esterno, convenientemente scelto, delle impressioni tali da essere indotti a costruire una geometria diversa da quella di Euclide ed a localizzare i fenomeni di questo mondo esterno in uno spazio non euclideo o persino in uno spazio a quattro dimensioni.¹¹⁷

Adirittura anche un essere umano che da sempre vive in un mondo come il nostro potrebbe arrivare, con molto esercizio, ad immaginare una quarta dimensione.¹¹⁸ Noi ci rappresentiamo un corpo esterno tridimensionale attraverso l'associazione di varie prospettive dell'oggetto prese da punti di vista differenti e corrispondenti alle immagini dipinte sulla retina. Le leggi secondo le quali associamo tali prospettive e le sensazioni muscolari che ad esse si accompagnano formano un gruppo con la stessa struttura di quello dei movimenti solidi invariabili, dal quale deriva la struttura tridimensionale dello spazio geometrico. La quarta dimensione potrebbe, allora, essere rappresentata attraverso la proiezione in uno spazio tridimensionale, che a sua volta può essere proiettato su di un piano bidimensionale quale quello costituito dalla nostra retina. Come si può fare la prospettiva di una figura a tre dimensioni in un piano, così si può fare, nello stesso piano, anche quella di una figura a quattro dimensioni: possiamo dunque immaginare di derivare dalle leggi secondo le quali associamo

¹¹⁶ Helmholtz, [1870], p. 28. Anche Frege nei *Grundgesetze der Arithmetik* ribadisce che la teoria di uno spazio a quattro dimensioni "abbandona completamente il terreno dell'intuizione". Frege, [1884], p. 241.

¹¹⁷ Poincaré, [1902a], p. 96.

¹¹⁸ "Qualcuno che vi dedicasse la sua esistenza potrebbe forse giungere a rappresentarsi la quarta dimensione." Poincaré, [1902a], p. 96.

le varie prospettive e le sensazioni muscolari concomitanti un gruppo con la stessa struttura del gruppo dei movimenti di un solido invariabile a quattro dimensioni, ossia uno spazio quadridimensionale.¹¹⁹

Veronese crede nella possibilità di intuire lo spazio a quattro dimensioni senza con ciò intendere che esso esista materialmente. Per capire la sua posizione occorre innanzitutto introdurre la definizione di spazio a quattro dimensioni che si trova nel terzo libro dei *Fondamenti di geometria*:

Sia dato uno spazio a tre dimensioni S_3 e un punto S_0 fuori di esso, o in altre parole che non appartenga ad S_3 . Congiungendo tutti i punti dello spazio S_3 col punto S_0 , le rette che così si ottengono, considerate quali elementi, determinano una figura, che chiameremo *stella di seconda specie*, di cui S_0 è il *centro*, S_3 lo *spazio direttore*. [...] Se nella stella di 2ª specie si considera il punto come elemento, la figura risultante è a quattro dimensioni rispetto al punto, quale elemento. Chiameremo questa figura *spazio a quattro dimensioni*.¹²⁰

Tale definizione non è puramente analitica ma rimanda al concetto intuitivo di spazio: gli oggetti di cui si parla sono quelli della geometria ordinaria (punti e figure) e non enti astratti di natura qualsiasi o varietà numeriche alle quali non corrisponde alcunché d'immaginabile. Nell'Appendice ai *Fondamenti* Veronese afferma, infatti, che la propria definizione di spazio a n dimensioni (S_n) si distingue da altre definizioni, date ad esempio da Cauchy o da Riemann, perché in esso:

il punto non è né un sistema di numeri, né un oggetto di natura qualsiasi, ma il punto tale e quale ce lo immaginiamo nello spazio ordinario; e gli oggetti composti di punti sono oggetti (figure) a cui applichiamo continuamente l'intuizione spaziale combinata coll'astrazione, e quindi il metodo sintetico.¹²¹

Per Veronese, come per Segre e Bertini, i punti, le rette e i piani di uno spazio a n dimensioni sono "vere entità geometriche e non meri attributi di entità analitiche".¹²² Veronese ragiona

¹¹⁹ Poincaré, [1902a], pp. 108-109.

¹²⁰ FG, p. 457 e ss.

¹²¹ FG, p. 610.

¹²² Manara-Spoglianti, [1977], p. 111.

sugli iperspazi come se esistessero realmente, rifiutandosi di considerarli "ombre di una banale finzione di linguaggio".¹²³ È proprio per questa sua fede nell'esistenza astratta di tali concetti, egli cerca di attribuire un significato plausibile all'idea di intuizione iperspaziale.¹²⁴ Per rendere più intuitiva la costruzione dello spazio quadridimensionale Veronese, consapevole che qualcosa di analogo si trova già in Helmholtz,¹²⁵ propone l'esempio di un essere ipotetico a due dimensioni:

Immaginiamo che nel piano, esista un ente ragionevole a due dimensioni, il cui mondo non sia che il piano e che colla sua esperienza possa provare soltanto l'esistenza della parte del piano in cui esso può eseguire le sue osservazioni. Per immaginarci meglio questo essere ipotetico, figuriamoci la nostra ombra sopra un piano; ad ogni nostro movimento corrisponde un movimento di essa, e se noi facciamo astrazione dalla nostra persona, ci pare che quell'ombra sia un ente che abbia vita e si muova nel piano.¹²⁶

Immaginando la nostra ombra che prende vita e dotandola di sensi in modo che possa percepire solo una parte limitata del piano in cui si trova (come noi percepiamo soltanto una porzione finita dello spazio in cui viviamo), scopriremo che essa non può osservare certe verità che riguardano il rapporto fra retta e piano nello spazio, così come noi non siamo in grado di provare con l'osservazione certe verità che riguardano i rapporti tra una retta e il nostro spazio tridimensionale. La nostra ombra, però, "potrà colla sua ragione immaginarsi che fuori del piano esista un punto" e giungere alla rappresentazione dello spazio tridimensionale proprio come noi siamo giunti ad immaginare quello a quattro dimensioni.¹²⁷ Se ora noi "ci mettiamo al posto" della nostra ombra, o meglio dell'ipotetico

¹²³ Manara-Spoglianti, [1977], p. 111.

¹²⁴ "È con questa fede soltanto che a poco a poco si forma una sorta di intuizione iperspaziale e ci si pone il problema del significato logico che questa intuizione può avere, significato dal principio un po' vago, ma di cui gradatamente si riesce a costruire il fondamento razionale." Manara-Spoglianti, [1977], p. 111.

¹²⁵ Helmholtz, [1876]. Un esempio simile è ripreso in Poincaré, [1902a], p. 96. Si veda anche Beltrami, [1868].

¹²⁶ FG, p. 457.

¹²⁷ FG, p. 458. La possibilità che fuori del piano della nostra ombra o fuori dello spazio a tre dimensioni esista un punto si fonda sulla legge della continuità del pensiero.

essere ragionevole a due dimensioni, "possiamo logicamente supporre che fuori del nostro spazio vi sia un altro punto" e ricavare "l'esistenza ideale dello spazio a quattro dimensioni, in cui è compreso lo spazio ordinario".¹²⁸ Veronese afferma l'esistenza ideale dello spazio quadridimensionale senza compromettersi in alcun modo con la sua esistenza materiale per timore di essere confuso con gli spiritisti ed i medium.

Quali geometri noi non abbiamo dunque nulla di comune cogli spiritisti e coll'abilità dei *medium*. Quando persone anche illustri assicurano che certi fenomeni spiritisti avvengono, dubitiamo della loro verità di fatto per il modo misterioso con cui sono condotte le osservazioni, com'è ad es. dei nodi e del tavolo descritti dal prof. Zöllner, [...che egli stesso] ebbe la cortesia di farci vedere a Lipsia.¹²⁹

L'ipotesi dell'esistenza materiale dello spazio a quattro dimensioni, sostenuta da Zöllner, è un'ipotesi metafisica: essa sarebbe giustificata, "se fisicamente [...] potesse servire a gettare nuova luce sui fenomeni naturali e sulle loro cause sconosciute".¹³⁰

L'esempio di un essere ipotetico a due dimensioni è ampiamente sviluppato in un celebre racconto, pubblicato anonimo nel 1882, del reverendo inglese Edwin A. Abbott: *Flatland. A Romance of many dimensions*. L'autore descrive un mondo a due dimensioni nel quale gli esseri viventi, anch'essi bidimensionali, possono vedere soltanto punti e linee, ma sono in grado, grazie alla diversa luminosità delle parti e con l'aiuto del senso del tatto, di congetturare con la ragione l'esistenza delle superfici. Egli immagina che uno di questi esseri (un quadra-

¹²⁸ FG, p. 458.

¹²⁹ FG, p. XII, nota 1. L'esperimento del nodo costituiva, secondo l'astrofisico Zöllner, una prova sperimentale dell'esistenza di una quarta dimensione. Secondo un teorema dimostrato da Klein, un particolare nodo che non può essere sciolto in uno spazio tridimensionale avrebbe potuto essere sciolto in uno spazio a quattro dimensioni. Zöllner chiese a Slade, un famoso spiritista americano, di sciogliere il nodo servendosi della quarta dimensione e credette al successo dell'esperimento. Nel commento alla traduzione inglese di "La geometria non-Archimedea" di G. Veronese (in Ehrlich, [1994], p. 187), Philip Ehrlich precisa che l'intento di Zöllner andava ben oltre l'interesse per gli esperimenti di spiritismo: egli si proponeva di studiare gli spazi quadridimensionali per spiegare l'azione gravitazionale newtoniana a distanza.

¹³⁰ FG, p. 609 e. p. XII, nota 1.

to) trasportato nel nostro mondo a tre dimensioni [Spaceland] veda effettivamente le superfici e, proprio come noi, impari a dedurre attraverso giochi prospettici di luce ed ombra l'esistenza dei solidi; per analogia egli suppone che il quadrato, trasportato in un mondo superiore nel quale sia possibile vedere le figure solide, imparerebbe a dedurre una quarta dimensione. Anche Veronese affronta il problema della rappresentabilità della quarta dimensione per mostrare in che senso sia possibile far uso dell'intuizione spaziale quando ci si occupa di uno spazio a più di tre dimensioni. Se l'intuizione è combinata con l'osservazione sensibile e se una figura a quattro dimensioni non può essere osservata o percepita in alcun modo, come è possibile intuirlo? Se riusciamo a vedere la proiezione di una figura a tre dimensioni in uno spazio a due dimensioni, possiamo immaginarci in modo analogo la proiezione di una figura a quattro dimensioni in uno spazio a tre dimensioni. Già nella prefazione alla memoria "Sulla Geometria descrittiva a quattro dimensioni" del 1882 Veronese aveva concepito la possibilità di rappresentare (con il metodo per proiezioni e sezioni caratteristico della geometria proiettiva) un corpo a quattro dimensioni in uno spazio a tre dimensioni, proprio come "la geometria descrittiva ordinaria insegna a rappresentare un corpo a tre dimensioni sopra un piano (foglio del disegno)".¹²¹ Il metodo per proiezioni e sezioni – aggiungeva Veronese – è utile per sviluppare nei giovani matematici la potenza intuitiva dello spazio perché insieme all'abilità nel disegnare e modellare sviluppa anche la capacità di percepire le forme spaziali. L'intuizione geometrica è, infatti, il frutto di una capacità innata della nostra mente ma può affinarsi e svilupparsi con l'abitudine: se anche, non essendo avvezzi a rappresentarci gli oggetti in uno spazio a più di tre dimensioni, non riusciamo a vedere gli oggetti immersi in esso, possiamo imparare a farlo con l'esercizio e l'abitudine.

4. I FONDAMENTI

A differenza di Cantor e di altri matematici contemporanei Veronese non ricerca una legittimazione delle proprie teorie matematiche nella filosofia perché la discussione della verità matematica è una questione inerente alla matematica stessa: in quanto scienza assolutamente vera e non semplicemente probabile, la matematica non deve cercare altro che in se stessa la garanzia della propria verità. Alla filosofia della matematica è tuttavia assegnato un ruolo preciso: l'indagine dei fondamenti sotto l'aspetto più propriamente filosofico (che comprende la genesi dei concetti matematici), la determinazione del linguaggio e del metodo per l'indagine dei fondamenti, l'analisi del concetto di verità di una teoria, la riflessione sulla natura della matematica e dei suoi oggetti.

4.1 MATEMATICA E FILOSOFIA

Il problema dei fondamenti è situato in un ambito comune a filosofia e matematica. L'indagine dei principi primi di una teoria comprende infatti due aspetti distinti: a) l'esplicitazione dei concetti primitivi, la formulazione rigorosa di tutte le proposizioni e la dimostrazione dell'indipendenza e della non contraddittorietà delle premesse; b) la ricerca della genesi dei concetti e dei principi della scienza e la determinazione della natura degli enti matematici. La gnoseologia o teoria della conoscenza ha un ambito di applicazione comune alla matematica perché studia l'origine dei postulati delle teorie e analizza la formazione dei concetti di numero, di grandezza, di infinito ma "le ricerche matematiche sui principi della scienza sono bene distinte e devono tenersi distinte, da quelle filoso-

¹²¹ GD, pp. 987-988.

fiche intorno alla genesi delle idee matematiche".¹ Questa distinzione tra problema filosofico e problema matematico dei fondamenti rispecchia tra l'altro una precisa situazione storica: Poincaré ed Enriques svilupparono un interesse prevalente per la genesi delle teorie mentre Pasch, Peano, Pieri, Hilbert si dedicarono soprattutto allo studio delle proprietà formali e metateoriche delle teorie geometriche.² Il problema della verità e dell'esistenza degli enti geometrici è per Veronese esclusivamente matematico mentre la riflessione sulla natura empirica o puramente intellettuale delle nozioni matematiche appartiene alla gnoseologia. La matematica comprende concetti e operazioni mentali che non derivano semplicemente dalle sensazioni: è compito della gnoseologia ricercarne l'origine. La legge del pensiero mediante la quale passiamo dal limitato all'illimitato è ad esempio un principio necessario allo sviluppo della scienza del quale il matematico ignora la natura: l'indagine di tale legge è affidata alla gnoseologia:

Possiamo evitare la questione della genesi dell'illimitato e dell'infinito con opportune definizioni o convenzioni, per stabilirne con sicurezza i concetti, per quanto occorra al matematico, benché così non si risolva, la questione della conoscenza. [...] Una risposta esauriente non la conosco, né oserei darla io.³

L'indagine sull'origine dell'illimitato e dell'infinitamente grande e piccolo non compete alla matematica ma alla teoria della conoscenza. Alla gnoseologia è affidato il compito di scoprire se la legge con la quale costruiamo gli enti matematici che sfuggono all'osservazione sia una proprietà del pensiero o se e in che misura essa dipenda dall'esperienza. È infatti dallo studio dell'infinito matematico e dell'induzione che emerge la legge mentale di generalizzazione che ci guida nel passaggio dal limitato all'illimitato. Se il matematico indaga la natu-

¹ GNA, p. 204 (corsivo nel testo).

² Cfr. Speranza, [1991], p. 446. La ricerca epistemologica può andare in due direzioni: studiare le origini della geometria (ad esempio la genesi dall'esperienza sensibile) oppure mirare alla giustificazione della forma ultima nella quale la geometria si è sviluppata (ad esempio mediante una chiarificazione dei postulati della geometria).

³ VM, p. 12. Cfr. anche VM, pp. 31-32, nota 3.

ra della conoscenza matematica, le motivazioni della sua ricerca sono differenti da quelle del filosofo: mentre quest'ultimo ha per scopo la ricerca di una spiegazione generale della facoltà conoscitiva dell'uomo, il matematico ha per scopo la formulazione assiomatica di una teoria.

Veronese separa i campi di indagine delle due discipline perché la verità di una teoria matematica che dipenda dalla legittimità di una concezione filosofica può essere coinvolta insieme a quest'ultima in dispute senza fine.⁴ Un'altra ragione per separare ricerche matematiche e filosofiche è il rischio di un'azione vincolante della metafisica nei confronti dello sviluppo della matematica. Idee predominanti in una data epoca hanno talvolta ritardato il sorgere di nuove teorie, come è accaduto con la scoperta della geometria euclidea o dell'esistenza di numeri transfiniti. Saccheri, pur avendo individuato le conseguenze della negazione del postulato delle parallele, non arrivò a concepire la possibilità di una geometria non euclidea; Gerdil avrebbe forse scoperto prima di Cantor l'esistenza di un numero transfinito se tutti i suoi sforzi non fossero stati indirizzati alla confutazione dell'eternità dell'universo.⁵ Poiché le ricerche che introducono concetti nuovi estendono i confini della scienza e ne determinano il progresso, i matematici non dovrebbero esitare a introdurre idee nuove anche se contrastanti con la concezione filosofica o scientifica dominante. Le critiche dei filosofi – continua Veronese – spesso nascondono soltanto il timore di una confutazione, perché le scoperte matematiche, feconde di sviluppi filosofici, danno adito a nuove interpretazioni del mondo.

E ad oscurare la luce nascente delle nuove verità matematiche si aggiunsero quei filosofi che, fermi nei principi matematici già da essi conosciuti, vedevano o credevano di vedere nelle

⁴ "Se il problema matematico sui fondamenti della matematica e della geometria si spinge fino alla soglia del problema filosofico intorno all'origine delle idee matematiche e geometriche, però non la oltrepassa. Questo è certo un gran bene per la nostra scienza, perché altrimenti essa sarebbe in balia nei suoi principi delle molteplici opinioni filosofiche che si disputano la verità." FG, p. XIII.

⁵ VM, pp. 18-19. Altra teoria del cardinale Gerdil si è fatto riferimento nel § 2.3.3. I testi di Gerdil sono citati da Cantor ([1885], p. 370-1), che coglie in essi l'origine dell'interesse di Cauchy per le speculazioni sull'infinito attuale nelle *Sept leçons de physique générale*, Paris, Gauthier-Villars, 1868.

nuove idee un attentato alla loro ipotesi sulla conoscenza e sulla interpretazione della Natura, mentre da un nuovo ordinamento dei principi suggeriti e rinvigoriti da fatti nuovi, non solo può trarre profitto la matematica, ma la stessa filosofia.⁶

Esempi di matematici privi di autonomia rispetto alla metafisica sono per Veronese Gauss e Cantor. Il primo si lasciò intimorire dalle "strida dei beoti" e non pubblicò i suoi studi sul postulato delle parallele che avrebbero anticipato la scoperta delle geometrie non euclidee.⁷ Il secondo osò introdurre l'infinito attuale ma non senza avvertire la necessità di disculparsi per aver introdotto un concetto che la tradizione filosofica della scienza moderna aveva bandito come contraddittorio: Cantor affermò di essere stato condotto contro la propria volontà a concepire l'infinitamente grande e addusse a giustificazione l'impossibilità di sviluppare la teoria degli insiemi senza estendere il concetto di numero.⁸ L'atteggiamento di Cantor è contraddittorio: nonostante la rivendicazione della libertà matematica da ogni vincolo metafisico⁹ Cantor avverte la necessità di ricorrere a considerazioni filosofiche per dimostrare la plausi-

⁶ GNA₃, pp. 204-205.

⁷ Cfr. Gauss, Lettera a Bessel del 27 gennaio 1829, in Gauss, [1900], VIII, p. 200: "Prattanto ancora per lungo tempo non arriverò certo a rielaborare oltre le mie ben ampie ricerche per renderle pubbliche, e forse questo non avverrà mai finché sono in vita, perché temo le strida dei beoti..."

⁸ "Io sono arrivato quasi contro la mia volontà all'idea che l'infinitamente grande non vada pensato solo nella forma del crescente oltre ogni limite o in quella, strettamente connessa alla prima e introdotta nel Seicento, di successione infinita convergente, ma vada anche fissato matematicamente, mediante numeri, nella forma precisa dell'infinito-compiuto; questa idea, infatti, è in contrasto con tradizioni filosofiche che mi erano care. [...] Quando parlo di tradizioni non le intendo solo nel senso ristretto della mia esperienza personale, ma le riferisco agli stessi fondatori della filosofia e della scienza naturale moderna." Cantor, [1883], p. 89. Cantor si riferisce ad alcuni passi di Locke, Descartes, Spinoza, Leibniz. E ancora: "Io mi trovo a dipendere da questa estensione del concetto di numero a tal punto, che senza di essa mi sarebbe pressoché impossibile portare avanti liberamente, anche del più piccolo passo, la teoria degli insiemi; spero che questa circostanza possa essere considerata una giustificazione, o se necessario una disculpa, per il fatto di introdurre nelle mie riflessioni idee in apparenza non pertinenti." Cantor, [1883], p. 78.

⁹ "Trovo invece che ogni limitazione non necessaria dell'impulso matematico alla ricerca porti con sé un pericolo molto maggiore, tanto più che non se ne può ricavare giustificazione alcuna dall'essenza della disciplina: l'essenza della matematica, infatti, sta proprio nella sua libertà. [...] la matematica ha il diritto di muoversi in piena libertà e senza alcun vincolo metafisico [...]." Cantor, [1883], p. 99.

bilità dell'infinito attuale e giustificare l'introduzione dei suoi numeri transfiniti. Per Veronese, invece, il matematico non deve soggiacere ai pregiudizi metafisici della sua epoca né ricorrere ad argomentazioni filosofiche a sostegno della sua teoria. Sarà piuttosto la filosofia a dover "accettare le nuove idee matematiche quando esse sieno formate definitivamente" e a riconoscerne la verità.¹⁰ In particolare il matematico può e deve rifiutare le concezioni filosofiche che non si conciliano con il libero sviluppo della sua scienza: ad esempio tutti i sistemi che negano l'infinito attuale o l'idealità degli enti geometrici.¹¹ Il matematico, dopo aver costruito gli enti della sua teoria e stabilito i postulati fondamentali che li definiscono, analizza e rigetta "quelle ipotesi e deduzioni filosofiche che contrastano con le sue premesse e colle loro conseguenze".¹² L'empirismo estremo di Pasch, ad esempio, è rifiutato sia perché afferma la natura fisica e concreta degli enti geometrici sia perché non ammette il principio dell'illimitato, ossia la legge che permette di passare da una successione limitata ad una illimitata di oggetti (è il principio che fonda l'induzione completa). Poiché il principio dell'illimitato è essenziale allo sviluppo della matematica (e anche della geometria, che senza di esso si ridurrebbe ad una semplice teoria sperimentale come quella che si insegna ai bambini), il matematico rifiuterà su questa base tutte le teorie filosofiche che ne escludono la possibilità:

Non si può ricondurre tutta la geometria al puro empirismo, riguardando cioè quali oggetti di essa i corpi dello spazio fisico con le loro imperfezioni, se deve essere una scienza deduttiva,

¹⁰ GNA₃, p. 205.

¹¹ L'argomento della massima libertà della matematica è usato ancora oggi per giustificare alcune scelte epistemologiche, e non solo dai platonisti. Un esempio interessante si trova in un passo di Mario Bunge, il quale, giustificando l'adesione al finzionismo [fictionism] in nome della libertà della matematica, ripropone una concezione del rapporto tra filosofia e matematica simile a quella di Veronese: "Come filosofi abbiamo il dovere di difendere la matematica dalle restrizioni filosofiche, di fare in modo che le finzioni matematiche non siano reificate, di usare alcune di esse per chiarire, precisare o sistematizzare idee-chiave filosofiche e di costruire una filosofia della matematica che combini la ricerca matematica attuale e la nostra filosofia." M. Bunge, "Moderate Mathematical Fictionism", in Agazzi-Darvas [1997], p. 70. Cfr. anche il § 4.6, ove si discute l'ontologia delle teorie matematiche.

¹² VM, p. 10.

e se in essa la legge di astrazione e quella dell'illimitato, che sono necessità della nostra mente, non hanno il loro pieno svolgimento.¹³

Se dai passi finora commentati emerge l'idea che la filosofia sia subordinata alla matematica, in un articolo del 1894 Veronese afferma invece che "sotto un certo rispetto si può ammettere che la filosofia abbracci tutta la matematica" perché è con metodo filosofico che si ricercano i concetti primitivi.¹⁴

Sebbene io sostenga la distinzione tra il problema matematico e quello filosofico sopra ricordato, tuttavia non ho tanto orrore per la filosofia quanti altri mostrano. E se trattate, come dissi, dei principi della scienza significa fare della metafisica, ricorderò allora che questa metafisica regalò ai matematici moderni il calcolo infinitesimale.¹⁵

Se per filosofia si intende in senso lato la ricerca dei principi di una scienza, allora Veronese è ben lieto di chiamarsi filosofo e ammette che il metodo di una tale ricerca non può che essere filosofico in quanto "conforme alla natura delle cose" delle quali si ricerca l'origine.¹⁶ Nell'indagine sui fondamenti della scienza (e della geometria in particolare) la matematica si deve infatti avvicinare al metodo della filosofia, che procede dal generale al particolare indagando il significato dei concetti che compaiono nel ragionamento. Nell'introduzione ai *Fondamenti* Veronese affronta uno studio "filosofico" dei concetti presenti nelle definizioni, negli assiomi e nelle ipotesi, interrogandosi sulla loro primitività e sulla loro derivazione dalle leggi del pensiero. La ricerca matematica di Veronese comprende dunque almeno due aspetti filosofici: il metodo di indagine dei concetti e dei principi primi e il rifiuto di alcune teorie filosofiche incompatibili con il libero sviluppo della matematica. Vedremo nei prossimi paragrafi che Veronese, pur intendendo limitarsi al solo problema matematico dei fondamenti, affronta però anche altre questioni proprie della filosofia della matematica: la genesi dei concetti e dei postulati della

¹³ VM, p. 15.

¹⁴ OPG, p. 199.

¹⁵ OPG, p. 202.

¹⁶ GNA₁, p. 350.

geometria, la determinazione della verità e dell'ontologia di una teoria matematica, la scelta del linguaggio e del metodo di insegnamento della geometria.

4.2 LA GENESI EMPIRICA DELLA GEOMETRIA

Per ragioni di chiarezza espositiva affronteremo separatamente (in questo e nell'ultimo paragrafo) due problemi epistemologici strettamente connessi: la genesi degli oggetti geometrici e l'ontologia della geometria e della matematica. Questa separazione è legittima perché Veronese fornisce soluzioni distinte ai due problemi: mentre sostiene l'origine empirica dei concetti geometrici, assume una posizione "razionalista o idealista" a proposito della natura degli enti della geometria e della matematica.

L'origine degli enti geometrici ideali per astrazione da punti, linee e piani materiali, l'individuazione di premesse empiriche che descrivono proprietà degli oggetti concreti conosciuti per intuizione nell'osservazione, la nascita dello spazio geometrico astratto per combinazione di astrazione e intuizione dallo spazio intuitivo (che è una "rappresentazione idealizzata" dello spazio fisico) testimoniano la fede di Veronese nell'origine empirica della geometria.¹⁷ Quest'ultima è fondata sull'esistenza di due facoltà caratteristiche dell'uomo, intuizione e astrazione: combinate insieme esse permettono di trasformare la molteplicità dei dati sensibili nell'unità degli oggetti astratti ideali.¹⁸ La costruzione dei con-

¹⁷ Si vedano rispettivamente i §§ 3.1.1, 3.1.2, 3.3.2.

¹⁸ La genesi empirica della geometria proposta da Veronese si fonda su un procedimento di astrazione dagli oggetti fisici non molto soddisfacente. Una soluzione empirica alternativa di un certo interesse (e che Veronese avrebbe potuto accettare) è fornita in Giusti [1999]. Gli oggetti matematici provengono non dall'astrazione da oggetti reali ma da un processo di *oggettualizzazione delle procedure*: essi formalizzano l'operare umano, come mostra la corrispondenza quasi totale tra gli oggetti della geometria teorica e le operazioni dell'agritensore sul terreno: tirare una retta tra due punti, descrivere una circonferenza. Tale tesi sembra rendere conto non solo dell'origine dei concetti geometrici di punto, retta, piano, cerchio ma anche delle sezioni coniche e di altre curve, nonché dei numeri considerati come oggettualizzazioni dell'attività del contare. "Si tratta sempre, e non potrebbe essere altrimenti, di un processo di astrazione, un cristallizzare in pochi tratti invariabili la varietà infinita delle operazioni effettivamente compiute; ma l'astrazione avviene non a partire dai dati della realtà, ma dalle operazioni della tecnica: la matematica è figlia non della natura, ma

certi geometrici per astrazione dall'osservazione di certi corpi esterni è la concezione tradizionale della geometria greca. Già Aristotele in un passo della *Metafisica* individuava nell'astrazione la facoltà mediante la quale il matematico prescinde dalle qualità sensibili delle cose.¹⁹ Se la posizione di Veronese, analoga a quella propria della geometria greca, non appare particolarmente originale, nuove sono però le ragioni di questa scelta: solo la genesi empirica può unire l'esigenza di massima libertà della geometria con la centralità accordata all'intuizione. In particolare la concordanza con i risultati delle ricerche geometriche contemporanee e la maggiore apertura nei confronti di nuove teorie e di nuove forme geometriche sono ottime ragioni per preferire la genesi empirica alla concezione aprioristica della geometria.²⁰

"[...] anche se non fossi filosoficamente fautore dell'origine empirica della geometria nel senso spiegato nella prefazione, fra le genesi dovrei preferire geometricamente quella che comprende maggiore varietà di forme geometriche."²¹

Mentre ogni forma di apriorismo comporta una certa staticità della geometria perché ammette che alcuni postulati siano assolutamente veri e non suscettibili di negazione, l'origine empirica rende meglio ragione della costruzione di teorie nuove e della possibilità di cambiamento. La filosofia della ma-

dell'arte." Giusti [1999], p. 26.

¹⁹ "Come il matematico compie i suoi studi su cose che risultano da astrazioni (egli, infatti, esegue le proprie indagini dopo aver eliminato tutto ciò che è sensibile - ad esempio, il peso e la leggerezza, la durezza e il suo contrario e, ancora, il caldo e il freddo e le altre coppie di contrari sensibili - e lascia solo la quantità e ciò che è continuo o ad una o a due o a tre dimensioni, e indaga sulle affezioni di queste cose, in quanto esse hanno quantità e continuità, e non le studia affatto secondo un qualche altro profilo e per alcune di queste cose egli osserva le posizioni reciproche e le proprietà di queste ultime, per altre osserva i rapporti di commensurabilità e di incommensurabilità, e per altre ancora le proporzioni, ma, ciò nonostante, sosteniamo che c'è una sola e identica scienza di tutte queste cose, ossia la geometria), allo stesso modo sta la faccenda anche a proposito dell'essere." Aristotele, *Metafisica*, XI 3 [60] a 28, [1971], p. 313.

²⁰ Una posizione aprioristica in rapporto alla genesi della geometria è stata sostenuta da Russell in *An Essay on the Foundations of Geometry*. Le proprietà descritte negli assiomi geometrici (della geometria proiettiva) sono le condizioni di ogni forma di eternalismo: anziché essere derivate dall'esperienza sono la condizione di possibilità di ogni esperienza spaziale.

²¹ OPG, pp. 199-200.

tematica non deve infatti spiegare o interpretare soltanto le teorie già costruite bensì rendere ragione della natura essenzialmente dinamica della conoscenza. L'indagine della verità deve essere legata ai concreti processi di sviluppo della matematica piuttosto che all'analisi di concetti vuoti, indeterminati, a priori (trascendenti), essere aperta al dinamismo della costruzione di nuove nozioni anziché restare rinchiusa nelle forme della scienza già fatta. La genesi empirica della geometria legittima l'intreccio di intuizione e astrazione che produce con la massima libertà nuovi oggetti geometrici e permette di caratterizzare la geometria come scienza dello spazio (non più fisico ma intuitivo). La stessa costruzione della geometria non archimedea è intimamente legata all'origine empirica di tale scienza, perché l'idea che guida Veronese alla formulazione della nuova teoria non è solo l'indagine sull'indipendenza dei postulati (che comunque ne è una condizione essenziale) ma anche l'analisi delle caratteristiche del continuo intuitivo: la scoperta che il principio di Archimede non è tra le proprietà osservabili di un oggetto rettilineo e continuo permette di costruire una teoria che assuma tra le ipotesi la negazione di tale principio.²²

La genesi empirica della geometria non va confusa con un'ontologia empirica: gli enti geometrici non sono corpi fisici concreti bensì oggetti puramente ideali. La scoperta della natura astratta anziché concreta degli enti geometrici, e in particolare del punto, risale all'eleatismo: i paradossi di Zenone confutarono la concezione pitagorica del punto monade dimostrando l'impossibilità di considerare la linea come un insieme discreto di punti reali.²³ L'affermazione della genesi

²² "Pur fermo nella concezione che la geometria ha la sua prima origine nell'osservazione degli oggetti del mondo esterno, e che da tale osservazione, opportunamente idealizzata, essa deve trarre le sue prime verità, da formularsi nei postulati, egli ha rilevato che i postulati ordinari del continuo contengono più di quanto è strettamente suggerito dall'osservazione, limitata come è questa a una regione finita dello spazio; e che così avviene anche per il postulato di Archimede, quando lo si voglia valido per una coppia di segmenti assolutamente qualsiasi." Pano, [1932], pp. 500-501.

²³ A considerare gli argomenti di Zenone e l'eleatismo in genere come una reazione alle dottrine pitagoriche incentrate sull'idea del punto come unità avente una posizione o l'unità considerata nello spazio furono in particolare Paul Tannery e Federigo Enriques. Cfr. Tannery, [1885] e Enriques, [1932b].

empirica della geometria da un lato ha lo scopo di contrastare ogni forma di apriorismo che impedisca la costruzione di nuove teorie non euclidee e non archimedee, dall'altro ha l'intenzione di garantire un nesso tra geometria e spazio e giustificare l'esigenza di distinguere le teorie geometriche da quelle matematiche pure.

4.3 IL LINGUAGGIO

Due anni prima della pubblicazione dei *Fondamenti di geometria* Peano espone le proposizioni della *geometria di posizione* "usando puramente segni aventi significato determinato, o mediante definizione, o mediante le loro proprietà."²⁴ Egli esprime con un numero limitato di convenzioni tutte le relazioni logiche necessarie alla fondazione della geometria: solo mediante tale sistema di segni determinati in modo univoco è possibile, a suo parere, esporre in forma rigorosa la geometria.²⁵ Veronese al contrario rivaluta il linguaggio comune, che è più semplice e più completo nonché passibile di perfezionamento senza ricorrere all'introduzione di segni puramente arbitrari che ostacolano la comprensione del ragionamento ed escludono l'intuizione spaziale dalla geometria. Egli conosce il calcolo deduttivo formulato da George Boole e ne riconosce l'indubbio interesse teorico nello studio della logica ma ritiene perlomeno prematuro il tentativo di sostituirlo al linguaggio comune nell'esposizione della teoria geometrica. Tale calcolo logico si fonda, per Veronese, sull'idea già formulata da Descartes e da Leibniz di attribuire dei segni ad alcuni concetti primitivi e di dedurre, secondo certe regole, altre verità dalla combinazione di tali segni.²⁶ Analogamente, il calcolo logico di Boole attribuisce dei simboli determinati e univoci ai concetti e alle operazioni fondamentali: grazie a tali simboli e in

²⁴ Peano, [1889], p. 57, nota 1.

²⁵ "Si ha così il mezzo di esprimere le proposizioni di Geometria sotto forma rigorosa, che invano si desidererebbe dal linguaggio comune, e la soluzione delle questioni proposte riesce di molto agevolata." Peano, [1889], p. 57, nota 1.

²⁶ "Descartes e Leibniz ebbero per primi l'idea di rappresentare tutti i concetti mediante un sistema di segni deducendoli da un dato numero di essi e per dedurre colla combinazione e colle regole di questi segni non solo le verità già conosciute ma eziandio altre di nuove." FG, p. 605.

virtù di certe regole deduce dai principi altre verità logiche.²⁷

Peano crea un sistema di segni composto da simboli di concetti ed operazioni logiche (ad esempio P indica "proposizione", e significa "è", \wedge indica la congiunzione "e", \vee la disgiunzione "o", ecc.) e da simboli corrispondenti agli enti geometrici non definiti (ad esempio I sta per "punto", ab sta per "la classe formata dai punti interni al segmento ab , ove a e b siano punti").²⁸ Il linguaggio simbolico di Peano costituisce per Veronese un ottimo strumento per la formulazione rigorosa delle teorie, se non addirittura per la creazione di "una specie di lingua ufficiale per l'esposizione delle ricerche matematiche".²⁹ Se il vantaggio essenziale dei sistemi di segni convenzionali è la potenziale universalità, solo un sistema di segni immediatamente comprensibile da tutti potrebbe rivelarsi sufficientemente vantaggioso da soppiantare il linguaggio naturale. La comprensione universale di un linguaggio non è raggiungibile senza l'adozione di convenzioni generali e accettate da tutti gli studiosi sul riferimento semantico dei simboli:

[...] farebbe d'uopo sopra tutto che gli scrittori di questa logica non dessero il cattivo esempio di scegliere segni diversi per indicare gli stessi concetti, altrimenti per leggere le differenti opere occorrerà un dizionario speciale.³⁰

Lo scopo del calcolo deduttivo è l'eliminazione delle imperfezioni del linguaggio comune nel quale "spesso processi differenti logici vengono indicati collo stesso vocabolo, mentre altre volte processi uguali vengono indicati con vocaboli diversi." Un linguaggio simbolico convenzionale evita il rischio dell'ambiguità semantica perché i segni sono adottati in modo da corrispondere ad un unico significato e le regole sono esplicitate all'inizio. L'adozione di una lingua simbolica elimina anche il rischio, insito nella lingua naturale, della formulazione di discorsi non significanti. Veronese raccomanda però di non rifiutare affrettatamente uno strumento solo perché è possibile

²⁷ "Perciò i concetti e le operazioni si indicano con segni, i quali devono avere un solo significato, e mediante determinate regole si deducono dai principi ammessi, ridotti al minor numero possibile, altre verità logiche." FG, p. 605.

²⁸ Peano, [1889], pp. 59-61.

²⁹ FG, p. 607.

³⁰ FG, p. 607.

farne cattivo uso; la vacuità di certi discorsi formulati nel linguaggio comune è dovuta ad un cattivo uso della lingua piuttosto che a un difetto intrinseco: i "mari di parole che non significano nulla non dipendono dalle imperfezioni del linguaggio ma dalla vacuità delle idee".³¹ Il tentativo della logica deduttiva simbolica di eliminare l'equivocità di alcuni termini è apprezzabile ma non è assolutamente necessario perché l'ambiguità non ostacola lo sviluppo della scienza. In molti casi, proprio come nel parlare quotidiano, è il contesto a suggerire con esattezza il significato di una parola.³² In altri casi si tratta di "una questione di pura forma" che non deve far perdere di vista le "questioni di maggior momento" e condurre a "pedanterie senza necessità".³³ Veronese si riferisce a *I principii di geometria logicamente esposti*, ove Peano affronta, a suo giudizio, questioni più di forma che di sostanza quando corregge alcune espressioni di Pasch chiare dal contesto del suo discorso e traduce nel proprio sistema di segni alcune proposizioni di Euclide facilmente esprimibili in simboli.³⁴ Veronese non comprende il senso dell'argomentazione

³¹ FG, p. 607.

³² "Per il matematico basta che dal contesto della proposizione risulti ben chiaro il senso che l'autore ha voluto attribuirgli, senza bisogno che sia rigorosamente determinato dalle singole parole quando non vi è una necessità matematica." FG, p. 606.

³³ "La questione che un vocabolo abbia significati diversi, ad es.: ϵ , ν , e , ecc. è spesso per la matematica una questione di pura forma." FG, p. 606.

³⁴ "Ad una questione più di forma che di sostanza va considerato l'unico appunto che il sig. Peano fa al signor Pasch cioè che questi anziché dire "due punti determinano un segmento rettilineo" doveva dire "due punti distinti ecc." mentre risulta chiaramente dal contesto del discorso che così appunto vuol dire il sig. Pasch senza considerare poi che due punti in generale nella geometria non sono coincidenti, come lo sono due numeri uguali nell'aritmetica. A questioni di pura forma appartengono anche le traduzioni che il sig. Peano ha fatte in segni logici delle proposizioni di qualche libro degli Elementi di Euclide, che meglio di altre si adattavano ad essere tradotte nei segni suddetti." *Ivi*, p. 606, nota 2 (corso mio). In una lezione tenuta al X Convegno di Storia della Matematica di Rende (luglio 1999) Silvio Bozzi ha esposto in modo chiaro, proprio a partire da questo esempio, la distanza che separa l'impostazione di Veronese e di Pasch da quella di Peano. Per Veronese e per Pasch è possibile comprendere dal contesto ciò cui si fa riferimento, perché gli assiomi sono una sorta di stipulazione e sussiste sempre un'interpretazione in un modello fissato, nel modello cioè suggerito dall'intuizione spaziale. Per Peano al contrario non è il contesto a fornire il riferimento dei termini, ma sono le interpretazioni, le quali possono essere più di una o anche nessuna. Occorre pertanto fissare un universo di riferimento per sapere se ai simboli a e b che denotano i punti in questione corrisponde uno stes-

di Peano perché ritiene che l'interpretazione dei termini geometrici sia fissata dal riferimento intuitivo. Agli enti denotati dai termini 'punto' e 'retta' non è possibile attribuire proprietà arbitrarie ma soltanto proprietà conformi a quelle che attribuiamo agli oggetti concreti corrispondenti.

Analizzando l'opera di Peano Veronese coglie alcuni difetti del linguaggio simbolico, ancora incompiuto e imperfetto, ma soprattutto riflette sulla propria scelta di adottare nei *Fondamenti di geometria* il linguaggio comune. La lingua naturale è preferibile ad un linguaggio che introduce simboli arbitrari, riduce il contributo dell'intuizione spaziale alla comprensione degli elementi della geometria, elimina il rimando al mondo della nostra percezione e il ricorso alle figure:

Per le ragioni dette nella prefazione siamo però in ogni caso contrari nell'insegnamento degli elementi a qualsiasi formalismo o meccanismo che sostituisca sistematicamente e possa menomare se non annientare una delle più belle facoltà dello spirito, l'intuizione spaziale, il cui aiuto nello studio scientifico degli elementi va inteso nel senso da noi spiegato.³⁵

La scienza non ha per obiettivo la costruzione di una lingua simbolica nella quale trascrivere tutti i suoi concetti: essa si prefigge piuttosto (ed è un compito ben più difficile) di "stabilire le ipotesi da cui si parte e di passare da esse a nuove verità". Se, dunque, il linguaggio non è il fine della scienza ma un mezzo che contribuisce alla determinazione delle sue ipotesi fondamentali, il linguaggio comune può servire egregiamente allo scopo:

Nello svolgimento del pensiero serve meglio a tale scopo il linguaggio comune, il quale meglio si adatta ad esprimere le idee scientifiche e a collegare i principi delle varie scienze fra loro.³⁶

Il linguaggio simbolico ostacola, anziché facilitare, il passaggio dalle premesse ad altre verità perché obbliga il pensiero a seguire una via determinata per giungere alle conclusioni; il linguaggio comune, invece, concede al pensiero ampia libertà e

so oggetto o due oggetti distinti all'interno di tale universo.

³⁵ FG, p. 604.

³⁶ FG, p. 606.

non preclude alcuna via al suo sviluppo.³⁷ Ciò che frena l'abitudine del pensiero a muoversi in ogni direzione è l'assunzione in un sistema di segni di certe regole pratiche legate all'uso stesso dei simboli e aventi la funzione di guidare il ragionamento. Nei *Fondamenti di geometria* Veronese adotta il linguaggio comune perché lo ritiene più adatto al fine della scienza ma soprattutto agli scopi della sua stessa opera: il primo capitolo dell'Introduzione, nel quale egli analizza le nozioni comuni che stanno alla base della geometria e delle altre scienze, non vuole essere un trattato di logica ma una ricerca dei concetti e delle operazioni fondamentali dei ragionamenti scientifici. Da un punto di vista logico sarebbe interessante indagare tutti i calcoli costruibili a partire da certi principi e da certe operazioni; da un punto di vista matematico, però, anche col linguaggio comune è possibile per Veronese "giungere ad un'esposizione chiara dei principi e delle operazioni della logica stessa che occorrono per stabilire i concetti fondamentali della matematica".³⁸

Per esempio noi ci siamo occupati nel cap. I dell'introduzione delle nozioni comuni, senza voler proprio trattare della logica; ma egli è ben certo che nell'ordine delle nostre idee, che riteniamo naturalmente il migliore per raggiungere i nostri scopi, il calcolo attuale logico non ci avrebbe servito.³⁹

Il linguaggio comune è più adeguato perché non richiede di essere appreso preliminarmente ma è già noto a tutti i lettori: esso invoglia allo studio della scienza perché non presenta le difficoltà che si incontrano quando si deve apprendere e maneggiare un linguaggio nuovo, per quanto semplice e rigoroso. L'adozione del simbolismo sarebbe vantaggiosa (nonostante gli inconvenienti legati alla complessità del suo utilizzo) se un sistema di segni, come ad esempio quello numerico, servisse "con regole determinate e feconde a passare da date verità ad altre nuove importanti"; ma almeno per ora con i linguaggi

³⁷ "Occorre infatti che il pensiero non sia ostacolato dal mezzo di cui si serve, mentre nello stato attuale delle applicazioni del calcolo logico il pensiero per comodità dei segni è obbligato a seguire una via piuttosto che un'altra." FG, pp. 606-607.

³⁸ "[...] vi sarebbe sempre una differenza notevolissima tra l'interesse logico di questo sistema di segni e l'interesse matematico." FG, p. 606.

³⁹ FG, pp. 605-606.

simbolici che sono stati costruiti "non si evitano neppure con rigorosa certezza [...] i difetti che possono derivare dall'uso dell'evidenza nelle dimostrazioni".⁴⁰ Veronese da un lato ammette le potenzialità dei linguaggi di segni, dall'altro è scettico sulla possibilità concreta di costruire un sistema di simboli che sia più completo e più naturale del linguaggio comune: un sistema di segni non può infatti sostituire la lingua naturale finché si appoggia su di essa per spiegare il significato dei simboli.⁴¹ Mentre il linguaggio comune è sufficiente ad esprimere ogni proposizione matematica perché nessuno ha mai dimostrato l'esistenza di una qualunque proposizione matematica che non si possa formulare in esso,⁴² "è per lo meno incerto se si possano esprimere tutte le relazioni matematiche coi segni logici conosciuti",⁴³ i calcoli logici finora costruiti – afferma Veronese – sono incompleti, perché non sono ancora in grado di "esprimere tutte le verità conosciute delle scienze matematiche"; riferendosi al calcolo di Schröder e in particolare all'applicazione del linguaggio simbolico alla geometria compiuta da Peano ne *I principii di geometria logicamente esposti*, Veronese aggiunge che non vi sono "ragioni scientifiche sufficienti perché un tale sistema di segni debba sostituire sistematicamente [il linguaggio comune] nell'esposizione non solo delle ricerche superiori, [...] ma neppure nelle questioni dei principi stessi".⁴⁴ Egli riconosce tuttavia che lo sviluppo dei linguaggi simbolici può essere di grande importanza per la trattazione dei fondamenti della geometria, in particolare per lo studio delle dimostrazioni e dell'indipendenza dei postulati:

Non neghiamo che quando sia possibile usare questi segni e

⁴⁰ FG, p. 607.

⁴¹ "L'interesse teorico di una tale dottrina nello studio della logica non ci pare si possa contrastare, ma bensì che se ne esageri l'importanza sia nell'esercizio pratico della logica, sia nella sua sostituzione al linguaggio comune, di cui del resto si fa uso più o meno abbondante per spiegare e fissare il significato dei segni stessi, e il quale d'altronde è il sistema di segni più completo e più naturale per esprimere i nostri pensieri." FG, p. 605.

⁴² "Da nessuno fu dimostrato che vi siano proposizioni di matematica che non si possano esprimere esattamente col linguaggio comune, perché se non altro basterà sostituire ai segni logici i vocaboli coi quali si fissa il significato dei segni o completando il linguaggio stesso." FG, p. 606.

⁴³ FG, p. 606.

⁴⁴ FG, p. 606.

quando si abbia una certa abilità nel maneggio di essi si possa con maggior sicurezza indagare le parti semplici di date dimostrazioni e di date proprietà, e neppure vogliamo negare che la logica deduttiva possa servire con ulteriori sviluppi a trattare alcune parti delle questioni dei principi meglio che col linguaggio comune.

Egli non ammette però che tali ricerche possano essere condotte solo con un calcolo simbolico perché la scomposizione in parti semplici delle proposizioni è attuabile anche con l'ausilio del linguaggio comune, così come il confronto fra i postulati per ridurne il numero attraverso lo studio delle proposizioni deducibili le une dalle altre è possibile anche con procedimenti diversi da quelli propri della logica deduttiva:

[...] l'idea di scindere le proposizioni matematiche in parti semplici e di ricondurle al numero minore possibile di postulati, non è propria della logica deduttiva, perché si hanno anche antecedenti esempi dati col linguaggio comune, come per es. quello sui principi dell'aritmetica del sig. Dedekind.⁴⁵

Analizzando i lavori di Peano senza troppa benevolenza Veronese li definisce "l'ultima espressione di quel metodo che si può chiamare *signicismo*": l'idea, afferma, resta schiava del segno e permangono i difetti del linguaggio comune, poiché uno stesso vocabolo è usato per indicare concetti logici diversi.⁴⁶ Veronese riconosce che "lo spirito critico" di Peano è lodevole, ma solo a patto di ridurlo "in giusti e convenienti confini": egli, infatti, apprezza la ricerca del rigore purché non conduca ad una limitazione eccessiva e ingiustificata del libero sviluppo della scienza.⁴⁷

⁴⁵ FG, p. 607.

⁴⁶ "Il sig. Peano indica inoltre nell'opuscolo d'aritmetica per es. l'unità col segno 1, e collo stesso segno indica nella geometria il punto." FG, p. 608. Peano usa lo stesso segno "1" per indicare sia l'unità che il punto, ma in due opere diverse: gli *Arithmetices principia* e i *principii di geometria logicamente esposti*, ossia in due teorie matematiche diverse, aritmetica e geometria.

⁴⁷ "È lodevole però nei lavori di Peano lo spirito critico, ristretto che sia in giusti e convenienti confini, e lo scopo di ottenere il massimo rigore possibile" FG, p. 608.

4.4 IL METODO SINTETICO

La geometria analitica introdotta da Descartes e Fermat nel Seicento e fondata sull'utilizzo di risorse dell'analisi nella soluzione dei problemi geometrici stabiliva una corrispondenza fra i punti di una retta ed i numeri reali, traducendo le questioni geometriche in problemi algebrici astratti. Essa prevalse fino all'inizio dell'Ottocento, quando alcuni grandi matematici, tra i quali Gaspard Monge, Jean-Victor Poncelet, Michel Chasles, sostennero la rinascita del metodo sintetico puro, fondato sullo studio diretto delle figure. Essi riconoscevano nella generalità senza limiti dei risultati algebrici un pregio irrinunciabile della geometria analitica ma ritenevano possibile ottenere un'analogia generalità con metodi puramente sintetici. Sintetico era il metodo greco, fondato sulla costruzione delle figure; esso permetteva di evitare un grave difetto dell'analisi: l'assenza di significato geometrico dei risultati, che a causa della loro astrattezza e generalità richiedevano di essere interpretati alla fine di ogni dimostrazione. A ciò si aggiungeva spesso anche l'impossibilità di attribuire un'interpretazione geometrica ai singoli passi delle dimostrazioni, con la conseguente difficoltà a comprendere il ragionamento che dalle premesse conduceva alla conclusione.⁴⁸ La rivalità fra i sostenitori dell'uno e dell'altro metodo s'inasprì nel corso dell'Ottocento. Diversi matematici tentarono di superare questa frattura metodologica interna alla geometria mediante la creazione di nuovi metodi atti a riassumere la generalità dell'algebra e l'evidenza del procedimento costruttivo euclideo. Grassmann, che sviluppò una nuova analisi fondata sul prodotto di segmenti orientati grazie alla quale attribuiva un significato alle formule analitiche, cercò di ovviare a quello che riteneva il più grave problema dell'applicazione dell'algebra alla geometria: nella *Ausdehnungslehre* divenne possibile non solo esprimere ogni formula in parole, ossia tradurre ogni conclusione in una proposizione discorsiva, ma anche considerare ciascun passaggio da una formula all'altra come "l'espressione simbolica di un ragionamento concettuale condotto parallelamente".⁴⁹ Con la nuova analisi il senso del ra-

⁴⁸ Kline, [1972], I, pp. 972 ss.

⁴⁹ "Di solito, con il metodo abituale, l'idea è completamente oscurata dall'introduzione di coordinate arbitrarie, che non hanno nulla a che fare con il soggetto, e il cal-

gionamento era colto nel suo sviluppo e non soltanto nel suo momento conclusivo. Il calcolo della nuova teoria dell'estensione non uccideva lo spirito del ragionamento perché non si fondava sull'attribuzione agli enti geometrici di coordinate numeriche arbitrarie, estranee alla loro natura. Grassmann aspirava a costruire un calcolo tale che ciascun passaggio costituisse un'espressione simbolica di un passo del ragionamento concettuale: ogni formula del suo linguaggio di simboli avrebbe dovuto poter essere tradotta in una proposizione di senso compiuto che contribuisse alla comprensione dello sviluppo progressivo dell'idea. Questo nuovo metodo, il solo "conforme alla natura", spiegava la genesi stessa dei concetti e il modo in cui essi erano derivati dai precedenti: esso conduceva al superamento della separazione fra metodo analitico e sintetico.⁵⁰

Quarant'anni dopo la pubblicazione dell'opera di Grassmann, Moritz Pasch applicò un nuovo metodo alla geometria, metodo che intendeva rifarsi direttamente alla natura dell'oggetto e ricorrere il meno possibile al calcolo. Nelle *Vorlesungen über eine neuere Geometrie* Pasch si richiamava al procedimento costruttivo euclideo, differenziandosene per una maggiore generalità dei concetti e delle dimostrazioni.⁵¹ A differenza della geometria analitica, che mira a tradurre ogni problema geometrico in

di coordinate arbitrarie, che non hanno nulla a che fare con il soggetto, e il calcolo consiste in uno sviluppo meccanico di formule che nulla apportano allo spirito e che di conseguenza lo uccidono. Qui, invece, dove l'idea non essendo turbata da alcunché di estraneo traspare in tutta la sua chiarezza attraverso le formule, lo spirito è afferrato, anche nel momento di ciascun sviluppo di formule, attraverso lo sviluppo progressivo dell'idea." Grassmann, [1844], p. II.

⁵⁰ "[...] mi sembra giustificata la speranza di aver trovata in questa nuova analisi il solo metodo conforme alla natura, secondo il quale deve progredire ogni applicazione della matematica alla natura e secondo il quale dovrebbe essere parimenti trattata la geometria, se essa deve condurre a risultati generali e fruttuosi. [...] in effetti si dimostrerà tra poco che, grazie a questa Analisi, la differenza fra la trattazione sintetica e quella analitica della geometria scompare del tutto". Grassmann, [1844], p. II.

⁵¹ "Anci'essa [la geometria di Pasch], come la geometria euclidea, si fonda sulla geometria elementare; ma benché entrambe possano essere definite pure quanto al procedimento, si distinguono nettamente quanto al modo in cui sono create. Nella geometria euclidea i concetti sono delimitati il più strettamente possibile, in quella nuova sono il più possibile ampi e estesi. Nella geometria euclidea vari casi di una figura necessitano molte dimostrazioni differenti, nella nuova geometria tutti i casi sono inclusi in un'unica dimostrazione." Pasch, [1884], pp. 1-2.

un calcolo, la geometria di Pasch fonda il procedimento dimostrativo sulla costruzione delle figure e introduce il numero soltanto quando è la natura stessa della questione a richiederlo. Con questa nuova geometria Pasch sperava di eliminare "l'inconveniente della lentezza e della pesantezza del procedere antico" e di contribuire nello stesso tempo alla nascita di "una geometria superiore con un carattere unitario", la quale sarebbe derivata dalla fusione di geometria analitica e sintetica.⁵² Fu però Klein a porre fine a questa polemica in una nota al programma di Erlangen nella quale dimostrava l'inessenzialità della "differenza fra la nuova geometria sintetica e la nuova geometria analitica."⁵³ A fine secolo i toni della polemica iniziarono a smorzarsi. In un articolo pubblicato nel 1891 sulla rivista diretta da Peano, Corrado Segre affermò la necessità di studiare sia l'analisi sia la geometria senza "limitarsi ad uno solo dei due indirizzi" perché riteneva ormai concluso il periodo della lotta, dato che gli analisti avevano riconosciuto la validità e l'utilità del metodo sintetico.⁵⁴ I due metodi - scriveva Segre - non si escludono reciprocamente ma si completano: l'uno appare "più penetrante, più luminoso", l'altro "più potente, più generale, o più rigoroso": la scelta non può condizionare il matematico, che dovrebbe piuttosto valersi "di qualunque strumento per giungere ad un risultato importante."⁵⁵ Anche per Veronese la scelta del metodo da adottare non può essere oggetto di una rigida prescrizione perché ogni manifestazione del pensiero scientifico deve potersi sviluppare liberamente in conformità con le attitudini di ogni singolo ri-

⁵² Pasch, [1884], p. 2.

⁵³ "Se il metodo sintetico procede di più per mezzo dell'intuizione dello spazio, accordando così alle sue prime e semplici teorie un'attrattiva non comune, tuttavia il campo di tale intuizione non è chiuso al mondo analitico, e le formule della geometria analitica si possono concepire come espressione esatta e trasparente delle relazioni geometriche. D'altra parte non bisogna tenere in poco conto il vantaggio che un formalismo ben fondato offre al processo dell'investigazione, precedendo in certa misura il pensiero." F. Klein, [1872], nota I, p. 337.

⁵⁴ Segre, [1891], pp. 47. Segre estende alla geometria nel suo complesso quanto Monge affermava della geometria descrittiva in particolare: "Si dovrebbe desiderare che queste due scienze siano coltivate insieme: la geometria descrittiva porterebbe nelle operazioni analitiche più complicate l'evidenza che la caratterizza; a sua volta l'Analisi porterebbe nella geometria la generalità che le è propria."

⁵⁵ Segre, [1891], pp. 51-52.

cercatore e perché la scelta del metodo (e dunque del modo nel quale si giunge alla verità) è una scelta filosofica e individuale:

D'altronde mi pare che in generale massime rigide non si possano adottare, ma che debbano essere lasciate libere, come nell'arte, tutte le manifestazioni del pensiero scientifico a seconda delle attitudini individuali. E inoltre fa d'uopo non dimenticare che la matematica ha pure la sua filosofia, e che in questa ha non piccola importanza il modo con cui si arriva alla verità.⁵⁶

Poiché però la natura della geometria come scienza è legata alla nostra intuizione dello spazio, è opportuno che il metodo di indagine dei fondamenti sia "basato sul processo costruttivo dell'intuizione spaziale"⁵⁷, e dunque sia semplice e intuitivo come i fatti dell'intuizione stessa. Il metodo numerico o analitico non è per niente semplice e intuitivo, ma al contrario artificioso e indiretto, perché assume come proposizioni primitive fondamentali delle ipotesi che presuppongono la conoscenza dell'analisi e di buona parte della geometria.⁵⁸ L'analisi non è in grado di determinare la natura geometrica delle grandezze: essa rappresenta le grandezze mediante numeri ma la distanza fra due punti, la retta, il piano, gli spazi a tre o più dimensioni "non sono geometricamente le equazioni o le forme analitiche ausiliarie che li rappresentano".⁵⁹ Un analogo

⁵⁶ FG, p. XXIV.

⁵⁷ FG, p. XVI.

⁵⁸ Come esempio di mancanza di intuitività ed evidenza, Veronese propone, tra le altre, l'ipotesi analitica della distanza che definisce l'elemento lineare dello spazio come "radice quadrata di una espressione differenziale quadratica e positiva delle coordinate": essa non è elementare e inoltre non determina cosa sia la distanza. Si tratta della terza ipotesi di Riemann, che definisce plane le varietà n -estese, nelle quali "il quadrato dell'elemento lineare si può ricondurre alla somma dei quadrati dei differenziali totali". Riemann, [1854], p. 10.

⁵⁹ FG, p. XXI. A questo problema è legato quello che si potrebbe chiamare della "cardinalizzazione": per Veronese non è possibile indagare i fondamenti di una scienza senza scoprire perché si attribuiscono certi numeri a certi punti o perché una posizione nello spazio è considerata adeguatamente descritta da una particolare ternia di coordinate. L'approccio analitico non può rendere conto di queste scelte senza fare riferimento ad un contenuto fattuale: il ricorso all'intuizione è imprescindibile. Adottando un approccio genetico al problema dei fondamenti Veronese non si accontenta di assumere una certa convenzione senza indagare le motivazioni: ogni scelta compiuta dal matematico risponde ad una precisa ra-

rimprovero era stato mosso alla geometria analitica da Poncelet nell'introduzione al *Traité des propriétés projectives des figures*, ove si affermava che l'algebra rappresenta le grandezze geometriche con dei segni astratti completamente indeterminati.⁶⁰ La generalità dei risultati ottenuti per via analitica non è però per Poncelet una caratteristica esclusiva dell'algebra, bensì un frutto del ragionamento *implicito* che ne sta alla base e che astrae dai valori numerici e assoluti delle grandezze.⁶¹ La geometria sintetica procede in modo più rigido o più severo descrivendo la figura senza mai perderla di vista e ragionando su grandezze reali ed esistenti: essa si fonda su un tipo *esplicito* di ragionamento che da un lato permette di determinare la natura delle forme geometriche, dall'altro impedisce l'acquisizione di risultati generali.⁶² Per eliminare questa debolezza la geometria pura dovrebbe fare astrazione dalle figure e dedurre conseguenze "che non sia possibile dipingere, all'immaginazione o alla vista, mediante oggetti sensibili", vale a dire dovrebbe adottare una forma di ragionamento implicito: in tal modo non perderebbe la capacità di determinare i propri oggetti, acquistando al contempo una maggiore generalità.⁶³ Un altro difetto attribuito da Veronese al metodo analitico è l'incapacità di fornire un'adeguata comprensione dei singoli passi della dimostrazione:

[...] esso ci conduce molto sovente dalle premesse al risultato finale senza farci conoscere i diversi anelli della catena delle proprietà geometriche occorrenti nel passaggio dalla prima proprietà all'ultima, per quanto semplice ed elegante possa essere la dimostrazione.⁶⁴

Già Grassmann aveva affermato che il calcolo analitico

realtà percepita attraverso i sensi.

⁶⁰ "L'algebra utilizza dei segni astratti: essa rappresenta le grandezze assolute mediante caratteri che non hanno per se stessi alcun valore e che lasciano a tali grandezze tutta l'indeterminazione possibile." Poncelet, [1865], p. XI.

⁶¹ "Si è condotti a tutte queste conseguenze non solo quando si utilizzano i segni e le notazioni dell'Algebra ma anche ogni volta che ragionando su delle grandezze qualunque si fa astrazione dai loro valori numerici e assoluti; in una parola, tutte le volte che si ragiona su grandezze indeterminate, cioè si fa uso del ragionamento puramente *implicito*." Poncelet, [1865], p. XII.

⁶² Poncelet, [1865], p. XII.

⁶³ Poncelet, [1865], p. XII.

⁶⁴ FG, p. XXI.

"consiste in uno sviluppo meccanico di formule", che impedisce la comprensione dello spirito del ragionamento.⁶⁵ Chasles, prima ancora, aveva evidenziato l'insufficienza del metodo analitico nello studio dei fondamenti della geometria perché esso non spiega quale rapporto abbia una data verità con quelle che la precedono o la seguono nella dimostrazione.⁶⁶ Il metodo analitico introduce simboli complessi per descrivere proprietà geometriche molto semplici. Il metodo sintetico è più adatto alla trattazione delle questioni relative ai fondamenti della geometria perché rispecchia la semplicità delle figure geometriche anziché costituire un "formalismo o meccanismo che sostituisca sistematicamente e possa menomare se non annientare una delle più belle facoltà dello spirito, l'intuizione spaziale".⁶⁷ Il metodo greco o sintetico o puro è preferito sia perché storicamente antecedente a quello analitico sia soprattutto in quanto "corrisponde meglio alla natura del problema" poiché nasce dalla percezione della diversità di luogo delle figure e si sviluppa secondo l'intuizione spaziale. Il metodo sintetico, lungi dall'essere "artificio senza vita" o "giuoco di simboli e di parole" è essenzialmente filosofico perché non prescinde dalla natura degli oggetti ai quali si riferisce.⁶⁸ Un ultimo pericolo si cela nella generalità dell'analisi: essa conduce ad ipotesi astratte che potrebbero contraddire alla nostra esperienza dello spazio e dunque essere prive di significato geometrico. Poincaré ed Hilbert, adottando un metodo analitico anziché sintetico, sono incorsi in questo errore e hanno attribuito possibilità geometrica a teorie matematiche contrarie all'intuizione spaziale:

Un'altra cosa desidero far rilevare, in cui parmi discostarmi dai signori Poincaré ed Hilbert, i quali, trattando la geometria più con le vedute dell'analisi che con quelle dell'intuizione spaziale, sono portati a dare alla geometria un'estensione maggiore di quella

⁶⁵ Grassmann, [1844], p. II.

⁶⁶ "È dunque sufficiente in uno studio filosofico e fondamentale di una scienza sapere che una qualche cosa è vera se non si conosce perché ciò accade e quale posto essa occupa nella serie delle verità a cui appartiene?" Chasles, [1837], p. 975.

⁶⁷ FG, p. 604.

⁶⁸ GNA₂, p. 205.

che secondo l'intuizione essa possa e debba avere.⁶⁹

Non tutte le teorie analitiche astratte sono teorie geometriche: è infatti necessario che gli oggetti che esse descrivono siano costruibili a partire dagli elementi più semplici del sistema:

[...] acciocché un risultato analitico abbia un effettivo significato geometrico bisogna che si riferisca ad un ente che si possa costruire, e in ogni caso la geometria non può contentarsi di sapere ad es. che esiste una data superficie, ma vuole conoscere anche le leggi della costruzione della superficie stessa.⁷⁰

Soltanto il metodo sintetico, basato sul processo costruttivo dell'intuizione spaziale, può determinare le leggi secondo le quali è possibile costruire un dato ente fornendo la garanzia della sua esistenza geometrica.⁷¹

4.5 VERITÀ

Se per filosofia intendiamo la suprema ricerca della verità – scrive Veronese nella lezione inaugurale tenuta all'università di Padova nel 1905 – la matematica è tanto più filosofica in quanto "essa non è solo la più ideale, bensì anche la più positiva delle scienze, perché è la più alta e la più precisa espressione del vero".⁷² La matematica pura non è soggetta a confu-

⁶⁹ GNA₁, p. 390. Cfr. il § 3.2.1.

⁷⁰ FG, p. XXIII.

⁷¹ Il metodo sintetico è scelto da Veronese oltre che per l'esposizione dei fondamenti anche per l'insegnamento della geometria elementare nelle scuole superiori. Nelle scuole inferiori invece egli propone un metodo intuitivo basato sull'osservazione e sull'esperienza. Le proposizioni geometriche sono enunciate "solo per le figure che si possono direttamente osservare", i concetti primitivi sono ottenuti dall'osservazione degli oggetti naturali e le proposizioni primitive che li descrivono sono sottoposte a verifica sperimentale attraverso il confronto e la costruzione con particolari strumenti (riga, squadra, compasso, carta millimetrata). AEG, p. V. Veronese ha scritto diversi testi di geometria per le scuole: *Elementi di Geometria, ad uso dei licei e degli istituti tecnici (primo biennio)*; *Nozioni elementari di Geometria intuitiva, ad uso dei ginnasi inferiori*, adattate successivamente ai programmi ministeriali delle Scuole tecniche con il titolo *Elementi di Geometria intuitiva ad uso delle Scuole tecniche*; *Complementi di Algebra e Geometria ad uso dei Licei moderni, trattati con la collaborazione di Paolo Gazzaniga*. Anche i *Fondamenti di geometria*, il cui sottotitolo è "Lezioni per la Scuola di Magistero in Matematica" è un manuale per gli studenti universitari che si preparano a diventare insegnanti nelle scuole.

⁷² VM, p. 7.

tazioni o revisioni come avviene alle scienze naturali, nelle quali i fatti sono sempre approssimati e imprecisi poiché dipendono dall'osservazione empirica. Gli enti matematici astratti, invece, sono "l'espressione più alta e più pura della verità" perché sono prodotti dell'intelletto umano e pertanto raggiungono un grado di certezza assoluta. Un concetto matematico è vero se è non contraddittorio e se tale verità, una volta dimostrata logicamente e senza errori, non può essere confutata.⁷³ Veronese non dimentica che all'inizio dell'Ottocento i geometri hanno abbattuto la certezza dell'edificio euclideo, che aveva resistito per secoli come modello di verità assoluta, né sorvola sulle critiche mosse al calcolo infinitesimale di Leibniz e Newton. Nel primo caso, poiché Veronese include la geometria tra le matematiche pure, la scoperta di geometrie logicamente coerenti che non soddisfano al postulato delle parallele non ha confutato la teoria euclidea perché questa mantiene intatta tutta la sua verità come teoria astratta; nel secondo caso l'errore non dipende dalla natura della scienza ma dall'indeterminatezza dei suoi concetti fondamentali e pertanto può essere eliminato stabilendone in modo preciso il significato. Altri errori nascono dalla mancata dimostrazione della dipendenza o indipendenza reciproca delle premesse, necessaria per garantirne la non contraddittorietà, o ancora da uno sbaglio del matematico in una dimostrazione.⁷⁴ La verità della matematica è assoluta perché non dipende dall'adeguazione tra pensiero e realtà, bensì tra pensiero e pensiero: essa non è approssimata e nemmeno provvisoria perché si fonda sulla non contraddittorietà logica, che non dipende dall'esperienza. La geometria ha verità assoluta solo se separata dall'applicazione alla fisica e presentata in forma assiomatica rigorosa: in tal caso infatti essa trova il fondamento della propria verità nella sola non contraddittorietà logica. Sia la geometria sia la matematica

⁷³ OPG, pp. 203-204.

⁷⁴ "[...] la scienza matematica è per sé esatta, né dipende da essa se non poté raggiungere nei suoi fondamenti una forma definitiva. L'errore o dipende direttamente dal matematico o deriva dalla indeterminatezza di alcuni concetti fondamentali, come ad esempio quello dell'infinitesimo attuale del Leibniz, da lui poi abbandonato, e che condusse a discussioni interminabili; o può discendere anche dalla mancata dimostrazione della possibilità logica di alcune nuove ipotesi o dalla non appropriata loro interpretazione." VM, p. 8.

ca trovano però una conferma indiretta della propria verità nell'applicazione alla natura.⁷⁵ La fiducia nella possibilità di scoprire applicazioni utili anche per "le più alte e più astratte concezioni matematiche" riposa sulla convinzione che 1) le leggi matematiche esprimano leggi del pensiero e 2) che esista un'armonia meravigliosa tra le leggi del pensiero e quelle del mondo esterno:

ogni legge matematica, essendo una legge del pensiero, è anche una legge della Natura. E per l'armonia meravigliosa che esiste fra le leggi del pensiero e quelle del mondo fuori di esso, non si può asserire a priori che in questo non possano avere un'applicazione utile le più alte e più astratte concezioni matematiche, anche se non furono suggerite dall'esperienza.⁷⁶

La fiducia nell'armonia tra matematica e realtà è motivata dal successo delle applicazioni della matematica del tempo alla fisica, alla chimica, alle scienze economiche e sociali, alla biologia e alla fisiologia, oltre che dalla convinzione galileiana che "la Natura è un libro scritto in lingua matematica".⁷⁷ L'esistenza di un rapporto molto stretto tra leggi matematiche e leggi del pensiero già era emersa nella ricerca dei principi e delle operazioni su cui si fonda la matematica.⁷⁸ In particolare, poiché lo studio del ragionamento è compito della logica, sussiste un rapporto

⁷⁵ "I Greci che studiarono quelle linee che si chiamano coniche, e costituivano per essi l'alta geometria, non potevano certo prevedere che parecchi secoli dopo sarebbero ritrovate fra le orbite degli astri, di cui Keplero determinò le leggi, che a loro volta servirono alla scoperta di Newton della legge dell'attrazione universale." VM, pp. 24-25. Neppure Veronese poteva immaginare, quando costruiva la sua geometria iperspaziale e cercava di convincere i contemporanei della possibilità di intuire una quarta dimensione, che non molti anni dopo Einstein avrebbe rivoluzionato la concezione tridimensionale dello spazio per aggiungervi una quarta dimensione: il tempo. Così come quando rivendicava la possibilità dell'esistenza astratta dell'infinitamente piccolo Veronese non aveva in mente l'ipotesi dell'esistenza reale di qualcosa di molto più piccolo dell'atomo di materia, tradizionalmente considerato indivisibile. Proprio alla fine dell'Ottocento con gli esperimenti di Goldstein, Perrin e Thompson (che nel 1899 presentò una relazione al congresso di Dover della *British Association* dal titolo *On the Existence of Smaller than Atoms*) si arrivò alla scoperta di una nuova particella: l'elettrone, il quale toglieva definitivamente all'atomo la prerogativa di componente elementare e indivisibile di materia.

⁷⁶ VM, p. 24.

⁷⁷ VM, p. 25.

⁷⁸ Cfr. il § I.1 e FG, cap. I.

molto stretto tra matematica e logica. Benché Veronese sia lontano dalla prospettiva logicista di riduzione della matematica alla logica, tuttavia è indubbio che nei *Fondamenti* si individuano alcune leggi del pensiero ed alcuni concetti primitivi in grado di spiegare come e perché siano sorti i principi e le operazioni della matematica. La matematica dipende dalla logica perché è la conseguenza di determinate leggi del pensiero ma i concetti matematici primitivi non sono definiti in termini puramente logici o le verità della matematica pura derivate soltanto da principi logici.⁷⁹ Le leggi logiche del pensiero influiscono sullo sviluppo della matematica in due modi: in primo luogo la costruzione delle teorie matematiche è determinata dai principi logici d'identità, di non contraddizione e del terzo escluso, vale a dire dai principi che regolano ogni processo di pensiero; in secondo luogo i concetti della matematica non sono scelti in modo arbitrario dagli scienziati ma derivano da certi concetti logici fondamentali che troviamo formati in noi fin da piccoli (prima, poi, uno, molti).⁸⁰ La matematica dipende dalla logica perché si sviluppa conformemente alle regole del ragionamento non contraddittorio e perché i suoi concetti primitivi derivano da certi concetti logici; essa però amplia e ridefinisce il significato dei concetti e le proprietà delle operazioni. L'operazione matematica di addizione tra numeri non coincide ad esempio con l'operazione logica dell'unire insieme più cose: dipende in modo essenziale dalle regole di associazione delle cose nel pensiero e non è riducibile a un insieme qualunque di regole che determinano l'uso del simbolo +. Veronese rifiuta una concezione formalistica ingenua che veda nel segno l'oggetto ultimo della matematica; perché questa sia una scienza di concetti e non di puri segni combinati arbitrariamente dal matematico, occorre definire le regole delle operazioni tra numeri in analogia con quelle delle operazioni del pensiero da cui derivano. La matematica è una scienza libera che può creare i suoi oggetti.

⁷⁹ "[...] le leggi del pensiero logico puro sono comuni ad entrambe [filosofia e scienza della natura], e la matematica non ne è che la conseguenza." VM, p. 6.

⁸⁰ "Il bambino stesso sa distinguere ben presto l'idea dell'unità da quella di pluralità, il prima e il poi, e muove incerto i primi passi in linea retta verso la mamma, che sorridente lo incoraggia e gli tende amorosamente le braccia." VM, p. 6.

ma non per questo è puramente convenzionale o arbitraria, dato che i segni che introduce rimandano a particolari concetti logici fondamentali; un'indagine sui fondamenti della matematica ha proprio lo scopo di mettere in luce le analogie e i parallelismi tra il ragionamento e le applicazioni dei simboli rivelando in che modo queste rispecchino il primo:

[...] la matematica pura non è nei suoi fondamenti una combinazione arbitraria di segni ma è una scienza di concetti che scaturiscono direttamente dagli assiomi logici, da operazioni mentali comuni a senso determinato ed unico [...].⁸¹

Se la concezione della logica come studio delle operazioni della mente che rendono possibile il ragionamento avvicina Veronese alla prospettiva psicologista, egli non è affatto interessato né al linguaggio simbolico della logica né all'uso strumentale di essa per raccogliere indicazioni concernenti la natura e la costituzione della mente umana. L'intenzione di Veronese sia nel caso della genesi della matematica dalle leggi del pensiero sia nel caso della genesi della geometria dall'osservazione empirica è duplice: da un lato la ricerca dell'origine dei concetti e dei principi permette una chiarificazione concettuale della teoria ed elimina nozioni non definite o l'appello all'intuizione, dall'altro la ricerca dell'origine serve anche a confermare la verità della teoria. La verità delle proposizioni geometriche è garantita dalla conformità all'intuizione spaziale, la verità di quelle matematiche dalla non contraddittorietà logica, ossia dalla conformità con le leggi del pensiero.

Se la dimostrazione di un nuovo risultato costituisce l'unico criterio rigoroso della sua verità, il matematico può talvolta rinunciare al massimo rigore, soprattutto quando una teoria è nuova e ancora poco studiata, purché stimoli altri a proseguire nelle stesse ricerche. Intervenendo in una polemica tra Segre e Peano sul significato del rigore in matematica,⁸² Veronese prende le difese del primo: benché le dimostrazioni rigorose siano essenziali per eliminare definitivamente gli errori da una teoria, non ha senso abbandonare una teoria soltanto perché contiene alcune imprecisioni. Alla verità, infatti, non si

⁸¹ CRA, pp. 603-604.

⁸² Per un'ampia analisi della polemica si veda Manara-Spoglianti [1977].

giunge, per Veronese, soltanto in modo rigoroso, anzi spesso una nuova teoria o un nuovo concetto sono introdotti senza che sia possibile verificarne in modo inconfutabile la possibilità logica. Il primo modo nel quale si giunge alla verità è simile ad un sentiero di montagna irto di ostacoli e pericoloso ma che pure conduce alla meta; soltanto dopo aver conquistato la vetta è possibile, scendendo, studiare altri modi più sicuri per raggiungerla.⁸³ Il buon matematico, come lo scalatore che non si accontenta di aver raggiunto la vetta ma cerca di renderla accessibile ad altri, non deve accontentarsi del risultato raggiunto ma continuare a studiarlo finché non sia riuscito a trovarne una dimostrazione rigorosa.⁸⁴ Poiché non è "matematico" soltanto ciò che è soggetto a dimostrazione e quindi inconfutabile, il rischio di cadere nell'errore non deve frenare la ricerca di nuove teorie: occorre però la volontà di giustificare, almeno a posteriori, le proprie scoperte con una dimostrazione rigorosa dei risultati. Per Peano, invece, in matematica è vero in senso assoluto soltanto ciò che è dimostrato rigorosamente e finché non si è trovata una dimostrazione non è possibile affermare di avere raggiunto alcun risultato.⁸⁵ Poiché la matematica è una logica perfezionata il cui compito è la derivazione di certe conseguenze dalle premesse, ogni ri-

⁸³ "Soventi volte la verità scientifica appare come collocata su una vetta eccelsa e per raggiungerla non si hanno dapprima che sentieri malagevoli su chine pericolose, sì che vi è gran facilità di penetrare negli abissi in cui sta l'errore: soltanto dopo che alla vetta si è giunti per siffatti sentieri, si riesce a tracciare delle strade sicure che conducano ad essa senza pericoli. Così è avvenuto frequentemente che il primo modo di giungere ad una verità non sia stato pienamente soddisfacente, e che solo *dopo* la scienza sia riuscita a completarne la dimostrazione." Segre, [1891], p. 53.

⁸⁴ "La massima prudenza, ripeto ancora, il massimo numero di controlli, ecc., ecc., di vogliono per non cadere nell'errore; anche in ciò gioverà l'esempio degli scienziati di valore, per insegnare quando è che nel risultato ottenuto si può aver fiducia: ma allora sarà opportuno farlo conoscere. Solo bisognerà alla prudenza congiungere l'onestà, cioè avvertire espressamente come la via tenuta non sia scevra di dubbi, affinché nessuno sia indotto a fidarsi ciecamente del risultato, ma anzi vi sia un invito a cercarne una più completa dimostrazione." Segre, [1891], p. 55.

⁸⁵ "Così il difetto di rigore in lavori di matematica, non si può, a nostro modo di vedere, in alcun modo difendere o scusare. Noi riteniamo *falsa* una proposizione, se vi si può trovare un caso d'eccezione; e che non si possa considerare come *attenuato* un risultato, finché esso non è rigorosamente provato, ancorché non si conoscano casi di eccezione." Peano, [1891], p. 66.

sultato non ottenibile per deduzione logica da un gruppo di ipotesi definite è poesia e non matematica.⁸⁶

4.6 ONTOLOGIA

Gli enti geometrici, gli enti matematici e gli oggetti delle scienze formali in genere sono enti ideali: alcuni sono immagini mentali ottenuti dalle rappresentazioni di oggetti empirici, tipi ai quali gli oggetti concreti si approssimano, altri sono pensieri puri ai quali non corrisponde alcun oggetto extramentale.⁸⁷ Lo spazio generale, l'infinito e l'infinitesimo attuale sono pure idealità prive di esistenza concreta ma non di esistenza o realtà astratta:

Il nostro spazio generale è geometricamente possibile, e quindi esso ha una *realtà astratta*, senza intendere con ciò che il mondo esteriore in sé sia una rappresentazione completa di questo spazio. Così, coll'ipotesi delle diverse unità rettilinee, che è conseguenza di quelle da noi fatte sull'infinito e sull'infinitesimo attuale, o in altre parole dell'indipendenza della geometria dall'assioma V d'Archimede, non abbiamo bisogno di *credere alla realtà concreta* dell'infinito e dell'infinitesimo attuale.⁸⁸

Questi enti ideali privi di un corrispettivo concreto non sono nozioni introdotte per abbreviare il ragionamento né entità fittizie. Essi hanno realtà ed esistenza in quanto oggetti di un discorso teorico coerente: tale esistenza è astratta perché gli enti esistono nel pensiero e non necessariamente nella realtà. Nessuna dimostrazione o scoperta fisica può intaccarne l'esistenza, che è puramente formale, determinata dal principio di contraddizione e non dall'esistenza di un oggetto concreto corrispondente.⁸⁹ La definizione degli enti matematici e geometrici co-

⁸⁶ "Fatte la scelta dei punti di partenza, spetta alla matematica (che, secondo noi, è una logica perfezionata) a dedurne le conseguenze: e queste debbono essere assolutamente rigorose. Chi enuncia delle conseguenze che non sono contenute nelle premesse, potrà fare della poesia, ma non della matematica." Peano, [1891], p. 67.

⁸⁷ Cfr. il § 3.1.1.

⁸⁸ FG, p. XII.

⁸⁹ "Anche se fosse dimostrato ad es. che realmente non esiste in concreto il nostro spazio generale, non per questo geometricamente saremmo obbligati a rinunciare a questa ipotesi." FG, p. XII. Si veda anche il seguente paragrafo: "Vi sono infine altri assiomi che non si riferiscono né agli oggetti esterni né al campo

me prodotti del pensiero garantisce alla matematica e alla geometria "la massima libertà possibile":

Se ci si vuol chiamare *razionalisti* o *idealisti* per le idee qui espresse, accettiamo il titolo per distinguerci da coloro che ingiustificatamente vorrebbero negare allo spirito matematico e geometrico la massima libertà possibile, domandandosi per es. ad ogni nuovo risultato o ad ogni nuova ipotesi se abbia o no una rappresentazione sensibile, per es. nella geometria una pura rappresentazione sensibile esterna. Ma lo accettiamo nel senso che non si attribuisca ad esso alcun significato filosofico propriamente detto.⁹⁰

Veronese accetta il titolo di razionalista o idealista ma non le implicazioni filosofiche del termine. Per capire a cosa si riferisca con questa dichiarazione, è opportuno riassumere il dialogo tra un matematico empirista ed un matematico razionalista immaginato da Du Bois-Reymond nella *Allgemeine Functionentheorie*. Le differenze essenziali tra empirista e idealista riguardano la concezione degli enti geometrici e del limite. Entrambi sono realisti ma le loro posizioni differiscono perché l'empirista è materialista, ritiene che gli enti matematici siano oggetti concreti e ammette solo l'infinito potenziale; l'idealista al contrario ritiene che gli enti matematici siano oggetti immateriali esistenti fuori del pensiero e ammette l'infinito attuale. Per l'empirista non esiste nulla che non sia oggetto di percezione immediata o riconducibile ad un oggetto di percezione mediante modificazioni di ordine fisico (decomposizioni, combinazioni, variazioni di grandezza, di forma, di intensità, di qualità); per l'idealista invece anche le nozioni che non si prestano a una rappresentazione sensibile, come il limite, l'infinito e l'infinitesimo, devono essere considerate esistenti perché sono oggetti concepiti sul modello dell'intuizione sensibile. Diversa è la natura del limite, inteso da entrambi come un procedimento matematico grazie al quale a partire da una suc-

infine altri assiomi che non si riferiscono né agli oggetti esterni né al campo geometrico corrispondente a quello della nostra osservazione: ad esempio gli assiomi che concernono il punto determinato da una ripartizione di Dedekind, il punto che serve alla costruzione dello spazio a quattro dimensioni, ecc.: questi assiomi hanno allora soltanto un'esistenza astratta." PGE, p. 436 [corsivo mio].

⁹⁰ FG, p. XIV.

cessione di valori che si lasciano misurare o osservare si conclude all'esistenza di valori che sfuggono completamente alla percezione e la cui presenza non può essere dimostrata.⁹¹ Se la serie di valori è sempre considerata come terminata ossia interrotta a un certo punto, si ha l'*empirismo*, che è il sistema della rinuncia totale, perché concede che solo il percepibile sia esistente o corrispondente a qualcosa di esistente: per l'empirista il limite non è dato e l'infinito della serie è soltanto potenziale. Se la serie di valori è considerata come avente un ultimo elemento ideale, mai raggiungibile ma dato, allora si ha l'*idealismo*, che attribuisce realtà anche a ciò che non può essere né percepito né rappresentato. Consideriamo ad esempio l'assioma di continuità, che postula l'esistenza del punto limite di una linea, la cui lunghezza diminuisce senza fine e cala al di sotto di ogni quantità data, per piccola che sia.⁹² Per l'empirista l'operazione che fa subentrare un punto al posto di una linea è infondata perché il graduale incontrarsi e fondersi di due punti è qualcosa di assurdo: ciò che separa due punti o è un punto o è una linea e se è una linea, per quanto piccola, non può divenire un punto. L'idealista afferma in risposta che il limite esiste ed è l'ideale termine ultimo della successione. Il punto limite non è mai dato nella rappresentazione, che è condizionata dalla limitatezza della nostra esperienza sensoriale, eppure esiste perché è concepito sul modello della nostra intuizione sensibile. Le stelle della volta celeste ci appaiono in numero illimitato perché più l'osservazione telescopica si fa precisa e più si rivelano numerose, eppure sono in numero infinito perché non è mai possibile determinare la loro quantità (sia che le stelle da contare abbiano una fine sia che non l'abbiano, tale fine non è mai raggiungibile). Così il numero dei punti di divisione di un segmento della retta, che è illimitatamente grande nella rappresentazione, è *infinitamente grande* nella realtà. Poiché tali punti determinano dei segmenti, questi ultimi saranno infinitesimi: esiste allora l'*infinitamente piccolo* anche se non possiamo formarcene una rappresentazione. L'empirista non ammette né il limite, né l'infinito, né l'infinitamente piccolo perché essi oltrepassano i "limiti della

⁹¹ Du Bois-Reymond, [1882], p. 1.

⁹² Du Bois-Reymond, [1882], p. 60 e ss.

pensabilità umana"; il limite è un ideale al quale non abbiamo diritto di conferire realtà.⁹³ Come non esiste il limite, così per l'empirista non esistono neppure le figure geometriche esatte perché l'esattezza è un ideale: se pure nella realtà esistessero linee rette esatte, noi non saremmo in grado di riconoscerle perché nessuno strumento potrebbe misurare differenze più piccole di ogni grandezza data a meno di ingrandire l'oggetto all'infinito, il che è umanamente impensabile. Per l'empirista le scienze matematiche non hanno bisogno della completa esattezza delle rappresentazioni ideali geometriche ma è ad esse sufficiente la precisione delle rette che si trovano in natura, dalla percezione delle quali nulla lascia intendere che esistano rette esatte.⁹⁴ L'empirista, "mentre lascia libero corso ai suoi pensieri solo all'interno di rappresentazioni e concetti che corrispondono a percezioni o che ne sono originati, si comporta come un ragazzo posato che non oltrepassa mai la siepe del suo giardino." L'idealista, al contrario, immagina presente la fine di una serie di rappresentazioni, la quale non può essere mai percepita né rappresentata: "come un ragazzo selvaggio si fa beffe delle barriere di confine, chiama sua propria l'intera regione delle rappresentazioni e delle idee e ama inerparsi attraverso sterpaglie ed oltre ogni scoglio su cime dalle quali guardare lontano."⁹⁵ Il limite che l'empirista ammette non è il termine ideale di una serie di rappresentazioni ma una rappresentazione reale che vi corrisponda nel modo più esatto possibile: ciascun oggetto empirico può essere idealizzato sempre di più (ad esempio una striscia può essere pensata sempre più sottile) però durante tale idealizzazione le rappresentazioni si modificano gradualmente restando sempre reali poiché l'oggetto è rappresentato *quanto si voglia esatto* [beliebig genau] e non *compiutamente esatto* [vollkommen genau].⁹⁶

⁹³ Du Bois-Reymond, [1862], p. 92 e ss.

⁹⁴ "La linea retta ideale allora non è altro che la fine, arbitrariamente ammessa, di una successione di rappresentazioni dovute a misurazioni sempre più raffinate, ma non si può affatto provare che tale successione di rappresentazioni abbia un termine, anzi nel mondo delle nostre percezioni tutto parla contro quest'ipotesi." Du Bois-Reymond, [1862], p. 99.

⁹⁵ Du Bois-Reymond, [1862], pp. 112-113.

⁹⁶ Du Bois-Reymond, [1862], p. 118.

Né l'empirismo né l'idealismo sono per Du Bois-Reymond in grado di giustificare l'esattezza del calcolo infinitesimale. Brunschvicg individua la causa del fallimento di entrambe le interpretazioni nella fallacia del presupposto che le accomuna: il postulato realista, statico, "rappresentazionista", secondo il quale l'idea si definisce attraverso la sua materia. L'esistenza dell'infinito dipenderebbe cioè dalla rappresentabilità dell'insieme di tutti gli elementi che lo compongono anziché dalla possibilità di pensare la legge di formazione di questi numeri.⁹⁷ Per Veronese l'errore che accomuna empirista e idealista risiede nelle argomentazioni filosofiche inaccettabili mediante le quali tentano di dimostrare l'inesistenza o l'esistenza del limite. L'esistenza non può essere negata o attribuita al limite a causa dell'assenza o presenza di un oggetto concreto che gli corrisponda nel mondo fisico o ideale, bensì deve essere attribuita al limite soltanto in virtù della possibilità logica di tale concetto. Alcuni enti puramente astratti introdotti nei *Fondamenti* (ad esempio i segmenti infiniti e infinitesimi attuali) non sono delle semplici idealizzazioni di oggetti d'esperienza, nella considerazione dei quali astraiano dalle imperfezioni; essi sono piuttosto concetti non rappresentabili, le cui proprietà non sono derivate dall'osservazione. Questi enti non hanno *necessariamente* un'esistenza concreta ma hanno un'esistenza astratta perché sono il risultato di un processo del pensiero: esistono nella nostra mente e ne sono un prodotto. Non la rappresentabilità, dunque, bensì la non contraddittorietà è l'unica condizione di esistenza per gli enti della matematica (un po' più complessa è, come si è visto nel paragrafo 3.2, la condizione di possibilità geometrica). Alla luce del dialogo tra empirista e idealista si comprende la dichiarazione sopra citata di Veronese: egli è *razionalista o idealista* perché afferma che gli enti matematici esistono nella mente umana come prodotti del pensiero; non lo è però in senso filosofico perché non assume né che tali enti esistano solo nel pensiero né che essi esistano fuori di noi in un terzo regno. Veronese si limita ad escludere le concezioni ontologiche inconciliabili con il libero sviluppo della matematica: il realismo empirico che nega l'esistenza del limite e ogni filosofia finitista che

⁹⁷ Brunschvicg, [1929], p. 533.

escluda l'esistenza di gruppi infiniti. Come l'idealista della *Allgemeine Functionentheorie*, Veronese ammette anche ciò che fuoriesce dal campo percettivo, convinto che sia più importante "guardare lontano" anche a costo di commettere errori piuttosto che rimanere racchiusi nel piccolo giardino della percezione: adottare una concezione razionalista significa garantire la massima libertà alla ricerca matematica.⁹⁸ A differenza dell'idealista il matematico non ha però bisogno di aderire a teorie metafisiche ma si accontenta di rifiutare le ipotesi che contrastano con le teorie matematiche stesse. Individuando nell'atteggiamento nei confronti dell'infinito il carattere distintivo di ogni filosofia della matematica, Veronese si presenta come un razionalista infinitista: se gli oggetti matematici esistono solo nel nostro pensiero e ne sono prodotti, massima è infatti la libertà del matematico di creare nuovi enti e nuove teorie.

Proprio per garantire tale libertà Veronese assume il principio della *continuità del pensiero*, che permette di ampliare ogni gruppo dato di oggetti mediante la creazione di nuovi oggetti esterni al gruppo. Un insieme di punti considerato come totalità di tutti i punti possibili diventa così a sua volta elemento di un insieme più ampio che il pensiero costruisce con un salto: nuovi punti ampliano l'universo del discorso che è sempre in crescita e mai dato una volta per tutte. È interessante citare a questo proposito un passo di Zermelo tratto da *Über Grenzzahlen und Mengenberichte* del 1930, nel quale si afferma l'intrinseca non "completabilità" dell'universo degli insiemi, che può sempre essere ulteriormente esteso: di fronte alla sfiducia causata dai risultati di Skolem nella possibilità di rendere categorica la teoria degli insiemi (un sistema di assiomi, lo ricordiamo, è categorico se due qualunque modelli di quegli assiomi sono fra loro isomorfi), Zermelo difende le 'antinomie' della teoria degli insiemi, ritenendole causa non di un impoverimento ma piuttosto di un ampliamento della matematica "al di là di ogni orizzonte". Alla base dei paradossi della teoria degli insiemi, come anche delle antinomie kantiane starebbero "le tendenze polarmente contrapposte dello spirito pensante, l'idea del progresso creatore e quella della

⁹⁸ "Con questo idealismo noi abbiamo almeno il vantaggio sull'empirista che facciamo uso di tutte le ipotesi possibili nella ricerca della verità [...]." FC, p. XV.

conclusione che riassume", le quali

trovano la loro raffigurazione simbolica e la loro simbolica conciliazione nella successione transfinita dei numeri basata sul concetto di buon ordinamento; la quale nella sua continuazione illimitata non possiede alcuna vera conclusione, ma solo dei punti di stasi relativa [...].⁹⁹

Sostenendo che gli enti geometrici e più in generale quelli matematici astratti sono il risultato di un processo creativo del pensiero, Veronese non ha alcuna difficoltà ad assumere il punto di vista del pensiero stesso, che passo dopo passo si avventura nell'illimitato e nell'infinito, rivelando la limitatezza dello stadio precedentemente raggiunto. Qui emerge una distinzione che permea tutta l'epistemologia di Veronese e risulta essenziale per la costruzione della geometria iperspaziale: la distinzione tra punto di vista relativo e punto di vista assoluto. Da un punto di vista relativo lo spazio a tre dimensioni è l'insieme di tutti i punti possibili, da un punto di vista assoluto fuori di esso esistono ancora altri punti che determinano uno spazio a quattro dimensioni. In questo continuo passaggio tra relativo e assoluto emerge un aspetto importante del pensiero di Veronese: egli non ipostatizza l'infinito assoluto (che può sempre essere considerato a sua volta come relativo) né fa appello all'infinità divina per legittimare la capacità dell'uomo di pensarlo. Cantor al contrario si appella ad una pretesa affinità tra intelletto umano e divino per spiegare la possibilità del primo di trascendere la propria intrinseca limitatezza arrivando a costruire e distinguere anche dei numeri infiniti.¹⁰⁰

Dato uno spazio che consideriamo come un tutto, esso non contiene tutti i punti possibili ma tutti quelli finora costruiti (o tutti i punti relativi a tale spazio). Veronese non esclude che si possa stabilire per convenzione che una data classe è la

⁹⁹ Zermelo, [1930], p. 195.

¹⁰⁰ "Le parole "intelletto finito", che sentiamo tanto spesso, sono a mio giudizio del tutto improprie; per quanto la natura umana sia limitata - e lo è davvero - essa ha moltissimi punti di contatto con l'infinito, anzi se non fosse essa stessa infinita sotto molti aspetti, quella salda certezza e fiducia nell'essere dell'Assoluto nel quale sappiamo di essere tutti uniti sarebbe inspiegabile." Cantor, [1883], pp. 91-92.

classe di tutte le cose pensabili; se tale condizione non è esplicitata, è però legittimo supporre che il pensiero non si arresti mai ad una classe data, ma sia in grado di superarla pensando un altro oggetto al di fuori di essa.¹⁰¹ Se ad esempio si studia soltanto la geometria euclidea, si può considerare lo spazio a tre dimensioni come un insieme di punti al di fuori del quale non ne esistano altri. Questa limitazione — sembra insinuare Veronese — è però anch'essa un'ipotesi e dunque il problema è capovolto: senza un'esplicita limitazione il pensiero s'inoltra al di là delle tre dimensioni, continuando ad immaginare punti nello spazio a quattro, poi a cinque, ecc. dimensioni. Per fermare il progresso del pensiero al di là dello spazio ordinario occorre postulare che esso sia il gruppo di tutte le cose che vogliamo considerare. Veronese smaschera così la posizione tradizionale di chi si oppone all'esistenza della quarta dimensione: poiché il pensiero tende a trascendere ogni limite e a proseguire all'infinito per l'autoriflessività che lo contraddistingue, sarà il geometra che vuole negare gli iperspazi a dover introdurre un'apposita ipotesi che ne escluda la possibilità. Se non si stabilisce *a priori* che il pensabile è limitato, il nostro pensiero scavalca ogni limite che ad esso si para dinanzi, senza che la nostra mente giunga mai ad un punto di arresto: la totalità di tutte le cose pensabili, ammesso che esista, sfugge al dominio del nostro pensiero perché esso non raggiunge mai la fine del processo che lo porta oltre ogni nuovo limite. Sforzandosi di concepire una classe che contenga tutto ciò che possiamo pensare o che abbiamo pensato fino a un dato momento, il nostro pensiero è destinato a scoprire che esiste sempre qualcos'altro al di fuori di tale classe: ciascuna classe che sia oggetto del pensiero trova un altro oggetto fuori di sé, proprio come ogni proposizione pensata può essere a sua volta pensata. Il processo grazie al quale il pensiero trascende ogni suo prodotto per determinarne un altro non è considerato negativamente, come il tentativo della ragione di trascendere un limite ad essa intrinseco. Il supera-

¹⁰¹ "Se si dice invece che A contiene tutte le cose possibili che vogliamo pensare, con ciò escludiamo a priori le cose non contenute in A." PG, p. 14. In tal caso però l'esclusione degli oggetti che stanno al di fuori della classe è determinata a priori e non dipende dalla finitezza della mente umana.

mento del limite con un salto che ci porta in una nuova dimensione non conduce all'errore perché l'esistenza astratta è distinta dall'esistenza reale (sia essa concreta o ideale). La ragione non si sbilancia sull'esistenza reale nel mondo esterno delle cose pensate: si limita piuttosto a garantirne l'esistenza astratta attraverso l'indagine della non contraddittorietà logica.

Tenendo conto dell'intergioco tra intuizione e astrazione nella determinazione degli oggetti geometrici e delle premesse che ne descrivono le proprietà e seguendo l'indicazione di Veronese che si autodefinisce razionalista o idealista perché ammette la possibilità della costruzione di oggetti geometrici puramente astratti ai quali non corrisponde alcuna rappresentazione sensibile, si può caratterizzare la concezione di Veronese come un *razionalismo critico*. Il razionalismo di Veronese non va confuso con il razionalismo secentesco che si fondava sulla possibilità di ottenere una conoscenza certa del mondo per mezzo del pensiero e si opponeva alle posizioni degli empiristi radicali che sostenevano l'origine empirica di tutti i concetti e di tutte le verità. Se uno strascico di quest'opposizione è ancora presente in Du Bois-Reymond, non si trova però (almeno non esplicitamente) in Veronese, che rifiuta le argomentazioni filosofiche a sostegno della matematica. Nei *Fondamenti di geometria* si scopre però una traccia della fiducia nella capacità della ragione e addirittura nella possibilità della sua identificazione col procedimento matematico: Veronese afferma infatti l'esistenza di una misteriosa corrispondenza tra leggi del pensiero, leggi della natura, leggi comuni alla matematica e alla geometria. Quando il pensiero con l'intervento dell'astrazione integra le informazioni fornite dall'esperienza, esso è guidato dalle sue stesse regole e dall'analogia con il finito che conosciamo per osservazione diretta: si costituisce una sorta di equilibrio tra la descrizione della realtà mediata dai dati sensoriali e l'imposizione alla realtà di una certa struttura interpretativa o di un certo schema mentale proprio del pensiero. L'intervento del pensiero sembra essere guidato in modo da incontrare la realtà che future osservazioni potranno svelarci: poiché il libro della natura è scritto in linguaggio matematico, non stupisce che il nostro pensiero, le cui leggi fondamentali sono le stesse che operano nella matematica, possa fornircene una descrizione veritiera.

Se con l'espressione *razionalismo sperimentale* (formula comunemente adottata per caratterizzare l'epistemologia di

Enriques) si sottolinea l'esigenza di rivalutare sia l'esperienza sia la ragione (da un lato il contenuto empirico degli assiomi, dall'altro il procedimento deduttivo con il quale sono dimostrate tutte le verità del sistema), Veronese non sembrerebbe molto distante da questa posizione, che attribuisce un ruolo importante all'esperienza e all'intuizione. La sua concezione filosofica è però radicalmente diversa da quella di Enriques, per il quale la geometria è una scienza empirica, i cui postulati non hanno certezza assoluta perché privi di necessità logica (sia dall'assunzione del postulato delle parallele che dall'assunzione della sua negazione si ottengono infatti teorie non contraddittorie e dunque logicamente possibili). Veronese al contrario considera la geometria una scienza mista che non può essere ricondotta ad una parte della meccanica. Insistendo sulla derivazione (testimoniata dalle ricerche fisio-psicologiche) delle nostre rappresentazioni geometriche dalle sensazioni, Enriques afferma che il tipo di necessità che attribuiamo ai postulati euclidei è *subiettiva* e si propone il compito di

Desumere i concetti spaziali, che cadono sotto l'intuizione esatta del matematico, dalle rappresentazioni sensibili di cui la psicologia fisiologica mostra la genesi. Spiegare i postulati della Geometria che così viene subiettivamente costruita, riattaccandone la necessità alla struttura logica del pensiero. La spiegazione consiste precisamente in questo, che i suddetti postulati appaiono come condizioni logicamente necessarie, per la possibilità di certe associazioni, da cui hanno origine i concetti geometrici.¹⁰²

Se la genesi delle rappresentazioni spaziali è empirica, la giustificazione di esse è subiettiva: i rapporti spaziali tra gli oggetti non sono altro che condizioni logiche necessarie per poter associare tra loro le rappresentazioni genetiche e quelle attuali degli oggetti materiali dai quali deriviamo gli enti geometrici. Nei *Problemi della scienza* Enriques individua nella genesi psicologica dell'intuizione il punto di contatto tra empirismo e apriorismo:

Le premesse del nativismo e dell'empirismo appaiono entrambe, fino a un certo punto, vere, ma le conseguenze che se

¹⁰² Enriques, [1901].

ne traggono unilaterali e incompiute. I due indirizzi tendono a conciliarsi nella ricerca di spiegare l'intuizione spaziale come uno sviluppo psicologico da sensazioni, in cui si tenga conto della struttura del soggetto.¹⁰³

Veronese si oppone fermamente a questo progetto di individuare una necessità psicologica nel modo in cui i concetti geometrici si formano a partire dalle rappresentazioni spaziali che derivano dalle sensazioni perché o si ammette che il postulato di Euclide non è più certo o si dimostra la necessità logica che ci spinge ad estenderlo allo spazio illimitato, nel quale non è più sufficiente la testimonianza dei sensi:

Ma meno ancora possiamo concepire che, riconoscendo l'origine empirica della geometria, e che quindi nel mondo fisico il postulato di Euclide è meno sicuro degli altri, si attribuisca poi a questo postulato una *necessità intuitiva subiettiva*, perché l'intuizione in tal caso dipende necessariamente dall'elemento empirico e può variare con esso.¹⁰⁴

Poiché l'intuizione dipende necessariamente dall'esperienza insieme alla quale si origina, è assurdo che da un lato si riconosca che la geometria è priva di necessità logica perché ha origine nell'esperienza e dall'altro le si attribuisca una necessità intuitiva. La geometria non è una descrizione più o meno certa della realtà: essa è una teoria astratta che fornisce un'interpretazione del mondo esterno in accordo con le nostre rappresentazioni spaziali intuitive.

Il razionalismo di Veronese va compreso nell'opposizione all'empirismo e ad ogni filosofia che freni lo sviluppo della matematica rifiutando principi prodotti dal pensiero (benché forse suggeriti dall'esperienza) essenziali allo sviluppo di ogni teoria matematica: il passaggio dal limitato all'illimitato, il quale permette l'idealizzazione degli enti geometrici, l'accettazione della legge di generalizzazione che fonda l'induzione completa e l'assunzione del concetto di limite. L'essenza del razionalismo di Veronese si coglie nell'affermazione della *legge della continuità del pensiero*, che non è determinata dall'esperienza ma caratte-

¹⁰³ Enriques, *Problemi della scienza*, Zanichelli, Bologna, 1906, p. 174, cit. in Speranza, [1991], p. 461.

¹⁰⁴ VM, p. 35, nota 12.

rizza la nostra facoltà pensante in quanto tale e permette il superamento di ogni limite.¹⁰⁵ Proprio l'assunzione di questo principio che grazie all'autoriflessività del pensiero permette di trascendere ogni totalità data per costruirne un'altra più ampia, rivela che la geometria di Veronese, pur essendo ancora definita come scienza dello spazio, ha il compito di descrivere la realtà senza limitarsi ai dati che l'osservazione empirica fornisce: compito della geometria è piuttosto, in una concezione chiaramente razionalistica, quello di trascendere il dato empirico per produrre con il solo pensiero una nuova realtà astratta che comprenda al suo interno la rappresentazione empirica della realtà.

L'aggettivo critico che connota questo razionalismo fondato sull'interazione tra ragione e esperienza rimanda sia all'attenzione per il problema dell'origine dei concetti e dell'ambito della loro applicazione, sia all'impostazione storico-critica di Veronese, il cui testo (in particolare l'Appendice) è ricco di riferimenti e confronti dialettici con le posizioni di altri matematici.¹⁰⁶ Critica in senso etimologico è anche l'attenzione che Veronese rivolge alle concezioni filosofiche che contrastano o limitano la ricerca scientifica. Critico è soprattutto l'atteggiamento del matematico verso il proprio stesso lavoro perché il ricorso all'intuizione, benché legittimo, non deve avere valore fondante in una teoria ma esserne espunto appena possibile se si vuole raggiungere un alto standard di rigore. L'appello all'intuizione non ha la conseguenza di limitare il campo di ricerche del matematico ma separa con precisione il campo della geometria da quello della matematica astratta: Veronese non considera l'intuizione come un presupposto non analizzabile di ogni discorso geometrico ma evidenzia l'intergioco tra astrazione e intuizione che interviene a vari livelli nella determinazione dell'oggetto geometrico. È significativo che la riflessione rigorosa sul ruolo dell'intuizione in matematica e sulla distinzione tra origine empirica e giustifica-

¹⁰⁵ Da questo principio derivano tra l'altro i due risultati più importanti della teoria matematica di Veronese: la costruzione del continuo non archimedeo e la determinazione della teoria degli iperspazi.

¹⁰⁶ A scanso di equivoci precisiamo che adottando l'espressione *razionalismo critico*, compromessa con l'epistemologia di Popper, non si è certo inteso classificare Veronese come un fallibilista né scorgere nella sua opera anticipazioni del metodo per congetture e confutazioni.

zione logica delle premesse si accompagni in Veronese al tentativo di conservare la centralità dei dati esperienziali nella costruzione di ogni teoria geometrica senza rinunciare all'espunzione del ricorso all'intuizione nella formulazione assiomatica delle teorie. Il contributo di Veronese allo sviluppo assiomatico-formale della geometria è dunque, quasi paradossalmente, legato al recupero del ruolo dell'intuizione nella determinazione degli oggetti e delle premesse geometriche. Il tentativo di conservare alla geometria il ruolo di scienza dello spazio, privilegiando il metodo sintetico rispetto a quello analitico, lungi dal concludere in un programma di ricerca regressivo e poco fecondo, ha fornito invece lo spunto per uno studio algebrico delle strutture ordinate non archimedee sviluppato da Levi-Civita e da Hans Hahn. Se oggi il punto di vista sintetico sembra superato, poiché lo studio della geometria è ricondotto all'interazione di diverse strutture topologiche, differenziali, algebriche, non bisogna però dimenticare che è in un certo senso proprio dalla concezione sintetica delle grandezze geometriche che è sorto lo studio delle strutture algebriche ordinate, allo sviluppo delle quali il programma di Veronese ha contribuito in modo tutt'altro che marginale. Gli studi di Levi-Civita sulla costruzione di un modello numerico di campo ordinato non archimedeo che rappresentasse il continuo geometrico costruito da Veronese e le ricerche di Hans Hahn sul rapporto tra le proprietà del campo dei numeri reali e quelle di campi ordinati non archimedei ma completi (in un senso molto simile a quello espresso per i reali dall'assioma di completezza di Hilbert) testimoniano l'importanza e la fecondità della teoria e della concezione epistemologica di Veronese non solo da un punto di vista logico e filosofico, ma anche matematico e storico.

BIBLIOGRAFIA

1. Elenco completo delle opere di Giuseppe Veronese¹

- [1876-77a], "Nuovi teoremi sull'Hexagrammum mysticum", *Transunti della Reale Accademia dei Lincei*, (3) 1, pp. 141-142
- [1876-77b], "Nuovi teoremi sull'Hexagrammum mysticum", *Memorie della Reale Accademia dei Lincei*, (3) 1, pp. 649-703
- [1879], "Teoremi e costruzioni di Geometria proiettiva", *Giornale di matematica*, 17, pp. 172-182
- [1879-80], "Sopra alcune notevoli configurazioni di punti, rette e piani, di coniche e superficie di 2° ordine". Note I e II., *Transunti della Reale Accademia dei Lincei*, (3) 4, pp. 132-149
- [1880-81a], "Sopra alcune notevoli configurazioni di punti, rette e piani, di coniche e superficie di 2° grado, e di altre curve e superficie" Memoria I e II. *Memorie della Reale Accademia dei Lincei*, (3) 9, pp. 265-343
- [1880-81b], "Alcuni teoremi sulla geometria a n dimensioni", *Transunti della Reale Accademia dei Lincei*, (3) 5, pp. 333-338
- GD [1881-82], "Sulla Geometria descrittiva a quattro dimensioni", *Atti del Regio Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti*, (5), 8, pp. 987-1024 (con tre tavole)
- [1881], "Die Anzahl der unabhängigen Gleichungen, die zwischen den allgemeinen Charakteren einer Curve im Räume von n Dimensionen stattfinden", *Mathematische Annalen*, 18
- [1882a], "Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Prinzip des Projicirens und Schneidens", *Mathematische Annalen*, 19, pp. 161-234
- [1882b], *Dei principali metodi in Geometria, e in ispecial modo del metodo analitico. Prelezione al corso di Geometria analitica*, Verona, Drucker e Tedeschi

¹ Accanto ad alcune opere è riportata la sigla utilizzata nel testo come riferimento bibliografico.

- [1882-83a], "Interprétations géométriques de la théorie des substitutions de n lettres, particulièrement pour $n = 3, 4, 5, 6$, en relation avec les groupes de l'Hexagramme mystique", *Annali di matematica*, (2) 11, pp. 93-236
- [1882-83b], "Sui gruppi $(P)_{260}$, $(Z)_{260}$ della figura di sei complessi lineari di rette due a due in involuzione", *Annali di matematica*, (2) 11, pp. 284-290
- [1883-84a], "Dimostrazione della formula
- $$\left| \begin{array}{c} p \\ r-1 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} q-1 \\ 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} q-1 \\ 2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} p \\ r+1 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} q-1 \\ 3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} p \\ r+2 \end{array} \right| + \dots = \left| \begin{array}{c} p+q-1 \\ q+r-2 \end{array} \right|$$
- mediante la geometria a n dimensioni", *Atti del Regio Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti*, (6), 2, pp. 137-143
- [1883-84b], "Di una costruzione della superficie del 4° ordine dotata di conica doppia", *Atti del Regio Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti*, (6), 2, pp. 1841-1842
- [1883-84c], "La superficie omaloide normale a due dimensioni e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario", *Memorie della Reale Accademia dei Lincei*, (3), 19, pp. 344-371
- CRA [1889], "Il continuo rettilineo e l'assioma V di Archimede", *Memorie della Reale Accademia dei Lincei*, *Atti della Classe di scienze naturali, fisiche e matematiche*, (4), 6, pp. 603-624
- FG [1891], *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare. Lezioni per la Scuola di magistero in Matematica*. Padova, Tipografia del Seminario
- [1892a], "A proposito di una lettera del prof. Peano", *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 6, pp. 42-47
- [1892b], "Osservazioni sopra una dimostrazione contro il segmento infinitesimo attuale", *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 6, pp. 73-76
- OPG [1893-94], "Osservazioni sui principii della geometria", *Atti della Reale Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova*, 10, pp. 195-216
- GG [1894], *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Mit Genehmigung des Verfassers nach einer neuen Bearbeitung des Originals übersetzt von Adolf Schepp*, Leipzig, Teubner
- [1895], "Dimostrazione della proposizione fondamentale dell'equivalenza delle figure", *Atti del Regio Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti*, (7), 6, pp. 421-437
- OSI [1896], "Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti o infinitesimi attuali", *Mathematische Annalen*, 47, pp. 423-432
- EG [1895-97], *Elementi di Geometria, ad uso dei licei e degli istituti tecnici (primo biennio), trattati con la collaborazione di P. Gaizzaniga*, Verona e Padova, Drucker, 1908,

- PC [1897a], "Sul postulato della continuità", *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, (5), 6, pp. 161-167
- AEG [1897b], *Appendice agli Elementi di Geometria*, Verona e Padova, Drucker
- [1898], "Segmenti e numeri transfiniti", *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, (5), 7, pp. 79-87
- [1898-99], "Pareri e voti in relazione al disegno di legge per la conservazione della Laguna di Venezia" presentato al Senato del Regno nella seduta del 23 marzo 1898. (Relazione della Sottocommissione per l'Idraulica). Veronese relatore. *Atti del Regio Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti*, (7) 10, Appendice, pp. 1-110.
- NEG [1901/09], *Nozioni elementari di Geometria intuitiva, ad uso dei ginnasi inferiori*, Verona e Padova, Drucker, 1901. *Elementi di Geometria intuitiva ad uso delle Scuole Tecniche*, Padova, Drucker, 1909
- PGE [1902], "Les postulats de la Géométrie dans l'enseignement", in *Compte Rendu du 2^e Congrès international des mathématiciens (Paris 1900)*, Paris, pp. 433-450
- [1903], "Commemorazione del socio Luigi Cremona", *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, (5), 12, pp. 664-678. Trad. polacca in *Wiadomosci Matematyczne*, 8 (1904), pp. 150-164
- [1904], "La Laguna di Venezia". Discorso letto nell'adunanza solenne del Regio Istituto Veneto il 29 maggio 1904. *Atti del Regio Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti*, (7) 63, p. 1, pp. 137-157. (rist. Roma, Forzani e C. Tipografi del Senato, 1906)
- GNA, [1905], "La geometria non-Archimedea. Una questione di priorità", *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, (5), 14, pp. 347-351
- VM [1906], *Il vero nella matematica. Discorso inaugurale dell'anno scolastico 1905-1906 letto nell'Aula Magna della R. Università di Padova il giorno 6 novembre 1905*. Roma, Forzani e C.
- [1908-09a], Discorso nell'assumere la Presidenza. *Atti del Regio Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti*, (7) 68, p. 1, pp. 28-30
- [1908-09b], Discorso per la sua partecipazione quale rappresentante dell'Istituto alle solennità dell'Università di Cambridge in onore di Carlo Darwin il 22, 23, 24 giugno 1909. *Atti del Regio Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti*, (7) 68, p. 1, pp. 125-127
- [1908-09c], Parole pronunziate, nella solenne seduta del Congresso per il progresso delle scienze, nella sala dei Pregadi del Palazzo Ducale di Venezia il 26 settembre 1909, in occasione della consegna della medaglia fatta dalla Società italiana per il progresso delle scienze all'Association française pour l'avancement des sciences. *Atti del Regio Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti*, (7) 69, p. 1, pp. 17-23

- GNA, [1909], "La geometria non-Archimedea", *Atti del 4° Congresso internazionale dei Matematici*, Roma 1908, Vol. I, pp. 197-208. Trad. francese in *Bulletin des sciences mathématiques* (2), 33 (1909), pp. 186-204
- [1913-14], Relazione della Commissione dell'Istituto Veneto (Veronese relatore) circa la scelta del tema per il concorso a premio Fondazione Querini Stampalia per l'anno 1917, concernente le scienze matematiche e naturali, *Atti del Regio Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti*, (7) 73, p. I, pp. 203-206
- [1914], "Osservazioni intorno ad una polemica", *Bollettino della Mathesis*, VI, 1914
- [1915], *Complementi di Algebra e Geometria ad uso dei Licei moderni, trattati con la collaborazione di Paolo Gazzaniga*, Padova, Drucker

2. Studi specifici su Giuseppe Veronese

- BALDASSARRI GHEZZO S., [1995], *Giuseppe Veronese Matematico dell'Università di Padova*, Padova, Decibel
- BORDIGA G., [1930-31], "Commemorazione di Giuseppe Veronese", *Atti del Regio Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti*, 90, p. II, pp. 48-72
- [1931], Commemorazione di Giuseppe Veronese pronunciata all'Università di Padova il 13 maggio 1931, inaugurandosi il busto marmoreo del grande geometra
- BRIGAGLIA A., [1994], "Giuseppe Veronese e la geometria iperspaziale in Italia", in *Le scienze matematiche nel Veneto dell'Ottocento. Atti del Terzo Seminario di Storia delle Scienze e delle Tecniche nell'Ottocento Veneto*, Venezia, Istituto Veneto, pp. 231-261
- BULLO C., [1904], *Biografia del prof. Comm. Giuseppe Veronese di Chioggia. Senatore del Regno*, Chioggia, Vianelli e C.
- BUSSOTTI P., [1997], *Giuseppe Veronese e i fondamenti della matematica*, Pisa, ETS
- BUSULINI B., [1969-70], "La retta non-archimedea di Giuseppe Veronese", *Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti, Atti della Classe di Scienze Matematiche e Naturali*, 128, pp. 239-263
- FISHER G., [1994], "Veronese's non-archimedean linear continuum", in Ehrlich, [1994], pp. 107-145
- FREGUGLIA P., [1998], "I fondamenti della geometria a più dimensioni secondo Giuseppe Veronese", in *Seminari di geometria 1996-1997*, a cura di S. Coen, Bologna, Università degli Studi di Bologna, Dipartimento di Matematica, pp. 253-277
- MANARA C.F., [1986], "Giuseppe Veronese e il problema del continuo geometrico", *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano*, 56, pp. 99-111

- MANARA C.F., SPOGLIANTI M., [1977], "La idea di iperspazio. Una dimenticata polemica tra G. Peano, C. Segre e G. Veronese", *Atti e Memorie dell'Accademia Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti di Modena*, (6) 19
- PALATINI F., [1904], "I principi della geometria esposti secondo il metodo del prof. Veronese", *Giornale di Matematica*, Napoli
- PEANO G., [1892], "Breve replica al Prof. Veronese", *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 6, p. 160
- PEANO G., [1891], "Lettera aperta al prof. G. Veronese", *Rivista di Matematica*, 1, pp. 267-269
- PFEIFFER-REUTER R., [1989], "L'infini relatif chez Veronese et Natorp", in Barreau-Harhong, [1989], pp. 96-103
- SCHOENFLIES A., [1894], "Sur les nombres transfinis de Mr. Veronese", *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*, (5) 6, pp. 362-368
- SEGRE C., [1917], "Commemorazione del Socio Nazionale Giuseppe Veronese", *Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti* (5) 26, p. II, pp. 249-258
- SEVERI F., [1920], "Prof. Giuseppe Veronese", *Annuario della R. Università degli studi di Padova*

3. Riferimenti bibliografici essenziali²

- A.A.V.V., [1887], *Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller zu seinem Fünfzigjährigen Doctorjubiläum gewidmet*, Leipzig, Fues
- ABBOTT E. A., [1882], *Flatland. A Romance of many dimensions*. Tr. it. di Masolino d'Amico, E. A. Abbott, *Flatlandia. Racconto fantastico a più dimensioni*, Milano, Adelphi, 1993.
- AGAZZI E., DARVAS G., [1997], (a cura di) *Philosophy of Mathematics Today*, Dordrecht, Kluwer
- AGAZZI E., PALLADINO D., [1978], *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Milano, Mondadori
- ARISTOTELE, [1995], *Fisica*, trad. it. a cura di L. Ruggiu, Milano, Rusconi
- [1971], *Metafisica*, trad. it. a cura di A. Russo, Laterza, Bari
- BARON M.E., [1969], *The origins of the infinitesimal calculus*, Oxford, Pergamon

² Abbiamo elencato soltanto i testi esplicitamente citati nel volume. Un'ampia bibliografia sulla geometria e sulle discussioni intorno alla natura dello spazio e dell'intuizione a fine Ottocento si trova in molti dei testi che abbiamo citato, in particolare Boi-Flament-Salanskis [1992], Bottazzini [1990], Ehrlich [1994], Ewald [1996], Hintikka [1995], Torretti [1978].

- BARREAU H., HARTHONG J., [1989], (a cura di) *La mathématique non standard*, Paris, CNRS
- BELTRAMI E., [1868], "Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea", *Giornale di matematiche*, 6, pp. 284-312. Ora anche in Beltrami, *Opere matematiche*, Milano, Hoepli, I, pp. 374-405.
- BERGMANN H., [1909], *Das philosophische Werk Bernard Bolzanos mit Benutzung ungedruckter Quellen kritisch untersucht*, con un'appendice "Bolzano's Beiträge zur philosophischen Grundlegung der Mathematik", Halle, Niemeyer
- BETTAZZI R., [1890], *Teoria delle grandezze*, Pisa, ristampato in *Annali delle Università Toscane, Scienze cosmologiche*, 19 (1893), (2), pp. 1-180 [1891], "Sull'infinitesimo attuale", in *Rivista di matematica*, I, pp. 174-182
- BINDONI A., [1902], "Sui numeri infiniti ed infinitesimi attuali", *Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti della classe delle scienze fisiche, matematiche e naturali*, II (2), pp. 205-209
- BOI L., FLAMENT D., SALANSKIS J.M., [1992], (a cura di) *1830-1930: A Century of Geometry*, Berlin-Heidelberg, Springer
- BOLZANO B., [1810], *Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*, a cura di H. Wußing, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1974
- [1837], *Wissenschaftslehre, Versuch einer ausführlichen und grösstentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherigen Bearbeiter*, Sulzbach, parte II: Elementarlehre, rist. in B. Bolzano *Gesamtausgabe*, a cura di E. Winter, J. Berg, F. Kambartel, J. Loužil e B. van Rootselaar, Stuttgart-Bad Canstatt, Frommann-Holzboog, I, 11/2-3, 12/1-3, 1985-1988
- [1851], *Paradoxien des Unendlichen*, a cura di H. Hahn, Leipzig, 1920. Ed. it. *I paradossi dell'infinito*, a cura di F. Voltaggio, Milano, Feltrinelli, 1965
- BORGA M., FREGUGLIA P., PALLADINO D., [1985], *I contributi fondazionali della scuola di Peano*, Milano, Franco Angeli
- BOTTAZZINI U., [1990], *Il flauto di Hilbert: Storia della matematica moderna e contemporanea*, Milano, Utet
- BRIGAGLIA A., [1994], "Giuseppe Veronese e la geometria iperspaziale in Italia", in *Le scienze matematiche nel Veneto dell'Ottocento. Atti del Terzo Seminario di Storia delle Scienze e delle Tecniche nell'Ottocento Veneto*, Venezia, Istituto Veneto, pp. 231-261
- BROUWER L.E.J., [1907], *Over de grondslagen der wiskunde. Akademisch proefschrift*, Amsterdam, Maas & van Schutelen. Trad. ingl. in *Collected Works*, Amsterdam, North-Holland, 1975, I, pp. 13-101
- BRUNSCHVICG L., [1912], *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris, Aican, rist. Paris, Blanchard, 1981

- CANTOR G., [1883], "Grundlagen einer Mannigfaltigkeitslehre", *Mathematische Annalen*, 21, pp. 545-586. Trad. it. *La formazione della teoria degli insiemi*, a cura di G. Rigamonti, Firenze, Sansoni, 1992, pp. 77-134.
- [1885], "Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche", da uno scritto a G. Eneström del 4 novembre 1885, *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 88, pp. 224-233, ora in Cantor [1966], pp. 370-377
- [1887-88], "Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten", *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 91, pp. 81-125; 92, pp. 240-265, ora in Cantor, [1966], pp. 378-439
- [1889], *Cantor an Dedekind*, Halle, 28 Juli 1899, in Cantor, [1966], pp. 443-7.
- [1895-97], "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre", *Mathematische Annalen*, 46, pp. 481-512; 49, pp. 207-246, ora in Cantor, [1966], pp. 282-356
- [1966], *Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, a cura di E. Zermelo, Hildesheim, Olms, 1966²
- CASARI E., [1964], *Questioni di filosofia della matematica*, Milano, Feltrinelli
- CASTELNUOVO G., [1962], *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Milano, Feltrinelli
- CHIROLLET J.-C., [1989], "Le continu mathématique 'du troisième ordre' chez Henri Poincaré", in BARREAU - HARTHONG, [1989], pp. 83-116
- COHEN H., [1902], *Logik der reinen Erkenntnis*, Berlin, 1914
- CONTRO W., [1975-76], "Von Pasch zu Hilbert", *Archive for History of Exact Sciences*, 15, pp. 283-295
- DEDEKIND R., [1872], *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, in R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke*, vol. III, Braunschweig, Vieweg & Sohn, 1932, pp. 315-334. Trad. it. a cura di T. Gana in R. Dedekind, [1982], pp. 63-78
- [1888], *Was sind und was sollen die Zahlen?*, in R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke*, cit., pp. 335-391. Trad. it. a cura di T. Gana in R. Dedekind, [1982], pp. 79-128
- [1982], *Scritti sui fondamenti della matematica*, a cura di T. Gana, Napoli, Bibliopolis
- DU BOIS-REYMOND P., [1870-71], "Sur la grandeur relative des infinis des fonctions", *Annali di matematica pura ed applicata*, serie I), 4, pp. 338-353
- [1877], "Über die Paradoxien des Infinitärcalculs", *Mathematische Annalen*, 11, pp. 149-167
- [1882], *Die Allgemeine Functionentheorie*, Tübingen, Laupp
- EHRlich P., [1994], (a cura di) *Real numbers, generalisation of the reals and theories of continua*, Dordrecht, Kluwer

- [1995], "Hahn's 'Über die nichtarchimedischen Grössensysteme' and the development of the modern theory of magnitudes and numbers to measure them", in Hintikka, [1995], pp. 165-213
- ENRIQUES F., [1901], "Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria", *Rivista filosofica di G. Cantoni*, Padova, pp. 171-195
- [1911] "Principes de la géométrie" in *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, III, pp. 1-147
- [1932], "L'evoluzione delle idee geometriche nel pensiero greco: punto, linea e superficie", *Questioni riguardanti le Matematiche elementari*, Bologna, Parte I, Vol. 1, Art. 1
- EUCLIDE, [1970], *Gli elementi*, Torino, UTET
- EWALD B., [1996], (a cura di) *From Kant to Hilbert*, Oxford, Clarendon Press, 2 voll.
- FANO G., [1932], "Geometrie non euclidee e non archimedee", in *Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi*, a cura di L. Berzolari, G. Vivanti e D. Gigli, Milano, Hoepli, vol. II, parte II, art. XXXVIII, pp. 435-511
- FISHER G., [1981], "The infinite and infinitesimal Quantities of Du Bois-Reymond and their Reception", *Archive for History of Exact Sciences*, 24 (2), pp. 101-164
- FLAMENT D., [1992], "La 'lineale Ausdehnungslehre' (1844) de Hermann Günther Grassmann", in Boi-Flament-Salanskis, [1992], pp. 205-221
- FRANCHELLA M., [1994], L.E.), *Brouwer pensatore eterodosso*, Milano, Guerini e Associati
- FREGE G., [1884], *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, Trad. It. *Fondamenti dell'aritmetica. Una ricerca logico-matematica sul concetto di numero*, a cura di L. Geymonat e C. Mangione in G. Frege, *Logica e aritmetica*, Torino, Bollati Boringhieri, 1965
- FREUDENTHAL H., [1957], "Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie", *Nieuw Archief voor Wetkunde*, (3) 5, pp. 105-142
- GALUZZI M., [1980], "Geometria algebrica e Logica tra Otto e Novecento", in Micheli G., a cura di, *Scienza e tecnica nella cultura e nella società dal Rinascimento ad oggi*, *Annali della Storia d'Italia*, Torino, Einaudi, pp. 1001-1105
- GAUSS C.F., [1900], *Werke*, herausgegeben von königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, Teubner, vol. VIII
- GEYMONAT L., [1948], *Storia e filosofia dell'analisi infinitesimale*, Torino, Levrotto Bella
- GIORELLO G., [1985], *Lo spettro e il libertino. Teologia, matematica, libero pensiero*, Milano, Feltrinelli
- GIUSTI E., [1999], *Ipotesi sulla natura degli enti matematici*, Torino, Bollati Boringhieri

- GRASSMANN H., [1844], *Die lineale Ausdehnungslehre*, in *Gesammelte mathematische und physikalische werke*, vol. I, Bronx, Chelsea Publishing Company, 1969
- GURLAUME M., [1978], "Axiomatique et logique" in D. Dieudonné (a cura di), *Abrégé d'histoire de mathématiques 1700-1900*, Paris, Hermann, 2 voll.
- HAHN H., [1907], "Über die Nichtarchimedischen Grössensysteme", *Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien: Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Klasse IIa*, 116, pp. 601-655
- HELMHOLTZ H., [1870], "Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome", Vortrag gehalten im Docentenverein zu Heidelberg, in Helmholtz, *Über Geometrie*, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1968, pp. 1-31.
- [1876], "The Origin and Meaning of Geometrical Axioms", *Mind*, I, pp. 301-321, ora anche in Ewald, [1996], pp. 663-685.
- [1878], *Die Tatsachen in der Wahrnehmung*, Rede gehalten zur Stiftungsfeier der Friedrich-Wilhelms-Univ. zu Berlin am 3. August 1878, ristampato con aggiunte e correzioni, Hirschwald, Berlin, 1879. Ora in Helmholtz, *Vorträge und Reden*, Braunschweig, 1884, pp. 213-247
- [1887], "Zählen und Messen, erkenntnistheoretisch betrachtet", in A.A.V.V. [1887], pp. 17-52
- HILBERT D., [1899], *Grundlagen der Geometrie*, Stuttgart, Teubner. Tr.it. di Pietro Canetta, *Fondamenti della geometria*, Milano, Feltrinelli, 1970
- [1935], *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin, Springer
- HINTIKKA J., [1995], (a cura di) *From Dedekind to Gödel. Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*, Dordrecht, Kluwer
- HÖLDER O., [1901], "Die Axiome der Quantität und die Lehre von Mass", *Berichten der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, pp. 1-64
- HUSSERL E., [1891], *Philosophie der Arithmetik*, in *Husserliana*, vol. XII, a cura di M. Nijhoff, Den Haag, 1970.
- KANT I., [1764], *Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und der Moral*, Trad. it. a cura di P. Caraballese, R. Assunto, *Indagine sulla distinzione dei principi della teologia naturale e della morale*, in Kant, *Scritti precritici*, Roma Bari, Laterza, 1990²
- [1787], *Kritik der reinen Vernunft*, Tr. it. di G. Gentile e G. Lombardo Radice, *Critica della ragion pura*, Roma-Bari, Laterza, 1991.
- [1800], *Logik*, Tr. it. a cura di L. Amoroso, *Logica*, Roma-Bari, Laterza, 1984

- KLEIN F., [1872], *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Programm zur Antritt in die philosophische Fakultät und den Senat der Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen*, Erlangen, Deichert, 1872. Tr. it. a cura di G. Fano, "Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti", *Annali di matematica pura ed applicata*, (2), 17 (1890), pp. 307-343
- [1890], "Zur Nicht-Euklidische Geometrie", *Mathematische Annalen*, 37, in Klein, [1921-23], I, pp. 353-383
- [1893], "On the Mathematical Character of Space-intuition and the Relation of Pure Mathematics to the Applied Sciences", in Klein, [1921-23], I, pp. 225-231
- [1898], "Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen anlässlich der ersten Verteilung des Lobacevskij-Preises", *Bulletin Soc. Phys. Math. Kasan*, (2), anche in *Mathematische Annalen*, 50, pp. 583-600, ora in Klein, [1921-23], I, pp. 384-401
- [1921-23], *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, a cura di R. Fricke, A. Ostrowski, H. Vermeil, E. Bessel-Hagen, Berlin, Springer, 3 voll.
- KLINE M., [1972], *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Trad. it. a cura di Alberto Conte, *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, Torino, 1996², 2 voll.
- KRONECKER L., [1887], "Über den Zahlbegriff", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 101, n. 4, pp. 337-355, rielaborazione dell'articolo omonimo apparso in A.A.V.V., [1887]
- LAUGWITZ D., [1975], "Tullio Levi-Civita's Work on Non-Archimedean Structures (With an Appendix: Properties of Levi-Civita Fields)", in *Atti dei Convegni Lincei*, Tullio Levi-Civita Convegno Internazionale Celebrativo Del Centenario della Nascita, 8, pp. 297-312
- LAWVERE F.W., [1994], "Cohesive Toposes and Cantor's 'lauter Einsen'", *Philosophia Mathematica*, (3) 2, pp. 5-15
- LEIBNIZ G. W., [1961], *Mathematische Schriften*, a cura di C. I. Gerhardt, 7 voll., Berlin, poi Halle 1849-63, ristampato Hildesheim 1961
- LEVI-CIVITA T., [1892-93], "Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici", *Atti dell'istituto Veneto di Scienze, lettere ed arti*, (7) 4, pp. 1765-1815. Ora in *Opere Matematiche*, vol. I, Bologna 1954, pp. 1-39
- [1898], "Sui numeri transfiniti", *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei*, (5) 7, pp. 91-96, 113-121. Ora in *Opere Matematiche*, cit., vol. I, pp. 315-329
- MCLARTY C., [1988], "Defining Sets as Sets of Points of Spaces", *Journal of Philosophical Logic*, 17, pp. 75-90
- MAGNANI L., [1991], "Filosofia e geometria: fra Kant e Poincaré", in Magnani (a cura di), *Conoscenza e matematica*, Milano, Marcos Y Marcos, pp. 185-222

- MANCIONE C., BOZZI S., [1993], *Storia della logica. Da Boole ai nostri giorni*, Milano, Garzanti
- NATORP P., [1921], *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*, Leipzig und Berlin, rist. anastatica Wiesbaden, Sändig, 1969
- PALLADINO D., [1997], *Oltre il mito della crisi*, Brescia, La Scuola
- PALLADINO D., VALLEBONA M., [1987], "L'infinitesimo fra storia e filosofia della matematica", *Epistemologia* X, pp. 55-74
- PASCH M., [1884], *Vorlesungen über die neuere Geometrie*, Leipzig, 1884; seconda edizione, Berlin, Springer, 1926, con appendice di Max Dehn (rist. Berlin, Springer, 1976)
- PEANO G., [1889], *I principii di geometria logicamente esposti*, Torino, Bocca, ora in Peano, *Opere scelte*, Roma, Cremonese, II, pp. 56-91
- [1891a], "Osservazioni del Direttore (ad una lettera di C. Segre)", *Rivista di Matematica*, vol. I, Torino, Bocca, pp. 66-69
- [1891b], "Lettera aperta al prof. G. Veronese", *Rivista di Matematica*, Vol. I, Torino, Bocca, pp. 267-269
- [1892], "Recensione al volume di G. Veronese 'Fondamenti di geometria...'", *Rivista di Matematica*, 2, p. 144
- [1957], *Opere scelte*, a cura di U. Cassina, Cremonese, Roma, 1957, vol. I
- POINCARÉ H., [1887], "Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie", *Bulletin Soc. Math. France*, 15, pp. 203-216, ora in Poincaré, *Œuvres*, Paris, Gauthier-Villars, XI, pp. 79-91
- [1902a], *La science et l'hypothèse*, Paris, Flammarion. Tr. it. di M. Borchetta, *La scienza e l'ipotesi*, in Poincaré, *Opere epistemologiche*, Abano Terme, Piovan, I, pp. 51-234.
- [1902b], "Les Fondements de la géométrie. Analyse et discussion de l'ouvrage de Hilbert: *Les fondements de la Géométrie (Grundlagen der Geometrie)*", *Bulletin des Sciences mathématiques*, (2), 26, ora in Poincaré, *Œuvres*, cit., XI, pp. 92-113.
- PONCELET J.V., [1865], *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris, Gauthier-Villars, 2 voll.
- RIEMANN B., [1854], *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, tr. it. a cura di R. Pettoello in B. Riemann, *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria e altri scritti scientifici e filosofici*, Torino, Boringhieri, 1994, pp. 3-20
- RUFINI E., [1961], *Il metodo di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell'antichità*, Milano, Feltrinelli
- RUSSELL B., [1897], *An Essay on the Foundations of Geometry*, New York, Dover, 1956
- SALANSKIE J.-M., SINACEUR H., [1992], *Le labyrinthe du continu*, Colloque de Cerisy, Paris, Springer
- SEGRE C., [1891], "Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche. Osservazioni dirette ai miei studenti", *Rivista di matematica*, I, pp. 42-66

- SPERANZA F., [1991], "Confronto fra concezioni epistemologiche a proposito della geometria", in *Conoscenza e matematica*, Milano, Marcos Y Marcos, pp. 445-468
- STEIN H., [1990], "Eudoxus und Dedekind: on the Ancient Greek Theory of Ratios and its Relation to Modern Mathematics", *Synthese*, 84, pp. 163-211.
- STOLZ O., [1882], "Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes", *Berichte des Naturwissenschaftlich-Medizinischen Vereines in Innsbruck*, 12, pp. 74-89 e rivisto in *Mathematische Annalen*, 22 (1883), pp. 504-519
[1885-86], *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, Leipzig, Teubner
- [1891], "Über das Axiom des Archimedes", *Mathematische Annalen*, 39, pp. 107-112
- TANNERY P., [1885], "Le concept scientifique du continu. Zénon d'Élée et Georg Cantor", *Revue philosophique*, 20, pp. 385-410
- TORRETTI R., [1978], *Philosophy of geometry from Riemann to Poincaré*, Dordrecht-Boston-London, Reidel
- VIVANTI G., [1891], "Sull'infinitesimo attuale", *Rivista di matematica*, 1, pp. 135-153, 248-255
- YOUNG J. W., [1911], *Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry*. Trad. it. a cura di Domenico Mercogliano, *Gli elementi fondamentali dell'algebra e della geometria*, Napoli, Piero, 1919
- ZELLINI P., [1980], *Breve storia dell'infinito*, Milano, Adelphi
- ZERMELO E.E.F., [1930], "Über Grenzzahlen und Mengenberichte", *Fundamenta Mathematicae*, 16, pp. 29-47. Trad. it. di U. Volli in Carlo Cellucci, a cura di, *Il paradiso di Cantor. Il dibattito sui fondamenti della teoria degli insiemi*, Napoli, Bibliopolis, 1978

INDICE DEI NOMI

- Abbott Edwin, 15, 213
 Antifonte, 133
 Archimede, 134, 140
 Aristotele, 121, 123, 133, 222
- Baron Margaret, 133
 Beltrami Eugenio, 201, 212
 Bernoulli Johann, 139
 Bettazzi Roberto, 7, 10, 21, 69-70, 151-54
 Betti Enrico, 174
 Bindoni A., 18
 Bolzano Bernard, 19, 34-35, 50-52, 57, 59, 67-68, 102
 Boole George, 40, 224
 Borel Emile, 148
 Bozzi Silvio, 48, 226
 Brigaglia Aldo, 171, 179
 Brioschi Francesco, 174
 Brouwer Luitzen Egbertus Jan, 126, 164
 Brunschvicg Léon, 247
 Bullo C., 16
 Bunge Mario, 219
 Bussotti Paolo, 27, 39
 Busulini Bruno, 108, 111-12, 129
- Cantor Georg, 10, 15-16, 18-21, 35, 39, 46, 50-55, 65-66, 71-73, 80, 83, 102, 114-116, 119, 138-39, 141-142, 154, 163, 215, 217-18, 249
 Castelnuovo Guido, 133-34
 Cauchy Augustin-Louis, 100, 136-137, 211, 217
 Cavalleri Sonavventura, 122, 134, 135
 Cayley Arthur, 179
 Chasles Michel, 231, 236
 Cohen Hermann, 45
- Contro Walter, 187
 Cremona Luigi, 15, 28
- Dedekind Richard, 18-21, 34-39, 39, 49-51, 55, 84, 119, 126-27, 140-45, 174, 230, 244
 Descartes René, 218, 224, 231
 Du Bois-Reymond Paul, 11, 18, 21, 26, 82, 103, 139-40, 148-151, 154, 163, 244-46, 251
- Ehrlich Philip, 7, 11, 213
 Enriques Federigo, 18, 27, 195, 206, 216, 223, 251-253
 Erdmann Benno, 48
 Euclide 56, 63-64, 73, 77, 97, 124, 131-32, 136, 139, 142-43, 171, 174, 180, 185, 190, 202, 210, 226, 253
 Eudosso 131-32, 134, 136
- Fano Gino, 108-109, 223
 Fermat Pierre, 231
 Fisher Gordon, 7, 148, 150-51
 Flament Dominique, 177
 Fontenelle Bernard Le Bovier de, 138
 Francheila Miriam, 164
 Frege Gottlob, 10, 48, 52, 72-78, 210
 Freguglia Paolo, 171
 Freudenthal Hans, 10, 187-188, 192
- Galilei Galileo, 103, 134
 Gauss Carl Friedrich, 137, 201, 218
 Gerdi Giacinto Sigismondo, 134-39, 217
 Geymonat Ludovico, 131, 133, 140

- Giusti Enrico, 221
 Grassmann Hermann Gunther, 18-19, 22, 23, 33, 57, 60-62, 68-69, 93, 151, 167, 177-78, 201, 231-32, 234, 235-36
- Hahn Hans, 11, 17, 21-22, 69, 154-55, 157-61, 255
 Halsted George, 17
 Hankel Hermann, 76, 140
 Hardy Godfrey, 149
 Helmholtz Hermann von, 9, 18, 23-24, 83-84, 177, 193-95, 199-200, 202-205, 209-210, 212
 Hilbert David, 7-8, 10-11, 15, 115, 157, 160-62, 182, 185, 192-93, 216, 236, 253
 Hölder Otto, 70
 Husserl Edmund, 72, 74-75, 77, 84
- Jevons Stanley, 74
- Kant Immanuel, 38, 193-94, 200
 Kepler Johannes, 134
 Klein Felix, 15, 18, 23, 25, 28, 65, 188-89, 193-97, 201, 213, 233
 Kline Morris, 233
 Kronecker Leopold, 84
- Laugwitz Detlef, 7, 154-55
 Lawvere William, 76, 77
 Leibniz Gottfried Wilhelm, 135-36, 218, 224, 238
 Levi-Civita Tullio, 11, 17, 21-22, 154-57, 183, 255
 Lotze Rudolf Hermann, 209
- Magnani Lorenzo, 205
 Manara Felice, 192, 211, 241
 Mangione Corrado, 48
 McLarty Colin, 76-77
 Monge Gaspard, 231, 233
- Natorp Paul, 45-47, 158
 Newton Isaac, 135, 177, 213, 238-39
- Palatini Francesco, 208
 Palladino Dario, 153
 Pascal Blaise, 134-35
- Pasch Moritz, 18, 23-24, 41, 65, 169-70, 187-92, 195, 216, 219, 226, 232-33
 Peano Giuseppe, 7-8, 10, 15-16, 18, 21, 23, 25-26, 44, 58, 180, 182, 216, 224-27, 229-30, 233, 241-43
 Peirce Charles Sanders, 7, 10
 Pfeiffer-Reuter Renée, 46
 Pierl Mario, 216
 Plücker Julius, 179
 Poincaré Jules-Henri, 11, 15-18, 21-24, 114-15, 162-63, 185, 199, 204-205, 211, 216, 236
 Poncelet Victor, 231, 235
- Riemann Georg Friedrich Bernard, 9, 18, 24, 63, 65, 200, 202-203, 212, 234
 Russell Bertrand, 7, 10, 222
 Saccheri Girolamo, 217
 Schepp Adolf, 7
 Schoenflies A., 160
 Schröder Ernst, 39, 55, 72-74, 84, 229
 Segre Corrado, 25-26, 138, 211, 233, 241-42
 Skolem Thoralf, 248
 Speranza Francesco, 216, 232, 253
 Stein Howard, 68
 Stolz Otto, 18, 37, 60, 62, 132, 139-41, 154
- Tannery Paul, 131-32, 223
 Thomae Karl, 75
 Torretti Eugenio, 195, 199
- Vallebona Marco, 153
 Vivanti Giulio, 10, 16, 21, 109, 139, 142, 153-54
- Weierstrass Karl, 119
- Zellini Paolo, 133, 136, 149
 Zenone 131, 223
 Zermelo Ernst Friedrich Ferdinand, 248-49