HAL
open science

Méthode Arlequin multi-schéma pour la dynamique non linéaire des structures

Tristan Maquart, Sébastien Baguet, Thouraya Baranger

To cite this version:

Tristan Maquart, Sébastien Baguet, Thouraya Baranger. Méthode Arlequin multi-schéma pour la dynamique non linéaire des structures. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01192965

HAL Id: hal-01192965

https://hal.science/hal-01192965v1

Submitted on 25 Nov 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2015
12e Colloque National en Calcul des Structures
18-22 Mai 2015, Presqu'île de Giens (Var)

Méthode Arlequin multi-schéma pour la dynamique non linéaire des structures

T. Maquart[1], S. Baguet[2], T. N. Baranger[1]

[1] *Université de Lyon, CNRS, LaMCoS, Université Claude Bernard Lyon1,{thouraya.baranger@univ-lyon1.fr},{tristan.maquart@etu.univ-lyon1.fr}*
[2] *Université de Lyon, CNRS, INSA-Lyon, LaMCoS UMR5259,{sebastien.baguet@insa-lyon.fr}*

Résumé — La méthode Arlequin est une méthode de couplage fondée sur la combinaison de modèles de finesses et/ou de modélisation différentes. Cette approche de sous-structuration peut être avantageuse en temps de calcul lorsque les zones non linéaires sont traitées avec un schéma adapté et que le reste du système est basé sur une résolution grossière. Dans cet article, nous étudions le couplage de différents schémas numériques d'intégration temporelle linéaire et non linéaire dans le cadre Arlequin.
Mots clés — Méthode Arlequin, Analyse multi-schéma, Dynamique non linéaire, Intégration temporelle.

1 Introduction

La méthode Arlequin [1] offre un cadre de modélisation multi-échelle et multi-modèle pour pallier les difficultés qu'entraine la prise en compte de phénomènes localisés (de type fissure, contact, impact). Elle est basée sur une partition de modèles, ce qui permet de coupler des domaines de dimensions et de finesses différentes, d'où une économie en taille du problème par rapport à une mono-modélisation fine.

La multi-modélisation Arlequin permet la restitution du comportement global d'un modèle donné tout en ayant la possibilité de mettre en évidence des effets qui apparaissent aux échelles plus fines. Par ailleurs, comme il est basé sur un raccord avec recouvrement, le cadre Arlequin s'avère efficace pour les études en régime dynamique. En effet, il a été démontré dans [2] que, moyennant certaines précautions portant sur les ingrédients numériques de la méthode, cette méthode permet aux ondes de transiter « proprement » entre les différents modèles à travers la zone de raccord, sans piéger l'énergie au niveau des échelles fines, par un phénomène de réflexions d'ondes parasites.

Dans cet article, nous nous intéressons à l'écriture de la formulation Arlequin en régime dynamique transitoire comportant une non linéarité localisée de type *Duffing*. Le but principal de ce travail est une analyse numérique de la convergence, dans le cas de raccord de modèles avec recouvrement, en se basant sur des algorithmes permettant de coupler des schémas différents : un schéma de Newmark linéaire et un schéma de Newmark non linéaire [3]. Le distribution des paramètres de Newmark sur les différents domaines se fait selon la démarche de la partition de l'unité développée dans [2], permettant la conservation de l'énergie du système.

2 Cadre de modélisation Arlequin.

Etant donné un système défini par le domaine Ω, pour des raisons de simplicité, on considère les deux sous domaines Ω_A et Ω_B, avec $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$ et $\Omega_C = \Omega_A \cap \Omega_B$. Ω_C étant une zone de recouvrement. Dans le sous-domaine Ω_A. on suppose la présence d'une non linéarité décrite par la fonction f_{nl}. On suppose que le système est soumis à une sollicitation dynamique sur l'intervalle de temps $[0, T]$. La réponse dynamique transitoire du système avant sous-structuration s'obtient par la résolution numérique du système discret suivant à chaque instant t_{n+1} :

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{a}_{n+1} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{v}_{n+1} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_{n+1} + \boldsymbol{f}_{nl}(\boldsymbol{u}_{n+1}) = \boldsymbol{f}_{ext}(t_{n+1}). \tag{1}$$

où, $\boldsymbol{M}$ est la matrice de masse, $\boldsymbol{C}$ la matrice d'amortissement, $\boldsymbol{K}$ la matrice de raideur, $\boldsymbol{f}_{ext}$ la résultante des sollicitations extérieures et $\boldsymbol{f}_{nl}(\boldsymbol{u}_{n+1})$ le vecteur décrivant la non linéarité à l'instant t_{n+1}. $\boldsymbol{u}_{n+1}$, $\boldsymbol{v}_{n+1}$ et $\boldsymbol{a}_{n+1}$ représentent, respectivement, le champ de déplacements, vitesse et accélération à l'instant t_{n+1}.

Dans le cadre Arlequin, la restructuration du système précédent donne :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{M}_A\boldsymbol{a}^A_{n+1}+\boldsymbol{C}_A\boldsymbol{v}^A_{n+1}+\boldsymbol{K}_A\boldsymbol{u}^A_{n+1}+\boldsymbol{f}_{nl}(\boldsymbol{u}^A_{n+1}) &&= \boldsymbol{f}^A_{ext}(t_{n+1})-\boldsymbol{L}^t_A\boldsymbol{\lambda}_{n+1}, && (2)\\
&\boldsymbol{M}_B\boldsymbol{a}^B_{n+1}+\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{v}^B_{n+1}+\boldsymbol{K}_B\boldsymbol{u}^B_{n+1} &&= \boldsymbol{f}^B_{ext}(t_{n+1})-\boldsymbol{L}^t_B\boldsymbol{\lambda}_{n+1}, && (3)\\
&\boldsymbol{L}_A\boldsymbol{u}^A_{n+1}+\boldsymbol{L}_B\boldsymbol{u}^B_{n+1} &&= 0. && (4)
\end{aligned}$$

l'équation (2) correspond à l'équilibre dynamique du sous-domaine Ω_A, l'équation (3) à l'équilibre dynamique du sous-domaine Ω_B et (4) est l'équation de couplage entre les deux domaines correspondant à la zone de recouvrement Ω_C. Dans cet exemple le couplage se fait par l'intermédiaire d'un opérateur agissant sur les déplacements. $\boldsymbol{\lambda}$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange qui permet d'assurer le couplage entre les deux modèles à interface. Les matrices rectangulaires $\boldsymbol{L}_A$ et $\boldsymbol{L}_B$ traduisent le couplage de entre les deux sous-domaines. On note que dans ces écritures les matrices $\boldsymbol{M}_i$, $\boldsymbol{C}_i$, et $\boldsymbol{K}_i$ pour $i=A,B$ sont des matrices pondérées avec les coefficients définis selon la partition de l'unité et désignés ici, pour $i=A,B$ par : α^M_i pour la masse, α^C_i pour l'amortissement et α^K_i pour la raideur. Ces paramètres vérifient :

$$\begin{aligned}
&\text{sur } \Omega_C : && 0<\alpha^M_i,\alpha^C_i,\alpha^K_i<1 \quad \text{et} \quad \alpha^M_A+\alpha^M_B=\alpha^K_A+\alpha^K_B=\alpha^C_A+\alpha^C_B=1\\
&\text{sur } \Omega_i\setminus\Omega_C : && \alpha^M_i=\alpha^K_i=\alpha^C_i=1
\end{aligned}$$

Cette sous-structuration nous permet d'optimiser la résolution numérique du système (2)-(4), en affectant à chaque sous-système un schéma numérique adapté. Pour le système (2) incluant la non linéarité on adopte un schéma de Newmark non linéaire [3] avec les paramètres de Newmark β_A et γ_A, et un schéma de Newmark linéaire avec les paramètres β_B et γ_B pour les autres équations. Cette démarche permet d'économiser du temps de calcul et d'isoler la non linéarité pour la traiter de manière adéquate. La conservation de l'énergie est garantie par une modification des paramètres de ces schémas en fonction des sous-domaines suivant la loi suivante, détaillée dans [2].

$$\begin{aligned}
&\gamma=\gamma_A \text{ sur } \Omega_A\setminus\Omega_C, \quad \gamma=\gamma_B \text{ sur } \Omega_B\setminus\Omega_C \quad \text{et } \gamma=\tilde{\gamma}=\xi_A\gamma_A+\xi_B\gamma_B \text{ sur } \Omega_C\\
&\beta=\beta_A \text{ sur } \Omega_A\setminus\Omega_C, \quad \beta=\beta_B \text{ sur } \Omega_B\setminus\Omega_C \quad \text{et } \beta=\tilde{\beta}=\xi_A\beta_A+\xi_B\beta_B \text{ sur } \Omega_C
\end{aligned}$$

avec ξ_A et ξ_B des paramètres de partition de l'unité définis ainsi :

$$\xi_A=1 \text{ sur } \Omega_A\setminus\Omega_C, \quad \xi_B=1 \text{ sur } \Omega_B\setminus\Omega_C \quad \text{et } \xi_A+\xi_B=1 \text{ sur } \Omega_C$$

3 Application numérique.

On considère le système masses-ressorts représenté sur la figure 1a, avec une non linéarité cubique de type *Duffing* et une excitation harmonique de fréquence ω appliquées à la masse 1. Ce problème "direct" sans sous-structuration, servira de référence pour la suite. L'équation du mouvement (1) s'écrit dans ce cas :

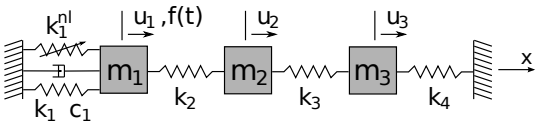
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0\\ 0 & m_2 & 0\\ 0 & 0 & m_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0\\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3\\ 0 & -k_3 & k_3+k_4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} f_{nl}(u_1)\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f_{ext}(t)\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{5}$$

avec les données suivantes :

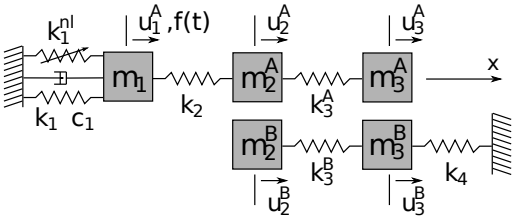
$$\begin{aligned}
&m_1=2m,\ m_2=m_3=m,\ m=1 \text{ kg} \quad k_1=k_2=k_3=k,\ k_4=2k,\ k=1 \text{ N/m} \quad c_1=c=1 \text{ N.s/m}\\
&f_{nl}(u_1)=k_{nl}{u_1}^3, \quad k_{nl}=0.25 \text{ N/m}^3, \quad f_{ext}(t)=f_0\cos\omega t, \quad f_0=4 \text{ N}, \quad \omega=1 \text{ Hz}
\end{aligned}$$

La figure 1b représente la sous-structuration Arlequin retenue pour les calculs, avec une zone de recouvrement comprenant les masses 2 et 3. Pour ce problème, les matrices et vecteurs des équations (2), (3) et (4) sont définies par :

$$\boldsymbol{M}_A=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0\\ 0 & m^A_2 & 0\\ 0 & 0 & m^A_3\end{bmatrix};\ \boldsymbol{M}_B=\begin{bmatrix} m^B_2 & 0\\ 0 & m^B_3\end{bmatrix};\ \boldsymbol{K}_A=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0\\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3\\ 0 & -k_3 & k_3+k_4\end{bmatrix};\ \boldsymbol{K}_B=\begin{bmatrix} k^B_3 & -k^B_3\\ -k^B_3 & k_4+k^B_3\end{bmatrix}$$

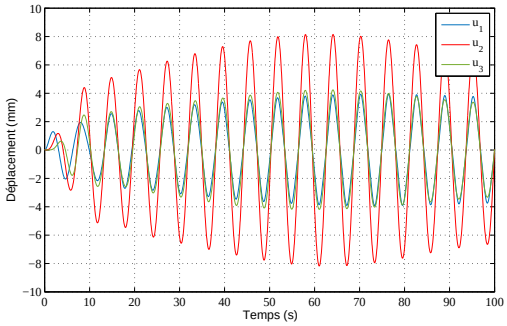


(a) Système de référence sans décomposition de domaine.

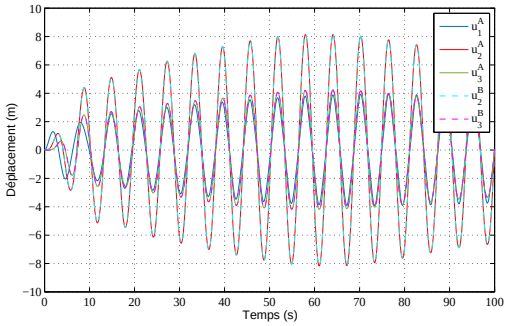


(b) Système décomposé avec zone de recouvrement.

FIG. 1: Système masses-ressorts avec non-linéarité de type Duffing

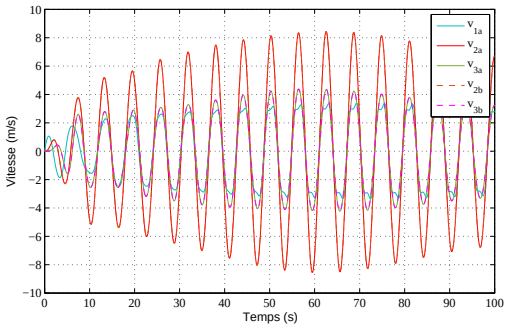


(a) Problème direct avec Newmark non-linéaire.

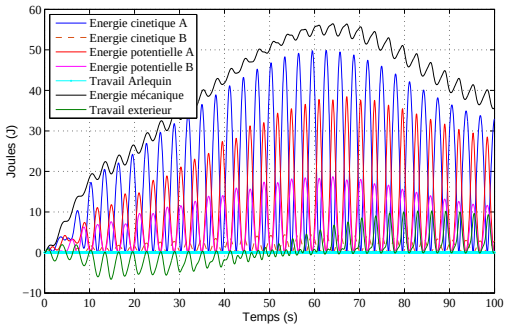


(b) Algorithme multi-schéma Arlequin.

FIG. 2: Déplacement des 3 masses



(a) Vitesse des 3 masses.



(b) Énergies du système.

FIG. 3: Réponse du système avec l'algorithme multi-schéma Arlequin

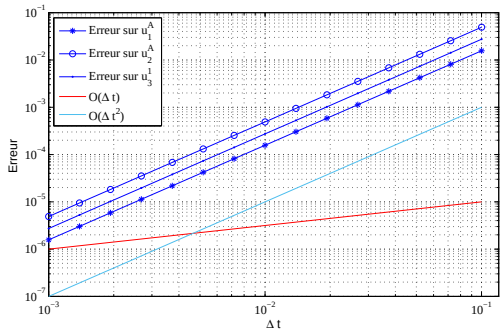
$$\boldsymbol{C}_A = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \boldsymbol{C}_B = \boldsymbol{0}; \quad \boldsymbol{L}_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{L}_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}_{nl}(\boldsymbol{u}_{n+1}^A) = k_{nl}(\boldsymbol{u}_{n+1}^A)^3; \quad \boldsymbol{f}_{ext}^A(t_{n+1}) = [f_0 \cos \omega t \; 0 \; 0]^t; \quad \boldsymbol{f}_{ext}^B(t_{n+1}) = \boldsymbol{0}$$

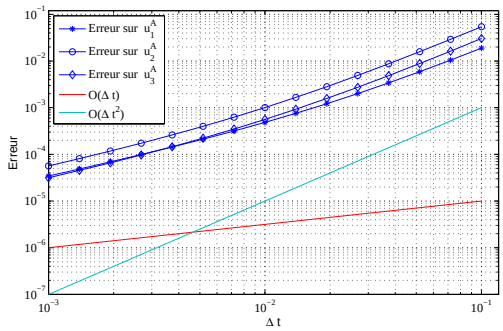
et avec les données suivantes :

$$m_2^A = \alpha_A^M m_2; \quad m_2^B = \alpha_B^M m_2; \quad m_3^A = \alpha_A^M m_3; \quad m_3^B = \alpha_B^M m_3; \quad k_3^A = \alpha_A^K k_3; \quad k_3^B = \alpha_B^K k_3; \quad \alpha_A^M = \alpha_A^K = 0.9$$

La solution de référence en déplacement pour le problème direct est présentée dans la figure 2a. Cette solution a été obtenue en résolvant le système non-linéaire (5) par un schéma de Newmark non linéaire avec les paramètres de Newmark β =1/4, γ=1/2 et un pas de temps $\Delta t = 10^{-4}$. La solution obtenue par sous-structuration Arlequin avec un schéma de Newmark non linéaire sur le domaine A et un schéma linéaire sur le domaine B et les mêmes paramètres que la solution de référence $\beta_A = \beta_B$ =1/4, $\gamma_A = \gamma_B$=1/2, $\Delta t = 10^{-4}$ est présentée dans la figure 2b. On constate que la solution Arlequin est identique à celle du problème direct de référence. On voit également sur les figures 2b et 3a que les déplacements et les



(a) β_i =1/4, γ_i=1/2 pour i=A,B



(b) $\beta_1 = 1/4$, $\gamma_1 = 1/2$, $\beta_2 = 0.2652$, $\gamma_2 = 0.53$.

FIG. 4: Ordre de convergence

vitesses des masses m_2^A et m_2^B, ainsi que ceux des masses m_3^A et m_3^B, sont identiques, ce qui valide le couplage des deux sous-domaines et des deux schémas d'intégration temporelle. Cela est confirmé par la figure 3b qui montre que le travail Arlequin créé à l'interface de raccord par les termes de couplage est nul.

L'ordre de convergence de la décomposition Arlequin multi-schéma est étudié dans la figure 4. Pour cela, on fait varier la valeur du pas de temps d'intégration et on calcule l'erreur avec la solution de référence du problème direct obtenue avec $\Delta t = 10^{-4}$. Il apparait clairement que, pour $\beta_A = \beta_B$ =1/4, $\gamma_A = \gamma_B$=1/2 (figure 4a), l'ordre de convergence vaut 2 et n'est donc pas dégradé par rapport aux propriétés bien connues du problèmes direct. Comme on peut s'y attendre, cet ordre de convergence se dégrade dès lors que les paramètres de Newmark sont légèrement modifiés sur un des deux domaines (figure 4b).

4 Conclusion

Cet article présente une extension de la méthode Arlequin aux problèmes de dynamique non linéaire. Elle repose sur une décomposition de domaine et sur l'utilisation de schémas d'intégration temporelle de nature différente sur chaque domaine. Elle est donc particulièrement bien adaptée aux problèmes comportant des non linéarités localisées, pour lesquels il est possible de réduire considérablement le coût de calcul en utilisant un schéma non linéaire uniquement sur les domaines concernés.

Les bonnes propriétés de l'algorithme ainsi obtenu en terme de couplage et d'ordre de convergence ont été démontrées numériquement. Une démonstration théorique de la conservation de l'énergie, i.e. de la contribution énergétique nulle du travail de raccord Arlequin dans la zone de collage, fait partie des perspectives.

Des travaux sont également en cours pour permettre l'utilisation de pas de temps différents sur chaque sous-domaine et obtenir une méthode multi-schéma multi-échelle en temps. Par ailleurs, d'autres types de non linéarités sont envisagés (plasticité, contact, ...) dans un contexte de structures modélisées par éléments finis.

Références

[1] H. Ben Dhia, G. Rateau, *The Arlequin method as flexible engineering design tool*, Int. J. Num. Meth. Eng., 62, 1442-1462, 2005.

[2] A. Ghanem, M. Torkhani, N. Mahjoubi, T.N. Baranger , A. Combescure, *Arlequin framework for multi-model, multi-time scale and heterogeneous time integrators for structural transient dynamics*, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 254, 292–308, 2013.

[3] S. Krenk, *Energy conservation in Newmark based time integration algorithms*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 195, 6110-6124, 2006.

[4] A. Ghanem, *Contributions à la modélisation avancée des machines tournantes en dynamique transitoire dans le cadre Arlequin*, Thèse, INSA-Lyon, Janvier 2013.