HAL
open science

Analyse paramétrique de la stabilité des structures en dynamique non linéaire

Lihan Xie, Sébastien Baguet, Benoit Prabel, Régis Dufour

To cite this version:

Lihan Xie, Sébastien Baguet, Benoit Prabel, Régis Dufour. Analyse paramétrique de la stabilité des structures en dynamique non linéaire. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01192962

HAL Id: hal-01192962

https://hal.science/hal-01192962v1

Submitted on 25 Nov 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2015
12e Colloque National en Calcul des Structures
18-22 Mai 2015, Presqu'île de Giens (Var)

Analyse paramétrique de la stabilité des structures en dynamique non linéaire

L. Xie[1,2], S. Baguet[1], B. Prabel[2], R. Dufour[1]

[1] *Université de Lyon, CNRS, INSA-Lyon, LaMCoS UMR5259, F-69621, France {lihan.xie, sebastien.baguet, regis.dufour}@insa-lyon.fr*
[2] *CEA-Saclay, DEN,DANS,DM2S,SEMT,DYN, F-91191, Gif-sur-Yvette, France benoit.prabel@cea.fr*

Résumé — Pour concevoir des systèmes dynamiques non-linéaires, il est avantageux de prévoir rapidement l'évolution de sa réponse en fonction d'un paramètre donné et en particulier de suivre ses points singuliers. La méthode proposée ici calcule la courbe de réponse en combinant HBM, AFT et continuation. Les points singuliers sont détectés avec le changement de signe du jacobien puis localisés grâce à la pénalisation du système augmenté d'une équation de contrainte. Le suivi de ces points en fonction du paramètre de la non linéarité est opéré avec, à nouveau, la technique de continuation appliquée au système dynamique augmenté.
Mots clés — continuation, point singulier, dynamique non-linéaire, machines tournantes, éléments finis.

1 Introduction

Les systèmes tournants comportent par nature de nombreux éléments, comme les fissures, les touches rotor-stator, les paliers hydrodynamiques, qui combinés à une rotation du système peuvent engendrer des phénomènes non-linéaires se traduisant par des réponses complexes avec des décalages fréquentiels significatifs, enfermant des phénomènes d'hystérésis et un fort contenu d'harmoniques. Simuler ces comportements par la voie classique de l'intégration temporelle induit des coûts de calculs trop importants. Il convient donc d'élaborer une technique, pour identifier rapidement la plage de fréquences où le comportement dynamique est maîtrisé, pour prévoir d'éventuels changements de régime dynamique (bifurcations) et pour conduire une analyse paramétrique efficace du système étudié.

Dans un premier temps, la recherche de solutions périodiques est possible avec la méthode de la balance harmonique (HBM) qui traite le problème non-linéaire dans le domaine fréquentiel [1] [2]. Son association à des méthodes de continuation de pseudo-longueur d'arc, aboutit à décrire continûment l'ensemble des solutions d'équilibre dynamique sur la plage d'étude [3].

Ensuite, la stabilité locale de la solution périodique est étudiée. Cette étape est importante dans un contexte industriel car les changements de réponse inattendus peuvent avoir des conséquences préjudiciables. Enfin, le suivi paramétrique de points singuliers de la courbe comme les résonances, les changements de stabilité est proposé. Cette approche apparaît opportune dans une démarche de conception de machines tournantes car le choix judicieux de paramètres physiques de conception tels que dimensions, raideur non-linéaire, amortissement, doit pouvoir atténuer voire éviter les hauts niveaux de vibration. Les auteurs de [4] [5] [6] ont proposé des algorithmes robustes pour la détection précise des points singuliers parmi lesquels figurent les points limites et les points de bifurcation.

Les développements numériques sont réalisés dans Matlab et Cast3m [7], ouvrant ainsi l'application de la méthode à la dynamique non linéaire des rotors modélisés en particulier avec des éléments finis 3D.

2 Calcul de la courbe de réponse par continuation

On cherche les solutions périodiques des systèmes sous excitation périodique en présence de non-linéarité. L'équation de la dynamique est la suivante :

$$\boldsymbol{M}\ddot{x}(t) + \boldsymbol{C}\dot{x}(t) + \boldsymbol{K}x(t) + \mathbf{f}_{nl}(x,\dot{x}) = \mathbf{p}(t) \tag{1}$$

où $x(t)$ est le vecteur de déplacements pour tous les degrés de liberté, $\mathbf{M}, \mathbf{C}$ et $\mathbf{K}$ sont les matrices de masse, d'amortissement, de rigidité d'un modèle éléments finis. Dans les cas d'application qui nous

intéressent, les efforts extérieurs $\mathbf{p}(t)$ sont périodiques (force de balourd à vitesse de rotation constante par exemple).

La méthode de l'équilibrage harmonique consiste à identifier la solution périodique sous la forme d'une série de Fourier tronquée, dont les coefficients sont estimés en résolvant un système d'équation algébrique non-linéaires :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X},\omega,\lambda) = \mathbf{Z}(\omega)\mathbf{X} + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X},\lambda_F) - \mathbf{P}(\omega,\lambda_p) = 0 \tag{2}$$

où les inconnues dans $\mathbf{X},\mathbf{F},\mathbf{P}$ sont les coefficients de Fourier des déplacements, de la force non-linéaire et de l'excitation. $\mathbf{Z}$ est la matrice de fonction fréquentielle et λ_F et λ_p sont les paramètres de la non-linéarité et de l'excitation. Les coefficients de Fourier des efforts non-linéaires $\mathbf{F}_{NL}$ ainsi que les dérivées des coefficients de Fourier des efforts non-linéaires par rapport aux coefficient de Fourier des déplacements $\frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{X}}$ sont obtenus par la méthode *Alternating Frequency-Time* (AFT). Cette méthode permet de déterminer les coefficients de Fourier par la transformation de Fourier des efforts non-linéaires construits analytiquement dans le domaine temporel. Elle rend possible le traitement fréquentiel de tous les types de non-linéarité.

Les systèmes non-linéaires ont la particularité de souvent présenter plusieurs réponses possibles pour une fréquence d'excitation donnée ω. La technique de continuation par longueur d'arc [3] est capable de suivre les branches solutions à travers les points de rebroussement. La continuation se fait d'abord par l'étape de prédiction qui consiste à estimer la solution pour la prochaine valeur de ω par : $\binom{\mathbf{X}^0_{i+1}}{\omega^0_{i+1}} = \binom{\mathbf{X}_i}{\omega_i} + \binom{\Delta\mathbf{X}_i}{\Delta\omega_i}$. Puis, cette estimation est corrigée de façon itérative de sorte à annuler le résidu $R_1(\mathbf{X},\omega)$ en imposant que les corrections se fassent dans une direction orthogonale au vecteur $\binom{\Delta\mathbf{X}_i}{\Delta\omega_i}$, le système à résoudre devient alors :

$$R_1(X,\omega) = \mathbf{J}_c \begin{bmatrix} \delta\mathbf{X}^{k+1} \\ \delta\omega^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} & \frac{\partial \mathbf{R}^k}{\partial \omega} \\ \Delta\mathbf{X}_i^T & \Delta\omega_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{X}^{k+1} \\ \delta\omega^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}^k \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

où $\mathbf{J}(\mathbf{X},\omega,\lambda) = \frac{\partial \mathbf{R}^k}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{Z}(\omega) + \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{X}}$ est la matrice jacobienne du système. La continuation par pseudo-longueur d'arc ajoute donc une équation et une inconnue (ω) au système a résoudre. A chaque itération de la procédure de Newton-Raphson, une correction sur ω et $\mathbf{X}$ est apportée jusqu'à ce que le résidu atteigne une valeur suffisamment basse.

3 Détection et localisation des points singuliers

Parmi les points singuliers pour lesquels on détecte un changement de stabilité, on distingue généralement les points limites et les points de bifurcation. La valeur de déterminants des Jacobiens $\mathbf{J}$ et $\mathbf{J}_c$ permet d'effectuer le classement suivant :

- point régulier si $det(\mathbf{J}) \neq 0$ et $det(\mathbf{J}_c) \neq 0$
- point limite si $det(\mathbf{J}) = 0$ et $det(\mathbf{J}_c) \neq 0$
- point de bifurcation si $det(\mathbf{J}) = 0$ et $det(\mathbf{J}_c) = 0$

Pendant la continuation de la courbe de réponse, un changement de signe de $det(\mathbf{J}_c)$ entre deux points consécutifs indique la présence d'un point de bifurcation. Pour localiser précisément les points singuliers, d'un point de vu numérique, il est plus efficace de caractériser les points singuliers à l'aide de l'équation $\mathbf{Jy} = 0$ où $\mathbf{y}$ est le vecteur propre associé à la valeur propre nulle de $\mathbf{J}$, cela revient à résoudre le système augmenté suivant pour chaque itération de Newton-Raphson :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} & 0 & \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} & \mathbf{e}_j \\ \frac{\partial(\mathbf{Jy})}{\partial X} & \mathbf{J} & \frac{\partial(\mathbf{Jy})}{\partial \omega} & 0 \\ 0 & \mathbf{y}^T & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial \omega} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{X} \\ \delta\mathbf{y} \\ \delta\omega \\ \delta\gamma \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R} + \gamma\mathbf{e}_j \\ \mathbf{Jy} \\ \| \mathbf{y} \|^2 - 1 \\ \frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial \omega}\mathbf{y} \end{bmatrix} \tag{4}$$

où $\mathbf{e}_j$ est un vecteur nul sauf la j-ème composante égale à 1, et γ est une variable auxiliaire. Le terme $\gamma\mathbf{e}_j$ est ajouté pour améliorer la conditionnement du système augmenté qui se détériore à l'approche de la bifurcation.

4 Continuation des points singuliers

Une fois le point singulier (X_0, ω_0) détecté précisément le long d'une branche de solution, il est possible de suivre sa variation en fonction d'une paramètre λ du système à l'aide du méthode de continuation similaire à celle décrite dans le paragraphe §2. Pour cela, on considère λ comme une nouvelle inconnu et on ajoute au système augmenté 4 une équation $r_2(\mathbf{X}, \omega, \lambda) = 0$ qui impose l'orthogonalité des correction de Newton-Raphson avec l'étape de prédiction. La continuation du point singulier est donc menée par des corrections successives de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} & \mathbf{e}_j & \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial(\mathbf{Jy})}{\partial X} & \mathbf{J} & \frac{\partial(\mathbf{Jy})}{\partial \omega} & \mathbf{0} & \frac{\partial(\mathbf{Jy})}{\partial \lambda} \\ \mathbf{0} & \mathbf{y}^T & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial \omega} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \\ \Delta \mathbf{X}^T & \mathbf{0} & \Delta\omega & 0 & \Delta\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{X} \\ \delta \mathbf{y} \\ \delta\omega \\ \delta\gamma \\ \delta\lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R} + \gamma \mathbf{e}_j \\ \mathbf{Jy} \\ \| \mathbf{y} \|^2 - 1 \\ \frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial \omega} \mathbf{y} \\ r_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{Z} + \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{X}} & \frac{\partial(\mathbf{Jy})}{\partial \mathbf{X}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{X}^2} \mathbf{y} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \omega} &= \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega} \mathbf{X} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial w} & \frac{\partial(\mathbf{Jy})}{\partial \omega} &= \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega} \mathbf{y} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} &= \frac{\partial \mathbf{F}_{NL}}{\partial \lambda} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \lambda} & \frac{\partial(\mathbf{Jy})}{\partial \lambda} &= \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{NL}}{\partial \mathbf{X} \partial \lambda} \mathbf{y} \end{aligned} \tag{6}$$

Là encore, le terme $\gamma \mathbf{e}_j$ est nécessaire pour éliminer la singularité du système augmenté durant la continuation du point de bifurcation.

5 Application numérique

L'oscillateur de Duffing est un système discret à un degré de liberté dont la non-linéarité est une force de rappel proportionnelle au cube du déplacement.

Le système satisfait à l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q} + kq(t) + \alpha q(t)^3 = p_0 cos(\omega t) \tag{7}$$

Dans cette équation, t représente le temps, $f(q(t)) = \alpha q(t)^3$ représente la force non-linéaire.

Sur la figure 1, sont tracées les réponses du système calculées pour les paramètres suivants : $m = 1$kg, $k = 1$N.m^{-3}, $c = 0.1$N.s.m^{-1}, $p_0 = 0.5$N. Deux courbes "classiques" de réponse (telle que décrite au §2) ont été calculées pour $\alpha = 0.01$ et $\alpha = 10$.

La figure 1 montre également les résultats obtenus par la continuation de deux points limites (telle qu'exposée au §4) pour la variation du paramètre α sur la plage $[0.01 - 10]$: point haut en vert, point bas en bleu clair.

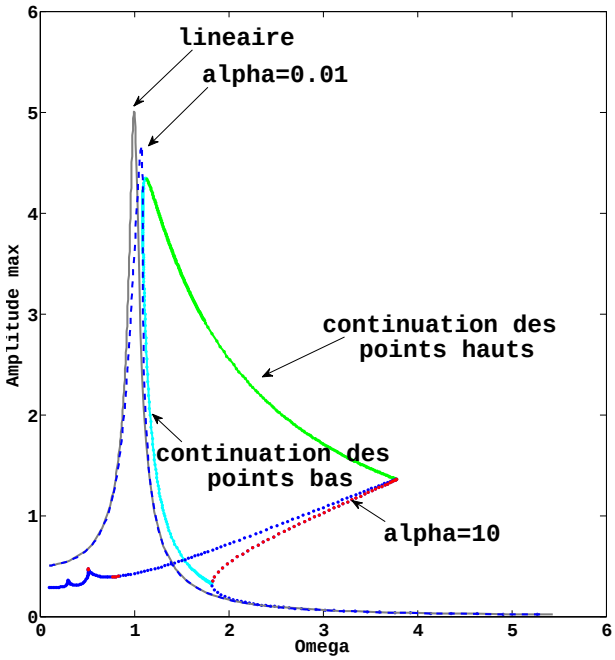

FIGURE 1 – duffing - suivi du point singulier

6 Conclusion

La procédure présentée dans ce travail permet de suivre l'évolution d'un point singulier avec la variation d'un paramètre d'un système dynamique non-linéaire. Cette méthode s'insère dans le cadre d'une résolution fréquentielle par la méthode de la balance harmonique (HBM) couplée à l'AFT qui permet de traiter de nombreux types de non-linéarités. La localisation du point limite ou le point de bifurcation est réalisée par détection d'un changement de stabilité via la condition d'espace nul du Jacobien. L'étude paramétrique du point singulier est ensuite menée directement grâce à la technique de continuation par longueur d'arc en ajoutant une équation de contrainte. Enfin, les applications numériques montrent l'-efficacité de la méthode proposée pour l'étude des structures dynamiques présentant des non-linéarités, notamment pour la modélisation des rotors tridimensionnels.

Références

[1] L. Cesari. *Functional analysis and galerkin's method*, In Michigan Math. J., 1964.

[2] T. M. Cameron, J. H. Griffin. *An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems*, Journal of Applied Mechanics, 56, pp. 149–154, 1989.

[3] M. Crisfield. *A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles Snap-Through*, Comput. Struct., 13, pp. 55–62. 1981.

[4] G. Moore, A. Spence. *The Calculation of Turning Points of Nonlinear Equations*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 17, No. 4, pp. 567-576, 1980

[5] C. A. Felippa. *Traversing critical ponits by penalty springs*, Proceedings of NUMETA'87 Conference, Swansea, Wales, Nijhoff Pubs, Dordrecht, Holland, pp. C2/1-C2/8, 1987

[6] P. Wriggers, J. C. Simo, *A General Procedure for the Direct Computation of Turning and Bifurcation Points*, International Journal For Numerical Methods In Engineering, Vol. 30, pp. 155-176, 1990

[7] Cast3M. `http://www-cast3m.cea.fr/`. 2014