



HAL
open science

Quelles différences entre un fluide et un solide ?

Jean-Paul Caltagirone

► **To cite this version:**

| Jean-Paul Caltagirone. Quelles différences entre un fluide et un solide ?. 2015. hal-01187052

HAL Id: hal-01187052

<https://hal.science/hal-01187052v1>

Preprint submitted on 25 Aug 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Quelles différences entre un fluide et un solide ?

Jean-Paul Caltagirone

Université de Bordeaux
Institut de Mécanique et d'Ingénierie
Département TREFLE, UMR CNRS n° 5295
16 Avenue Pey-Berland, 33607 Pessac Cedex
calta@ipb.fr

Résumé

La mécanique des milieux discret est étendue aux interactions entre fluides et solides. Il en résulte une seule équation du mouvement pour tous les milieux où la conservation de la masse est intégrée. La seule variable des problèmes d'écoulements de fluides et de contraintes dans les solides est la vitesse. Les déplacements sont déduits de la vitesse pour chaque état d'équilibre mécanique du système. Les contraintes, la pression thermodynamique et la contrainte de rotation sont obtenues simultanément par le relèvement des potentiels à partir d'opérateurs différentiels simples. De même la masse volumique s'obtient comme un potentiel scalaire à partir de ce processus d'accumulation. L'équation du mouvement apparaît comme une décomposition de Hodge-Helmholtz de la quantité d'accélération où le potentiel vecteur n'est autre que la contrainte de rotation.

Les seules propriétés intrinsèques du milieu permettent de modéliser à l'échelle macroscopique la cohésion de la matière, le fait pour les solides de résister au cisaillement et d'accumuler ces contraintes.

Le système d'équations est représentatif des écoulements de fluides, de la propagation d'ondes dans tous les milieux, de problèmes de grands déplacement et/ou de grandes déformations dans des solides de lois de comportement complexes et pour des matériaux anisotropes. L'équilibre stationnaire de tous le milieux est décrit comme la solution d'une équation de la statique des solides extension de la loi de la statique pour les fluides. Des exemples simples permettent de montrer le bien fondé de cette théorie.

Mots clés

Mécanique des milieux discrets, décomposition de Hodge-Helmholtz discrète, équations de Navier-Stokes, interaction fluide-solide, couplage fluide-structure,

What differences between a fluid and a solid ?

Abstract

Discrete mechanics is extended to interactions between fluids and solids. This results in a single equation of motion for all media where mass conservation is integrated. The only variable for fluid flow problems and constraints in solids is velocity. The displacements are deducted from each state of mechanical equilibrium of the system. The constraints, thermodynamics pressure and rotation stress are obtained simultaneously by raising potential from simple differential operators. Similarly the density is obtained as a scalar potential from the process of accumulation. The equation of motion appears as a Helmholtz-Hodge decomposition of the quantity of acceleration where the vector potential is simply the rotation constraint.

Only the intrinsic properties of the medium used to model macroscopically the cohesion of the material, the fact that the solids to resist shear stress and accumulate these constraints.

The system of equations is representative of fluid flow, the wave propagation in all media, problems of large displacement and/or large deformations in solid complex behavior laws and anisotropic materials. Stationary equilibrium of all media is described as the solution of an equation of static for solid, an extension of the law of statics for fluids. Simple examples are used to show the validity of this theory.

Keywords

Discrete Mechanics, Discrete Hodge-Helmholtz Decomposition, Navier-Stokes equation, fluid-solid interaction, fluid-structure interaction

1 Introduction

Il n'y en a pas, il n'y a pas de différence entre un fluide et un solide, c'est la mêmes équation qui régit le comportement des deux milieux, seules les propriétés changent. Ces différences de propriétés conduisent le solide à accumuler la contrainte de rotation ce qui n'est pas le cas en fluide.

Isaac Newton (1643-1727) et Robert Hooke (1636-1703) en initiant la compréhension du comportement des fluides et des solides ont introduit les lois qui portent leurs noms, contrainte qui dépend linéairement du gradient de vitesse d'une part et contrainte qui est une fonction de la déformation pour les solides. La convergence des deux mécaniques a été entreprise que bien plus tard et n'est semble-t-il pas complète.

Depuis l'énoncé de la loi fondamentale de la dynamique ou seconde loi de Newton dans les *Principia* en 1759 [11] la mécanique a évoluée surtout au 18^{eme} siècle par l'introduction continue de concepts censés améliorer la modélisation du comportement des solides et des fluides. La notion de milieu continu, celle de tenseur, l'introduction de la thermodynamique, celle de loi de comportement ont été progressivement adoptées comme des lois immuables pour donner les équations de Navier-Lamé pour les solides et de Navier-Stokes pour les fluides.

La notion même de milieu continu [12, 7] introduit de fait la dégénérescence de toute quantité en un point matériel, qu'elle soit un scalaire, un vecteur ou un tenseur d'ordre plus élevé. Elle génère la nécessité d'une description locale dans un certain référentiel absolu ou relatif dans un repère euclidien. Un vecteur est alors associé à des composantes dans un espace en dimension trois. Cette mécanique des milieux continus possède un certain nombre de défauts inhérents à cette approche locale. Par exemple la définition des contraintes à partir d'un tenseur d'ordre deux, le tenseur de Cauchy, nécessite d'utiliser la divergence pour réduire l'ordre au niveau de celle de la vitesse elle-même. Au passage elle introduit de nombreux coefficients dont le nombre ne peut être réduit qu'avec des considérations extérieures, le principe de Clausius-Duhem par exemple qui reste une inégalité.

Au cours du temps les équations de la mécanique ont été progressivement différenciées notamment par l'introduction dans l'équation du mouvement de lois constitutives qui ont, à leur tour, nécessité de formaliser des contraintes supplémentaires comme le principe d'indifférence matérielle ou objectivité qui traduit le fait qu'un système dans un repère soumis à une rotation doit fournir les mêmes informations. Un autre aspect porte sur l'écriture de tenseurs non linéaires pour appréhender les grandes déformations en mécanique du solide. Bien d'autres éléments développés dans une autre vision de la mécanique [4] méritent de revisiter la mécanique des milieux continus telle qu'elle est établie à ce jour.

La mécanique des milieux discrets [4] est établie à partir du constat précédent ; elle redéfinit la notion de vecteur que comme des bipoints orientés, très proche de la vision originelle de Newton. Elle correspond à une des composantes de ce que l'on peut appeler la vitesse mais dont la connaissance dans un repère donné n'est absolument pas requise. Si le segment est orienté arbitrairement la vitesse devient à son tour un simple scalaire.

La notion de milieu discret n'implique en rien de traiter le milieu à l'échelle microscopique ; comme on va le voir cette approche est discrète parce qu'elle est basée sur l'existence d'un bipoint (un segment de droite limité par deux points) mais l'existence de cet objet sera effective à toutes les échelles d'observation. De ce point de vue elle ne restera valable, comme le milieu continu, que lorsque la longueur du segment sera supérieur au libre parcours moyen des molécules. Contrairement au milieu continu cette longueur physique existe, c'est celle de l'échelle avec laquelle on veut examiner l'évolution du système.

Une autre différence importante entre mécanique des milieux continus et milieu discret, c'est l'échelle de temps avec lequel on observe un système physique. Dans les équations de Navier-Stokes cette notion y est absente, le comportement d'un milieu ne dépend pas du temps. Pourtant si l'on examine un milieu, de l'eau par exemple, avec une grande constante de temps on peut estimer que l'eau est incompressible mais si l'on considère des constantes de temps de l'ordre de la microseconde alors l'eau se comporte comme un milieu compressible qui propage les ondes à une célérité finie.

L'objectif est ici de rappeler très brièvement les bases essentielles de cette théorie [4] afin d'écrire un système d'équations qui traduit complètement les comportements de milieux fluides ou solides. Ce système permettra très simplement de "passer" de l'état solide à l'état fluide par une approche unifiée. Notamment la notion de l'équilibre mécanique sera redéfinie à partir de deux potentiels scalaire et vectoriel qui sont les éléments de la décomposition de Hodge-Helmholtz de la quantité d'accélération.

2 Mécanique des milieux discrets

2.1 Modèle de milieu discret

Reprenons la notion de milieu discret en examinant la topologie élémentaire basée sur un segment et une surface de la figure (1).

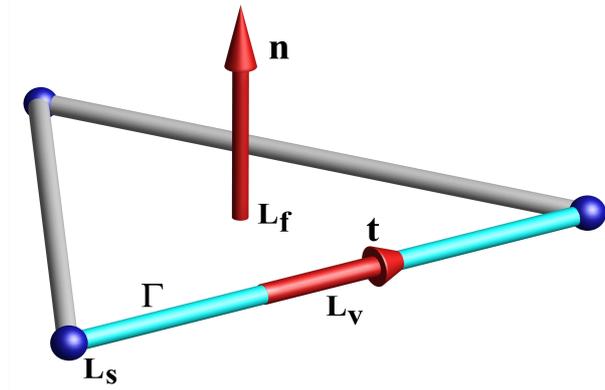


FIGURE 1. Topologie élémentaire de la mécanique des milieux discrets : trois segments rectilignes Γ délimités par des points définissent une face plane Σ non représentée. Les vecteurs unitaires de la normale à la face \mathbf{n} et du vecteur porté par Γ sont orthogonaux, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$. Les localisations associées aux points sont $\mathbf{L}_s = (p, \rho, \chi_T, \Phi, \Phi_s, \nabla \cdot \mathbf{V})$, celles associées aux segments sont $\mathbf{L}_v = (\mathbf{V}, \mathbf{V}_\Phi, \mathbf{V}_\Psi, \nabla p, \nabla_d \times \mathbf{\Omega})$ et celles relatives aux faces $\mathbf{L}_f = (\omega, \mu, \Psi, \mathbf{\Omega} = \nabla_p \times \mathbf{V})$.

Celle-ci est constituée d'un segment Γ limité par deux points et sur lequel on définit une orientation arbitraire à l'aide du vecteur unitaire \mathbf{t} . Deux autres segments et un autre point permettent de construire une surface plane Σ orientée suivant la normale \mathbf{n} ; ces deux vecteurs unitaires sont bien sûr orthogonaux $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$. La topologie globale du système ou le maillage correspondant peut bien sûr être composé d'autres éléments plus complexes, des surfaces polygonales formant elles-mêmes des volumes polyédriques à nombres de faces quelconques; toutefois dans le cas de surfaces polygonales non planes elles devront être décomposées en polygones plans plus simples mais cette disposition ne réduit pas la généralité de la formulation.

Dans ce formalisme seule la composante \mathbf{V} de la vitesse \mathbf{W} sera connue ou recherchée, la vitesse elle-même restera indéterminée. De fait la composante peut être considérée comme un vecteur ou comme un scalaire associé à un segment orienté Γ .

Cet assemblage permet de définir trois localisations \mathbf{L}_s , \mathbf{L}_f et \mathbf{L}_v de l'espace. Sur la localisation \mathbf{L}_s sont associées les variables scalaires : pression thermodynamique p , masse volumique ρ , coefficient de compressibilité χ_T , potentiel des vitesses Φ , potentiel scalaire du terme source Φ_s et divergence de la vitesse $\nabla \cdot \mathbf{V}$. La localisation \mathbf{L}_v permet de définir la composante de la vitesse \mathbf{V} , sa composante irrotationnelle \mathbf{V}_Φ , sa composante solénoïdale \mathbf{V}_Ψ , le gradient de pression ∇p , et le rotationnel dual $\nabla_d \times \boldsymbol{\Omega}$. Enfin la localisation \mathbf{L}_f regroupe le potentiel vecteur $\boldsymbol{\omega}$, la viscosité μ , le potentiel vecteur de la vitesse Ψ et le rotationnel primal de la vitesse $\boldsymbol{\Omega} = \nabla_p \times \mathbf{V}$.

Chaque point, chaque surface, chaque segment est affecté à un seul des deux milieux et ce choix est dicté par des considérations extérieures, par exemple par le mouvement d'une surface libre. Ainsi cette formulation exclut toute interprétation physique subjective, toute loi de mélange ou toute interpolation forcément discutable. Cette contrainte est totalement indépendante de la description choisie, lagrangienne ou eulérienne ou des méthodologies appliquées pour résoudre les équations du mouvement. La viscosité μ est affectée à la face sur laquelle elle est constante, la masse volumique est associée au segment et la compressibilité est définie au point. Cette distinction entre milieu continu et milieu discret est très importante. Par ailleurs les propriétés du milieu continu $\nabla \times \nabla p = 0$ et $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{V} = 0$ sont vérifiées en discret exactement quelle que soit la topologie polyédrique choisie.

La figure (2) illustre les contraintes de pression p et de rotation $\boldsymbol{\omega}$: La normale \mathbf{n} est la seule

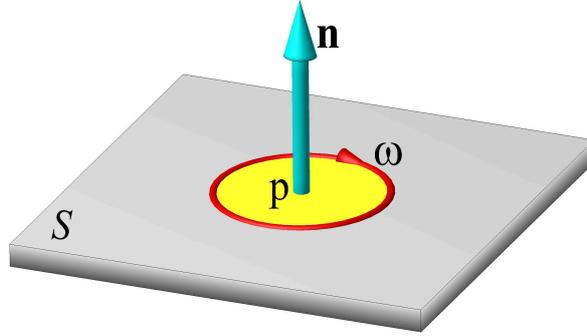


FIGURE 2. Schématisation des contraintes de pression et de rotation, toutes deux portées par la normale \mathbf{n} au plan S .

direction nécessaire et suffisante pour définir complètement l'état de contrainte locale en un point quelconque d'un matériau. La contrainte de pression est normale à la surface choisie comme en mécanique des milieux continus mais les contraintes de cisaillement-rotation sont aussi portées par la normale comme le flux du vecteur vitesse calculé par la circulation de celui-ci le long d'un contour fermé.

Les deux autres directions \mathbf{x} et \mathbf{y} telles que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = 0$ et $\mathbf{y} \cdot \mathbf{n} = 0$ ne sont absolument pas nécessaire pour représenter l'état de contrainte en un point d'un milieu. La conséquence est l'inutilité d'avoir recours aux tenseurs pour fixer les composantes dans les trois directions. La notion de cisaillement est associée à une direction privilégiée du plan dont la normale est \mathbf{n} tandis que la notion de rotation (ou de torsion locale) est d'une portée plus générale. Le cisaillement simple d'un échantillon suivant la direction \mathbf{x} par exemple est ainsi représenté par un vecteur $\boldsymbol{\omega}$ orthogonal à \mathbf{x} dont l'intensité est proportionnelle à $\nabla \times \mathbf{V}$.

Il est utile de préciser que la notion de milieu discret n'a rien à voir avec la structure de la matière fluide ou solide. La longueur du segment Γ est considérée comme grande devant le libre parcours moyen des molécules par exemple. Le concept présenté est lié à la direction de Γ qui reste constante dans l'homothétie imposée lorsque la taille de ce segment tend vers zéro. Un vecteur n'est jamais réduit en un point comme en mécanique des milieux continus.

Par ailleurs la physique des matériaux solides et des fluides n'est pas discutée et les liaisons entre les molécules et la structure de la matière n'est pas directement prise en compte. On définira que les coefficients strictement nécessaires pour décrire du point de vue macroscopique le comportement mécanique de ceux-ci.

2.2 Equations discrètes

La mécanique des milieux discrets [4] établit l'équation de conservation de la quantité de mouvement comme une décomposition de Hodge-Helmholtz où la pression p est le potentiel scalaire de la quantité d'accélération et $\boldsymbol{\omega}$ est le potentiel vecteur associé aux effets de rotation. Ces deux potentiels sont des accumulateurs des contraintes de pression et de viscosité qui restituent tout ou partie de l'énergie accumulée au cours de l'évolution du système. La seconde loi de Newton est écrite sous la forme :

$$\rho \boldsymbol{\gamma} = -\nabla p + \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s} \quad (1)$$

où p est la pression dite thermodynamique qui accumule l'ensemble des contributions (dynamique, thermique, massique, ...); $\boldsymbol{\omega}$ est l'accumulateur des contraintes de cisaillement-rotation et $\rho \boldsymbol{\gamma}$ est la quantité d'accélération. Le terme source \mathbf{s} regroupe les autres forces volumiques, gravité, rotation, tension de surface, etc.

La décomposition de Hodge-Helmholtz peut être intrinsèque à une formulation d'une loi comme la loi de la dynamique (1) ou bien appliquée sur des vecteurs de toute nature. On peut penser bien sûr au vecteur vitesse ou plutôt à sa composante \mathbf{V} ou bien au terme source qui peut être aussi décomposé en une partie irrotationnelle et une autre solénoïdale où $\mathbf{s} = \nabla \Phi_s + \nabla \times \Psi_s$ sont les composantes du terme source. Ces décompositions ne sont pas de même nature et de même importance, p et $\boldsymbol{\omega}$ sont les composantes de la quantité d'accélération et à ce titre jouent un rôle fondamental dans les équilibres dynamiques.

Au sein de la topologie montrée sur la figure (1) les deux composantes de la vitesse \mathbf{V} coexistent sur le segment Γ . La composante \mathbf{V}_Φ est pilotée par le gradient du potentiel scalaire Φ alors que la composante \mathbf{V}_Ψ est générée par le rotationnel dual de $\boldsymbol{\omega}$.

Le système d'équations déduit de la théorie des milieux discrets s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \rho \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} = -\nabla \left(p^o - \frac{dt}{\chi T} \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{V}^2 + \Phi_s \right) + \nabla \times (\boldsymbol{\omega}^o - \mu \nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{s}_\Psi \\ p = p^o - \frac{dt}{\chi T} \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \rho = \rho^o - \rho \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^o - \mu \nabla \times \mathbf{V} \end{array} \right. \quad (2)$$

où p^o et $\boldsymbol{\omega}^o$ sont respectivement la pression et le potentiel vecteur d'équilibre mécanique.

La pression p est la pression thermodynamique mais il est possible d'intégrer dans le terme en gradient les autres contributions résultant des effets d'inertie, des termes sources etc. , Ainsi $p_B = p^o + 1/2 \rho \mathbf{V}^2$ est la pression de Bernoulli; en effet le terme $\rho \mathbf{V}^2$ est une pression même à masse volumique variable globalement où chaque segment orienté Γ de la ligne de courant ne possède qu'une valeur de la vitesse et qu'une valeur de la masse volumique. On pourra définir $p_* = (p_B + \Phi_s)$ comme une pression motrice.

Les conditions aux limites portent sur les vitesses ; ainsi dans le système (2) les potentiels sont simplement mis à jour sans conditions aux limites à partir de la divergence et du rotationnel de la vitesse qui sont bien définis aux bords.

Afin de discuter du comportement de milieux fluides et solides reprenons le système (2) sous une forme simplifiée où les termes d'inertie sont ré-intégrés dans la dérivée particulaire. On introduit à ce stade un coefficient α

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(p^o - \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \nabla \times (\alpha \boldsymbol{\omega}^o - \mu \nabla \times \mathbf{V}) \\ p = p^o - \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \rho = \rho^o - \rho \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\omega} = \alpha \boldsymbol{\omega}^o - \mu \nabla \times \mathbf{V} \end{array} \right. \quad (3)$$

En milieu fluide l'accumulation des contraintes de cisaillement-rotation est quasiment inexistante ($\alpha \approx 0$) ; sauf pour les fluides à rhéologie complexe un fluide cisailé relaxe ces contraintes dans un laps de temps très court par une réorganisation de la structure de la matière. Aussi le terme d'accumulation $\boldsymbol{\omega}^o$ peut être négligé au cours de l'évolution du système. Toutefois il peut être utilisé à bon escient pour définir les conditions initiales d'un système en équilibre mécanique. En présence d'un terme source, la gravité par exemple, un champ de pression nul ne respecte pas l'équilibre mécanique traduit par l'équation de la statique des fluides.

Le système (2) originel est la meilleure forme de l'équation du mouvement car elle intègre la conservation de la masse ; la résolution de cette équation satisfait automatiquement sa contrainte en une seule et même étape. Cette équation permet d'appréhender des écoulements incompressibles ou compressibles (y compris avec chocs), des écoulements monophasiques ou diphasiques, multiconstituants, etc. Couplée avec une équation vectorielle sur le flux de chaleur elle permet de prendre en compte des phénomènes de changement de phase.

2.3 Invariance matérielle

Le principe d'invariance matérielle ou objectivité [12] impose les contraintes mécaniques de tout objet ne dépendent pas de l'observateur ; en particulier si l'objet est soumis à une rotation ces contraintes restent les mêmes dans un référentiel attaché à celui-ci.

Examinons l'effet d'une rotation en bloc sur le système d'équations issu de la mécanique des milieux discrets. Considérons une rotation d'axe quelconque définie par sa vitesse Ω qui peut être constante non nulle ou simplement constante sur un laps de temps. La vitesse locale est alors égale à $\mathbf{V} = \Omega \mathbf{r}$ Nous appellerons Π la pression correspondante aux effets centrifuges dans le domaine, soit $\Pi = 1/2\rho(\Omega \times \mathbf{r})^2$. Dans le cas où la vitesse est constante et l'objet non soumis à des contraintes l'équilibre mécanique se traduit par l'égalité $\nabla \Pi = \nabla \times \mathbf{V}$. En effet la contribution du terme d'inertie dans l'équation du mouvement se réduit bien à $\nabla \Pi$:

$$-\nabla \left(\frac{1}{2} \rho (\Omega \times \mathbf{r})^2 \right) + \nabla \times (\Omega \mathbf{r}) = 0 \quad (4)$$

Pour une simple rotation sur un laps de temps τ conduisant le système à tourner d'un angle $\theta = \Omega dt$ puis de devenir immobile la vitesse est bien égale à zéro et corrélativement la force centrifuge de pression devient aussi instantanément nulle. Cette opération est celle décrite par Truesdell [12] qui considérait une rotation en bloc d'un certain angle mais comme on peut le voir ici elle s'étend aux rotations continues.

Lorsque l'on reprend l'équation du mouvement en injectant la rotation en bloc on obtient :

$$\begin{cases} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(\Pi + p^o - \frac{dt}{\chi T} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \nabla \times (\Omega \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}^o - \mu \nabla \times \mathbf{V}) \\ p = p^o - \frac{dt}{\chi T} \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^o - \mu \nabla \times \mathbf{V} \end{cases} \quad (5)$$

On vérifie compte tenu de (4) que les contraintes définies par les accumulateurs $(p^o, \boldsymbol{\omega}^o)$ ne sont pas affectées par une rotation discrète ou par une rotation continue.

Il faut associer à la rotation en bloc l'effet d'une translation du système à vitesse constante \mathbf{V}_0 correspondant à la notion de référentiel euclidien ou inertiel. L'équation du mouvement est incapable de rendre compte de ce mouvement de translation puisqu'elle ne décrit que les changements de vitesse à travers la quantité d'accélération $\rho \boldsymbol{\gamma}$.

Toutefois pour des vitesses de rotation élevées les effets centrifuges peuvent être non négligeables et conduire par exemple à l'allongement d'un solide mais il s'agit là d'une interaction forte non liée au principe d'invariance matérielle. En conclusion, les deux mouvements uniformes, translation à vitesse constante \mathbf{V}_0 et rotation à vitesse constante Ω , ne modifient pas au premier ordre les contraintes mécanique d'un milieu.

2.4 Equation de la statique des solides

L'équation de la statique des fluides traduit l'équilibre mécanique du milieu fluide de masse volumique ρ soumis à un champ de gravité \mathbf{g} . Elle s'écrit :

$$-\nabla p^o + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (6)$$

En incompressible la seule inconnue est la pression d'équilibre p^o . Pour un milieu compressible il faut habituellement introduire une relation, la loi d'état, pour calculer la solution du problème (p^o, ρ) . En mécanique des milieu discret la loi d'état ne fait pas partie du système d'équations et la masse volumique est calculée directement à l'aide de l'équation de conservation de la masse alors que la pression est actualisée par le coefficient de compressibilité. Les effets thermiques peuvent être pris en compte à travers le rapport γ des chaleurs massiques à pression à volume et constants.

Dans le cas général où les propriétés du fluide dépendent elles-même de la pression cette équation (6) ne peut être résolue explicitement ; en milieu discret la pression et la masse volumique sont obtenues par le processus d'incrémentatation décrit plus haut.

L'équilibre d'un solide soumis à un champ de gravité ne fait pas généralement l'objet d'une attention particulière en dehors de quelques cas traditionnels comme celui du comportement d'un câble élastique soumis à son propre poids. Pour les objets usuels les liaisons intermoléculaires sont suffisantes pour considérer le corps comme un milieu rigide. Dans le cas général il convient de calculer les contraintes dans le matériau solide et éventuellement les déplacements si une condition initiale est fixée.

En faisant abstraction des raisons microscopiques liées aux interaction moléculaires on peut supposer qu'il existe un état de contraintes mécaniques qui maintient le solide immobile ($\mathbf{V} = 0$) ou en mouvement uniforme. Cet état est caractérisé ici par les contraintes de compression et de rotation $(p^o, \boldsymbol{\omega}^o)$ qui, on le rappelle, s'expriment avec les mêmes unités.

L'équation de la statique unifiée pour les fluides et les solides s'écrit :

$$-\nabla p^o + \nabla \times \boldsymbol{\omega}^o + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (7)$$

La contrainte de rotation est nulle pour un fluide qui n'accumule pas la rotation du milieu. Cette contrainte existe de manière instantanée mais elle n'est simplement pas accumulée au cours du temps.

L'équation (7) généralise l'équation de la statique des fluides. Elle s'écrit comme une décomposition de Hodge-Helmholtz ([1], [10]) du vecteur $\rho \mathbf{g}$. Pour une masse volumique et une gravité constantes cette force volumique dérive d'un potentiel scalaire uniquement, la pression p . A masse volumique variable tel que $\nabla \rho \times \mathbf{g} \neq 0$ l'équilibre mécanique n'est plus possible et la force volumique comporte un potentiel scalaire mais aussi un potentiel vecteur Ψ lié au mouvement du fluide qui n'a rien à voir avec le potentiel vecteur du solide ω^o . Il est à noter que cette condition est locale et ne possède pas la même signification habituelle en géodynamique pour les écoulements baroclines.

En dehors des cas simples où la résolution analytique est possible l'équation (7) peut être résolue directement par une méthode adaptée à la mécanique des milieux discrets de manière très efficace. En une seule étape les potentiels (p^o, ω^o) sont obtenus et l'équation vérifiée à la précision machine.

2.5 Calcul des déplacements

Le calcul des déplacements \mathbf{U} peut s'effectuer directement à partir de la loi de la dynamique par une double intégration en temps. Toutefois la résolution l'équation du mouvement fournit la vitesse ou plutôt ses composantes \mathbf{V} dans un référentiel local attaché au segment Γ . Cette vitesse n'est définie qu'à deux autres vitesses uniformes près, une vitesse de translation \mathbf{V}_t et une rotation d'ensemble $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$. La vitesse d'une particule dans un repère absolu s'écrit ainsi :

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{V} + \mathbf{V}_t + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (8)$$

Ce formalisme étend la notion de repère euclidien aux mouvements uniformes de rotation. Comme on va le constater la contrepartie est l'existence d'un potentiel scalaire correspondant aux effets centrifuges.

Reprenons l'équation du mouvement discrète si $\mathbf{V} = \mathbf{V}_p$:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \rho \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} = -\nabla \left(p^o - \frac{dt}{\chi T} \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{V}^2 \right) + \nabla \times (\omega^o - \mu \nabla \times \mathbf{V}) \quad (9)$$

On remarque que le champ de translation uniforme possède les propriétés $\nabla \cdot \mathbf{V}_t = 0$ et $\nabla \times \mathbf{V}_t = 0$; cette contribution disparaît ainsi de l'équation du mouvement. Le champ de rotation $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$ est quant à lui solénoïdal $\nabla \cdot (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) = 0$ mais son rotationnel est constant $\nabla \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) = 2 \mathbf{\Omega}$. On remarque aussi que $\nabla \times \omega^o = 0$ car l'accumulation du rotationnel constant donne un champ constant à rotationnel nul; le terme visqueux est lui aussi nul. L'intégration du champ de vitesse $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$ dans l'équation (9) donne :

$$-2 \rho \mathbf{V} \times \mathbf{\Omega} = -\nabla \left(p^o + \frac{\rho}{2} \mathbf{V}^2 \right) \quad (10)$$

soit, si l'on nomme $\Phi_r = p^o$ le potentiel obtenu est ainsi :

$$\Phi_r = \frac{\rho}{2} (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})^2 \quad (11)$$

Le mouvement de rotation d'ensemble nécessite ainsi l'ajout d'un potentiel scalaire dans l'équation du mouvement. A ceci près que le mouvement de rotation d'ensemble disparaît aussi de cette équation. La notion de référentiel euclidien est ainsi généralisée à toutes les combinaisons linéaires de mouvements uniformes. On retrouve bien sûr l'écriture classique de l'équation du mouvement dans un repère mobile où $\nabla \Phi_r = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$, le terme centrifuge.

Dans le cas général on sait que l'ajout du gradient de n'importe quelle fonction régulière dans l'équation du mouvement ne modifie en rien le mouvement régi par l'équation, seule la pression d'équilibre sera redéfinie. Dans le cas de la rotation uniforme on aurait $p^o + \Phi_r$. Si les propriétés thermomécaniques ne sont pas modifiées par les variations de pression la contribution Φ_r pourra être oubliée.

Le calcul du déplacement \mathbf{U} d'une particule fluide ou solide peut ainsi s'effectuer à partir de la vitesse \mathbf{V}_p directement par une intégration en temps sur un intervalle dt qui sépare l'observation de deux états d'équilibre mécanique. Toute la mécanique des milieux discrets est basée sur ce principe d'accumulation des contraintes qui conduit un système en équilibre à l'instant t_0 à un autre état d'équilibre à $t_0 + dt$. Ce principe permet d'aborder simplement les grandes déformations et les grands déplacements de la mécanique des milieux continus.

Des différences importantes entre les deux approches ont été reportées dans [4] ; parmi celles-ci l'abandon de la notion de tenseur du second ordre pour décrire les contraintes et déformations d'un milieu. La raison en est simple, si l'on peut décrire tous les mouvements d'un système mécanique à partir d'opérateurs différentiels simples, divergence, rotationnel, gradient, alors pourquoi construire un tenseur du second ordre dont on prendra plus tard la divergence pour en réduire l'ordre ? Cette remarque triviale sur l'utilisation de tenseurs permet de comprendre la nécessité d'introduire des conditions supplémentaires en mécanique des milieux continus. C'est le cas par exemple de la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy, du principe d'invariance matérielle introduit par [12], de la condition sur les coefficients de Lamé $3\lambda + 2\mu \geq 0$ de Clausius-Duhem ou encore des conditions de compatibilité sur les déformations. Toutes ces conditions ne sont pas nécessaires car les principes qu'elles sont supposées traduire sont satisfaits d'emblée.

Prenons le cas des conditions de compatibilité relative au tenseur des déformations ε . Elles traduisent l'existence d'un champ de déplacements \mathbf{U} tel que ce tenseur symétrique soit égal à $\varepsilon = 1/2(\nabla\mathbf{U} + \nabla^t\mathbf{U})$. Les composantes du tenseur ε sont au nombre de six alors qu'il existe trois composantes du déplacements dans un repère orthonormé [6]. C'est un problème analogue que l'on rencontre lorsqu'on cherche un potentiel Φ à partir d'un champ de vecteurs \mathbf{V} . La condition est que ce champ dérive d'un potentiel soit $\nabla \times \mathbf{V} = 0$.

Ces relations de compatibilité peuvent être synthétisées sous la forme $\nabla^g \times \nabla^g \times \varepsilon = 0$ ou $\nabla^d \times \nabla^d \times \varepsilon = 0$ où g et d font référence aux deux formes (gauche et droit) du rotationnel d'un tenseur.

En mécanique des milieux discrets les déplacements (ou les vitesses) et les contraintes sont associées à chaque segment Γ de la topologie de la figure (1) et le repère est local. Par ailleurs les déplacements \mathbf{U} et les contraintes (p^o, ω^o) sont obtenues dans un même temps dans le processus qui conduit le système d'un état d'équilibre à un autre.

De manière pratique le calcul des déplacements et de la déformation s'effectue à partir d'une intégration temporelle de la vitesse une fois celle-ci obtenue à partir de l'équation du mouvement.

3 Propriétés des milieux

Les propriétés des milieux, fluides ou solides, doivent être connues et intégrées dans les équations de conservation ; elles peuvent être déterminées théoriquement, expérimentalement, à partir de modèles, etc. Elles n'interfèrent pas directement avec les équations et ne peuvent remettre en question la notion de conservation que celles-ci traduisent. Ces caractéristiques physiques sont par exemple les coefficients élastiques, module d'Young, coefficient de Poisson ou bien les coefficients de viscosité de Lamé, λ et μ ; ce sont aussi les coefficients thermodynamiques comme le coefficient de compressibilité isotherme χ_T ou le coefficient d'expansion thermique β . Ces quantités dépendent généralement de variables comme la température et la pression mais dans tous

les cas elles sont déterminées par ailleurs.

Certaines variables ne doivent pas être considérées comme des caractéristiques, c'est le cas de la masse volumique ρ . Celle-ci possède une équation de conservation spécifique, la conservation de la masse. Cette variable n'est fonction que d'une seule quantité, la divergence de la vitesse. Vouloir lui fixer une valeur par une quelconque loi d'état ou tout autre moyen serait une erreur qui introduirait une incohérence.

La notion de pression est complexe et ne peut non plus être calculée par une loi d'état. Cette variable est le potentiel scalaire de la quantité d'accélération et son évolution au cours du temps est fixée uniquement par l'équation du mouvement.

La mécanique des milieux continus introduit une confusion entre variables, caractéristiques, lois d'état, lois de comportement, etc. Le décompte des variables et des équations de conservation conduit, pour ce formalisme, à égaler les deux pour conclure à l'obligation de fermer le système en considérant une loi de plus, la loi d'état en l'occurrence. Mais le décompte correspond à une vision erronée, il n'est pas nécessaire d'utiliser une loi supplémentaire.

En mécanique des milieux discrets on considère que la masse volumique est le potentiel associé à la conservation de la masse comme la pression est le potentiel scalaire associé à la conservation de la quantité de mouvement.

Les propriétés des milieux sont elles-mêmes l'objet d'incertitudes ou de controverses ; c'est le cas du second coefficient de Lamé λ pour les fluides. Même si sa valeur, par exemple pour l'eau, a été déterminée par de nombreux auteurs, les résultats sont disparates et très éloignées de l'hypothèse de Stokes. Comme on le verra les méthodes de mesure introduisent un biais qui rend ces mesures incohérentes. Les coefficients élastiques ont été mesurés depuis l'origine de la mécanique par des moyens simples, en étirant une éprouvette d'acier on mesure son élongation et on applique la loi linéaire de Hooke pour déterminer le module d'Young. Cela étant on constate un rétrécissement de la section tout naturel et on en déduit le coefficient de Poisson. L'utilisation d'échantillons plus larges que longs donnent des résultats différents et introduit *de facto* une dépendance de l'environnement de l'expérience.

Il s'agit ici d'introduire dans le formalisme du milieu discret les seules caractéristiques nécessaires en s'assurant que celles-ci sont parfaitement mesurables.

Pour des questions d'homogénéité de l'exposé les propriétés seront notées de manière identique pour les solides et les fluides, seule diffère la variable à laquelle elle est associée, vitesse ou déplacement. C'est ainsi par exemple que la viscosité dynamique en fluide dont la dimension est en $(Pa \cdot s)$ alors que le module de cisaillement ou module de Coulomb G s'exprime en (Pa) ; la première est associée à une vitesse et le second à un déplacement. Si l'on considère pourtant une expérience de Couette de cisaillement d'un milieu, fluide ou solide, pendant un temps dt fixé, l'élongation du milieu solide sera aussi égale à $V_0 dt$ si V_0 est la vitesse d'entraînement comme celle du milieu fluide. La différence est le processus d'accumulation des contraintes dans le solide.

Le choix adopté est celui qui prévaut en fluide où la variable vectorielle est la vitesse \mathbf{V} , les déplacements seront directement fixés par le produit $\mathbf{V}dt$ où dt est toujours le temps d'observation du système entre deux états d'équilibre mécanique. L'équation discrète du mouvement (2) est ainsi exprimée en termes de vitesse et de contraintes (p^o, ω^o) .

3.1 En mécanique des milieux continus

On trouve en mécanique des milieux continus que le tenseur d'élasticité du quatrième ordre \mathbf{C}_{ijkl} qui relie les contraintes au taux de déformations composée de 81 coefficients indépendants dans le cas général se réduit à 21 coefficients en tenant compte des symétries. En utilisant la notation de Voigt sous forme d'une matrice 6×6 , la réduction pour les milieux isotropes conduit à une matrice à deux coefficients telle que que les composantes $C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu$ alors que les autres termes non nuls sont égaux à $C_{44} = \mu$.

On perçoit ici que les effets de compression et les effets de cisaillement ne sont pas disjoints ; λ et μ sont les deux coefficients indépendants de Lamé mais C_{11} qui est représentatif de la compression directionnelle est associé à μ . Le coefficient qui en résulte est appelé module d'onde de compression dans la littérature.

$$M = \lambda + 2 \mu \quad (12)$$

En solide le module de cisaillement est noté G . De fait M et $G = \mu$ sont bien deux coefficients indépendants qui peuvent être retrouvés à partir de la mesure du module d'Young E et du coefficient de Poisson σ .

Si l'on considère la propagation d'ondes dans un milieu solide on peut écrire les deux équations des ondes correspondantes sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} = c_T^2 \frac{d^2 u}{dy^2} \\ \frac{d^2 v}{dt^2} = c_L^2 \frac{d^2 v}{dy^2} \end{cases} \quad (13)$$

où u et v sont les déplacements en x pour le cisaillement et en v pour la compression.

c_L et c_T sont appelées célérités longitudinale et transversale :

$$\begin{cases} c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2 \mu}{\rho}} \\ c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \end{cases} \quad (14)$$

Ces expressions sont valables que dans le cas d'un milieu illimité. Pour un milieu de largeur finie la célérité longitudinale c_l dépend de la largeur de l'échantillon et les célérités deviennent :

$$\begin{cases} c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \\ c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \end{cases} \quad (15)$$

Le module d'Young dépendant de l'environnement de l'échantillon, il en va de même pour c_t . Par contre on a bien $c_T = c_t$.

Un rapide calcul à partir de la définition des célérités et du coefficient de Poisson montre que l'on a :

$$\frac{c_T}{c_L} = \sqrt{\frac{(1 - 2 \sigma)}{2 (1 - \sigma)}} \quad (16)$$

et on trouve que ce rapport est inférieur à $1/\sqrt{2}$. La figure (3) donne l'évolution de la fonction $(c_T/c_L)^2$ en fonction du coefficient de Poisson σ .

Sauf cas très particulier le coefficient de Poisson est compris entre dans la gamme $[0, 0.5]$. La valeur zéro est généralement attribuée à un matériau dit "très compressible", en fait qui ne se contracte pas lorsqu'il est comprimé et la valeur de 0.5 correspond à un matériau dit "incompressible", plutôt à un matériau qui tend à conserver son volume c'est à dire qu'il se contracte lorsqu'il est en extension. La nature uniforme de la loi montrée sur la figure (3) permet

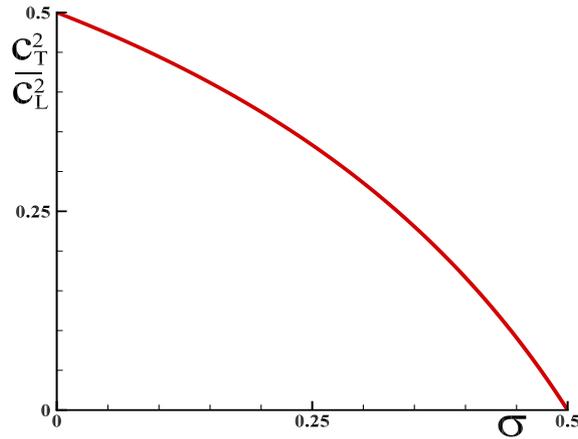


FIGURE 3. Evolution du rapport $(c_T/c_L)^2$ en fonction du coefficient de Poisson.

de relier directement σ au rapport des célérités et d'utiliser plutôt ce dernier paramètre car les célérités peuvent être mesurées avec plus de précision.

Cette approche de milieu continu conduit à une première difficulté, celle de l'environnement où certains coefficients dépendent de la manière où ils sont mesurés. Par exemple des précautions sur le rapport des dimensions d'un échantillon soumis à la traction doivent être prises pour mesurer le module d'Young et le coefficient de Poisson.

Il existe une autre difficulté liée aux fluides ; le second coefficient de Lamé λ n'est pas défini pour un gaz ou un liquide et l'hypothèse incohérente d'un milieu incompressible où $\sigma = 0.5$ conduit à λ infini et à une vitesse du son aussi infinie. La théorie cinétique des gaz d'un côté et la thermodynamique par l'inégalité de Clausius-Duhem n'apporte pas de solution acceptable. L'inégalité $3\lambda + 2\mu \geq 0$ admet que la valeur de λ peut être négative. Cette expression confirmée par l'examen des invariants du tenseur des contraintes aboutit en 3D à la même conclusion.

L'hypothèse de Stokes $3\lambda + 2\mu = 0$ démontrée pour un gaz monoatomique par la théorie cinétique des gaz pour un modèle de sphères dures est loin d'apporter une réponse satisfaisante. Comme μ pour les liquides est petit, (10^{-3}) pour l'eau par exemple, des valeurs équivalentes de λ n'ont strictement aucun effet sur le résultat. Si l'on calcule le produit $\mu \chi_T$ on trouve des valeurs de l'ordre de 10^{-12} , alors pourquoi pas $\lambda = -2/3 \mu$! De toute manière l'incompressibilité totale ou partielle sera assurée par la conservation de la masse.

Enfin la notion de tenseur complique pour beaucoup la dérivation de l'équation du mouvement. En introduisant l'hypothèse de milieu continu il a été nécessaire de réduire tous les quantités, variables, propriétés, ... en un point en utilisant le théorème de la divergence puis l'hypothèse de l'équilibre local. Si ces hypothèses peuvent être justifiées pour les grandeurs scalaires la réduction de vecteurs en un point nécessite de construire un repère pour y baser ses composantes.

La prise en compte de matériaux présentant des anisotropies peut bien sûr assurée par des tenseurs mais comme on le verra ce n'est pas une nécessité.

3.2 En mécanique des milieux discrets

En mécanique des milieux discrets [4] les coefficients de comportement sont parfaitement mesurables que cela soit pour un fluide ou un solide. Il s'agit de μ le coefficient de viscosité dynamique en fluide ou le module de cisaillement en solide mais cette notion est identique pour

les deux milieux, seule change la nature du potentiel, déplacement en solide ou vitesse en fluide. Le second coefficient indépendant est le coefficient de compressibilité χ_T dont la définition est précisée :

$$\chi_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \quad (17)$$

où les variations de ρ et de p sont connues sur chaque point de la topologie primale de la figure (1). On rappelle que l'action des effets de compressibilité n'existe que sur chaque segment Γ , entre deux points de la topologie primale. Cette action est traduite dans le système d'équations par un gradient d'un scalaire, en l'occurrence la pression. Les seules conditions qui s'appliquent à ces coefficients sont :

$$\frac{1}{\chi_T} \geq 0; \quad \mu \geq 0 \quad (18)$$

Ces deux coefficients μ et χ_T permettent de séparer complètement les effets de compression du milieu des effets de cisaillement/rotation. Ces deux coefficients ne s'expriment pas avec les mêmes unités ; pour que cela soit le cas il faut introduire le temps ou plutôt la constante de temps dt avec lequel on observe le système évoluer. Ainsi c'est dt/χ_T qui a la dimension d'une viscosité. De fait cette notion de temps est primordiale dans la compréhension des phénomènes de propagation des ondes longitudinales dans un milieu. Par exemple, pour un fluide, les évolutions de la pression seront d'autant plus importantes que l'échelle caractéristique temporelle du phénomène est courte. Sauter dans une piscine d'une hauteur de 1 m ou de 10 m ne produit pas les mêmes effets sur le corps. Ainsi l'écoulement de l'eau à grande constante de temps peut être considéré comme incompressible alors que la propagation des ondes sonores à $c = 1500 \text{ m/s}$ montre bien que ce milieu est compressible.

Les coefficients μ et χ_T sont bien intrinsèques et ne dépendent que de la nature du milieu ; ceux-ci doivent être mesurés par des moyens expérimentaux appropriés. Le coefficient μ peut être mesuré par un cisaillement lent entre deux parois, par exemple par rhéométrie pour les fluides. Le coefficient de compressibilité peut être évalué très précisément en fluide et en solide à l'aide de la propagation des ondes longitudinales en mesurant leur célérité :

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho \chi_T}} \quad (19)$$

Cette expression s'applique dans tous les cas, fluides (gaz ou liquides) et solides. Il suffit de connaître la célérité des ondes longitudinales $c_T = c$ pour en tirer le coefficient de compressibilité isotherme χ_T . Le cas des gaz en évolution adiabatique introduit l'excès de pression due à l'évolution de la température et dans ce cas on utilise le coefficient de compressibilité isentropique $\chi_S = \gamma \chi_T$.

Le tableau (1) donne les valeurs de la viscosité μ et du coefficient de compressibilité χ_T calculé à partir de la célérité longitudinale du milieu pour quelques milieux fluides et solides. Ces valeurs ne sont qu'indicatives et sujettes à des variations non négligeables. Elles dépendent aussi de l'environnement choisi pour les mesures, la célérité longitudinale dépend de la largeur de l'échantillon.

Considérons un milieu, fluide ou solide, en évolution au cours du temps et examinons le mouvement de celui-ci à partir de la vitesse locale ; les déplacements seront déduits par une intégration en temps en suivant une particule de ce milieu. On constate que la distinction nette entre fluides et solides porte sur la viscosité de cisaillement/rotation μ et non sur le coefficient de compressibilité. Cela confirme que le temps de relaxation des fluides τ des contraintes de cisaillement sont très faibles. On peut les estimer en considérant que le rapport $\tau/\mu\chi_T$ est d'ordre

Matériau	ρ	c_L	μ	χ_T	$\mu \chi_T$
verre	2500	5300	$5 \cdot 10^{10}$	$1.4 \cdot 10^{-11}$	0.7
acier	7500	5600	$8.1 \cdot 10^{10}$	$4.25 \cdot 10^{-12}$	0.344
aluminium	2700	6320	$2.8 \cdot 10^{10}$	$9.27 \cdot 10^{-12}$	0.256
caoutchouc	3510	50	10^6	$1.14 \cdot 10^{-7}$	$1.14 \cdot 10^{-1}$
liège	256	450	$2.7 \cdot 10^6$	$1.92 \cdot 10^{-8}$	$5.184 \cdot 10^{-2}$
air	1.18	347	$1.85 \cdot 10^{-5}$	$9.89 \cdot 10^{-6}$	$1.829 \cdot 10^{-10}$
eau	1000	1480	10^{-3}	$4.44 \cdot 10^{-10}$	$4.44 \cdot 10^{-13}$

TABLE 1. Propriétés des matériaux issues de valeurs moyennes de la littérature qui sont très disparates. ρ est la masse volumique, c_L est la célérité longitudinale, μ est le module de cisaillement ou viscosité et χ_T est le coefficient de compressibilité isotherme. Les valeurs du produit $\mu \chi_T$ représente un temps de relaxation des contraintes de cisaillement.

un ; on aboutit à des valeurs de $dt = \tau \approx 10^{-12} s$. Dans ces conditions un fluide ne peut accumuler les contraintes de cisaillement, elles sont relaxées quasi-instantanément et le potentiel vecteur ω^o reste nul.

Le résultat de cette analyse succincte montre que la quantité :

$$\frac{c_T}{c_L} = \sqrt{\frac{\mu \chi_T}{dt}} \quad (20)$$

est d'ordre un lorsque dt est d'ordre un pour les solides et d'ordre du temps de relaxation des contraintes de cisaillement pour les fluides.

On peut constater par ailleurs que la relation (16) est aussi satisfaite par les quelques matériaux choisis dans le tableau (1) :

$$0 \leq \frac{c_T^2}{c_L^2} \leq \frac{1}{2} \quad (21)$$

Comme on peut le voir l'interprétation de ces données est assez délicate et le sens commun basé sur le module d'Young et le coefficient de Poisson ne suffit pas. C'est ainsi que le caoutchouc généralement considéré comme incompressible est surtout dû à l'image d'un élastique que l'on étire et dont la section se réduit. Des pièces massives en caoutchouc se déforment beaucoup moins transversalement.

L'objectif étant l'unification entre formulations fluide et solide bien naturelle puisqu'il s'agit de la même mécanique nécessite de formuler les mêmes équations de conservation mais aussi les mêmes conditions de bord.

3.3 Conditions aux limites

La notion de condition à la limite et de problème bien posé n'est plus du tout envisagé de manière classique où le modèle mathématique est composé d'équations aux dérivées partielles et de conditions aux limites sur la variable. En mécanique des milieux discrets la variable n'est contrainte que par l'équation et par les limites physiques. Par exemple on n'impose pas l'incompressibilité du fluide à priori $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, ce sont les propriétés des milieux qui la conditionne, $\chi_T \rightarrow 0$. Aussi le système d'équations (2) n'est associé aucune condition à la limite. L'effet, $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ ne doit être imposé, sinon il en fait disparaître la cause.

Le rapport des célérités transversale et longitudinale joue un rôle important dans le comportement des matériaux soumis à une sollicitation en fonction de l'environnement dans lequel ils se

trouvent. Ainsi une sollicitation en extension d'un matériau de dimension latérale très importante fait intervenir uniquement la célérité longitudinale associée aux ondes de compression/extension. Lorsque l'échantillon est d'extension latérale limitée une perturbation longitudinale s'accompagne d'une réduction de la section transversalement et d'une onde de célérité c_T . En mécanique des milieux continus le rapport c_T/c_L ne dépend que du coefficient de Poisson. La relation (20) est l'équivalent en milieu discret.

Cette dépendance de l'environnement doit être associée à une condition à la limite qui traduit la cohésion de la matière lorsque le système présente une surface libre, par exemple avec l'atmosphère. Plus précisément un échantillon soumis à une extension subira un changement de volume, généralement une augmentation traduite par une divergence globale positive.

Le comportement en volume d'un matériau ne dépend que deux propriétés physiques locales et directionnelles, la viscosité μ et le rapport dt/χ_T . Le coefficient de compressibilité est défini au point et le gradient est calculé sur le segment Γ tandis que le rotationnel primal est défini le contour comme une circulation et le rotationnel dual le projette sur Γ . Au sein du milieu, solide ou fluide, les répartitions locales des contraintes de pression p et de rotation ω s'équilibrent avec les forces volumiques ou les contraintes imposées. Sur les limites du domaine l'équilibre mécanique doit être défini pour exprimer l'absence de ce matériau, une paroi intégralement rigide, la présence d'un autre de propriétés différentes ou bien un fluide ou encore le vide. Les conditions aux limites doivent ainsi exprimer l'intégrité du matériau qui résiste aux extensions et compressions ; en effet le milieu n'est généralement pas incompressible et une extension augmente généralement le volume et donc correspondre à une diminution de sa masse volumique puisque la divergence est positive dans ce cas.

Il faut rappeler que la formulation présentée est basée sur une approche dynamique où la variable principale est la vitesse. Les déplacements sont obtenus naturellement par une intégration en temps. De même les équations de la mécanique des milieux discrets permet de calculer non seulement les déplacements mais aussi les contraintes de pression représentée par p^o et la contrainte de rotation ω^o . Ces contraintes sont issues du processus d'accumulation où l'évolution du système est observé du temps t au temps $t + dt$.

La définition des conditions aux limites peut être assurée par le même processus dynamique en examinant le comportement du milieu dans son environnement. Par exemple un déplacement dans une direction longitudinale produit un déplacement dans la direction transversale dans la mesure où il n'est pas maintenu dans une cavité rigide ou s'il n'est pas d'extension latérale très importante. Dans ce cas seule la célérité longitudinale gouverne les déplacements dans cette direction. Lorsque le milieu est en relation directe avec tout autre milieu il est nécessaire de définir les conditions aux limites. Cette question doit être traitée de manière cohérente à la formulation des équations du milieu discret où les conditions aux limites ne sont pas des contraintes extérieures (de type Neumann, Dirichlet, ...) mais complètement intégrées dans les équations de conservation.

En utilisant la dérivée matérielle l'équation intégrant les conditions de bord s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(p^o - \kappa \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \nabla \times (\omega^o - \mu \nabla \times \mathbf{V}) \\ p = p^o - \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \rho = \rho^o - \rho \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \omega = \omega^o - \mu \nabla \times \mathbf{V} \end{array} \right. \quad (22)$$

Le coefficient κ vaut un au sein du domaine et $\kappa = c_T^2/c_L^2$ au bord de celui-ci lorsque par exemple le milieu ne subit pas d'efforts de la part de l'extérieur. Le milieu peut alors se dilater latéralement

lors d'une compression tout en subissant, en général, une réduction de volume. La masse sera conservée mais pas le volume et $\nabla \cdot \mathbf{V} < 0$.

Toutes les autres types de conditions aux limites peuvent être intégrées au sein de ce système, vitesse imposée, déplacement imposé, contraintes de pression ou de cisaillement, etc. Il est possible d'étendre ces notions à des parties du domaine, par exemple pour imposer une rotation rigide de pièces mécaniques comme des engrenages par exemple.

4 Mouvements rigidifiants

L'étude des mouvements rigidifiants, écoulement à vitesse constante ou rotation en bloc, est la clé de la compréhension du comportement des milieux. L'écoulement de translation uniforme ne pose pas de difficulté lorsque l'on se place dans un repère euclidien, l'équation du mouvement qui décrit les évolutions de l'accélération n'est pas susceptible de les prendre en compte.

Le cas de l'écoulement en rotation uniforme pose plus de questions car l'équilibre mécanique nécessite un terme dérivant d'un potentiel scalaire de force centripète pour compenser la force centrifuge. La seconde difficulté est que le rotationnel est constant dans tout le milieu et conduit à une dissipation en $\mu (\nabla \times \mathbf{V})^2$ qui n'est pas nulle alors que l'écoulement ne présente aucun cisaillement. La mécanique des milieux continus résout le problème par la compensation de ce terme par le second invariant du tenseur gradient de la vitesse, \mathbf{I}_{II} . La résolution de cette difficulté due aux contraintes et conditions appliquées à l'équation de Navier-Stokes en génère d'autres.

L'écoulement de rotation en bloc a en fait une portée bien plus générale sur le comportement, solide ou fluide, du milieu et des problèmes purement théoriques sur la solution pour un problème ouvert, notamment sur l'application du théorème de Stokes à l'infini. La question envisagée ici porte sur le temps qu'un observateur doit attendre pour cet écoulement lui paraisse établi c'est à dire correspondre à la vitesse $\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_\theta = \Omega r$. Théoriquement ce temps est infini mais il est possible d'obtenir un temps caractéristique de l'établissement du champ de vitesse.

Considérons une cuve cylindrique d'axe Oz contenant de l'eau dont la masse volumique est égale à $\rho = 1000$ et sa viscosité $\mu = 10^{-3}$. Initialement immobile l'eau est mise en rotation par la rotation de la surface de la cuve de rayon $R = 1$ à la vitesse V_0 . Bien évidemment la hauteur de la cuve suivant Oz sera suffisamment grande pour que les couches d'Eckman n'aient pas d'influence sur le mouvement du fluide ; celui-ci sera entraîné exclusivement soumis aux effets visqueux radiaux.

La solution de ce problème peut être obtenue facilement par la résolution de l'équation du mouvement dans l'approximation d'un mouvement incompressible. La méthode de séparation des variables conduit à une solution générale sur la différence $v_\theta(r, t) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_\theta - \Omega r$ obtenue par superposition qui s'écrit :

$$v_\theta(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n J_1 \left(\alpha_n \frac{r}{R} \right) + b_n Y_1 \left(\alpha_n \frac{r}{R} \right) \right) e^{-\nu \frac{\alpha_n^2}{R^2} t} \quad (23)$$

où les coefficients α_n sont obtenus à partir des conditions aux limites en utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions de Bessel J et Y .

Il reste à satisfaire la condition initiale à savoir que le fluide est immobile pour $t = 0$:

$$-\frac{V_0 r}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n J_1 \left(\alpha_n \frac{r}{R} \right) + b_n Y_1 \left(\alpha_n \frac{r}{R} \right) \right) \quad (24)$$

Les coefficients a_n et b_n sont ainsi déterminés à leur tour.

La solution $\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_\theta(r, t)$ montre le développement de la couche limite dynamique au voisinage de la paroi solide et son épaissement au cours du temps. On peut admettre que la solution

est très précisément décrite par un seul terme aux temps longs et majorer le terme α_n/R^2 par l'unité. On est conduit à :

$$\varepsilon = \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_\theta - V_0 \frac{r}{R} \approx e^{-\nu t} \quad (25)$$

Si la différence est par exemple de $\varepsilon = 10^{-4}$, comme $\nu = 10^{-6}$ on trouve un temps d'établissement de $t \approx 10^7 s = 115 \text{ jours}$! Pour une cuve de rayon plus grand on perçoit que le temps s'approche de la constante de temps nécessaire pour que l'observateur puisse considérer qu'il a affaire à un solide dont la valeur caractéristique définie au tableau (1) $\tau = 1/\mu\chi_T \approx 10^{12} s$.

Pour un milieu réputé solide la viscosité μ , qui est égale au module de cisaillement dans cette approche, est de douze ordres de grandeur plus grand qu'un fluide et les contraintes sont accumulées. Alors le solide se met en rotation quasi-instantanée lorsque la cuve est entraînée en rotation.

Fondamentalement il n'y a aucune différence entre les comportements fluide et solide, seule les propriétés changent.

Du point de vue théorique l'équation de quantité de mouvement est la même pour les deux milieux, elle s'écrit :

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(p^o - \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \nabla \times (\boldsymbol{\omega}^o - \mu \nabla \times \mathbf{V}) \quad (26)$$

Le terme $\boldsymbol{\omega}^o$ peut donc être gardé y compris pour les mouvements fluides car la viscosité est généralement faible et surtout les phénomènes de changement de rotationnel au cours du temps sont très rapides par rapport à ceux évoqués plus haut. Finalement dans les cas pratiques la quantité $\boldsymbol{\omega}^o$ restera négligeable tout au long de l'évolution de l'écoulement.

Le paradoxe sur la dissipation introduit plus haut est complètement levé car ce n'est pas le terme $\mu(\nabla \times \mathbf{V})^2$ qui traduit cette dissipation de l'énergie mécanique mais $(\mu \nabla \times \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega}^o) \cdot \nabla \times \mathbf{V}$. Aux temps longs ce terme est nul et la dissipation d'un écoulement en bloc aussi. En effet pour un comportement solide il est nécessaire d'accumuler les contraintes de cisaillement dans le potentiel vecteur $\boldsymbol{\omega}^o$ qui est égal dans ce cas à $\nabla \times \mathbf{V}$, voir [4] (equ(5.40)).

Cette constatation a bien sûr des répercussions importantes sur la définition du comportement d'un milieu. Par exemple un glacier de montagne suit les mêmes lois que pour un fluide à des échelles de temps de plusieurs mois et se comporte comme un solide pour des sollicitations plus rapides. La rhéologie de milieux complexes généralement assez visqueux pourrait nécessiter la formulation proposée ici.

De même les mouvements de fluides à des vitesses extrêmement faibles au voisinage de parois pose la question de savoir si ce fluide adopte le comportement d'un solide où les molécules et atomes sont organisés.

5 Exemples

Les exemples qui vont suivre n'ont pas vocation à montrer des applications complexes de couplage fluide-structure qui ont déjà été publiées par ailleurs [2], [3]. Il s'agit de donner ici des exemples très simples correspondant pour la plupart d'entre-elles à des solutions exactes des équations de la mécanique. Les résultats obtenus avec le modèle présenté permettent toutefois de montrer le bien fondé de l'approche dans des situations variées, en fluide et en solide.

5.1 Equilibre mécanique du ballottement

Le système (2) permet de représenter les ondes acoustiques de célérité c mais peut aussi rendre compte de nombreux autres phénomènes suivant les actions extérieures introduites dans

ce système, gravité, forces de capillaires, rotation, etc. Dans le cas d'une force de gravité constante et uniforme des ondes de gravité de natures différentes peuvent se développer et se maintenir sur de grandes constantes de temps. C'est le cas d'ondes solitaires, de la houle, etc.

Les évolutions des deux milieux est représenté de manière compacte par l'équation du mouvement :

$$\rho \boldsymbol{\gamma} = -\nabla p + \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \rho \mathbf{g} \quad (27)$$

Les contraintes p et $\boldsymbol{\omega}$ associent les contraintes d'équilibre mécanique p^o , $\boldsymbol{\omega}^o$ et leurs déviateurs respectifs. L'accélération des milieux n'est pas nulle et les évolutions sont données par les variations de la vitesse locale au cours du temps.

Pour un état d'équilibre l'équation (27) s'écrit pour une vitesse nulle (ou pour un mouvement uniforme) :

$$0 = -\nabla p^o + \nabla \times \boldsymbol{\omega}^o + \rho \mathbf{g} \quad (28)$$

Considérons maintenant le cas d'un milieu solide maintenu dans une cavité dont les parois sont rigides. La figure (4) de gauche montre le solide limité par trois parois rigides et par un milieu solide moins dense sur sa surface supérieure. Le champ de pression au centre de cette même figure montre que les parois maintiennent une pression sur le solide correspondant pratiquement à la pression hydrostatique identique à celle d'un fluide dans un cavité. Par contre la surface libre entre le solide inférieur et le solide de la partie supérieure n'est pas une isobare et les autres valeurs de la pression se raccordent aux parois rigides de la cavité.

Dans cette situation l'état de contrainte est défini par les deux quantités p^o et $\boldsymbol{\omega}^o$ qui équilibrent le champ de gravité $\rho \mathbf{g}$. Le champ de contrainte de rotation est donné par le graphe de droite de la figure (4). L'équation (28) est exactement satisfaite par ces champs de contraintes.

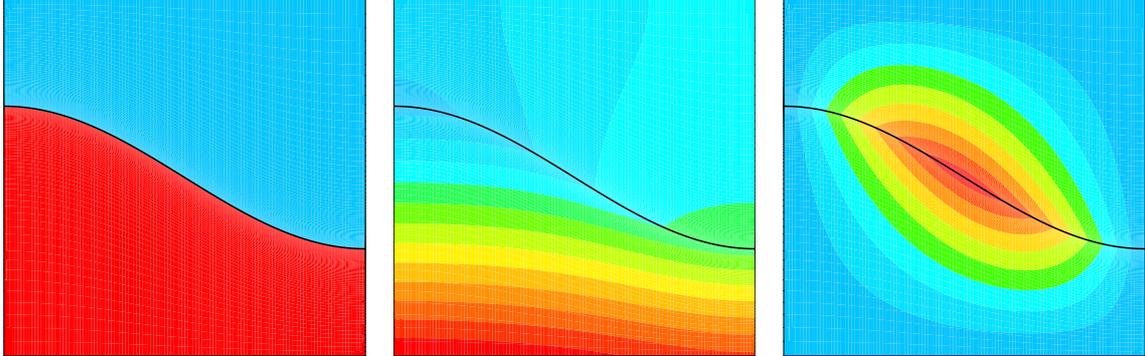


FIGURE 4. *Equilibre mécanique dans une cavité remplie d'eau et d'air considérés comme des solides élastiques ; à gauche les phases, au centre le potentiel scalaire p^o ($\Delta p = 617$) et à droite le potentiel vecteur $\boldsymbol{\omega}^o$ ($max = 85.23$). Les composantes de la vitesse sont nulles et bien sûr la divergence et le rotationnel.*

Ce même système physique va subir un changement de la nature des milieux ; les solides deviennent fluides à l'instant initial et, comme ces fluides, de l'eau et de l'air dont la masse volumique est très différente l'une de l'autre, un mouvement oscillatoire va prendre naissance sous l'effet de la pesanteur. Le changement de nature est simplement réalisé à partir du coefficient α du système (3) ; si $\alpha = 0$ l'accumulation des contraintes de rotation est supprimée et le milieu se comporte comme un fluide.

La figure (5) montre bien la transition solide-fluide pour un temps égal $t = 0$. A partir de cette valeur du temps le champ de pression est la seule contrainte à équilibrer la gravité.

Comme l'inertie joue un grand rôle dans cet équilibre les vitesses oscillent périodiquement sans atténuation puisque les deux fluides sont dénués de viscosité.

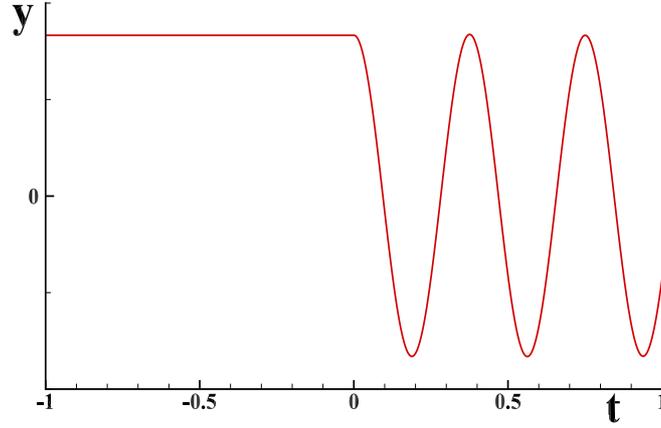


FIGURE 5. *Ballotement d'eau et d'air dans une cavité carrée ; évolution de la surface libre sur le bord gauche de la cavité au cours du temps. Pour des temps inférieurs à zéro, $t < 0$, les comportements des deux milieux sont ceux d'un solide élastique et pour des temps plus grands, $t \geq 0$, les comportements sont ceux d'un fluide.*

Nous allons maintenant envisager ce cas du ballotement avec les mêmes équations. Au premier ordre les mécanismes mis en jeu sont l'inertie et la gravité. Les deux fluides bien que formellement compressibles donnent lieu à un mouvement à grande constante de temps qui peut être considéré comme incompressible. Toutefois aucune simplification ne peut être faite dans le système d'équations du fait de l'intégration de la conservation de la masse dans la loi de conservation de la quantité de mouvement si la méthode DOC correspondante est utilisée. Le même problème est abordé avec l'approximation d'incompressibilité avec la méthode KSP décrite en détail dans [5].

Considérons une cavité de longueur L et de hauteur $2H$ qui contient un fluide de masse volumique ρ_2 et de viscosité μ_2 surmonté d'un fluide de masse volumique ρ_1 et de viscosité μ_1 . L'interface séparant les deux phases non miscibles est légèrement perturbée et, sous l'effet de la gravité, va osciller autour de sa position d'équilibre, l'horizontale. Le fluide inférieur occupe, au repos, une hauteur H .

La notion de viscosité n'apporte rien au problème posé, seule une décroissance plus ou moins rapide des ondes serait obtenue suivant la valeur des viscosités. Celles-ci sont considérées comme nulles, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et le terme de diffusion de la quantité de mouvement disparaît de l'équation du mouvement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} \right) = -\nabla \left(p^o + \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} - \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) + \rho \mathbf{g} \\ p = p^o - \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \rho = \rho^o - dt \rho \nabla \cdot \mathbf{V} \end{array} \right. \quad (29)$$

L'étape d'advection sur les potentiels scalaires est ensuite réalisée pour obtenir les vitesses actuelles.

Le premier terme du second membre de la première équation permet d'assurer la cohérence entre la conservation de la masse et le potentiel scalaire p^o . En effet pour des valeurs de χ_T pour

l'air et l'eau et les constantes de temps importantes du phénomène la divergence de la vitesse est faible et on entre légitimement dans le cadre des écoulements incompressibles. Il est encore à remarquer qu'il est impossible de supprimer le terme correspondant sous prétexte que $\nabla \cdot \mathbf{V}$ est très faible.

L'évolution dans le temps est ainsi conditionnée par la compétition entre l'inertie du fluide et la gravité $\rho \mathbf{g}$. Ce dernier terme ne dérive pas d'un potentiel scalaire et la décomposition de Hodge-Helmholtz de $\rho \mathbf{g} = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi$ met en évidence les deux contributions non nulles de celle-ci. La partie irrotationnelle vient modifier le potentiel scalaire p^o pour lui adjoindre les effets gravitaires statiques et le potentiel vecteur modifie l'équilibre mécanique. Le couplage avec l'inertie engendre le mouvement de ballonnement dont la fréquence peut être calculée par la théorie linéaire.

Si la perturbation initiale de l'interface est définie par des modes de Fourier, i suivant la direction longitudinale et j pour les modes transversaux, la théorie linéaire permet d'explicitier la fréquence [8] :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\pi g \sqrt{\frac{i^2}{L^2} + \frac{j^2}{l^2}} \operatorname{th} \left(\pi H \sqrt{\frac{i^2}{L^2} + \frac{j^2}{l^2}} \right)} \quad (30)$$

où L est la longueur du domaine suivant x et l la largeur suivant y .

On définit aussi la pulsation ω et la période T :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (31)$$

L'expression de la fréquence théorique (30) a été établie à partir d'une théorie linéaire de la stabilité pour un fluide de masse volumique ρ_2 en l'absence du fluide situé au-dessus. Lorsque les masses volumiques ρ_1 et ρ_2 sont proches il est nécessaire d'introduire une correction [9] qui donne la relation :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\pi g \sqrt{\frac{i^2}{L^2} + \frac{j^2}{l^2}} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \operatorname{th} \left(\pi H \sqrt{\frac{i^2}{L^2} + \frac{j^2}{l^2}} \right)} \quad (32)$$

Le problème est abordé à partir du système (29) et une méthodologie spécifique de type Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) développée afin de séparer les deux phases par une ligne du maillage mobile. Ainsi le modèle ne comporte aucune interpolation, ni sur la viscosité, ni sur la masse volumique, ce qui évite les nombreuses difficultés observées avec des codes eulériens pour des écoulements diphasiques. Des difficultés annexes comme le calcul de la courbure en maillage structuré viennent réduire encore la représentativité des phénomènes simulés.

Les fluides choisis sont de l'eau et de l'air et les masses volumiques correspondantes sont $\rho_2 = 1000$ et $\rho_1 = 1.1728$. Ceux-ci sont contenus dans une cavité carrée de dimension $L = 2H = 0.1 m$. Seul le premier mode 2D est testé, soit $i = 1$ et $j = 0$. Le pas de temps est égal à $10^{-3} s$ ce qui permet d'atteindre une précision suffisante sur la fréquence des oscillations. La perturbation initiale est de type sinusoïdale avec une amplitude $1 mm$.

Le résultat est donné sous la forme d'une évolution périodique de la hauteur du fluide 2 sur un bord du domaine, en $x = 0$. Les forces de gravité introduisent un mouvement vers le bas de la zone où la surface libre est plus haute. En l'absence des forces visqueuses le mouvement oscillatoire est gouverné par la confrontation entre gravité et inertie. On observe que les oscillations se maintiennent très longtemps sans atténuation sensible. On constate d'ailleurs que l'atténuation numérique des ondes est très faible. Cette vérification permet de tester l'ensemble

Période	Théorique	Modèle discret
2D - mode (1,0)	0.3742	0.3748
3D - mode (2,1)	0.3360	0.3365

TABLE 2. Période des oscillations pour ballottement dans une cavité carrée pour le premier mode dans le cadre de la théorie linéaire. La valeur numérique est obtenue par la méthode directe DOC et dans l'approximation incompressible KSP. Période des oscillations pour ballottement dans une cavité hexaédrique pour le mode (2,1). La valeur numérique est obtenue dans l'approximation incompressible KSP.

de la méthodologie utilisée : l'équation du mouvement, la discrétisation spatiale, le processus ALE, etc.

Afin de quantifier les erreurs introduites par les différentes phases de la modélisation et de la simulation, la fréquence obtenue numériquement est comparée à la fréquence théorique formulée par la relation (30). Le tableau (2) présente plutôt la période des oscillations. On constate un très bon accord entre numérique et théorie ce qui valide à la fois la formulation (2) et la méthodologie numérique.

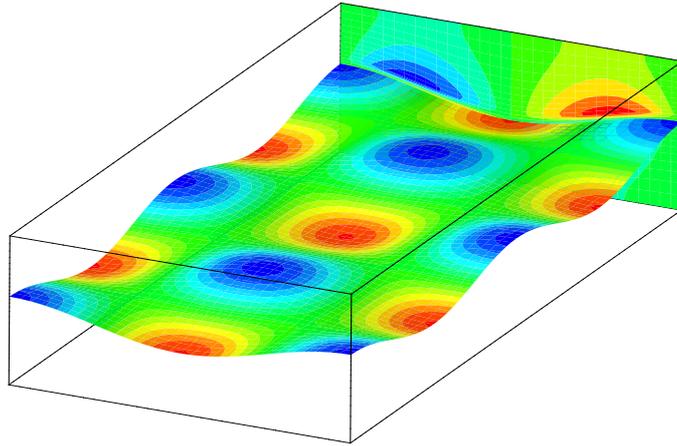


FIGURE 6. Bollottement pour le mode (2,1) dans une cavité de $(0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.05)$ m avec de l'eau et de l'air. Sur la surface libre est représentée la vitesse verticale et la coupe représente la vitesse suivant y .

Cet exemple permet par ailleurs de montrer que la formulation conserve l'énergie cinétique lorsque les effets visqueux sont négligés. Même si dans ce cas aucun transfert de la quantité de mouvement par viscosité n'est possible d'une surface primale à une autre cela ne veut pas dire que le rotationnel soit nul.

Le cas traité illustre la flexibilité de la formulation présentée à partir de la mécanique des milieux discrets où les comportements des solides et des fluides sont régis par la même équation du mouvement. Ici le changement de nature est lié au temps mais rien ne limite l'application de cette approche. On peut aisément imaginer qu'un système physique complexe composé de multiples domaines puisse évoluer par une modification de la nature des sous-domaines, par leur changement de rhéologie, par leurs changement de leurs propriétés en fonction de la température par exemple. Les coefficients κ et α qui pondèrent les contraintes d'équilibre p^o et ω^o ainsi que les coefficient χ_T et μ permettent de couvrir une très large gamme de comportement. Notamment si

μ est une fonction de $\nabla \times \mathbf{V}$ on a accès à des comportements rhéologiques non linéaires. De même si χ_T dépend de la pression on peut générer des ondes de choc et représenter des écoulements fortement compressibles.

5.2 Poutre en extension

Les quelques exemples de sollicitations simples de solides vont permettre de vérifier que le modèle proposé est apte à représenter le comportement des matériaux. Un exemple très simple en apparence est l'extension (ou la compression) d'une barre élastique sous l'effet d'un déplacement imposé dans la direction longitudinale. Si l'on comprime un matériau de grandes extensions latérales, une plaque par exemple, la matière ne peut s'échapper latéralement et la compression correspond à celle d'un échantillon dans une cavité rigide. Si le matériau n'est soumis à aucune force latérale (une barre environnée d'air à la pression atmosphérique) l'extension de l'échantillon conduit à une réduction relative de sa largeur. Lorsque le volume reste constant lors de la transformation le coefficient de Poisson est égal à $\sigma = 0.5$ et le matériau est dit "incompressible" ce qui est un abus de langage, du caoutchouc par exemple n'est pas intrinsèquement incompressible. En tout cas il l'est plus que de l'acier dont le coefficient de Poisson est pourtant de $\sigma = 0.3$ si l'on compare leurs coefficient de compressibilité isotherme respectifs.

Dans le cas général une sollicitation quelconque s'accompagne d'une variation de volume et donc de la masse volumique si la masse est conservée lors de l'essai. Il est à noter que des variations notables de la masse volumique entraîne des modifications de ses propriétés et le problème devient non linéaire. Les grands déplacements engendrent ainsi des variations de ces propriétés qui doivent être ré-actualisées à chaque étape de l'observation de l'état d'équilibre représenté par la résolution à résidu nul de l'équation du mouvement.

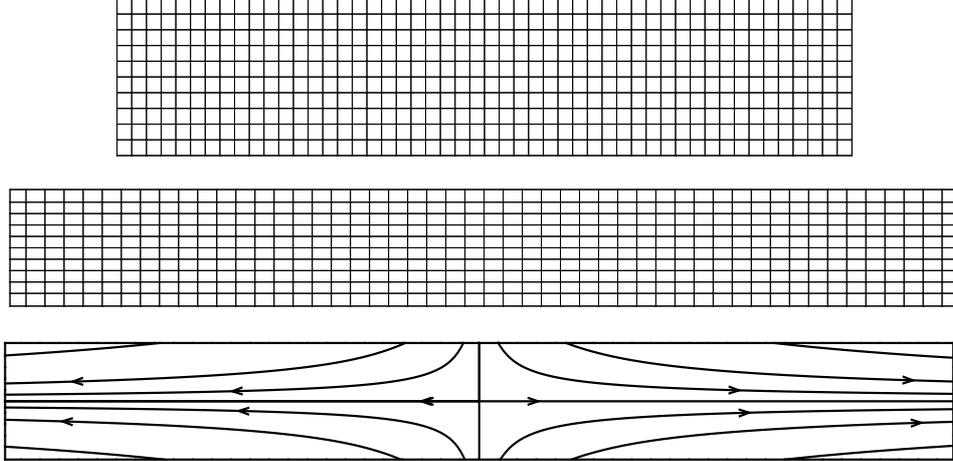


FIGURE 7. Poutre soumise à une extension continue de vitesse horizontale de $V_0 \pm 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$ sur les bords verticaux pendant un temps $t = 200 \text{ s}$. Après l'arrêt de la phase d'extension les vitesses sont nulles et l'état de contrainte (p^o, ω^o) demeure constant. Le module de cisaillement est égal à $\mu = 10^6$ et le coefficient de compressibilité égal à $\chi_T = 10^{-6}$. La pression finale de $p^o = -158446 \text{ Pa}$ est homogène et la contrainte de rotation ω^o est nulle. Le maillage ALE est déformé à chaque pas de temps de $\Delta t = 1 \text{ s}$. La figure du bas montre les lignes de courant pendant la phase d'extension. La longueur finale de la poutre est de $L = 1.433 \text{ m}$ et sa largeur de $l = 0.166 \text{ m}$.

Le cas réalisé correspond à un étirement longitudinal d'une éprouvette de longueur $L_0 = 1 \text{ m}$

et de largeur $l_0 = 0.2m$ d'un matériau de coefficient de compressibilité $\chi_T = 10^{-6}$ et de module de cisaillement $\mu = 10^6$. Les déplacements sont imposées à l'aide de la vitesse égale à $V_0 \pm 10^{-3} m s^{-1}$ aux extrémités de l'échantillon. Le coefficient de Poisson est choisi égal à $\sigma = 0.1$ dans le domaine linéaire ce qui donne une vitesse transversale de $V_t = 10^{-4} m s^{-1}$.

Des conditions de glissement sur les bords verticaux de l'échantillon représenté sur la figure (7) assurent une uniformité du retrait ce qui permet un calcul beaucoup plus précis de celui-ci.

La figure figure (7) montre l'état initial du maillage et l'état final obtenu après 200 s d'extension. Lorsque la largeur du domaine se réduit il est clair que l'effort à exercer pour l'allonger encore n'est plus le même. Par exemple lorsque les déformations sont importantes le coefficient de Poisson de cette poutre devient de $\sigma = 0.034/0.433 = 0.078$. Le volume du barreau a augmenté de $V_0 = 1 \cdot 0.2 = 0.2$ à $V_1 = 1.433 \cdot 0.166 = 0.2379$ et la divergence s'avère positive et constante égale à $\nabla \cdot \mathbf{V} = 6.03 \cdot 10^{-3}$.

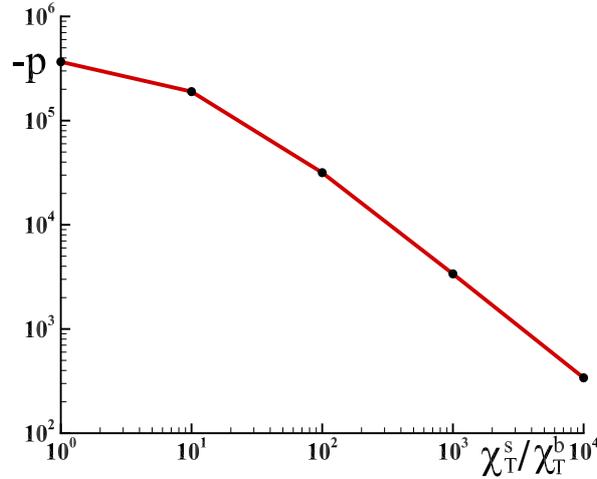


FIGURE 8. Poutre soumise à une extension continue de vitesse horizontale de $V_0 \pm 10^{-3} m s^{-1}$ sur les bords verticaux pendant un temps $t = 200 s$. La courbe montre l'évolution de l'inverse de la pression $-p$ en fonction du rapport des compressibilités χ_T^s / χ_T^b où $\chi_T^b = 10^{-6}$ est la compressibilité dans le milieu en volume et χ_T^s est la compressibilité en surface.

La figure (8) montre l'influence des conditions aux limites latérales c'est à dire l'influence de l'environnement de l'échantillon. Celles-ci revêtent une grande importance dans le comportement d'un solide sollicité en déplacements ou en contraintes. Le module d'Young et le coefficient de Poisson ne peuvent à eux seuls déterminer le comportement d'un solide.

La compression d'un solide soumis à un déplacement imposé donnerait des résultats similaires. Dans le cas où les dimensions latérales de celui-ci sont du même ordre de grandeur que sa longueur la compression conduit à une dilatation latérale. Généralement la pression moyenne est positive et le volume diminue et la divergence est négative.

Ces essais d'extension-compression permettent de mettre en évidence la notion de cohésion de la matière ou tout au moins sa traduction par le modèle physique présenté. Pour les fluides le problème se présente quelque peu différemment car ceux-ci adoptent la forme du récipient et leur environnement est toujours présent. Pour les solides la résistance interne aux déformations fait oublier l'importance des conditions aux limites. Le rôle joué par le rapport des célérités longitudinale et transversale s'avère très important y compris pour des solides en équilibre. Lorsqu'un échantillon est soumis à une extension les déformations se répercutent dans la direction transversale à la vitesse du son. L'approche développée ici permet de rendre compte de l'ensemble des phénomènes à partir de quantités physiques pertinentes comme la compressibilité ou encore les célérités.

5.3 Compression multimatériau

Afin de compléter l'analyse précédente une compression de deux matériaux est réalisée dans une enceinte indéformable. Dans ce cas seule la compressibilité longitudinale intervient et aucun déplacement latéral n'est possible.

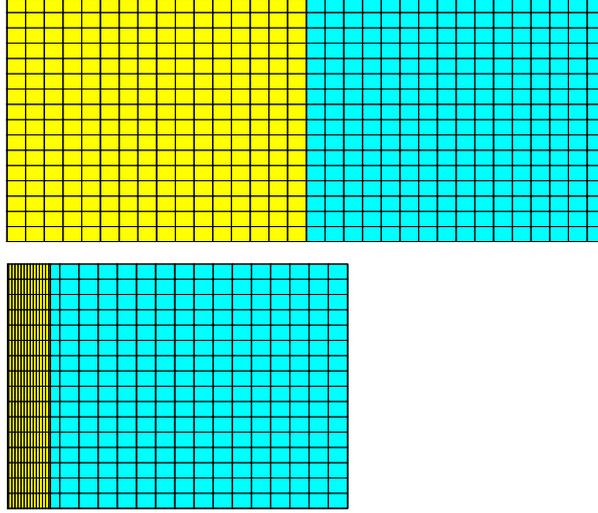


FIGURE 9. Compression de deux matériaux à la vitesse suivant x de $V_0 = -10^{-3} \text{ m s}^{-1}$ pendant un temps $t = 8 \text{ s}$. Après l'arrêt de la phase d'extension les vitesses sont nulles et l'état de contrainte (p^o, ω^o) demeure constant. Le module de cisaillement des deux matériaux est égale à $\mu = 10^6$ et le coefficient de compressibilité égal à $\chi_T = 10^{-6}$ pour le matériau de droite et de $\chi_T = 10^{-2}$ pour le matériau de gauche. La pression finale de $p^o \approx 140 \text{ Pa}$ est homogène dans les deux matériaux et la contrainte de rotation ω^o est nulle. Le maillage ALE est déformé à chaque pas de temps de $\Delta t = 10^{-2} \text{ s}$. La longueur initiale du système est de 0.2 m et la longueur finale de 0.12 m .

La figure (9) montre le résultat obtenu pour une compression réalisée par un déplacement à vitesse constante $V_0 = -10^{-3} \text{ m s}^{-1}$ suivant la direction longitudinale \mathbf{e}_x sur le matériau de droite. Les deux matériaux ont des coefficients de compressibilité différents respectivement de $\chi_T = 10^{-2}$ pour le matériau de gauche et de $\chi_T = 10^{-6}$ pour le matériau de droite alors que le module de cisaillement n'intervient pas.

A chaque étape du processus le déplacement est calculé à partir des vitesses locales et le maillage ALE est modifié en conséquence. Comme on pouvait s'y attendre la pression finale après l'arrêt du processus à un temps de $t = 8 \text{ s}$ est constante et sa valeur est égale à $p^o \approx 140 \text{ Pa}$. Celle-ci est uniforme et égale dans les deux matériaux. Pour des raisons de simplicité les masses volumiques sont gardées constantes mais pour des déformations aussi importantes il serait nécessaire d'en tenir compte et dans ce cas de connaître les évolutions de la compressibilité en fonction de la pression.

5.4 Cisaillement plan

Un problème de cisaillement simple est réalisé en imposant une vitesse constante égale à $V_0 = 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$ pendant 40 s à la surface externe d'un anneau tout en maintenant un déplacement

nul sur sa face interne. Le module de cisaillement du matériau constituant l'anneau est égal à $\mu = 10^6$ et son coefficient de compressibilité égal à $\chi_T = 10^{-6}$ n'influe pas sur le résultat. Là encore les grandes déformations imposeraient de tenir compte des variations des propriétés en fonction du taux de cisaillement mais elles sont ignorées dans le cas présent.

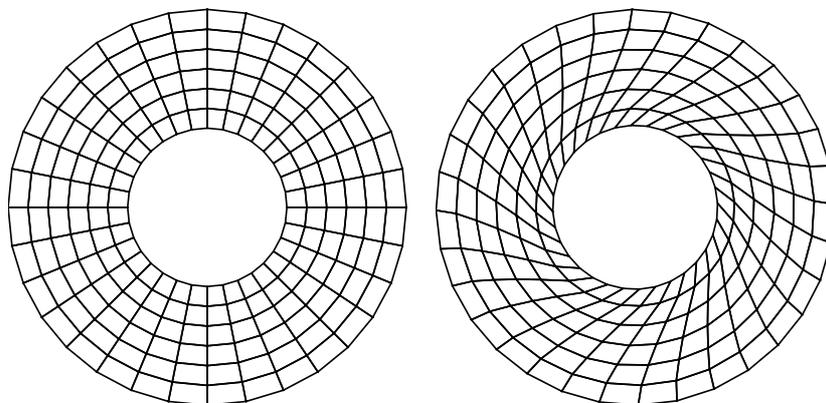


FIGURE 10. Anneau solide soumis à une contrainte en imposant une vitesse du cylindre intérieur de $V_0 = 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$ pendant un temps $t = 40 \text{ s}$. Après l'arrêt de la phase de rotation les vitesses sont nulles et l'état de contrainte (p^o, ω^o) demeure constant. Le module de cisaillement est égal à $\mu = 10^6$ et le coefficient de compressibilité égal à $\chi_T = 10^{-6}$. La pression finale est nulle et la contrainte de rotation $\omega^o = -4 \cdot 10^7 \text{ Pa}$ est homogène dans tout le matériau. Le maillage ALE est déformé à chaque pas de temps $\Delta t = 1 \text{ s}$.

La figure (10) montre le résultat du cisaillement cylindrique plan. Comme attendu la pression est uniforme et égale à la pression initiale quant à la contrainte de rotation elle est uniforme dans l'anneau et égale à $\omega^o = -4 \cdot 10^7 \text{ Pa}$.

Comme on peut le voir avec cet exemple et les deux précédents les mouvements sont idéaux c'est à dire qu'une sollicitation n'en entraîne pas une autre de nature différente. Ainsi les contraintes de pression p^o et de rotation ω^o sont complètement dissociées. Dans la pratique il est difficile de dissocier les deux effets, par exemple si on soumet une éprouvette à une extension elle subit un cisaillement sur les raccordements aux sections différentes.

5.5 Poutre en flexion

La poutre en flexion est un exemple où les effets de pression ne sont pas totalement absents lors du déplacement lorsque celle-ci est par exemple soumise à une force extérieure, ici la gravité. Une poutre posée sur deux appuis fléchit sous l'effet de son propre poids et atteint une position d'équilibre qui dépend des propriétés du matériau, essentiellement du module d'Young, de la masse volumique, de la gravité et du moment quadratique inertiel de celle-ci. Dans la théorie simplifiée des poutres il est possible de calculer le moment fléchissant à partir des données précédentes et de déterminer explicitement la déflexion de la lame par l'intégration de l'équation de degré quatre.

Dans le cadre de cette théorie on s'intéresse exclusivement à la fibre moyenne en admettant qu'il existe bien de part et d'autre des zones en compression et d'autres en extension. La contrainte de pression est cependant négligée dans la forme finale d'équilibre de la poutre. Même si les contraintes de cisaillement sont prépondérantes les contraintes de pression existent et varient le long de la fibre moyenne curviligne.

Le cas traité par le modèle proposé correspond à la flexion d'une fine lame de longueur

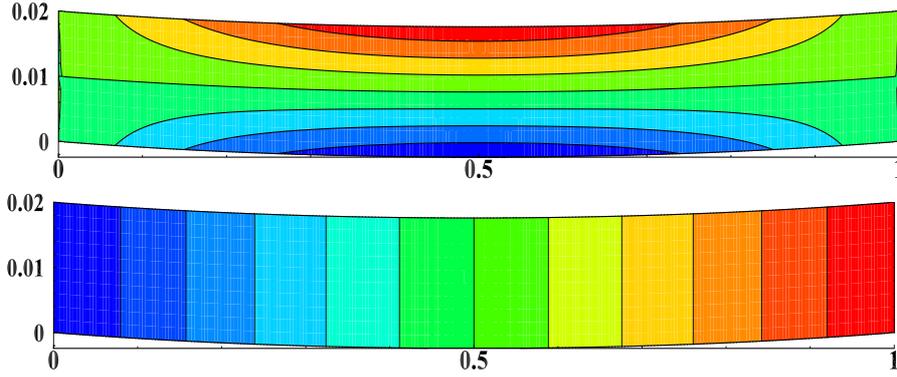


FIGURE 11. Poutre soumise à la gravité en équilibre mécanique. En haut le champ de pression montre la compression de la partie supérieure et l'extension de la partie inférieure; en bas la composante orthogonale au plan du champ de ω^o .

$L = 1\text{ m}$ et de largeur $l = 0.02\text{ m}$ dont la masse volumique est égale à $\rho = 1\text{ kg m}^{-3}$. La condition initiale suppose la poutre horizontale; la gravité entraîne toute la lame vers le bas à vitesse constante mais comme la poutre est posée sur deux appuis la partie centrale fléchit un peu plus au cours du temps. Toute la poutre est cisailée et les parties supérieure et inférieure sont soumises respectivement à la compression et à une extension.

Le comportement de ce système est intégralement régi par le système (3); à partir de la position initiale la poutre est entraînée vers le bas par la force $\rho \mathbf{g}$ et le milieu accélère. La lame dépasse la position d'équilibre mécanique et les termes d'inertie de l'équation du mouvement conduisent à une remontée de celle-ci qui oscille un moment avant de se stabiliser. Le comportement du système est déterminé par le transfert de l'énergie mécanique au cours du temps entre l'accélération, le terme de pression ∇p , le terme de rotation $\nabla \times \boldsymbol{\omega}$ et la force volumique $\rho \mathbf{g}$.

La figure (11) illustre la flexion de la poutre à l'état d'équilibre mécanique. On peut constater que si la zone centrale de la poutre subit une compression ou d'extension celles-ci sont fonction de l'abscisse curviligne contrairement à la théorie simplifiée des poutres. Toutefois le cisaillement reste prépondérant dans son équilibre mécanique avec une distribution quasi-linéaire du potentiel vectoriel $\boldsymbol{\omega}^o$. Comme l'accélération est strictement nulle et que le gradient de pression est très faible l'équilibre mécanique est quasiment fixé par l'équation $\nabla \boldsymbol{\omega}^o + \rho \mathbf{g} = 0$.

5.6 Ecrasement d'un bloc sous l'effet de la gravité

Ce problème décrit le comportement d'un bloc bidimensionnel d'un matériau peu résistant de type gélatine. Sous l'influence de la gravité le gel s'effondre mais se stabilise à une position d'équilibre qui traduit finalement un comportement solide.

Avant de présenter le résultat sur ce problème on peut présenter deux cas limites dont l'un correspond à un comportement fluide et l'autre à une situation quasi-rigide. Dans le premier cas seule la pression équilibre la gravité mais les conditions aux limites doivent alors satisfaire le principe de la réaction à savoir que les pressions sur la paroi et dans le fluide sont localement égales. Dans le second cas l'équilibre est complètement assuré par le cisaillement et la pression reste nulle. Ces deux comportements limites qui sont mises en oeuvre uniquement à partir des propriétés χ_T et μ sont représentées par les équations suivantes :

$$\begin{cases} -\nabla p^o + \rho \mathbf{g} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{\omega}^o + \rho \mathbf{g} = 0 \end{cases} \quad (33)$$

La figure (12) montre le résultat obtenu dans les deux cas ; à gauche le champ de pression correspond à une situation stratifiée comme celle d'un fluide dans une cavité et à droite le champ de potentiel $\boldsymbol{\omega}^o$ porté par le vecteur orthogonal au plan considéré. On retrouve la dualité entre le gradient et le rotationnel primal défini au début de cet exposé.

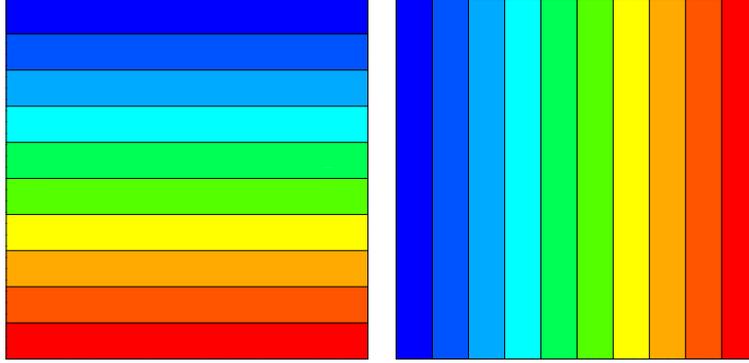


FIGURE 12. *Cavité carrée solide quasi-indéformable de hauteur $h = 0.1$ en équilibre mécanique avec $\mathbf{g} = -10$ et $\rho = 1000$. A gauche pour $\chi_T = 10^{-12}$ et $\mu = 0$ on trouve $p = \pm 500$, $\boldsymbol{\omega} = 0$ et à droite pour $\chi_T = 0$ et $\mu = 10^{12}$ la solution est $p = 0$ et $\boldsymbol{\omega} = \pm 500$.*

Considérons maintenant le cas d'un bloc de gélatine de masse volumique égale à $\rho = 1000 \text{kgm}^{-3}$ dont les propriétés sont choisies de manière arbitraires, $\chi_T = 10^{-4}$ et $\mu = 10^4$; la hauteur initial du bloc est de $h = 0.1 \text{ m}$ et la gravité égale à $\mathbf{g} = -10 \text{ m s}^{-2}$.

La condition initiale est représentée sur la figure (13) sous la forme d'un bloc carré dont les contraintes sont nulles $p^o = 0$ et $\boldsymbol{\omega}^o = 0$. L'effondrement du bloc sous l'effet de la gravité est calculé à partir du système d'équations (3) : la pression augmente au centre de la paroi inférieure considérée comme glissante et parallèlement des contraintes de cisaillement apparaissent dans les coins supérieurs du bloc ; le centre de gravité est ainsi décalé vers le bas lors de l'écrasement du bloc.

L'état d'équilibre est dépassé par l'effet des termes d'inertie et ces mêmes effets sont responsables de l'oscillation du bloc de gélatine autour de cette position. Toutes les composantes de cet équilibre, inertie, contraintes de pression et de rotation, force de gravité, participent dans un premier temps aux accélérations du milieu puis à la disparition de celles-ci pour l'obtention du comportement solide final.

Les champs de pression p^o et de la contrainte de rotation $\boldsymbol{\omega}^o$ sont données sur la figure (13) lorsque les vitesses deviennent nulles. L'équilibre satisfait exactement, à la précision machine près, à l'équation de statique des solides (7).

Il est possible d'obtenir le résultat de l'équilibre par la résolution directe de l'équation (3) en maintenant les vitesses du bord du domaine à zéro ou bien en adoptant des valeurs de χ_T et de μ très élevées en valeur absolue. La solution est dans ce cas obtenue en une seule étape à partir d'un état nul. La divergence et le rotationnel permettent alors de remonter les potentiels d'équilibre instantanément.

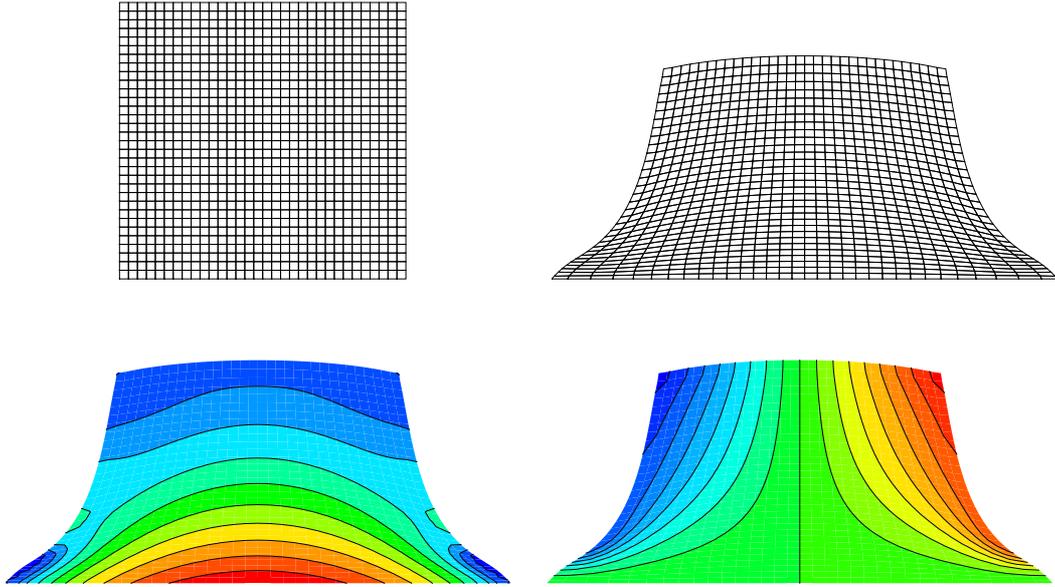


FIGURE 13. Bloc de gélatine de hauteur initiale $h = 0.1$ en équilibre mécanique avec $\mathbf{g} = -10$ et $\rho = 1000$; la paroi du bas est glissante $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$. Les propriétés du milieu sont $\chi_T = 10^{-4}$ et $\mu = 10^4$ les extrema de la solution en pression (à gauche) sont $p^o = [-91, +494]$ et $\omega^o = \pm 417$ (à droite) pour la contrainte de rotation.

5.7 Equilibre mécanique d'une géométrie quelconque

Il est possible de calculer l'état d'équilibre d'un objet de forme quelconque à partir de l'équation du mouvement (3) en une seule étape si l'on considère que la forme extérieure est figée. Dans le cas où il y aurait une modification de la géométrie de l'objet la même équation permet de calculer la dynamique du mouvement et finalement l'état d'équilibre statique.

En dimension trois d'espace la topologie primale est construite à partir des objets élémentaires de représentés sur la figure (1), le segment Γ et la surface primale plane bâtie à partir de trois segments. Les cellules polyédriques résultant de l'assemblage des objets élémentaires peuvent être des tétraèdres, hexaèdres, cellules à nombre de faces quelconques.

Les deux directions privilégiées, celles du segment Γ et celle de la normale aux faces, sont, en général, quelconques dans le cas de cellules polyédriques ce qui permet de conférer un caractère isotrope au milieu virtuel qu'est le maillage primal. Notamment le potentiel vecteur ω n'existe que pour une face et représenté par un vecteur normal à cette face.

L'exemple présenté sur la figure (14) correspond à un objet bien connu de la communauté de l'imagerie appelé lapin de Stanford. Cet objet est soumis au champ de gravité terrestre et il s'agit de calculer les contraintes mécaniques qui empêchent l'objet de s'effondrer sous l'effet de son propre poids. Le volume de l'objet est maillé en tétraèdres à partir du maillage de peau réalisé à base de triangles ; sur cette figure le nombre de tétraèdres est égal à 1.410^5 mais la comparaison avec un maillage plus fin ($1.4 \cdot 10^6$ cellules) montre la bonne convergence de la solution obtenue. Sur l'image de gauche on peut visualiser le champ de pression dans un liquide contenu dans un cavité en forme de lapin ; les isobares sont des surfaces orthogonales à la gravité terrestre.

Lorsque l'objet est solide on peut calculer les contraintes d'équilibre p^o et ω^o qui sont représentées sur la figure respectivement au centre et à droite de la figure (14). Ces deux champs équilibrent localement exactement la force gravitaire. La même procédure permettrait d'étendre le calcul des contraintes à tout type de sollicitation quel que soit le milieu choisi y compris un fluide.

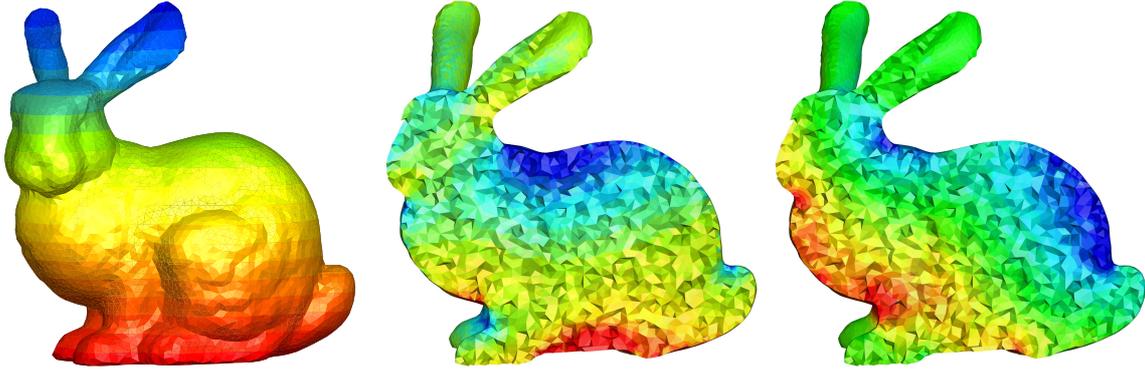


FIGURE 14. *Bunny de Stanford, à gauche le champ de pression dans l'eau liquide contenue dans une peau de lapin non déformable ($p^o = \rho g z$, $\omega^o = 0$). Au centre et à droite la pression p^o et la composante dans un plan orthogonal à y du potentiel vecteur ω^o dans le lapin solide en équilibre mécanique.*

6 Conclusions

L'objectif de la formulation présentée est une suite de la théorie des milieux discrets [4] qui a pour but d'unifier les équations, les conditions de bord, le traitement numérique ultérieur des problèmes de mécanique, de solides ou de fluides quelconques. Malgré le but affiché de la mécanique des milieux continus il faut reconnaître que ce n'était pas le cas, plusieurs différences étudiées dans ce texte montrent encore les efforts à accomplir. Parmi celles-ci la variable utilisée, vitesse en fluide et déplacement ou contrainte en solide, n'est pas la même. Bien d'autres points rendent le couplage fluide-structure complexe et pas toujours cohérent. De même le comportement dynamique des solides sous forme d'ondes semble dissocié de celui du calcul des contraintes statiques.

Les principaux résultats de ce travail portent sur :

- une formulation unique de l'équation du mouvement en termes de vitesse représentative des mouvements des fluides et des solides ;
- le calcul simultané de la variable vitesse, du déplacement et des contraintes (p^o , ω^o) relevées par des opérateurs différentiels simples ;
- un processus d'accumulation des contraintes valable pour les grands déplacements et grandes déformations ;
- une intégration cohérente des conditions aux limites au sein de la formulation ;
- une équation de la statique valable pour tous les milieux ;

Cette théorie apporte une cohérence entre mouvements ou déplacements de solides et de fluides mais aussi sur le comportement dynamique des matériaux et la propagation des ondes au sein de ceux-ci. Elle réduit au strict minimum les coefficients traduisant la dépendance entre contraintes et déplacement en éliminant d'emblée le recours inutile aux tenseurs. Ainsi aucune contrainte supplémentaire n'est requise comme les conditions de compatibilité pour calculer les déplacements en fonction des déformations. De même le principe d'invariance matérielle est inutile, les contraintes sont naturellement invariantes par rotation.

La topologie élémentaire décrite sur la figure (1) permet par ailleurs d'appréhender tout type de matériaux anisotropes grâce à la définition de μ associée à chaque facette. Les coefficients mécaniques χ_T et μ sont définis par point et par facette peuvent être naturellement variable en espace et dépendre de la contrainte elle-même ; des comportements rhéologiques

complexes peuvent ainsi être reproduits.

Le modèle possède la capacité de reproduire au niveau macroscopique la cohésion de la matière due à aux liaisons moléculaires et atomiques à partir des seules propriétés intrinsèques du milieu, viscosité et célérités des ondes. C'est ainsi que l'on peut cisailer un fluide indéfiniment sans modifier la force exercée alors qu'un solide résiste au cisaillement de manière beaucoup plus importante (dans un rapport de l'ordre de 10^{12}) et accumule ces contraintes. Cette propriété importante du modèle ouvre la voie à l'étude de comportements limites comme celle de la rhéologie des fluides aux vitesses extrêmement faibles.

Le résultat probablement le plus important de la mécanique des milieux discrets en fluide et en solide est la décomposition formelle de Hodge-Helmholtz de l'équation du mouvement. Elle permet de comprendre les mécanismes traduisant l'équilibre des milieux où divergence de la vitesse et son rotationnel permettent de remonter les contraintes, la pression d'équilibre p^o et le potentiel vecteur ω^o , la contrainte de rotation.

Références

- [1] Ph. Angot, J-P. Caltagirone, and P. Fabrie. Fast discrete helmholtz-hodge decompositions in bounded domains. *Applied Mathematics Letters*, 26(4) :445–451, 2013.
- [2] S. Bordère and J-P. Caltagirone. A unifying model for fluid flow and elastic solid deformation : A novel approach for fluid structure interaction. *Journal of Fluid and Structures*, 51 :344–353, 2014.
- [3] S. Bordère and J-P. Caltagirone. A multi-physics and multi-time scale approach for modeling fluid-solid interaction and heat transfer. *Comput. Struc.*, in revision, 2015.
- [4] J-P. Caltagirone. *Discrete Mechanics*. ISTE, John Wiley & Sons, London, 2015.
- [5] J-P. Caltagirone and S. Vincent. A Kinematics Scalar Projection Method (KSP) for Incompressible Flows with Variable Density. *Open Journal of Fluid Dynamics*, doi : 10.4236/ojfd.2015.52019, 5 :171–182, 2015.
- [6] J. Coirier and C. Nadot-Martin. *Mécanique des Milieux Continus*. Dunod, Paris, 2007.
- [7] P. Germain and P. Muller. *Introduction à la Mécanique des Milieux Continus*. Masson, 2^e édition, Paris, 1995.
- [8] H. Lamb. *Hydrodynamics*. 6^e edition, Dover, New-York, 1993.
- [9] L.D. Landau and E.M. Lifchitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, London, 1959.
- [10] A. Lemoine, J-P. Caltagirone, P. Azaiez, and S. Vincent. Discrete helmholtz-hodge decomposition on polyhedral meshes using compatible discrete operators. *Journal of Scientific Computing*, DOI 10.1007/s10915-014-9952-8, 2014.
- [11] I. Newton. *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle traduit en francais moderne d’après l’oeuvre de la marquise Du Châtelet sur les Principia*. fac-similé de l’édition de 1759 publié aux Editions Jacques Gabay en 1990, Paris, 1990.
- [12] C. Trusdell. *Introduction à la Mécanique rationnelle des milieux continus*. Masson, Paris, 1974.