



**HAL**  
open science

# Sur les normes cyclotomiques et les conjectures de Leopoldt et de Gross

Jean-François Jaulent

► **To cite this version:**

Jean-François Jaulent. Sur les normes cyclotomiques et les conjectures de Leopoldt et de Gross. 2015. hal-01185745v1

**HAL Id: hal-01185745**

**<https://hal.science/hal-01185745v1>**

Preprint submitted on 21 Aug 2015 (v1), last revised 7 Apr 2016 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur les normes cyclotomiques et les conjectures de Leopoldt et de Gross

Jean-François JAULENT

**Résumé.** À la lumière de la Théorie  $\ell$ -adique du corps de classes, nous dressons un bref panorama des propriétés arithmétiques des groupes de normes cyclotomiques en liaison avec les conjectures de Leopoldt et de Gross. Nous revenons pour les compléter sur quelques résultats classiques que nous illustrons au moyen des classes et unités logarithmiques par divers exemples et contre-exemples obtenus avec PARI.

**Abstract.** We use  $\ell$ -adic class field theory to take a new view on cyclotomic norms and Leopoldt or Gross generalized conjectures. By the way we recall and complete some classical results. We illustrate the logarithmic approach by various numerical examples, correct recently published results and provide a counterexample to a conjecture of Seo.

## Introduction

Le groupe des  $\ell$ -normes cyclotomiques, i.e. des éléments non nuls d'un corps de nombres  $K$  qui sont normes dans tous les étages finis  $K_n/K$  de la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique  $K_\infty$  de ce corps, joue un rôle crucial dans notre compréhension de l'arithmétique de ses pro- $\ell$ -extensions abéliennes.

Or ce groupe est de nature irréductiblement  $\ell$ -adique et ne peut être compris en profondeur si on le regarde (ou si l'on essaie de le définir) comme un sous-groupe du groupe multiplicatif  $K^\times$ . En d'autres termes, c'est un sous-module du  $\ell$ -adifié  $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$  qui ne provient pas (en général) par  $\ell$ -adification d'un sous-groupe naturel (ou naïf) du groupe  $K^\times$ .

La Théorie  $\ell$ -adique du corps de classes (cf. [20, 25] ou [13]), qui permet de travailler avec les objets  $\ell$ -adiques comme s'ils étaient des objets classiques, fournit en revanche un cadre conceptuel efficace pour en mener l'étude. Plus précisément, l'introduction des classes et unités logarithmiques permet d'interpréter ce groupe des normes cyclotomiques comme un groupe d'unités, analogue au  $\ell$ -adifié  $\mathcal{E}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_K$  du groupe des unités au sens habituel, en lien avec un groupe de classes, qui est le pendant logarithmique du  $\ell$ -groupe des classes d'idéaux au sens habituel.

Ces groupes logarithmiques possèdent un comportement à certains égards très voisins de ceux des groupes classiques (cf. [24]), quelquefois différents (cf. [26]). Ils mettent en jeu des conjectures encore ouvertes – on ne sait pas, par exemple si le  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques est fini en dehors du cas abélien et de quelques autres (cf. [18, 19]) – mais sont totalement effectifs en ce sens que pour un corps de nombres  $K$  et un premier  $\ell$  donnés, on dispose d'algorithmes permettant de les calculer tout comme leurs analogues standard. De plus, comme observé dans [15], de par leurs propriétés de descente, ces groupes se révèlent bien adaptés à la théorie d'Iwasawa cyclotomique.

Le but de cette note est ainsi de revisiter un certain nombre de résultats connus, méconnus ou carrément ignorés, à la lumière de l'arithmétique logarithmique qui apporte des informations précises sur des objets a priori définis en haut de la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique  $K_\infty$ , mais que l'on peut ainsi (au moins partiellement) appréhender à l'aide d'invariants arithmétiques ne faisant intervenir que le corps  $K$ , et d'illustrer le tout par des exemples numériques éclairants.

Au passage, nous rectifions quelques erreurs ou approximations rencontrées dans des articles récents et nous démontrons l'inexactitude d'une conjecture de Seo [48].

## 1. Normes cyclotomiques et unités logarithmiques

Soient  $K$  un corps de nombres et  $K_\infty = \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$  sa  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique. Notons  $\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell}$  le groupe de Galois  $\text{Gal}(K_\infty/K)$ , identifié à  $\mathbb{Z}_\ell$  par le choix d'un générateur topologique  $\gamma$  et  $\Gamma_n = \Gamma^{\ell^n}$  le sous-groupe ouvert  $\text{Gal}(K_\infty/K_n)$ .

Pour appréhender les problèmes normiques dans la pro- $\ell$ -extension  $K_\infty/K$ , nous nous appuyons sur la Théorie  $\ell$ -adique du corps de classes, telle qu'exposée dans [20] et [25], qui permet de raisonner sur les extensions infinies comme sur celles finies.

Notons donc  $\mathcal{J}_K$  le  $\ell$ -adifié du groupe des idèles de  $K$ , i.e. le produit  $\mathcal{J}_K = \prod_{\mathfrak{p}}^{\text{res}} \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$  des compactifiés  $\ell$ -adiques respectifs  $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} = \varprojlim K_{\mathfrak{p}}^\times / K_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^m}$  des groupes multiplicatifs des complétés  $K_{\mathfrak{p}}$ , restreint aux familles  $(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$  dont presque tous les éléments tombent dans le sous-groupe unité.

**Définition & Proposition 1.** Pour chaque place finie  $\mathfrak{p}$  le sous-groupe  $\tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}}$  de  $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$  formé des normes cyclotomiques locales, i.e. des éléments de  $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$  qui sont normes à chaque étage fini de la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique locale  $K_{\mathfrak{p}}^c/K_{\mathfrak{p}}$ , est par convention le *groupe des unités logarithmiques* de  $K_{\mathfrak{p}}$  car c'est le noyau de la valuation logarithmique  $\tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}_\ell$  définie par la formule :

$$\tilde{\nu}_{\mathfrak{p}} : x_{\mathfrak{p}} \mapsto -\frac{\text{Log}_\ell |x_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}}}{\deg \mathfrak{p}} = -\frac{\text{Log}_\ell N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}}(x_{\mathfrak{p}})}{\deg \mathfrak{p}},$$

qui fait intervenir le logarithme d'Iwasawa de la norme locale de  $x_{\mathfrak{p}}$  (cf. [24, 25]).

La Théorie  $\ell$ -adique du corps de classes établit un isomorphisme de groupes topologiques compacts entre le  $\ell$ -groupe des classes d'idèles  $\mathcal{C}_K$  défini comme quotient

$$\mathcal{C}_K = \mathcal{J}_K / \mathcal{R}_K$$

de  $\mathcal{J}_K$  par son sous-groupe principal  $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$  et le groupe de Galois  $G_K = \text{Gal}(K^{ab}/K)$  de la pro- $\ell$ -extension abélienne maximale de  $K$ . Ainsi (cf. [24, 25]) :

**Théorème & Définition 2.** Dans la correspondance du corps de classes  $\ell$ -adique

- (i) le groupe de normes associé à la plus grande sous-extension  $K^{lc}$  de  $K^{ab}$  qui est localement cyclotomique (i.e. complètement décomposée sur  $K_\infty$  en chacune de ses places) est le produit  $\tilde{\mathcal{U}}_K \mathcal{R}_K$  du sous-groupe  $\tilde{\mathcal{U}}_K = \prod_{\mathfrak{p}} \tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}}$  des unités logarithmiques locales et de  $\mathcal{R}_K$  ;
- (ii) le groupe de normes associé à la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique  $K^c = K_\infty$  est le sous-groupe des idèles de degré nul :  $\tilde{\mathcal{J}}_K = \{\mathfrak{r} = (x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{J}_K \mid \deg(\mathfrak{r}) = \sum_{\mathfrak{p}} \tilde{\nu}(x_{\mathfrak{p}}) \deg \mathfrak{p} = 0\}$ .

En particulier, le groupe de Galois  $\text{Gal}(K^{lc}/K^c)$  s'identifie au quotient  $\tilde{\mathcal{C}}_K = \tilde{\mathcal{J}}_K / \tilde{\mathcal{U}}_K \mathcal{R}_K$ .

Nous disons que  $\tilde{\mathcal{C}}_K$  est le  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques du corps  $K$ .

Le groupe  $\tilde{\mathcal{C}}_K$  peut être regardé comme le quotient du groupe  $\tilde{\mathcal{D}}_K = \tilde{\mathcal{J}}_F / \tilde{\mathcal{U}}_K$  des diviseurs logarithmiques (de degré nul) par son sous-groupe principal  $\mathcal{P}\ell_K = \mathcal{R}_K \tilde{\mathcal{U}}_K / \tilde{\mathcal{U}}_K$  ; le numérateur  $\tilde{\mathcal{D}}_K$  s'identifie au sous-groupe  $\tilde{\Theta}_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z}_\ell \mathfrak{p}$  des diviseurs de degré nul de la somme formelle  $\tilde{\Theta}_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z}_\ell \mathfrak{p}$ .

**Définition & Théorème 3.** Le noyau  $\tilde{\mathcal{E}}_K = \mathcal{R}_K \cap \tilde{\mathcal{U}}_K$  du morphisme  $\text{div} : x \mapsto \sum_{\mathfrak{p}} \tilde{\nu}_{\mathfrak{p}}(x) \mathfrak{p}$  de  $\mathcal{R}_K$  dans  $\tilde{\mathcal{D}}_K$  est le groupe des unités logarithmiques (globales) du corps  $K$ . Il est donné par la suite exacte :

$$1 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_K \rightarrow \mathcal{R}_K \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_K = \tilde{\Theta}_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z}_\ell \mathfrak{p} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_K \rightarrow 1.$$

Le groupe  $\tilde{\mathcal{E}}_K$  est exactement le sous-groupe des normes cyclotomiques globales de  $\mathcal{R}_K$ .

*Preuve.* Par construction les éléments de  $\tilde{\mathcal{E}}_K$  sont, en effet, les éléments globaux qui sont normes locales partout dans chacune des sous-extensions finies  $K_n/K$  de l'extension procyclique  $K_\infty/K$ , donc normes globales dans  $K_n/K$ , en vertu du principe de Hasse, et finalement dans  $K_\infty/K$ .

*Remarque.* Certains auteurs utilisent parfois l'appellation *normes universelles* pour désigner les *normes cyclotomiques*. Si c'est parfaitement justifié dans [15] (où il s'agit des normes universelles pour un certain foncteur), c'est en revanche particulièrement malheureux dans le contexte du corps de classes : dans la Théorie  $\ell$ -adique le sous-groupe de  $\mathcal{C}_K$  formé des normes universelles est le sous-groupe trivial !

## 2. La conjecture de Gross généralisée

**Définition 4 (Module de Kuz'min-Tate).** Nous appelons module de Kuz'min-Tate d'un corps de nombres  $K$  le groupe de Galois  $\mathcal{T}_K = \text{Gal}(K_\infty^{\text{cd}}/K_\infty)$  de la pro- $\ell$ -extension abélienne maximale de la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique  $K_\infty$  de  $K$  qui est complètement décomposée en toutes les places, groupe que la Théorie du corps de classes identifie à la limite projective pour les applications normes  $\varprojlim \mathcal{C}'_{K_n}$  des  $\ell$ -groupes de  $\ell$ -classes attaché aux étages finis  $K_n$  de la tour  $K_\infty/K$ .

L'appellation *module de Tate* pour désigner le groupe  $\mathcal{T}_K$  a été introduite par Kuz'min [38]. Mais d'autres traditions existent dans le cadre de la Théorie d'Iwasawa. Ainsi dans [20, 21], elle est utilisée pour désigner la limite projective  $\mathbb{T}_\ell = \varprojlim \mu_{K_n}$  des  $\ell$ -groupes de racines de l'unité dans la tour cyclotomique  $K_\infty/K$ , lorsque le corps  $K$  contient les racines  $2\ell$ -ièmes de l'unité. C'est pourquoi, pour prévenir toute confusion, nous parlons ici de *module de Kuz'min-Tate*.

Ce point de vocabulaire précisé, nous avons (cf. [7, 16, 20, 24, 25]) :

**Théorème 5 (Conjecture de Gross généralisée).** Pour tout corps de nombres  $K$  et tout premier  $\ell$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Le polynôme caractéristique  $\chi_{\mathcal{T}_K}(X)$  du  $\Lambda$ -module  $\mathcal{T}_K$  n'est pas divisible par  $X : \chi_{\mathcal{T}_K}(0) \neq 0$ .
- (ii) Le sous-groupe ambige  $\mathcal{T}_K^\Gamma$  est fini.
- (iii) Le quotient des genres  ${}_\Gamma \mathcal{T}_K = \mathcal{T}_K/\mathcal{T}_K^{(\gamma-1)} \simeq \tilde{\mathcal{C}}_K$  est fini.

Lorsqu'elles sont réalisées, i.e. lorsque le  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques  $\tilde{\mathcal{C}}_K$  est fini, on dit que le corps  $K$  satisfait la conjecture de Gross généralisée pour le premier  $\ell$ .

*Preuve.* L'équivalence résulte de la théorie d'Iwasawa ; l'isomorphisme  ${}_\Gamma \mathcal{T}_K \simeq \tilde{\mathcal{C}}_K$  de l'interprétation galoisienne du groupe des classes logarithmiques donnée par le Théorème 2.

**Scolie 6.** Le groupe  $\tilde{\mathcal{E}}_K$  des unités logarithmiques de  $K$  est le produit :

$$\tilde{\mathcal{E}}_K = \mu_K \mathbb{Z}_\ell^{r_K + c_K + \delta_K^\mathcal{G}}$$

du sous-groupe  $\mu_K$  des racines globales de l'unité et d'un  $\mathbb{Z}_\ell$ -module libre de rang  $r_K + c_K + \delta_K^\mathcal{G}$ , où  $\delta_K^\mathcal{G} = \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{C}}_K$  mesure le défaut de la conjecture de Gross dans le corps  $K$  pour le premier  $\ell$ .

*Preuve.* C'est une conséquence immédiate de la suite exacte restreinte aux  $\ell$ -unités (cf. [24, 25]) :

$$1 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_K \rightarrow \mathcal{E}'_K \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}_K = \tilde{\Theta}_{\mathfrak{p}|\ell} \mathbb{Z}_\ell \mathfrak{p} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_K \rightarrow \mathcal{C}'_K.$$

*Remarque.* La plupart des modules  $\ell$ -adiques globaux que nous manipulons sont les  $\ell$ -adifiés des groupes usuels attachés à un corps de nombres. On prendra garde que ce n'est pas le cas des groupes d'unités logarithmiques. Nous donnons ci-dessous un contre-exemple simple qui contredit en particulier les résultats de [50] .

**Proposition 7.** L'image  $\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K$  dans  $\mathcal{R}_K$  du sous-groupe  $\tilde{E}_K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_{K_n/K}(K_n^\times)$  de  $K^\times$  formé des éléments qui sont normes (locales comme globales) dans chaque sous-extension finie de la tour  $K_\infty/K$  est contenue dans le groupe des unités logarithmiques, mais ce dernier n'en est pas, en général, le  $\ell$ -adifié, l'inclusion

$$\mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K \subset \tilde{\mathcal{E}}_K$$

pouvant être stricte ; ainsi pour  $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$  corps quadratique réel dans lequel  $\ell$  est décomposé.

*Preuve.* Soient  $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$  un corps quadratique réel et  $\ell \geq 3$  décomposé dans  $K/\mathbb{Q}$  . Le groupe  $E'_K$  des  $\ell$ -unités de  $K$  est le  $\mathbb{Z}$ -module multiplicatif engendré par les quatre éléments  $-1, \varepsilon, \ell$  et  $\eta$ , où  $\varepsilon$  est l'unité fondamentale et  $\eta$  un générateur de la plus petite puissance principale non triviale de l'une des places au-dessus de  $\ell$ . Notons  $\bar{\eta}$  le conjugué de  $\eta$ . Pour  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ , l'implication

$$\text{Log}_\ell(\pm \varepsilon^a \ell^b \eta^c) = \log_\ell(\varepsilon^a / \bar{\eta}^c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^a / \bar{\eta}^c = 1 \quad \Rightarrow \quad a = c = 1$$

montre que le sous-groupe des normes cyclotomiques naïves  $\tilde{E}_K$  est engendré par  $-1$  et  $\ell$ . Il suit :

$$\dim_{\mathbb{Z}} \tilde{E}_K = 1 < 2 = \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{E}}_K \quad (\text{puisque on a ici } \delta_K^\mathcal{G} = 0 \text{ par abélianité}).$$

### 3. Non trivialité du $\ell$ -groupe des classes logarithmiques

Étudions maintenant plus attentivement la trivialité de  $\tilde{\mathcal{C}}_K$  pour un  $\ell$  fixé. Notons comme précédemment  $K_\infty = \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$  la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique de  $K$  et considérons le module de Kuz'min-Tate  $\mathcal{T}_K = \varprojlim \mathcal{C}'_{K_n}$ , c'est à dire la limite projective des  $\ell$ -groupes de  $\ell$ -classes d'idéaux des étages finis  $K_n$ , qui s'identifie au groupe de Galois de la pro- $\ell$ -extension abélienne maximale de  $K_\infty$  qui est complètement décomposée en toutes les places.

**Proposition & Définition 8.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le quotient des genres de  $\mathcal{T}_K$  est trivial :  $\tilde{\mathcal{C}}_K = 1$ .*
- (ii) *Les  $\ell$ -groupes de  $\ell$ -classes  $\mathcal{C}'_{K_n}$  sont ultimement triviaux :  $\mathcal{C}'_{K_n} = 1$  pour  $n \gg 0$ .*
- (iii) *Le module de Kuz'min-Tate  $\mathcal{T}_K$  est trivial :  $\mathcal{T}_K = 1$ .*

*Lorsqu'elles sont vérifiées, nous disons que le corps  $K$  est  $\ell$ -logarithmiquement principal.*

*Preuve.* La  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique étant ultimement ramifiée, l'application naturelle  $\mathcal{T}_K \rightarrow \mathcal{C}'_{K_n}$  est ultimement surjective; d'où l'équivalence (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii). L'équivalence (i)  $\Leftrightarrow$  (iii) résulte directement, elle, du lemme de Nakayama appliqué au  $\Lambda$ -module noethérien  $\mathcal{T}_K$ .

Il est très facile de vérifier qu'il existe des corps de nombres non logarithmiquement principaux : un algorithme général de calcul du groupe des  $\ell$ -classes logarithmiques, pour un premier  $\ell$  et un corps de nombres  $K$  donnés, a ainsi été développé d'abord dans [6], puis, dans une version améliorée, dans [5]. Il en est de même pour  $\ell = 2$  de versions raffinées prenant en compte la notion de classe logarithmique signée, qui est l'analogue logarithmique des classes d'idéaux au sens restreint [29, 30]. Ces algorithmes sont effectifs et ne présupposent nullement la validité de la conjecture de Gross généralisée : ils vérifient concrètement par le calcul même qu'elle est satisfaite pour le premier  $\ell$  et le corps de nombres  $K$  étudiés. Des versions ad hoc plus élémentaires peuvent être mises en œuvre dans les cas de tout petit degré. Ainsi :

#### Exemple 9 (Corps quadratiques imaginaires non logarithmiquement principaux).

*Nous listons ci-dessous quelques exemples de couples  $(K, \ell)$  pour lesquels  $\tilde{\mathcal{C}}_K$  est non trivial.*

- (i) *Pour  $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ , le plus petit premier pour lequel  $\tilde{\mathcal{C}}_K$  est non trivial est :  $\ell = 29\,789$ .*
- (ii) *Pour  $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ , le plus petit premier pour lequel  $\tilde{\mathcal{C}}_K$  est non trivial est :  $\ell = 5\,881$ .*
- (iii) *Pour  $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-7}]$ , le plus petit premier pour lequel  $\tilde{\mathcal{C}}_K$  est non trivial est :  $\ell = 19\,531$ .*
- (iv) *Pour  $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-11}]$ , le plus petit premier pour lequel  $\tilde{\mathcal{C}}_K$  est non trivial est :  $\ell = 5$ .*
- (v) *Pour  $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-13}]$ , le plus petit premier pour lequel  $\tilde{\mathcal{C}}_K$  est non trivial est :  $\ell = 113$ .*
- (vi) *Pour  $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-31}]$ , le plus petit premier pour lequel  $\tilde{\mathcal{C}}_K$  est non trivial est :  $\ell = 227$ .*

*Pour chacun d'eux, le  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques est d'ordre exactement  $\ell$ .*

Les calculs –très simples– conduisant à ces résultats ont été effectués à Bordeaux par Bill Allombert à l'aide du logiciel PARI. Comme on peut le voir, la taille du plus petit  $\ell$  donnant un groupe non trivial n'est pas corrélée simplement au discriminant du corps considéré. Les heuristiques amènent par ailleurs à penser que, pour chaque corps quadratique imaginaire  $K$ , il existe en fait une infinité de premiers  $\ell$  pour lesquels le  $\ell$ -groupe  $\tilde{\mathcal{C}}_K$  est non trivial. Ainsi :

#### Exemple 10 (Groupes de classes logarithmiques du corps quadratique $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ ).

*Pour  $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ , les plus petits premiers  $\ell$  pour lequel  $\tilde{\mathcal{C}}_K$  est non trivial sont : 13, 181, 2521, 76543, 489061. Dans tous ces cas le  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques est d'ordre exactement  $\ell$ .*

Pour les corps réels, en revanche, on peut toutefois risquer une conjecture différente :

**Conjecture 11.** *Pour chaque corps quadratique réel  $K$  donné, il existe un nombre fini de premiers  $\ell$  pour lesquels le  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques de  $K$  est non trivial.*

Comme un tel corps vérifie trivialement la conjecture de Gross généralisée, la conjecture ci-dessus postule donc que le groupe des classes logarithmiques *global* d'un corps quadratique réel, i.e. le produit des  $\ell$ -groupes de classes logarithmiques pour tous les premiers  $\ell$ , est un groupe fini.

## 4. Énoncés de la conjecture de Leopoldt

La conjecture initiale de Leopoldt a été énoncée pour les corps totalement réels. Mais elle vaut, en fait, mutatis mutandis, quelle que soit la signature du corps de nombres considéré. Elle a alors une traduction particulièrement élégante en termes de corps de classes.

Rappelons que la Théorie  $\ell$ -adique du corps de classes (cf. [20, 25]) assure que le  $\ell$ -adifié  $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes K^\times$  du groupe multiplicatif d'un corps de nombres  $K$  s'injecte naturellement dans le  $\ell$ -adifié  $\mathcal{J}_K$  du groupe des idèles (défini comme le produit restreint  $\mathcal{J}_K = \prod_{\mathfrak{p}}^{res} \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$  des compactifiés  $\ell$ -adiques  $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} = \varprojlim K_{\mathfrak{p}}^\times / K_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^n}$  des groupes multiplicatifs respectifs des complétés de  $K$ ), ce qui permet de considérer l'intersection

$$\mu_K^{loc} = \mathcal{R}_K \cap \prod_{\mathfrak{p}} \mu_{K_{\mathfrak{p}}}$$

de  $\mathcal{R}_K$  avec le produit des sous-groupes locaux de racines de l'unités (dans les compactifiés  $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$ ), c'est-à-dire le sous-groupe des éléments *globaux* qui sont *localement* des racines de l'unité.

Écrivons  $c_K$  le nombre de places complexes de  $K$  et  $\mathcal{X}_K = \text{Gal}(M/K)$  le groupe de Galois de sa pro- $\ell$ -extension abélienne  $\ell$ -ramifiée. Notons  $\mathcal{E}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_K$  le  $\ell$ -adifié du groupe des unités  $E_K$  de  $K$  et  $\mathcal{U}_{K_\ell} = \prod_{\ell | \ell} \mathcal{U}_{K_\ell}$  le produit des sous-groupes unités des  $\mathcal{R}_{K_\ell}$  aux places qui divisent  $\ell$ .

Avec ces notations, il vient (cf. e.g. [8, 13, 17, 18, 19, 20, 41, 55]) :

**Théorème 12 (Conjecture de Leopoldt généralisée).** *Pour tout corps de nombres  $K$  et tout premier  $\ell$ , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le corps  $K$  admet (au plus)  $c_K + 1$   $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions indépendantes.*
- (ii) *Le groupe de Galois  $\mathcal{X}_K = \text{Gal}(M/K)$  est un  $\mathbb{Z}_\ell$ -module de rang essentiel  $c_K + 1$ .*
- (iii) *L'application naturelle de  $\mathcal{E}_K$  dans  $\mathcal{U}_{K_\ell}$  est injective.*
- (iv) *Les idèles principaux localement racines de l'unité sont les racines de l'unité :  $\mu_K^{loc} = \mu_K$ .*

*Lorsque c'est le cas on dit que le corps  $K$  satisfait la conjecture de Leopoldt pour le premier  $\ell$ .*

*Preuve.* Ces équivalences sont bien connues (à l'exception de la dernière, qui l'est moins) et se démontrent immédiatement à l'aide de la Théorie  $\ell$ -adique du corps de classes : les  $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions étant  $\ell$ -ramifiées, les conditions (i) et (ii) sont évidemment équivalentes ; si  $H$  désigne le  $\ell$ -corps de classes de Hilbert de  $K$ , i.e. sa  $\ell$ -extension abélienne non ramifiée maximale, il vient (cf. [25]) :

$$\text{Gal}(M/H) \simeq \mathcal{U}_K / s_K(\mathcal{E}_K),$$

où  $s_K$  est le morphisme de semi-localisation, ce qui donne l'équivalence de (ii) et de (iii), puisque le degré  $[H : K]$  est fini et qu'on a :  $\text{rg}_{\mathbb{Z}_\ell}(\mathcal{U}_K) = [K : \mathbb{Q}] = r_K + 2c_K$  et  $\text{rg}_{\mathbb{Z}_\ell}(\mathcal{E}_K) = r_K + c_K - 1$ .

Enfin l'équivalence de (iii) et de (iv) résulte tout simplement du fait que le noyau de  $s_K$  est formé d'idèles principaux qui sont localement partout des racines de l'unité.

Il est commode d'introduire le défaut  $\delta_K^{\mathcal{L}}$  de la conjecture de Leopoldt, qu'on peut définir comme suit :

**Scolie 13.** *Le groupe  $\mu_K^{loc} = \mathcal{R}_K \cap \prod_{\mathfrak{p}} \mu_{K_{\mathfrak{p}}}$  des idèles principaux qui sont localement partout racines de l'unité est le produit :*

$$\mu_K^{loc} = \mu_K \mathbb{Z}_\ell^{\delta_K^{\mathcal{L}}}$$

*du sous-groupe des racines globales de l'unité et d'un  $\mathbb{Z}_\ell$ -module libre de rang fini.*

*On dit que  $\delta_K^{\mathcal{L}}$  mesure le défaut de la conjecture de Leopoldt dans le corps  $K$  pour le premier  $\ell$ .*

*Preuve.* Comme sous-module de  $\mathcal{E}_K \simeq \mu_K \mathbb{Z}_\ell^{r_K + c_K - 1}$ , le  $\mathbb{Z}_\ell$ -module  $\mu_K^{loc}$  est, en effet, le produit direct de son sous-module de torsion  $\mu_K$  et d'un  $\mathbb{Z}_\ell$ -module libre de rang fini.

*Remarque.* Avec ces notations, le rang essentiel du  $\mathbb{Z}_\ell$ -module  $\mathcal{X}_K$  est ainsi :  $c_K + 1 + \delta_K^{\mathcal{L}}$  ; et on retrouve ainsi les invariants classiques dans l'étude de ces questions.

Le groupe  $\mu_K^{loc}$  est un sous-groupe du groupe des unités logarithmiques  $\tilde{\mathcal{E}}_K$ . L'image de celui-ci par l'application de semi-localisation  $s_K : \mathcal{R}_K \rightarrow \prod_{\ell | \ell} \mathcal{R}_{K_\ell}$  est ainsi un  $\mathbb{Z}_\ell$ -module dont le rang essentiel fait apparaître la différence des défauts respectifs des conjectures de Gross et de Leopoldt :

**Corollaire 14.** *On a :  $\dim_{\mathbb{Z}_\ell} s_K(\tilde{\mathcal{E}}_K) = \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \tilde{\mathcal{E}}_K - \dim_{\mathbb{Z}_\ell} \mu_K^{loc} = r_K + c_K + \delta_K^{\mathcal{G}} - \delta_K^{\mathcal{L}}$ .*

## 5. Conditions algébriques suffisantes de la conjecture de Leopoldt

La trivialité du  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques  $\tilde{\mathcal{C}}_K$  implique trivialement la validité de la conjecture de Gross généralisée pour le corps  $K$  et le premier  $\ell$ , laquelle postule simplement la finitude du groupe  $\tilde{\mathcal{C}}_K$ . En présence des racines  $\ell$ -ièmes de l'unité, elle emporte également, ce qui est moins évident, la validité de la conjecture de Leopoldt pour le corps  $K$  et le premier  $\ell$ . Plus précisément :

**Théorème 15.** *Soit  $K$  un corps de nombres contenant les racines  $2\ell$ -ièmes de l'unité. Sous la condition  $\tilde{\mathcal{C}}_K = 1$ , le corps  $K$  satisfait les conjectures de Gross et de Leopoldt pour le premier  $\ell$  et il en est de même de chacun des étages  $K_n$  de la tour cyclotomique  $K_\infty/K$ .*

*Preuve.* Que chacun des  $K_n$  vérifie alors la conjecture de Gross est immédiat : sous l'hypothèse  $\tilde{\mathcal{C}}_K = 1$ , on a immédiatement  $\mathcal{T}_K = 1$ , en vertu du lemme de Nakayama et, par suite,

$$\tilde{\mathcal{C}}_{K_n} = 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

puisque les  $\ell$ -groupes de classes logarithmiques des  $K_n$  sont les quotients  $T_K/T_K^{(\gamma^{\ell^n}-1)}$  relatifs aux sous-groupes  $\Gamma^{\ell^n}$ . Reste donc à vérifier que la trivialité de  $\mathcal{T}_K$  entraîne la validité de la conjecture de Leopoldt à chaque étage fini  $K_n$  de la tour cyclotomique.

L'hypothèse  $\mu_{2\ell} \subset K$  assurant que  $K_\infty$  contient toutes les racines  $\ell$ -primaires de l'unité, nous allons procéder par dualité en utilisant la Théorie de Kummer. Rappelons qu'en vertu des résultats de [20, 21], l'application naturelle de  $\mathfrak{R}_{K_n} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} K_n^\times$  dans  $\mathfrak{R}_{K_\infty} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} K_\infty^\times$  est injective, ce qui permet de regarder les éléments de  $\mathfrak{R}_{K_n}$  comme des radicaux kummériens au-dessus de  $K_\infty$ .

Considérons donc l'image canonique dans  $\mathfrak{R}_{K_\infty}$  du sous-groupe  $\mu_{K_n}^{loc} = \mathcal{R}_{K_n} \cap \prod_{\mathfrak{p}_n} \mu_{K_{\mathfrak{p}_n}}$  de  $\mathcal{R}_{K_n} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K_n^\times$  formé des idéles principaux qui sont localement partout des racines de l'unité. Comme expliqué plus haut, la conjecture de Leopoldt pour le corps  $K_n$  (et le premier  $\ell$ ) affirme que le groupe  $\mu_{K_n}^{loc}$  se réduit au sous-groupe  $\mu_{K_n}$  des racines globales de l'unité. Lorsqu'elle est en défaut, le radical correspondant  $(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mu_{K_n}^{loc}$  est infini et définit une pro- $\ell$ -extension abélienne non triviale de  $K_\infty$  qui est, par construction, localement triviale partout, c'est-à-dire complètement décomposée en toutes les places ; ce qui contredit la trivialité de  $\mathcal{T}_K$ . D'où le résultat.

**Scolie 16.** *Soit  $K$  un corps de nombres contenant les racines  $2\ell$ -ièmes de l'unité. La conclusion du Théorème vaut encore sous la condition plus faible :  $\mathcal{T}_K$  fini.*

*Preuve.* D'un côté, la finitude du module de Tate  $\mathcal{T}_K$  entraîne celle de tous ses quotients des genres  $\tilde{\mathcal{C}}_{K_n}$ , donc la conjecture de Gross dans chacun des  $K_n$ . Et d'un autre côté, la preuve du Théorème montre que  $\mathcal{T}_K$  est infini dès que la conjecture de Leopoldt est en défaut dans l'un des  $K_n$ .

Plusieurs conditions suffisantes (mais non nécessaires) de la conjecture de Leopoldt pour un premier  $\ell$  donné et un corps  $K$  contenant les racines  $2\ell$ -ièmes de l'unité, ont été proposées, notamment par Bertrandias et Payan [1], en termes de plongements localement cyclotomiques, par Miki [40, 41], en termes kummériens, par Gillard [8], en termes de théorie d'Iwasawa.

Comme expliqué dans [19, 20], toutes ces conditions sont, en fait, rigoureusement équivalentes à la trivialité du groupe des classes logarithmiques, c'est à dire à la condition suffisante du Théorème 15. Par exemple la condition donnée dans [8] s'écrit :  $\mathcal{T}_K = 1$ . D'après le Théorème 8, elle s'écrit aussi bien  $\tilde{\mathcal{C}}_K = 1$ .

L'intérêt majeur de la description que nous donnons, outre d'uniformiser ces diverses conditions, est de les traduire directement, via le corps de classes  $\ell$ -adique, en termes d'invariants arithmétiques effectivement calculables du corps considéré.

La notion de corps de nombres  $\ell$ -rationnel ou  $\ell$ -régulier (cf. [10, 11, 28, 42, 43]) et ses généralisations (cf. [2, 31, 32]) permet ainsi de construire des tours infinies de corps de nombres non abéliens sur  $\mathbb{Q}$ , qui satisfont les conjectures de Leopoldt et de Gross pour des raisons purement algébriques, et qui restent, en l'état actuel de nos connaissances, inaccessibles aux méthodes transcendantes.

## 6. Trivialité du sous-module ambige du module de Kuz'min-Tate $\mathcal{T}_K^\Gamma$

Plutôt que de tester la trivialité du module de Kuz'min-Tate  $\mathcal{T}_K$  sur son quotient des genres  ${}^\Gamma\mathcal{T}_K \simeq \tilde{\mathcal{A}}_K$ , intéressons-nous à son sous-groupe des points fixes  $\mathcal{T}_K^\Gamma$  :

**Proposition 17.** *On a les implications :  ${}^\Gamma\mathcal{T}_K = 1 \Leftrightarrow \mathcal{T}_K = 1 \Rightarrow \mathcal{T}_K^\Gamma = 1$  ; mais il peut arriver que  $\mathcal{T}_K^\Gamma$  soit trivial sans que  $\mathcal{T}_K$  le soit.*

La condition  $\mathcal{T}_K^\Gamma = 1$  est ainsi plus faible que la condition suffisante étudiée dans la section précédente. Néanmoins, et contrairement à une conjecture de Seo (cf. [48], §3), il peut arriver qu'elle soit en défaut. Pour voir cela, partons de l'interprétation classique du groupe  $\mathcal{T}_K^\Gamma$  :

**Théorème 18.** *Le sous-groupe ambige  $\mathcal{T}_K^\Gamma$  du module de Kuz'min-Tate s'identifie au quotient  $\tilde{\mathcal{E}}_K/N_{K_\infty/K}(\tilde{\mathcal{E}}_{K_\infty})$  du  $\ell$ -groupe des unités logarithmiques par le sous-groupe des normes cyclotomiques d'unités logarithmiques :*

$$\mathcal{T}_K^\Gamma \simeq \tilde{\mathcal{E}}_K/N_{K_\infty/K}(\tilde{\mathcal{E}}_{K_\infty}).$$

*Preuve.* Ce résultat est essentiellement bien connu au vocabulaire près (cf. [38, ?, 48, 49, 50]) mais certaines des démonstrations proposées étant manifestement erronées (du fait d'une confusion malheureuse entre unités logarithmiques au sens naïf et au sens  $\ell$ -adique), nous en redonnons ci-dessous une preuve très simple basée sur l'arithmétique des classes ambiges.

Faisons choix d'un ensemble fini  $S$  de places finies de  $K$  contenant les places au-dessus de  $\ell$  et suffisamment gros pour que le  $\ell$  groupe  $\mathcal{C}\ell_K^S$  des  $S$ -classes d'idéaux de  $K$  soit trivial ; et appliquons les isomorphismes des classes ambiges de Chevalley (cf. [3, 20]) aux  $\ell$ -groupes de  $S$ -classes des corps  $K_n$ . Puisque par hypothèse les  $S$ -classes d'idéaux ambiges sont triviales (du fait que  $S$  contient à la fois les places ramifiées dans  $K_n/K$  et un système de générateurs des classes étendues), il existe un isomorphisme canonique :

$$\mathcal{C}\ell_{K_n}^{S \Gamma_n} \simeq (\mathcal{E}_K^S \cap N_{K_n/K}(\mathcal{R}_{K_n}))/N_{K_n/K}(\mathcal{E}_{K_n}^S)$$

obtenu en envoyant la classe ambige d'un  $S$ -idéale  $\mathfrak{A}$  sur l'image par la norme d'un générateur  $\alpha$  du  $S$ -idéale principal  $\mathfrak{A}^{(\gamma-1)}$ . Par passage à la limite projective, il suit :

$$\mathcal{T}_K^{S \Gamma} = \varprojlim \mathcal{C}\ell_{K_n}^{S \Gamma_n} \simeq (\mathcal{E}_K^S \cap N_{K_\infty/K}(\mathcal{R}_{K_\infty}))/N_{K_\infty/K}(\mathcal{E}_{K_\infty}^S).$$

(i) Par la théorie du corps de classes, la limite projective à gauche s'identifie au sous-groupe des points fixes du groupe de Galois  $\mathcal{T}_K^S$  de la pro- $\ell$ -extension abélienne maximale de  $K_\infty$  qui est non ramifiée partout et complètement décomposée aux places au-dessus de  $S$ . Et comme la montée dans la tour cyclotomique  $K_\infty/K$  a épuisé toute possibilité d'inertie aux places de  $S$  qui ne divisent pas  $\ell$ , le groupe  $\mathcal{T}_K^S$  coïncide de ce fait avec le module de Kuz'min-Tate  $\mathcal{T}_K$ .

(ii) Comme expliqué dans la section 1, le groupe de normes  $\mathcal{E}_K^S \cap N_{K_\infty/K}(\mathcal{R}_{K_\infty})$  au numérateur à droite n'est autre que le groupe des unités logarithmiques du corps  $K$ .

(iii) Enfin, les places de  $S$  étant *au sens logarithmique* presque totalement inertes dans la tour cyclotomique  $K_\infty/K$ , le groupe des normes de  $S$  unités  $N_{K_\infty/K}(\mathcal{E}_{K_\infty}^S)$  se réduit au sous-groupe des normes d'unités logarithmiques ; d'où l'isomorphisme annoncé.

**Corollaire 19.** *La conjecture de Seo «  $\mathcal{T}_K^\Gamma = 1$  pour tout corps de nombres  $K$  » est fausse.*

*Preuve.* Soit  $d = 2 \pmod{3}$  un entier naturel sans facteur carré et  $K$  le corps quadratique réel  $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ . Le nombre premier  $\ell = 3$  étant inerte dans  $K/\mathbb{Q}$ , le 3-groupe des unités logarithmiques de  $K$  coïncide avec le 3-adifié  $\mathcal{E}'_K = \mathbb{Z}_3 \otimes_{\mathbb{Z}} E'_K$  du groupe des 3-unités. Or, pour  $d = 257$ , l'unité fondamentale de  $K$  n'est pas norme d'une 3-unité dans le premier étage  $K[\cos(2\pi/9)]/K$  de la  $\mathbb{Z}_3$ -extension cyclotomique  $K_\infty/K$ . Il vient donc :

$$|\mathcal{T}_K^\Gamma| = (\tilde{\mathcal{E}}_K : N_{K_\infty/K}(\mathcal{E}_{K_\infty})) \geq 3;$$

ce qui contredit la conjecture de Seo ([48], §3).

*Remarque.* On peut imaginer que parmi les corps quadratiques réels  $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$  avec  $d = 2 \pmod{3}$ , qui ont un 3-groupe des 3-classes non trivial, il en est une infinité qui contredisent la conjecture.



## 7. Sous-module fini $\mathcal{F}_K$ du module de Kuz'min-Tate et capitulation

La conjecture de Gross postulant la finitude du sous-module des points fixes  $\mathcal{T}_K^\Gamma$  du module de Kuz'min-Tate, il est naturel de s'intéresser au sous-module fini  $\mathcal{F}_K$  de  $\mathcal{T}_K$  : comme tout  $\Lambda$ -module noethérien, le groupe  $\mathcal{T}_K$  possède, en effet, un plus grand sous-module fini, qui n'est autre que l'ensemble de ses éléments pseudo-nuls. En termes de classes logarithmiques, celui-ci a une double interprétation arithmétique très simple (cf. [27], §2.c et [39], Th. 1.4 pour les groupes de  $\ell$ -classes) :

**Théorème 20.** *Les sous-groupes de capitulation logarithmiques  $\widetilde{Cap}_{K_n} = \text{Ker}(\widetilde{\mathcal{C}}_{K_n} \rightarrow \widetilde{\mathcal{C}}_{K_\infty})$  sont ultimement constants dans la tour cyclotomique  $K_\infty/K$  et ont pour limite projective le sous-module fini  $\mathcal{F}_K$  du module de Kuz'min-Tate  $\mathcal{T}_K$ . Sous la conjecture de Gross un résultat analogue vaut pour les conoyaux de capitulation logarithmique :*

$$\widetilde{Cap}_{K_n} = \text{Ker}(\widetilde{\mathcal{C}}_{K_n} \rightarrow \widetilde{\mathcal{C}}_{K_\infty}) \underset{n \gg 0}{\simeq} \mathcal{F}_K \underset{n \gg 0}{\simeq} \widetilde{Cocap}_n = \text{Coker}(\widetilde{\mathcal{C}}_{K_n} \rightarrow \widetilde{\mathcal{C}}_{K_\infty}^\Gamma).$$

*Preuve.* Du point de vue de Théorie d'Iwasawa, la question de la capitulation se présente comme suit (cf. [27] §2.c) : on dispose d'un module noethérien  $T$  sur l'algèbre d'Iwasawa  $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma - 1]]$  attachée à un groupe procyclique  $\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell}$  ; on note  $\omega_n = \gamma^{\ell^n} - 1$  ; et on s'intéresse aux noyaux des morphismes de transition  $\text{Ker}(T_n \rightarrow T_m)$  pour  $m \gg n \gg 0$  induits par la multiplication par  $\omega_m/\omega_n$  entre les quotients  $T_n = T/\omega_n T$  et  $T_m = T/\omega_m T$  pour  $n$  et  $m - n$  assez grands ; ce qui revient à considérer le noyau  $\text{Ker}_n = \text{Ker}(T_n \rightarrow T_\infty)$  du morphisme d'extension à valeurs dans la limite inductive  $T_\infty$  des  $T_n$ . Notant  $F$  le plus grand sous-module fini de  $T$ , on obtient directement :

$$\text{Ker}_n = \{t + \omega_n T \in T/\omega_n T \mid (\omega_m/\omega_n) t = 0\} \underset{m \gg n}{=} (F + \omega_n T)/\omega_n T \underset{n \gg 0}{\simeq} F ;$$

et

$$\text{Coker}_n = \{t + \frac{\omega_m}{\omega_n} T \in T/\frac{\omega_m}{\omega_n} T \mid \omega_n t \in \omega_m T\} \underset{n \gg 0}{=} (F + \frac{\omega_m}{\omega_n} T)/\frac{\omega_m}{\omega_n} T \underset{m \gg n}{\simeq} F.$$

où l'on voit que non seulement les groupes  $Cap_n$  sont bornés (comme l'a montré Iwasawa pour les groupes de classes dans [17]) mais qu'ils sont ultimement isomorphes à leur limite projective  $F$ . Prenant  $T = \mathcal{T}_K$  et observant que nous avons alors  $\mathcal{T}_{K_n} = T_n$ , nous obtenons le résultat annoncé.

*Remarque.* Lorsque, de plus, l'invariant  $mu$  d'Iwasawa du  $\Lambda$ -module  $\mathcal{T}_K$  est nul, ce qui est le cas si le corps  $K$  est absolument abélien (d'après un résultat de Ferrero et Washington) et conjecturé pour tout corps de nombres (cf. [55]), on peut même dire mieux : d'après [9], en effet, la capitulation  $\widetilde{Cap}_{K_n} \simeq \mathcal{T}_K$  est alors un *facteur direct* du  $\mathbb{Z}_\ell$ -module  $\widetilde{\mathcal{C}}_{K_n}$ .

Il est bien connu que le sous-groupe de capitulation du groupe des classes d'idéaux dans une extension galoisienne non ramifiée de corps de nombres s'identifie au premier groupe de cohomologie des unités. Et il est montré dans [24] que le même résultat vaut encore dans le cadre logarithmique si l'on remplace classes, unités et non ramification par leurs analogues logarithmiques. Cette observation a des conséquences importantes pour  $\mathcal{F}_K$  en présence d'une conjugaison complexe.

Supposons, en effet, que le corps de base  $K$  soit une extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps  $K^+$  totalement réel, notons  $\tau$  la conjugaison complexe,  $\Delta = \{1, \tau\}$  le groupe de Galois  $\text{Gal}(K_\infty/K_\infty^+) \simeq \text{Gal}(K/K^+)$  et prenons, pour simplifier,  $\ell \neq 2$ .

Les divers  $\mathbb{Z}_\ell$ -modules étudiés étant munis d'une action de  $\Delta$ , il est alors loisible de les décomposer comme sommes directes de leurs composantes *réelles* et *imaginaires* à l'aide des idempotents  $e_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \tau)$  de l'algèbre  $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ .

Or, sous la conjecture de Gross, le  $\ell$ -groupe des unités logarithmiques  $\widetilde{\mathcal{E}}_K$  est *réel*. Il suit donc :

**Corollaire 21.** *En présence d'une conjugaison complexe (i.e. lorsque le corps  $K$  est une extension quadratique totalement imaginaire d'un sous-corps totalement réel) et sous la conjecture de Gross, la composante imaginaire du module fini  $\mathcal{F}_K$  est triviale :  $\mathcal{F}_K^\ominus = 1$ .*

*En particulier, la conjecture de Gross entraîne donc, dans ce cas, la trivialité du sous-groupe des points fixes  $\mathcal{T}_K^{\ominus\Gamma}$  de la composante imaginaire  $\mathcal{T}_K^\ominus$  du module de Kuz'min-Tate.*

*Remarque.* Le groupe  $\mathcal{F}_K$  s'interprète aussi comme limite projective des sous-groupes de capitulation  $Cap'_{K_n}$  associés aux  $\ell$ -groupes de  $\ell$ -classes  $\mathcal{C}\ell'_{K_n}$ . Son dual de Pontrjagin  $\mathcal{F}_K^*$  a également une interprétation arithmétique simple en termes de Théorie d'Iwasawa (cf. e.g. [22, 39]), sur laquelle nous revenons plus loin (cf. Prop. 27).

## 8. Lien avec les noyaux étales sauvages de la $K$ -théorie

L'étude des noyaux de la  $K$ -théorie des corps de nombres via la cohomologie galoisienne remonte aux travaux de Tate [53]. Nombre de contributions ont eu pour objet de préciser ces relations, en lien éventuellement avec les conjectures de Leopoldt ou de Gross (ainsi [22, 34, 35, 36, 37, 45, 46]).

Le point de vue logarithmique a été introduit dans [23] pour les noyaux sauvages  $WK_2(K)$  en liaison avec l'expression explicite du symbole de Hilbert, puis développé dans [33], et finalement dans [27] pour les noyaux étales supérieurs  $WK_{2i}(K)$ . Rappelons qu'en vertu des résultats de Schneider [47], ceux-ci peuvent être décrits, en présence des racines d'ordre  $\ell$ -primaire de l'unité, comme les quotients des copoints fixes du  $i$ -ième tordu à la Tate du module de Kuz'min-Tate  $\mathcal{T}_K$  :

$$WK_{2i}(K) \simeq {}^\Gamma(\mathbb{T}_\ell^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{T}_K),$$

où  $\mathbb{T}_\ell^{\otimes i}$  désigne la  $|i|$ -ième puissance tensorielle du module de Tate  $\mathbb{T}_\ell = \varprojlim \mu_{K_n}$ , pour  $i \geq 0$ ; du module opposé  $\overline{\mathbb{T}}_\ell = \text{Hom}(\mu_{\ell^\infty}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$ , pour  $i \leq 0$ ; et  $WK_0(K) = {}^\Gamma\mathcal{T}_K \simeq \widetilde{\mathcal{C}}\ell_K$ , par construction.

*Remarque.* Lorsque le corps de base  $K$  ne contient pas les racines  $2\ell$ -ièmes de l'unité, mais que la  $\ell$ -tour cyclotomique  $K[\zeta_{\ell^\infty}]/K$  est néanmoins procyclique, le résultat vaut encore pour  $\ell = 2$ ; et on peut pallier cette difficulté pour  $\ell > 2$  en l'appliquant au sur-corps  $K' = K[\zeta_\ell]$  puis en redescendant le résultat sur  $K$  à l'aide des idempotents primitifs de l'algèbre  $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$  du groupe de Galois  $\Delta = \text{Gal}[K'/K]$  (cf. e.g. [20, 55]). Plus précisément, suivant [27], il vient :

**Théorème 22.** *Soient  $\ell$  un nombre premier,  $K$  un corps de nombres dont la tour cyclotomique  $K[\zeta_{\ell^\infty}]/K$  est procyclique,  $K' \supset K[\zeta_\ell]$  une extension abélienne de  $K$  de groupe  $\Delta = \text{Gal}[K'/K]$  d'ordre  $d$  étranger à  $\ell$ . Notons  $|\mu_{K'}| = \ell^m$ . Pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  on a l'isomorphisme de  $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ -modules :*

$${}^{\ell^m}WK_{2i}(K') \simeq \mu_{\ell^m}^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \widetilde{\mathcal{C}}\ell_{K'}$$

entre le quotient d'exposant  $\ell^m$  du noyau étale sauvage  $WK_{2i}(K')$  et le tensorisé  $i$  fois par  $\mu_{\ell^m}$  du  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques du corps  $K'$ .

En particulier, si  $\bar{\omega}$  désigne le caractère de l'action de  $\Delta$  sur le module  $\overline{\mathbb{T}}_\ell$ , il suit :

$${}^{\ell^m}WK_{2i}(K) = {}^{\ell^m}WK_{2i}(K')^{e_1} \simeq \mu_{\ell^m}^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \widetilde{\mathcal{C}}\ell_{K'}^{e_\omega}$$

où  $e_\varphi = \frac{1}{d} \sum_{\tau \in \Delta} \varphi(\tau^{-1})\tau$  désigne l'idempotent de l'algèbre  $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$  associé au caractère  $\varphi$ ; de sorte que le  $\ell$ -rang comme la triviale du noyau sauvage étale  $WK_{2i}(K)$  se lisent sur la  $\bar{\omega}^i$ -composante du  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques du corps  $K'$ .

Donnons un exemple (le miroir de Scholz) illustrant ce dernier résultat pour  $\ell = 3$  (cf. [27]) :

**Corollaire 23.** *Soit  $k = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$  un corps quadratique distinct de  $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$  et  $k^* = \mathbb{Q}[\sqrt{-3d}]$  son reflet dans l'involution du miroir. Alors pour chaque  $i > 0$ , les quotients d'exposant 3 des noyaux sauvages étales de  $k$  sont donnés à partir des 3-goupes de classes logarithmiques de  $k$  et  $k^*$  par :*

$${}^3WK_{2i}(k) \simeq \begin{cases} \mu_3^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_3} \widetilde{\mathcal{C}}\ell_k & \text{pour } i \text{ pair,} \\ \mu_3^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_3} \widetilde{\mathcal{C}}\ell_{k^*} & \text{pour } i \text{ impair.} \end{cases}$$

*Remarque.* Pour  $k = \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ , il vient directement :  ${}^3WK_{2i}(k) \simeq \mu_3^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_3} \widetilde{\mathcal{C}}\ell_k = 1$ .

Venons en maintenant au noyau du morphisme d'extension déjà étudié par [4, 14, 22, 34, 45, 46, 54] dans divers contextes. Les arguments conduisant au Théorème 20 nous donnent semblablement :

**Corollaire 24.** *Sous les hypothèses du Théorème 22 et pour tout caractère  $\ell$ -adique irréductible  $\varphi$  du groupe  $\Delta$ , la  $\varphi$ -composante  $\mathcal{F}_{K'}^{e_\varphi}$  du sous-module fini de  $\mathcal{T}_{K'}$  s'identifie pour  $n \gg 0$  à la  $\varphi$ -partie*

- (i)  $\text{Cap}'_{K'_n}{}^{e_\varphi}$  du sous-groupe de  $\mathcal{C}\ell_{K'_n}$  formé des  $\ell$ -classes qui capitulent dans  $\mathcal{C}\ell'_{K'_\infty}$  ;
- (ii)  $\widetilde{\text{Cap}}_{K'_n}{}^{e_\varphi}$  du sous-groupe de  $\widetilde{\mathcal{C}}\ell'_{K'_n}$  formé des classes logarithmiques qui capitulent dans  $\widetilde{\mathcal{C}}\ell'_{K'_\infty}$  ;
- (iii)  $\overline{\mathbb{T}}_\ell^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \text{C}WK_{2i}{}^{e_\varphi \omega^i}$  du tensorisé  $\overline{\mathbb{T}}_\ell^{\otimes i} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \text{Ker}(WK_2(K'_n) \rightarrow WK_2(K'_\infty))$ , pour tout  $i \neq 0$ .

*Remarque.* Ces résultats ne présupposent ni la conjecture de Gross (qui postule la finitude de  $WK_0(K')$ ), ni celle de Schneider (qui postule celle des  $WK_{2i}(K')$  pour  $i < -1$ ), ni celle de Leopoldt.

## 9. Radicaux kummériens liés aux normes cyclotomiques

En présence des racines  $\ell$ -primaires de l'unité, i.e. pour  $\mu_{\ell^n} \subset K_n$ , les pro- $\ell$ -extensions de  $K_\infty$  sont caractérisées par leurs radicaux kummériens regardés comme sous-groupes du groupe :

$$\mathfrak{R}_{K_\infty} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} K_\infty^\times \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{R}_{K_\infty}.$$

D'après [20, 21], ces radicaux vérifient la théorie de Galois dans la tour  $K_\infty/K$ , ce qui s'écrit :

$$\mathfrak{R}_{K_n} = (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} K_n^\times \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathcal{R}_{K_n} = \mathfrak{R}_{F_\infty}^{\Gamma_n},$$

un résultat analogue valant pour les radicaux hilbertiens ([20], Prop. I.2.2 & I.2.18) :

$$\mathfrak{H}_{K_n} = \{\ell^{-k} \otimes x \in \mathfrak{R}_{K_n} \mid x \in \mathcal{J}_{K_n}^{\ell^k} \tilde{\mathcal{U}}_{K_n}\} = \mathfrak{H}_{K_\infty}^{\Gamma_n} \quad \text{avec} \quad \mathfrak{H}_{K_\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{H}_{K_n}.$$

Le groupe  $\mathfrak{H}_{K_\infty}$  est le radical de ce qu'il est convenu d'appeler l'*extension de Bertrandias-Payan*  $H_\infty$  du corps  $K_\infty$ , i.e. la réunion des composées  $H_n$  des pro- $\ell$ -extensions abéliennes *localement*  $\mathbb{Z}_\ell$ -plongeables des corps  $K_n$  (cf. [20, 21]). Trois sous-groupes nous intéressent plus particulièrement :

(i) Le noyau  $\mathfrak{N}_{K_\infty}$  dans  $\mathfrak{R}_{K_\infty}$  des symboles universels à valeurs dans  $K_2(K_\infty)$  :

$$\mathfrak{N}_{K_\infty} = \{\ell^{-k} \otimes x \in \mathfrak{R}_{K_\infty} \mid \{\zeta_{\ell^k}, x\} = 1 \text{ dans } K_2(K_\infty)\};$$

(ii) Le radical  $\mathfrak{Z}_{K_\infty}$  de la réunion  $Z_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$  des composées des  $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions  $Z_n$  des  $K_n$  :

$$\mathfrak{Z}_{K_\infty} = \text{Rad}(Z_\infty/K_\infty) = \{\ell^{-k} \otimes x \in \mathfrak{R}_{K_\infty} \mid K_\infty[\sqrt[k]{x}] \subset Z_\infty\};$$

(iii) Le radical  $\tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty}$  construit sur le groupe  $\tilde{\mathcal{E}}_{K_\infty}$  des unités logarithmiques dans  $\mathcal{R}_{K_\infty}$  :

$$\tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty} = \{\ell^{-k} \otimes x \in \mathfrak{R}_{K_\infty} \mid x \in \tilde{\mathcal{E}}_{K_\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mathcal{E}}_{K_n}\}.$$

D'après [22], Th. 8, les résultats de Coates ([4], Th. 4) et de Kolster ([35], Th. 2.6) se réécrivent :

**Théorème 25.** *Sous la condition  $\mu_\infty \subset K_\infty$ , on a les deux inclusions :*

- (i)  $\mathfrak{N}_{K_\infty} \subset \mathfrak{Z}_{K_\infty}$ , avec égalité sous la conjecture de Leopoldt dans  $K_\infty$  ;
- (ii)  $\mathfrak{N}_{K_\infty} \subset \tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty}$ , avec égalité sous la conjecture de Gross généralisée dans  $K_\infty$ .

Ainsi, sous les deux conjectures de Gross et de Leopoldt, les trois radicaux coïncident *en haut de la tour* et sont donnés simplement par les unités logarithmiques.

**Théorème 26.** *Le radical  $\tilde{\mathfrak{E}}_{K_n}$  construit sur le groupe  $\tilde{\mathcal{E}}_{K_n}$  des normes cyclotomiques est le sous-groupe divisible maximal du radical hilbertien  $\mathfrak{H}_{K_n}$  ; de sorte qu'on a l'isomorphisme :*

$$\tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty}^{\Gamma_n} / \tilde{\mathfrak{E}}_{K_n} \simeq \widetilde{\text{Cap}}_{K_n} \underset{n \gg 0}{\simeq} \mathcal{F}_K.$$

*Preuve.* La suite exacte courte reliant noyau hilbertien et classes logarithmiques (cf [21] 2§c)

$$1 \rightarrow \tilde{\mathfrak{E}}_{K_n} \rightarrow \mathfrak{H}_{K_n} \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_{K_n}^{\text{tor}} \rightarrow 1$$

jointe à la finitude du sous-groupe de torsion  $\tilde{\mathcal{U}}_{K_n}^{\text{tor}}$  de  $\tilde{\mathcal{U}}_{K_n}$  donne la première assertion. Sous la conjecture de Gross, les groupes de classes logarithmiques sont finis, de sorte que, passant à la limite inductive et prenant les points fixes par  $\Gamma_n$ , on obtient la suite longue

$$1 \rightarrow \tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty}^{\Gamma_n} \rightarrow \mathfrak{H}_{K_\infty}^{\Gamma_n} = \mathfrak{H}_{K_n} \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_{K_\infty}^{\Gamma_n} \rightarrow \dots$$

d'où l'on déduit, par le lemme du serpent, que le quotient  $\tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty}^{\Gamma_n} / \tilde{\mathfrak{E}}_{K_n}$  s'identifie au sous-groupe de capitulation  $\widetilde{\text{Cap}}_{K_n}$  de  $\tilde{\mathcal{U}}_{K_n}$  ; lequel est ultimement isomorphe à  $\mathcal{F}_K$  d'après le Théorème 20.

**Scolie 27.** *Sous la conjecture de Gross, le dual de Pontrjagin  $\mathcal{F}^* = \text{Hom}(\mathcal{F}_K, \mu_{\ell_\infty})$  s'identifie au conoyau  $\Lambda^{c_K} / \mathcal{Z}_{K_\infty}$  du groupe  $\mathcal{Z}_{K_\infty} = \text{Gal}(Z_\infty/K_\infty)$  dans le  $\Lambda$ -module libre qu'il détermine.*

*Preuve* (d'après [22] §6). On sait (cf. [17]) que le groupe  $\mathcal{Z}_{K_\infty} = \text{Gal}(Z_\infty/K_\infty)$  est d'indice fini dans un  $\Lambda$ -module libre de dimension  $c_K$ , i.e. que le dual  $\tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty}^* = \text{Hom}(\tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty}, \mu_{\ell_\infty})$  de  $\tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty}$  prend place dans une suite exacte courte  $1 \rightarrow \tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty}^* \rightarrow \Lambda^{c_K} \rightarrow \mathcal{F}_K^* \rightarrow 1$ , où  $\mathcal{F}_K^*$  est fini. Pour  $n \gg 0$  le conoyau  $\mathcal{F}_K^*$  est tué par  $\omega_n = \gamma^{\ell^n} - 1$  et on obtient alors la suite exacte à quatre termes :

$$1 \rightarrow \mathcal{F}_K^* \rightarrow \tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty}^* / \tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty}^{*\omega_n} \rightarrow (\Lambda/\omega_n \Lambda)^{c_K} \rightarrow \mathcal{F}_K^* \rightarrow 1,$$

qui nous prouve que  $\mathcal{F}_K^*$  est le sous-groupe de torsion du quotient  $\tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty}^* / \tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty}^{*\omega_n}$  ; autrement dit que  $\text{Hom}(\mathcal{F}_K^*, \mu_{\ell_\infty})$  s'identifie au quotient  $\tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty}^{\Gamma_n} / \tilde{\mathfrak{E}}_{K_n} \simeq \mathcal{F}_K$  de  $\tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty}^{\Gamma_n}$  par son sous-module divisible.

## 10. Descente radicielle et radicaux initiaux

Comme expliqué dans [21, 22], la descente radicielle impose une torsion de l'action galoisienne :

**Proposition 28.** *Indépendamment des conjectures de Leopoldt et de Gross, on a les identités :*

$$\overline{\mathbb{T}}_\ell \otimes \mathfrak{Z}_{K_n} = (\overline{\mathbb{T}}_\ell \otimes \tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty})_{div}^{\Gamma_n}; \quad \tilde{\mathfrak{E}}_{K_n} = (\tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty})_{div}^{\Gamma_n}; \quad \mathbb{T}_\ell \otimes \mathfrak{N}_{K_n} = (\mathbb{T}_\ell \otimes \tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty})_{div}^{\Gamma_n};$$

où  $\mathfrak{M}_{div}^{\Gamma_n}$  désigne le sous-module divisible maximal d'un  $\mathbb{Z}_\ell$ -module  $\mathfrak{M}^{\Gamma_n}$  fixé par  $\Gamma_n$ .

De ce fait la détermination des radicaux  $\mathfrak{Z}_{K_n}$  et  $\mathfrak{N}_{K_n}$  n'est pas du tout immédiate (cf. e.g. [12, 44]), en dehors du cas simple étudié par Bertrandias et Payan dans [1], où le radical hilbertien convient :

**Corollaire 29.** *Supposons  $\mu_{2\ell} \subset K$  et notons  $\ell^m$  l'ordre de  $\mu_K$  avec  $m \geq 1$ . Sous la condition  $\tilde{\mathcal{C}}_\ell = 1$ , les sous-groupes de  $\ell^m$ -torsion du noyau de Tate  $\mathfrak{N}_K$ , du radical  $\mathfrak{Z}_K$  et du groupe divisible  $\tilde{\mathfrak{E}}_K$  coïncident avec le radical initial de l'extension de Bertrandias-Payan :*

$$\ell^m \mathfrak{H}_K = \ell^m \mathfrak{N}_K = \ell^m \mathfrak{Z}_K = \ell^m \tilde{\mathfrak{E}}_K = \{\ell^{-m} \otimes x \in \mathfrak{N}_K \mid x \in \tilde{\mathfrak{E}}_K\}.$$

*Preuve.* L'hypothèse  $\tilde{\mathcal{C}}_\ell = 1$ , outre la conjecture de Gross, entraîne l'égalité  $\mathfrak{H}_K = \tilde{\mathfrak{E}}_K$ ; il suit :

$$\ell^m \mathfrak{H}_K = \ell^m \tilde{\mathfrak{E}}_K \simeq (\ell^{-m} \mathbb{Z}_\ell / \mathbb{Z}_\ell)^{c_K},$$

en vertu du Scolie 6; d'où le résultat annoncé, puisque  $\mathfrak{H}_K$  contient  $\mathfrak{Z}_K$  comme  $\mathfrak{N}_K$ .

En fait, comme expliqué dans [22], c'est le le module fini  $\mathcal{F}_K$  (ou plutôt son dual  $\mathcal{F}_K^*$ ) qui représente l'obstruction à l'égalité des radicaux initiaux aux niveaux finis de la tour cyclotomique  $K_\infty/K$ . Plus précisément, les résultats de [14] et [22] peuvent être complétés comme suit :

**Théorème 30.** *Supposons toujours  $\mu_\infty \subset K_\infty$  et écrivons  $\ell^{n+m}$  l'ordre de  $\mu_{K_n}$  pour  $n > 1$ . Alors, sous les conjectures de Leopoldt et de Gross, il y a équivalence entre les assertions :*

- (i)  $\mathcal{F}_K$  est trivial; autrement dit les morphismes  $\tilde{\mathcal{C}}_{K_n} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_{K_\infty}^{\Gamma_n}$  sont ultimement bijectifs.
- (ii) Les groupes  $\mathcal{T}_K^{\Gamma_n}$  sont tous triviaux; autrement dit, on a les égalités :  $\tilde{\mathfrak{E}}_{K_n} = N_{K_\infty/K_n}(\tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty})$ .
- (iii) Pour  $n \gg 0$ , il y a égalité entre les sous-groupes de  $\ell^n$ -torsion des trois radicaux :
$$\ell^n \mathfrak{N}_{K_{n-m}} = \ell^n \mathfrak{Z}_{K_{n-m}} = \ell^n \tilde{\mathfrak{E}}_{K_{n-m}} = \{\ell^{-n} \otimes x \in \mathfrak{N}_{K_{n-m}} \mid x \in \tilde{\mathfrak{E}}_{K_{n-m}}\}.$$

*Preuve.* Le  $\Lambda$ -module  $\mathcal{F}_K$  étant un  $\ell$ -groupe fini, on a trivialement :  $\mathcal{F}_K = 1 \Leftrightarrow \mathcal{F}_K^{\Gamma_n} = 1$ . Sous la conjecture de Gross, l'équivalence des deux premières assertions résulte donc de la double inclusion  $\mathcal{F}_K^{\Gamma_n} \subset \mathcal{T}_K^{\Gamma_n} \subset \mathcal{F}_K$  et des interprétations données par les Théorèmes 18 et 20.

Sous ces conditions, les radicaux  $\tilde{\mathfrak{E}}_{K_n}$  construits sur les normes cyclotomiques vérifient la théorie de Galois dans la tour  $K_\infty/K$  (cf. Th. 26). Cela étant, le groupe de Galois  $\Gamma_{n-m}$  agissant trivialement sur les racines  $\ell^m$ -ièmes de l'unité, on obtient donc, comme annoncé :

$$\ell^n \mathfrak{N}_{K_{n-m}} = \ell^n \mathfrak{N}_{K_\infty}^{\Gamma_{n-m}} = \ell^n \tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty}^{\Gamma_{n-m}} = \ell^n \tilde{\mathfrak{E}}_{K_{n-m}} = \{\ell^{-n} \otimes x \in \mathfrak{N}_{K_{n-m}} \mid x \in \tilde{\mathfrak{E}}_{K_{n-m}}\}.$$

Et le même résultat vaut pour les radicaux  $\ell^n \mathfrak{Z}_{K_{n-m}}$  sous la conjecture de Leopoldt.

Réciproquement, les calculs qui précèdent montrent que le radical  $\ell^n \tilde{\mathfrak{E}}_{K_n}$  est l'ensemble des éléments de  $\ell^n$ -torsion du sous-module divisible maximal du groupe des points fixes  $\tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty}^{\Gamma_n}$ . Dans la dualité de Pontrjagin entre  $\tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty}$  et  $\tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty}^* \subset \Lambda^{c_K}$ , l'orthogonal  $(\ell^n \tilde{\mathfrak{E}}_{K_n})^\perp$  de  $\ell^n \tilde{\mathfrak{E}}_{K_n}$  est donc pour  $n \gg 0$  le sous-module  $\omega_n \Lambda^{c_K} + \ell^n \tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty}^*$  de  $\tilde{\mathfrak{E}}_{K_\infty}^*$ . Considérons donc le quotient  $\Lambda^c / (\ell^n \tilde{\mathfrak{E}}_{K_n})^\perp$  :

- d'un côté, puisque c'est un quotient de  $\Lambda^{c_K} / \omega_n \Lambda^{c_K} \simeq \mathbb{Z}_\ell^{c_n}$ , sa décomposition comme produit de groupes cycliques fait intervenir au plus  $c_{K_n} = c_K \ell^n$  facteurs;
- d'un autre côté, son sous-module  $\tilde{\mathfrak{E}}_{K_n}^* / (\ell^n \tilde{\mathfrak{E}}_{K_n})^\perp$ , qui est le dual de Pontrjagin de  $\ell^n \tilde{\mathfrak{E}}_{K_n}$  est, lui, un  $\mathbb{Z} / \ell^n \mathbb{Z}$ -module libre de dimension  $c_{K_n}$ ;

Il vient donc :  $\Lambda^c / (\ell^n \tilde{\mathfrak{E}}_{K_n})^\perp \simeq \sum_{i=1}^{c_{K_n}} \mathbb{Z} / \ell^{n+e_i} \mathbb{Z}$ , avec  $\prod_{i=1}^{c_{K_n}} \ell^{e_i} = (\Lambda^c : \tilde{\mathfrak{E}}_{K_n}^*) = |\mathcal{F}_K|$ .

Or l'égalité de  $\ell^n \mathfrak{N}_{K_n}$  avec  $\ell^n \tilde{\mathfrak{E}}_{K_n}$  signifie que  $(\ell^n \tilde{\mathfrak{E}}_{K_n})^\perp$  reste inchangé lorsqu'on tord l'action de  $\Gamma_n$  sur  $\Lambda$  par le caractère cyclotomique, i.e. que  $1 + \ell^n$  agit trivialement sur le quotient  $\Lambda^{c_K} / (\ell^n \tilde{\mathfrak{E}}_{K_n})^\perp$ , qui est donc d'exposant  $\ell^n$ ; ce qui donne :  $\mathcal{F}_K = 1$ . De même pour  $\ell^n \mathfrak{Z}_{K_n} = \ell^n \tilde{\mathfrak{E}}_{K_n}$ .

**Scolie 31.** *La double inclusion  $\mathcal{F}_K^{\Gamma_n} \subset \mathcal{T}_K^{\Gamma_n} \subset \mathcal{F}_K$  (sous la conjecture de Gross dans  $K_n$ ) se réduit évidemment à une égalité pour  $n$  assez grand (i.e. dès que le module fini  $\mathcal{F}_K$  est annulé par  $\omega_n$ ).*

L'égalité  $\mathcal{F}_K = \mathcal{T}_K^{\Gamma}$  a lieu en particulier dès lors que  $\mathcal{F}_K$  est au plus d'ordre  $\ell$ . Cette situation est notamment exploitée par [44] dans divers exemples biquadratiques.

## REMERCIEMENTS

L'auteur remercie particulièrement Bill ALLOMBERT qui a effectué à l'aide du logiciel PARI les calculs sur les classes et unités logarithmiques présentés dans ce travail.

## RÉFÉRENCES

- [1] F. BERTRANDIAS & J.-J. PAYAN,  $\Gamma$ -extensions et invariants cyclotomiques, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup **5** (1972), 517–548.
- [2] C. BOURBON & J.-F. JAULENT, Propagation de la 2-birationalité, Acta Arith. **160** (2013), 285–301.
- [3] C. CHEVALEY, Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps globaux, J. Fac. Sci. Tokyo **2** (1933), 365–476.
- [4] J. COATES, On  $K_2$  and some classical conjectures in number theory, Ann. of Math. **95** (1972), 99–116.
- [5] F. DIAZ Y DIAZ, J.-F. JAULENT, S. PAULI, M.E. POHST & F. SORIANO, A new algorithm for the computation of logarithmic class groups of number fields, Experimental. Math. **14** (2005), 67–76.
- [6] F. DIAZ Y DIAZ & F. SORIANO, Approche algorithmique du groupe des classes logarithmiques, J. Number Theory **76** (1999), 1–15.
- [7] L.J. FEDERER & B.N. GROSS, Regulators and Iwasawa modules, Inv. Math. **62** (1981), 443–457.
- [8] R. GILLARD, Formulations de la conjecture de Leopoldt et étude d'une condition suffisante, Abh. Math. Sem. Hamburg **48** (1979), 125–138.
- [9] M. GRANDET & J.-F. JAULENT, Sur la capitulation dans une  $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions, J. reine angew. Math. **362** (1985), 213–217.
- [10] G. GRAS & J.-F. JAULENT, Sur les corps de nombres réguliers, Math. Z. **202** (1989), 343–365.
- [11] G. GRAS & J.-F. JAULENT, Note on 2-rational fields, J. Number Th. **129** (2009), 495–498.
- [12] G. GRAS, Plongement kummérien dans les  $\mathbb{Z}_p$ -extensions, Compositio Math. **55** (1985), 383–396.
- [13] G. GRAS, Class Field Theory : from theory to practice, Springer Monographs in Mathematics (2003).
- [14] R. GREENBERG, A note on  $K_2$  and the theory of  $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions, Am. J. Math. **100** (1978), 1235–1245.
- [15] C. GREITHER, Sur les normes universelles dans les  $\mathbb{Z}_p$ -extensions, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 205–220.
- [16] B. GROSS,  $p$ -adic  $L$ -series at  $s = 0$ , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA **28** (1981), 979–994.
- [17] K. IWASAWA, On  $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions of algebraic number fields, Ann. of Math. **98** (1973), 246–326.
- [18] J.-F. JAULENT, Sur l'indépendance  $\ell$ -adique de nombres algébriques, J. Numb. Th. **20** (1985), 149–158.
- [19] J.-F. JAULENT, Sur les conjectures de Leopoldt et de Gross, Actes des Journées Arithmétiques de Besançon, Astérisque **147-148** (1987), 107–120.
- [20] J.-F. JAULENT, L'arithmétique des  $\ell$ -extension, Pub. Math. Besançon (1986); <http://pmb.univ-fcomte.fr/1986.html>
- [21] J.-F. JAULENT, La Théorie de Kummer et le  $K_2$  des corps de nombres, J. Théor. Nombres Bordeaux **2** (1990), 377–411 .
- [22] J.-F. JAULENT, Noyau universel et valeurs absolues, Journées arithmétiques de Marseille-Luminy, Astérisque **198-200** (1990), 187–209.
- [23] J.-F. JAULENT, Sur le noyau sauvage des corps de nombres, Acta Arith. **67** (1994), 335–348.
- [24] J.-F. JAULENT, Classes logarithmiques des corps de nombres, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 301–325.
- [25] J.-F. JAULENT, Théorie  $\ell$ -adique globale du corps de classes, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.
- [26] J.-F. JAULENT, Classes logarithmiques et capitulation, Prépublication.
- [27] J.-F. JAULENT & A. MICHEL, Approche logarithmique des noyaux étales sauvages des corps de nombres, J. Numb. Th. **120** (2006), 72–91.
- [28] J.-F. JAULENT & T. NGUYEN QUANG DO, Corps  $p$ -réguliers, corps  $p$ -rationnels et ramification restreinte, J. Théor. Nombres Bordeaux **5** (1993), 343–363.

- [29] J.-F. JAULENT, S. PAULI, M. POHST & F. SORIANO-GAFIUK, *Computation of 2-groups of narrow logarithmic divisor classes of number fields*, J. Symbolic Comp. **44** (2009), 852–863.
- [30] J.-F. JAULENT, S. PAULI, M. POHST & F. SORIANO-GAFIUK, *Computation of 2-groups of positive divisor classes of number fields*, J. Théor. Nombres Bordeaux **20** (2008), 715–732.
- [31] J.-F. JAULENT & O. SAUZET, *Pro- $\ell$ -extension de corps  $l$ -rationnels*, J. Number Th. **65** (1997), 240–267; *ibid.* **80** (2000), 318–319.
- [32] J.-F. JAULENT & O. SAUZET, *Extensions quadratiques 2-birationnelles de corps totalement réels*, Pub. Mathématiques **44** (2000), 343–351.
- [33] J.-F. JAULENT & F. SORIANO-GAFIUK, *Sur le noyau sauvage des corps de nombres et le groupe des classes logarithmiques*, Math. Z. **238** (2001), 335–354.
- [34] B. KAHN, *Descente galoisienne et  $K_2$  des corps de nombres*, K-Theory **7** (1995), 55–100.
- [35] M. KOLSTER, *An idelic approach to the wild kernel*, Invent. Math. **103** (1991), 9–24.
- [36] M. KOLSTER, *Remarks on étale  $K$ -theory and Leopoldt’s Conjecture*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1991/1992, Prog. in Math. **116**, 37–62, 1993.
- [37] M. KOLSTER & A. MOVAHHEDI, *Galois co-descent for capitulation kernels of totally real number fields*, Ann. Sci. Inst. Fourier, **50** (2000), 35–65.
- [38] L. V. KUZ’MIN, *The Tate module of algebraic number fields*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **36** (1972), 267–327.
- [39] M. LE FLOC’H, A. MOVAHHEDI & T. NGUYEN QUANG DO, *On capitulation cokernels in Iwasawa Theory*, Amer. J. Math. **127** (2005), 851–877.
- [40] H. MIKI, *On the maximal abelian  $\ell$ -extension of a finite algebraic number field with given ramification*, Nagoya Math. J. **70** (1978), 183–202.
- [41] H. MIKI, *On the Leopoldt conjecture on the  $p$ -adic regulators*, J. Numb. Th. **26** (1987), 117–128.
- [42] A. MOVAHHEDI, *Sur les  $p$ -extensions des corps  $p$ -rationnels*, Math. Nachr. **149** (1990) 163–176.
- [43] A. MOVAHHEDI & T. NGUYEN QUANG DO, *Sur l’arithmétique des corps de nombres  $p$ -rationnels*, Sémin. Th. Nombres Paris (1987/1988), Prog. in Math. **89** (1990), 155–200.
- [44] A. MOVAHHEDI & T. NGUYEN QUANG DO, *On universal norms and the first layers of  $\mathbb{Z}_p$ -extensions of a number field*, Math. Annalen **362** (2015), 817–838.
- [45] T. NGUYEN QUANG DO, *Analogues supérieurs du noyau sauvage*, J. Théor. Nombres Bordeaux **4** (1992), 263–271.
- [46] T. NGUYEN QUANG DO, *Théorie d’Iwasawa des noyaux sauvages étales d’un corps de nombres*, Pub. Math. Besançon 1998/2001 (2002).
- [47] P. SCHNEIDER, *Über gewisse Galoiscohomologiegruppen*, Math. Z. **168** (1979), 181–205.
- [48] S. SEO, *On the Tate module of un number field*, Preprint.
- [49] S. SEO, *On first layers of  $\mathbb{Z}_p$ -extensions*, J. Number Theory **133** (2013), 4010–4023.
- [50] S. SEO, *On first layers of  $\mathbb{Z}_p$ -extensions II*, Acta Arith. **150** (2011), 385–397.
- [51] S. SEO, *On the conjectures of Gross and Leopoldt*, Preprint.
- [52] S. SEO, *On arithmetic properties of the  $S$ -units*, Preprint.
- [53] J. TATE, *Relations between  $K_2$  and galois cohomology*, Invent. Math. **36** (1976), 257–274.
- [54] D. VAUCLAIR, *Noyaux de Tate et capitulation*, J. Number Theory **128** (2008), 619–638.
- [55] L. WASHINGTON, *Introduction to cyclotomic fields*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics **83**, Springer-Verlag, New York, 1997, xiv+487 pp.

Jean-François JAULENT  
 Institut de Mathématiques de Bordeaux  
 Université de BORDEAUX & CNRS  
 351, cours de la libération  
 F-33405 TALENCE Cedex  
 courriel : Jean-Francois.Jaulent@math.u-bordeaux1.fr