



HAL
open science

Sur une équation fonctionnelle approchée due à J. R. Wilton

Michel Balazard, Bruno Martin

► **To cite this version:**

Michel Balazard, Bruno Martin. Sur une équation fonctionnelle approchée due à J. R. Wilton. *Moscow Mathematical Journal*, 2015, 15, p. 629-652. hal-01183907

HAL Id: hal-01183907

<https://hal.science/hal-01183907>

Submitted on 11 Aug 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur une équation fonctionnelle approchée due à J. R. Wilton

Michel Balazard et Bruno Martin

11 août 2015

Pour Micha Tsfasman et Serge Vladut, très amicalement.

ABSTRACT

We give a new proof of an approximate functional equation, due to J. R. Wilton, for a trigonometric sum involving the divisor function. This allows us to improve on Wilton's error term and to give an explicit formula for an unspecified function involved in the functional equation.

KEYWORDS

Approximate functional equations, divisor function, Mellin transform, Hilbert transform

MSC classification : 11N37 (11L07)

1 Introduction

Dans l'article [19], publié en 1933 et dévolu entre autres à l'étude des séries trigonométriques

$$\psi_1(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\tau(n)}{n} \cos 2\pi n x \quad (1)$$

$$\psi_2(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\tau(n)}{n} \sin 2\pi n x \quad (2)$$

où $\tau(n)$ désigne le nombre de diviseurs du nombre entier naturel n , Wilton démontre pour la somme partielle

$$\psi(x, v) = \sum_{n \leq v} \frac{\tau(n)}{n} e^{2\pi i n x}$$

l'équation fonctionnelle approchée suivante.

Proposition 1 ([19], (2.2), Theorem 2, p. 223) Soit $K > 0$. Pour $0 < x \leq 1$, $v \geq 1$ et $x^2v > K$, on a

$$\psi(x, v) - \overline{x\psi(1/x, x^2v)} = \mathfrak{F}(x) + \frac{1}{2} \log^2 \frac{1}{x} + \left(\gamma - \log 2\pi + \frac{1}{2}\pi i \right) \log \frac{1}{x} + O((x^2v)^{-1/5}), \quad (3)$$

où γ désigne la constante d'Euler, et \mathfrak{F} une fonction continue sur le segment $[0, 1]$. La constante implicite dans le O ne dépend que de K .

Ainsi la somme partielle $\psi(x, v)$, qui est de période 1 en la variable x , a également un comportement simple sous l'effet du changement de variables $(x, v) \mapsto (1/x, x^2v)$. Une telle situation est propice à la description du comportement de cette somme partielle en termes du développement du nombre réel x en fraction continue. Cette voie, ouverte voici un siècle par Hardy et Littlewood pour l'étude des séries trigonométriques associées aux fonctions thêta elliptiques (cf. [4]), est suivie par Wilton dans [19] pour aboutir à des critères nécessaires et suffisants de convergence pour $\psi_1(x)$ et $\psi_2(x)$.

Wilton n'explique pas la fonction $\mathfrak{F}(x)$ (ce n'est pas nécessaire pour l'étude de la convergence des séries (1) et (2)) et indique que le terme d'erreur $O((x^2v)^{-1/5})$ « can easily be sharpened ». Le but du présent travail est triple : proposer une démonstration de (3) différente de celle de Wilton, expliciter la fonction \mathfrak{F} , et améliorer le terme d'erreur.

La méthode de Hardy et Littlewood d'étude des sommes partielles d'une série oscillante *via* une équation fonctionnelle approchée connaît depuis quelques années un regain d'intérêt (voir par exemple les articles de Rivoal [11], Rivoal et Roques [12], Rivoal et Seuret [13]). Établir de telles équations fonctionnelles peut s'avérer particulièrement délicat, et la méthode que nous développons ici vient compléter la palette de techniques disponibles.

Afin d'énoncer notre résultat, nous rappelons la définition de la *fonction d'autocorrélation multiplicative de la fonction « partie fractionnaire »*, introduite par Báez-Duarte *et al.* (cf. [1]) dans le contexte de l'étude du critère de Nyman pour l'hypothèse de Riemann. En désignant par $[t]$ la partie entière du nombre réel t et par $\{t\}$ sa partie fractionnaire, égale à $t - [t]$, nous posons pour $x \geq 0$:

$$A(x) = \int_0^\infty \{t\} \{xt\} \frac{dt}{t^2}.$$

Rappelons que A est continue sur $[0, \infty[$ et vérifie les relations asymptotiques

$$A(x) \sim \frac{1}{2} \log x \quad (x \rightarrow \infty), \quad (4)$$

$$A(x) \sim \frac{1}{2} x \log(1/x) \quad (x \rightarrow 0), \quad (5)$$

où (5) résulte de (4) et de l'identité $A(x) = xA(1/x)$.

Nous définissons maintenant une fonction $\mathfrak{F} :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ par les formules

$$\Re \mathfrak{F}(x) = 2x \cdot \text{v.p.} \int_0^\infty A(t) \frac{x^2 + t^2}{(t-x)(t+x)^2} \frac{dt}{t} - x \left(\frac{1}{2} \log^2 x + (\log 2\pi - \gamma) \log \frac{1}{x} - c_0 \right) - c_0 \quad (6)$$

$$\Im \mathfrak{F}(x) = \pi \left(A(x) + \frac{x}{2} \log x - \frac{x+1}{2} (\log 2\pi - \gamma) \right) \quad (7)$$

avec

$$c_0 = \frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{2} \log^2 2\pi + \frac{1}{2} \gamma^2 + \gamma \log 2\pi + 2\gamma_1,$$

γ_1 désignant la constante de Stieltjes d'indice 1, soit $\gamma_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\log k}{k} - \frac{1}{2} \log^2 n \right)$.

Rappelons que v.p. signifie « valeur principale » (voir §3.5).

Nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 2 *La fonction \mathfrak{F} est continue sur $]0, \infty[$ et se prolonge par continuité en 0. De plus, si K_1 et K_2 sont des nombres positifs arbitraires, on a pour $0 < x \leq K_1$, $v > 0$ et $x^2 v \geq K_2$,*

$$\psi(x, v) - \overline{x\psi(1/x, x^2v)} = \mathfrak{F}(x) + \frac{1}{2} \log^2 \frac{1}{x} + (\gamma - \log 2\pi + \frac{1}{2} \pi i) \log \frac{1}{x} + O\left(\frac{\log^2(2 + x^2v)}{(x^2v)^{1/2}}\right). \quad (8)$$

La constante implicite dans le O ne dépend que de K_1 et K_2 .

La démonstration de Wilton de (3) repose sur la formule sommatoire obtenue en 1904 par Voronoï (cf. [18], p. 209-210) :

$$\sum_n \tau(n) f(n) = \int_0^\infty (\log t + 2\gamma) f(t) dt + \sum_n \tau(n) \mathfrak{V} f(n) \quad (9)$$

où nous avons pris, pour simplifier, la fonction f indéfiniment dérivable et à support compact dans $]0, \infty[$, et où

$$\mathfrak{V} f(y) = 2\pi \int_0^\infty M_0(4\pi\sqrt{xy}) f(x) dx,$$

la fonction M_0 s'exprimant en termes de fonctions de Bessel (c'est la notation de Wilton ; Voronoï utilise la fonction $\alpha(x) = 2\pi M_0(4\pi\sqrt{x})$). L'année précédente, en 1903, Voronoï avait démontré la majoration

$$\Delta(x) = \sum_{n \leq x} \tau(n) - x(\log x + 2\gamma - 1) \ll x^{1/3} \log x \quad (x \geq 2), \quad (10)$$

grâce à une généralisation de la méthode de l'hyperbole de Dirichlet (cf. [17]). Une variante convenable de la relation (9) permet de retrouver cette estimation (cf. [3], chapter VIII, §5), qui peut également être démontrée grâce à la méthode de van der Corput (cf [14], théorème 6.11).

La déduction par Wilton de la proposition 1 à partir de la formule sommatoire de Voronoï n'est pas immédiate ; elle comporte des calculs qui ne sont guère plus rapides que ceux de la démonstration que nous proposons. Celle-ci s'appuie néanmoins, comme la formule de Voronoï, sur l'équation fonctionnelle de la fonction ζ de Riemann, qui est le fait mathématique essentiel d'où découle, *in fine*, l'équation fonctionnelle approchée de Wilton.

Notre démarche peut être résumée de la façon suivante. Dans un premier temps, nous démontrons au §6 l'existence d'une fonction \mathfrak{F} , continue sur $]0, \infty[$ et se prolongeant par continuité en 0, telle que (8) soit vérifiée. Pour cela, par une intégration par parties, nous ramenons l'étude de la somme partielle $\psi(x, v)$ à celle de l'intégrale

$$I(x, v) = 2 \int_0^v \frac{\Delta(t)}{t} e^{2\pi i t x} dt. \quad (11)$$

Nous transformons ensuite $I(x, v)$ en intégrale sur la droite $\Re s = \frac{1}{2}$ du plan complexe (dite droite critique) grâce au théorème de Plancherel pour la transformation de Mellin, donnée par

$$Mf(s) = \int_0^\infty f(t) t^{s-1} dt. \quad (12)$$

Le résultat est le suivant :

$$I(x, v) = \int_{\sigma=1/2} \frac{\zeta^2(s)}{s} \lambda(s, 2\pi x v) (2\pi x)^{-s} \frac{d\tau}{\pi}. \quad (13)$$

Dans cette relation interviennent d'une part la fonction ζ de Riemann, dont nous utiliserons des propriétés classiques rappelées au §2, et d'autre part la fonction

$$\lambda(s, v) = \int_0^v e^{it} t^{s-1} dt. \quad (14)$$

Cette dernière est une fonction gamma incomplète dont nous utiliserons quelques propriétés, rappelées ou démontrées au §4. Le §5 constitue un intermède méthodologique. Nous y décrivons une seconde démonstration de la relation (13), proposée par l'arbitre anonyme de cet article, et présentant l'intérêt de n'utiliser que la majoration élémentaire de Dirichlet, $\Delta(x) = O(\sqrt{x})$, alors que la démonstration du §3.4 s'appuie sur une estimation en $O(x^\delta)$ avec $\delta < 1/2$, par exemple l'estimation (10) de Voronoï.

La représentation (13) de $I(x, v)$ par une intégrale sur la droite critique permet ensuite, au §6, de mettre en évidence la convergence de $xI(x, v) + \overline{I(1/x, x^2 v)}$ vers une fonction continue de x (se prolongeant par continuité en 0) quand v tend vers l'infini (proposition 12), et (8) s'en déduit.

Dans un second temps, nous montrons au §7 que, pour tout $x > 0$, la limite quand v tend vers l'infini de la quantité

$$\psi(x, v) - \overline{x\psi(1/x, x^2 v)} - \frac{1}{2} \log^2 \frac{1}{x} - (\gamma - \log 2\pi + \frac{1}{2}\pi i) \log \frac{1}{x}$$

(limite dont l'existence aura donc été démontrée au §6) a pour parties réelle et imaginaire les seconds membres de (6) et (7). Pour la partie imaginaire, cela découle assez directement des résultats de [1] : nous en donnons deux démonstrations au §7.1. L'étude de la partie réelle requiert en revanche quelques considérations supplémentaires, reposant en particulier sur l'utilisation de la transformation de Hilbert. Nous en rappelons au §3.5 les propriétés utilisées au §7.2 pour obtenir (6).

Notons que nous n'utilisons à aucun moment les fonctions de Bessel, à l'inverse de [19].

Nous emploierons à plusieurs reprises la notation d'Iverson : $[P] = 1$ si la propriété P est vérifiée, $[P] = 0$ sinon.

2 Rappels sur la fonction ζ de Riemann

2.1 Équation fonctionnelle

Il s'agit de l'identité classique (cf. [16], chapter II)

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)} = 2(2\pi)^{-s} \cos(\pi s/2)\Gamma(s)$$

que nous utiliserons également sous la forme

$$-\pi \frac{\zeta(-s)}{\zeta(s+1)} = (2\pi)^{-s} \sin(\pi s/2)\Gamma(s+1). \quad (15)$$

Par ailleurs, rappelons la relation $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\overline{s})$ pour tout $s \neq 1$ qui découle du principe de réflexion de Schwarz.

2.2 Majoration dans la bande critique

Nous aurons l'usage d'une majoration uniforme pour la fonction ζ dans la bande critique : pour $0 < \sigma < 1$, $\tau \geq 2$, on a

$$\zeta(\sigma + i\tau) \ll \tau^{(1-\sigma)/2} \log \tau \quad (16)$$

(cf. [7], theorem 1.9 p. 25 par exemple).

2.3 Moyenne quadratique sur la droite critique

La recherche d'estimations du type

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + i\tau\right) \ll (1 + |\tau|)^\delta \quad (\tau \in \mathbb{R}) \quad (17)$$

est un des problèmes fondamentaux de la théorie de la fonction ζ (cf. [16], chapter V). L'hypothèse de Lindelöf, toujours ouverte, affirme que (17) est vraie pour tout $\delta > 0$. L'estimation n'est actuellement démontrée que pour $\delta > 32/205$ (cf. [5]; dans la prépublication récente [2], Bourgain démontre (17) pour $\delta > 53/342$).

Cela étant, l'hypothèse de Lindelöf est « vraie en moyenne quadratique » puisque la fonction

$$I_2(T) = \int_0^T |\zeta(1/2 + i\tau)|^2 d\tau \quad (T > 0)$$

vérifie l'estimation $I_2(T) \ll T \log(2+T)$. On connaît en fait un développement asymptotique de $I_2(T)$. Posons

$$I_2(T) = T \log T - (\log 2\pi + 1 - 2\gamma)T + E(T) \quad (T > 0).$$

La fonction $E(T)$ est l'objet d'une abondante littérature (cf. par exemple [7], chapters 4, 15). Nous nous contenterons de l'estimation classique d'Ingham (cf. [6], Theorem A', p. 294) :

$$E(T) \ll T^{1/2} \log(2+T). \quad (18)$$

Dans la proposition suivante, nous utilisons cette estimation pour majorer une intégrale intervenant au §6.

Proposition 3 *Pour $V > 0$, on a*

$$\int_0^\infty \frac{|\zeta(\frac{1}{2} + i\tau)|^2}{1 + \tau} \min(1, V^{1/2} |V - \tau|^{-1}) d\tau \ll V^{-1/2} \log^2(2+V).$$

Démonstration

Si $V < 4$, le minimum figurant dans l'intégrale est $\ll (1 + \tau)^{-1}$, donc l'estimation résulte de la convergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{|\zeta(\frac{1}{2} + i\tau)|^2}{(1 + \tau)^2} d\tau$$

qui se déduit, par exemple, de (16).

On peut donc supposer $V \geq 4$. La contribution de l'intervalle $|\tau - V| \leq \sqrt{V}$ à l'intégrale est

$$\begin{aligned} &\ll V^{-1} \int_{V-\sqrt{V}}^{V+\sqrt{V}} |\zeta(1/2 + i\tau)|^2 d\tau \\ &\ll V^{-1/2} \log V, \end{aligned}$$

d'après l'estimation (18). La contribution des $\tau \geq 2V$ est

$$\begin{aligned} &\ll V^{1/2} \int_{2V}^\infty \frac{|\zeta(1/2 + i\tau)|^2}{\tau^2} d\tau \\ &\ll V^{-1/2} \log V, \end{aligned}$$

en utilisant simplement l'estimation $I_2(T) \ll T \log T$ pour $T \geq 2$ et une intégration par parties. De même la contribution des $\tau \leq V/2$ est

$$\begin{aligned} &\ll V^{-1/2} \int_0^{V/2} \frac{|\zeta(1/2 + i\tau)|^2}{1 + \tau} d\tau \\ &\ll V^{-1/2} \log^2 V. \end{aligned}$$

Maintenant, la contribution de l'intervalle $V + \sqrt{V} < \tau < 2V$ est

$$\begin{aligned} &\ll V^{-1/2} \int_{V+\sqrt{V}}^{2V} \frac{|\zeta(1/2 + i\tau)|^2}{\tau - V} d\tau \\ &\leq V^{-1/2} \sum_{1 \leq k \leq \sqrt{V}} \frac{1}{k\sqrt{V}} \int_{V+k\sqrt{V}}^{V+(k+1)\sqrt{V}} |\zeta(1/2 + i\tau)|^2 d\tau \\ &\ll V^{-1/2} (\log V) \sum_{1 \leq k \leq \sqrt{V}} \frac{1}{k} \quad (\text{d'après l'estimation (18)}) \\ &\ll V^{-1/2} \log^2 V, \end{aligned}$$

et on a encore la même estimation pour la contribution de l'intervalle $V/2 < \tau < V - \sqrt{V}$. \square

2.4 Lien avec la fonction arithmétique « nombre de diviseurs »

La fonction arithmétique $\tau(n)$ est liée à la fonction ζ par la relation

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\tau(n)}{n^s} = \zeta^2(s) \quad (\Re s > 1).$$

D'autre part, on a l'estimation $\tau(n) \ll_\varepsilon n^\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ (cf. [14], corollaire 5.3).

3 Rappels et compléments sur les transformations de Mellin et de Hilbert

Nous recommandons la lecture de l'appendice A (p. 231) de [1] et nous en rappelons ci-dessous quelques éléments qui nous seront utiles.

En désignant par s la variable complexe, on note $\sigma = \Re s$ et $\tau = \Im s$. Si $-\infty \leq a < b \leq \infty$, on note $\mathcal{W}(a, b)$ l'ensemble des fonctions complexes f mesurables sur $]0, \infty[$ telles que

$$\int_0^\infty |f(t)| t^{\sigma-1} dt < \infty \quad (a < \sigma < b).$$

Si $f \in \mathcal{W}(a, b)$, la transformée de Mellin Mf définie par (12) est holomorphe dans la bande $a < \sigma < b$.

Nous considérons aux §§3.1, 3.2 et 3.3 les transformées de Mellin qui interviennent dans notre argumentation, puis nous rappelons d'une part, au §3.4, la forme que prend la théorie de Plancherel dans le contexte de la transformation de Mellin, et d'autre part, au §3.5, quelques éléments de la théorie de la transformation de Hilbert.

3.1 La fonction A

Rappelons (cf. [1], proposition 10) que $A \in \mathcal{W}(-1, 0)$ et que

$$MA(s) = -\frac{\zeta(-s)\zeta(s+1)}{s(s+1)} \quad (-1 < \sigma < 0).$$

On en déduit que la fonction A_1 définie par $A_1(t) = A(t)/t = A(1/t)$ appartient à $\mathcal{W}(0, 1)$ et que

$$MA_1(s) = \frac{\zeta(1-s)\zeta(s)}{s(1-s)} \quad (0 < \sigma < 1). \quad (19)$$

3.2 Le reste dans le problème des diviseurs de Dirichlet

Nous utiliserons l'expression de la transformée de Mellin du reste Δ , défini par (10), dans le problème des diviseurs de Dirichlet. À cette occasion, donnons l'énoncé général d'un principe classique, qui est une réciproque de la proposition 14 de [1].

Proposition 4 *Soit $a < b \leq c < d$, $f \in \mathcal{W}(a, b)$, $g \in \mathcal{W}(c, d)$. On suppose que $g - f$ est un polynôme généralisé*

$$P(t) = \sum_{\rho, k} c_{\rho, k} t^{-\rho} \log^k t,$$

où la somme est finie, les ρ sont des nombres complexes vérifiant $b \leq \Re \rho \leq c$, les k sont des entiers naturels, et les $c_{\rho, k}$ des coefficients complexes. Alors Mf et Mg sont les restrictions aux bandes $a < \sigma < b$ et $c < \sigma < d$, respectivement, d'une même fonction méromorphe dans la bande $a < \sigma < d$, dont la somme des parties polaires est

$$\sum_{\rho, k} c_{\rho, k} \frac{(-1)^k k!}{(s - \rho)^{k+1}}.$$

Démonstration

On va montrer que les fonctions Mf et Mg sont des prolongements méromorphes l'une de l'autre. On a

$$f(t) + P(t)[t \geq 1] = g(t) - P(t)[t < 1]. \quad (20)$$

En notant $h(t)$ la valeur commune des deux membres de (20), on voit que $h \in \mathcal{W}(a, b)$ (premier membre) et $h \in \mathcal{W}(c, d)$ (second membre). On a donc $h \in \mathcal{W}(a, d)$; la transformée de Mellin Mh est holomorphe dans la bande $a < \sigma < d$, et

$$Mf(s) = Mh(s) + \sum_{\rho, k} c_{\rho, k} \frac{(-1)^k k!}{(s - \rho)^{k+1}} \quad (a < \sigma < b),$$

$$Mg(s) = Mh(s) + \sum_{\rho, k} c_{\rho, k} \frac{(-1)^k k!}{(s - \rho)^{k+1}} \quad (c < \sigma < d). \quad \square$$

La proposition 4 s'applique aux fonctions

$$f(t) = \sum_{n \leq t} \tau(n), \quad g(t) = \Delta(t) \quad \text{et} \quad P(t) = -t(\log t + 2\gamma - 1).$$

En utilisant l'estimation $\Delta(t) = O(t^\delta)$ (où $\delta = \frac{1}{2}$ si l'on se contente de l'estimation élémentaire de Dirichlet, et $\delta = \frac{1}{3}$ d'après l'estimation de Voronoï (10)), on a $f \in \mathcal{W}(-\infty, -1)$, $g \in \mathcal{W}(-1, -\delta)$. Comme

$$Mf(s) = \int_0^\infty \left(\sum_{n \leq t} \tau(n) \right) t^{s-1} dt = \sum_{n \geq 1} \tau(n) \int_n^\infty t^{s-1} dt = \frac{\zeta^2(-s)}{-s} \quad (\sigma < -1),$$

on en déduit que

$$M\Delta(s) = \frac{\zeta^2(-s)}{-s} \quad (-1 < \sigma < -\delta).$$

Par conséquent la fonction Δ_1 définie par $\Delta_1(t) = \Delta(t)/t$ appartient à $\mathcal{W}(0, 1 - \delta)$ et

$$M\Delta_1(s) = \frac{\zeta^2(1-s)}{1-s} \quad (0 < \sigma < 1 - \delta). \quad (21)$$

3.3 La fonction $t \mapsto e^{it}[t \leq v]$

Pour tout $v > 0$, la fonction $t \mapsto e^{it}[t \leq v]$ appartient à $\mathcal{W}(0, \infty)$ et sa transformée de Mellin est $\lambda(s, v)$ définie par (14). Par conséquent, pour $x > 0$ et $v > 0$, la transformée de Mellin de $t \mapsto e^{2\pi itx}[t \leq v]$ est $(2\pi x)^{-s} \lambda(s, 2\pi xv)$.

3.4 La transformation de Mellin-Plancherel sur L^2

Si $f \in L^2(0, \infty) = L^2$, la formule (12), où l'intégrale doit être comprise comme $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{1/T}^T$ dans $\mathcal{L}^2 = L^2(\frac{1}{2} + i\mathbb{R}, d\tau/2\pi)$, définit un élément de ce dernier espace, et l'application ainsi

définie, dite transformation de Mellin-Plancherel, est une isométrie bijective entre espaces de Hilbert (cf. par exemple [15] §3.17 pp. 94-95). En particulier, si f et g appartiennent à L^2 , on a

$$\int_0^\infty f(t)g(t) dt = \int_{\sigma=1/2}^\infty Mf(s)Mg(1-s) \frac{d\tau}{2\pi}$$

(théorème de Plancherel), où les deux intégrales sont absolument convergentes.

Appliquons maintenant le théorème de Plancherel à l'intégrale $I(x, v)$ définie par (11). En utilisant le fait que $\Delta_1 \in L^2$, on obtient

$$\begin{aligned} I(x, v) &= 2 \int_0^\infty \Delta_1(t) \cdot e^{2\pi itx} [t \leq v] dt \\ &= \int_{\sigma=1/2}^\infty \frac{\zeta^2(1-s)}{1-s} \lambda(1-s, 2\pi xv) (2\pi x)^{s-1} \frac{d\tau}{\pi} \\ &= \int_{\sigma=1/2}^\infty \frac{\zeta^2(s)}{s} \lambda(s, 2\pi xv) (2\pi x)^{-s} \frac{d\tau}{\pi}, \end{aligned}$$

ce qui démontre la relation (13).

3.5 La transformation de Hilbert

Nous donnons dans ce paragraphe les faits que nous utiliserons concernant cette transformation, objet du chapitre V de [15], ainsi que du traité très complet [9]. La transformée de Hilbert d'une fonction f définie presque partout sur $] -\infty, \infty[$ et mesurable est

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(t)}{x-t} dt$$

où v.p. signifie « valeur principale » (de Cauchy) :

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|x-t| > \delta} \frac{f(t)}{x-t} dt. \quad (22)$$

Les propriétés fondamentales de la transformation de Hilbert sont, d'une part, le couple d'équations

$$H \cos = \sin \quad ; \quad H \sin = -\cos .$$

et, d'autre part, le fait que H commute avec les opérateurs transformant la fonction $f(x)$ en $f(\lambda x)$ et $f(x+c)$ ($\lambda > 0$, $c \in \mathbb{R}$).

De plus, si l'on étend la définition (22) en remplaçant la condition $|x-t| > \delta$ par $1/\delta > |x-t| > \delta$, la transformée de Hilbert d'une constante est nulle. Par conséquent, H transforme formellement une série trigonométrique en la série trigonométrique *conjuguée* (au sens de [20], chapter I, (1·3)).

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, la limite (22) existe au sens de la topologie de cet espace de Hilbert, et l'opérateur ainsi défini est unitaire.

Dans l'espace $L^2(0, \infty)$ (que nous avons noté simplement L^2), la transformation de Hilbert a deux versions, paire et impaire :

$$H_0 f(x) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_0^\infty f(t) \left(\frac{1}{x-t} + \frac{1}{x+t} \right) dt \quad (23)$$

$$H_1 f(x) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_0^\infty f(t) \left(\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right) dt \quad (24)$$

Ce sont deux opérateurs unitaires sur L^2 , commutant avec les dilatations, et donc *diagonalisables* via la transformation de Mellin-Plancherel. Pour $f \in L^2$, on a les identités suivantes* entre éléments de \mathcal{L}^2 :

$$MH_0 f(s) = \tan(\pi s/2) Mf(s) \quad (25)$$

$$MH_1 f(s) = -\cot(\pi s/2) Mf(s), \quad (26)$$

Les fonctions $\tan(\pi s/2)$ et $\cot(\pi s/2)$ sont de module 1 sur la droite $\sigma = 1/2$; nous utiliserons également le fait qu'elles sont bornées dans toute bande verticale fermée incluse dans la bande $0 < \sigma < 1$.

Les conditions suivantes sont suffisantes pour que (23) et (24) soient bien définies au point $x_0 > 0$:

- la fonction $t \mapsto f(t)/(1+|t|)$ est intégrable sur $]0, \infty[$;
- il existe a tel que la fonction $t \mapsto (f(x_0-t)-a)/t$ soit intégrable au voisinage de 0 (condition de Dini).

De plus, si f est continue au voisinage de x_0 et s'il existe $h_1, h_2 > 0$ et $\varphi \in L^1(-h_2, h_2)$ tels que

$$|(f(x-t) - f(x))/t| \leq \varphi(t) \quad (|x-x_0| \leq h_1, |t| \leq h_2),$$

alors H_0 et H_1 sont continues en x_0 .

3.6 La fonction B

Dans cet article, nous utiliserons la transformée de Hilbert impaire de la fonction A_1 (multipliée par π) :

$$B(x) = \text{v.p.} \int_0^\infty A_1(t) \left(\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right) \frac{dt}{t} \quad (x > 0)$$

Notons que $A_1(t)/(1+|t|)$ est intégrable et que, pour tout $x_0 > 0$, il existe h_1 et h_2 positifs tels que

$$A_1(x-t) - A_1(x) \ll |t| \log(1/|t|) \quad (|x-x_0| < h_1, 0 < |t| < h_2),$$

*. Les calculs menant aux équations (5.126) et (5.129), p. 274 de [9], sont valables si f est indéfiniment dérivable et à support compact dans $]0, \infty[$, et les deux identités (25) et (26) s'en déduisent par densité.

(cf. [1], propositions 1 et 7). On en déduit que $B(x)$ existe pour tout $x > 0$ et est une fonction continue de x . La proposition suivante donne quelques identités vérifiées par B ; nous omettons les démonstrations, qui sont de simples manipulations algébriques (tenant compte notamment de la relation $A(x) = xA(1/x)$).

Proposition 5 *Pour $x > 0$, on a*

$$B(1/x) = x \cdot \text{v.p.} \int_0^\infty A(t) \left(\frac{-1}{x-t} - \frac{1}{x+t} \right) \frac{dt}{t}$$

$$xB(x) + B(1/x) = -2x \int_0^\infty \frac{A(t)}{x+t} \frac{dt}{t} \quad (27)$$

$$\frac{d}{dx}(xB(x) + B(1/x)) = -2 \int_0^\infty \frac{A(t)}{(x+t)^2} dt \quad (28)$$

$$B(1/x) - x \frac{d}{dx}(xB(x) + B(1/x)) = -2x \cdot \text{v.p.} \int_0^\infty A(t) \frac{x^2 + t^2}{(x-t)(t+x)^2} \frac{dt}{t}. \quad (29)$$

Comme $A_1 \in L^2$, on a également $B \in L^2$ et les identités (19) et (26) fournissent l'expression suivante de la transformée de Mellin-Plancherel de B : on a pour presque tout s tel que $\sigma = 1/2$,

$$MB(s) = -\pi \cot(\pi s/2) \cdot \frac{\zeta(s)\zeta(1-s)}{s(1-s)}. \quad (30)$$

En notant $F(s)$ la fonction méromorphe sur \mathbb{C} figurant au second membre de (30), on constate que (16) entraîne l'estimation $F(s) \ll \log^2(2+|s|)(1+|s|)^{-3/2}$ uniformément dans toute bande verticale fermée incluse dans la bande $0 < \sigma < 1$. On peut donc écrire par inversion de Mellin

$$B(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma=a} F(s)x^{-s} ds, \quad (31)$$

où a est choisi arbitrairement tel que $0 < a < 1$. La relation (31), a priori valable pour presque tout $x > 0$, l'est sans exception, par continuité. Sur cette expression, on voit que B est uniformément $O_a(x^{-a})$ sur $]0, \infty[$ pour chaque a tel que $0 < a < 1$, d'où il découle que $B \in \mathcal{W}(0, 1)$. On en déduit que

$$MB(s) = F(s) \quad (0 < \sigma < 1). \quad (32)$$

4 Résultats auxiliaires sur les fonction gamma incomplètes et les fonctions cosinus et sinus intégral généralisées

Dans ce paragraphe, nous considérons les fonctions

$$\begin{aligned} \text{ci}(s, v) &= \int_v^\infty \cos t \cdot t^{s-1} dt; & \text{Ci}(s, v) &= \int_0^v \cos t \cdot t^{s-1} dt \\ \text{si}(s, v) &= \int_v^\infty \sin t \cdot t^{s-1} dt; & \text{Si}(s, v) &= \int_0^v \sin t \cdot t^{s-1} dt \\ \Lambda(s, v) &= \int_v^\infty e^{it} \cdot t^{s-1} dt; & \lambda(s, v) &= \int_0^v e^{it} \cdot t^{s-1} dt \end{aligned}$$

pour $v > 0$ et $0 < \Re s < 1$. Notons pour commencer que Ci, Si et λ sont absolument convergentes et que ci, si et Λ sont semi-convergentes. D'autre part, les relations classiques

$$\int_0^\infty \cos t \cdot t^{s-1} dt = \Gamma(s) \cos(\pi s/2) \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \sin t \cdot t^{s-1} dt = \Gamma(s) \sin(\pi s/2) \quad (0 < \Re s < 1) \quad (33)$$

(cf. [10], §62, (4) et (5)) et l'équation fonctionnelle de la fonction ζ entraînent

$$\begin{aligned} 2(2\pi)^{-s} (\text{ci}(s, v) + \text{Ci}(s, v)) &= 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s) \cos(\pi s/2) \\ &= \frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)} \end{aligned} \quad (34)$$

et

$$\begin{aligned} 2(2\pi)^{-s} (\text{si}(s, v) + \text{Si}(s, v)) &= 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s) \sin(\pi s/2) \\ &= \tan(\pi s/2) \frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} 2(2\pi)^{-s} (\lambda(s, v) + \Lambda(s, v)) &= 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s) e^{i\pi s/2} \\ &= G(s) \frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)}, \end{aligned} \quad (36)$$

avec

$$G(s) = 1 + i \tan(\pi s/2).$$

On déduit de (36) l'identité suivante, qui interviendra dans la démonstration de la proposition 12.

Proposition 6 *Pour $x > 0$, $v > 0$ et $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re s = \frac{1}{2}$, on a*

$$\begin{aligned} \frac{\zeta^2(s)}{s} (2\pi)^{-s} (x^{1-s} \lambda(s, v) + x^s \overline{\lambda(1-s, v)}) &= \frac{\zeta(s) \zeta(1-s)}{2s} (x^{1-s} G(s) + x^s \overline{G(1-s)}) \\ &\quad - \frac{\zeta^2(s)}{s} (2\pi)^{-s} (x^{1-s} \Lambda(s, v) + x^s \overline{\Lambda(1-s, v)}). \end{aligned}$$

Les estimations que nous utiliserons seront démontrées grâce à la proposition classique suivante, qui découle d'une intégration par parties en écrivant $ge^{if} = (g/f') \cdot f'e^{if}$.

Proposition 7 Soit a et b deux nombres réels, $a < b$, et soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continûment dérivables telles que

- la fonction f' ne s'annule pas ;
- la fonction g/f' est monotone et de signe constant ;
- on a $|g(t)/f'(t)| \leq c$ pour $a < t < b$.

Alors

$$\left| \int_a^b g(t)e^{if(t)} dt \right| \leq 2c.$$

La proposition suivante rassemble les estimations dont nous aurons l'usage pour les fonctions λ et Λ dans la preuve de la proposition 2.

Proposition 8 Pour $v > 0$ et $\tau \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} |\lambda(1/2 + i\tau, v)| &\leq \min(4, 2\sqrt{v}/(|\tau| - v)) \quad (|\tau| > v) \\ |\Lambda(1/2 + i\tau, v)| &\leq \min(4, 2\sqrt{v}/(v - |\tau|)) \quad (|\tau| < v). \end{aligned}$$

Démonstration

Nous donnons la démonstration pour λ , celle pour Λ étant similaire.

On suppose donc $|\tau| > v$. On a

$$\lambda(1/2 + i\tau, v) = \int_0^v \frac{e^{i(t+\tau \log t)}}{\sqrt{t}} dt$$

Avec les notations de la proposition 7, on a ici

$$\begin{aligned} g(t) &= t^{-1/2}, \\ f(t) &= t + \tau \log t, \end{aligned}$$

de sorte que

$$f'(t)/g(t) = \sqrt{t} + \tau/\sqrt{t}.$$

Cette fonction est monotone sur $]0, |\tau|]$, donc sur $]0, v]$, et on a $|f'(t)/g(t)| \geq (|\tau| - v)/\sqrt{v}$ sur ce dernier intervalle. Par conséquent,

$$\left| \int_0^v \frac{e^{i(t+\tau \log t)}}{\sqrt{t}} dt \right| \leq \frac{2\sqrt{v}}{|\tau| - v}. \quad (37)$$

Si v et $|\tau|$ sont trop proches, on peut améliorer cette inégalité de la façon suivante. Si $|\tau| \geq v + \sqrt{v}$, la majoration (37) donne

$$|\lambda(1/2 + i\tau, v)| \leq 2. \quad (38)$$

En revanche, si $|\tau| - \sqrt{v} < v < |\tau|$, deux sous-cas se présentent :

- si $|\tau| - \sqrt{v} < 0$, alors $v < |\tau| < \sqrt{v}$, donc $v < 1$ et

$$|\lambda(1/2 + i\tau, v)| \leq \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2;$$

- si $|\tau| - \sqrt{v} > 0$, alors

$$|\lambda(1/2 + i\tau, v)| \leq |\lambda(1/2 + i\tau, |\tau| - \sqrt{v})| + \int_{|\tau| - \sqrt{v}}^v \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Comme

$$|\tau| \geq |\tau| - \sqrt{v} + \sqrt{|\tau| - \sqrt{v}},$$

on a $|\lambda(1/2 + i\tau, |\tau| - \sqrt{v})| \leq 2$ d'après (38). Enfin,

$$\begin{aligned} \int_{|\tau| - \sqrt{v}}^v \frac{dt}{\sqrt{t}} &= 2 \frac{\sqrt{v} + v - |\tau|}{\sqrt{v} + \sqrt{|\tau| - \sqrt{v}}} \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

On en déduit la majoration $|\lambda(1/2 + i\tau, v)| \leq 4$. □

5 Seconde démonstration de l'identité (13)

La démonstration de l'identité (13) proposée par l'arbitre anonyme part de la constatation suivante : l'estimation de Dirichlet $\Delta(x) = O(\sqrt{x})$ entraîne que, pour tout η tel que $0 < \eta < 1/2$, la fonction

$$x \mapsto \Delta_1(x)x^{-\eta} = \Delta(x)x^{-1-\eta}$$

appartient à $L^2(0, \infty)$. Sa transformée de Mellin étant d'après (21)

$$\int_0^\infty \Delta_1(t)t^{s-\eta-1}dt = \frac{\zeta^2(1-s+\eta)}{1-s+\eta} \quad (\eta < \sigma < 1/2 + \eta),$$

le théorème de Plancherel donne

$$\begin{aligned} I(x, v, \eta) &= 2 \int_0^\infty \Delta_1(t)t^{-\eta} \cdot e^{2\pi itx} [t \leq v] dt \\ &= \int_{\sigma=1/2} \frac{\zeta^2(1-s+\eta)}{1-s+\eta} \lambda(1-s, 2\pi xv) (2\pi x)^{s-1} \frac{d\tau}{\pi} \\ &= \int_{\sigma=1/2} \frac{\zeta^2(s+\eta)}{s+\eta} \lambda(s, 2\pi xv) (2\pi x)^{-s} \frac{d\tau}{\pi}. \end{aligned} \tag{39}$$

Or l'estimation (16) et la proposition 8 fournissent pour tout v fixé l'estimation

$$\frac{\zeta^2(s+\eta)}{s+\eta} \lambda(s, 2\pi xv) \ll \frac{\log^2 \tau}{\tau^{3/2}} \quad (\sigma = \frac{1}{2}, |\tau| \geq 2, 0 < \eta < 1/2).$$

Compte tenu du théorème de convergence dominée, on obtient donc (13) en faisant tendre η vers 0 dans (39).

6 Démonstration de la proposition 2

Soit \mathcal{F} l'ensemble des fonctions continues $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ telles que $f(x)$ et $\tilde{f}(x) = \overline{xf(1/x)}$ se prolongent par continuité en 0. Les constantes appartiennent à \mathcal{F} , ainsi que les fonctions continues sur $]0, \infty[$ vérifiant

$$\begin{aligned} f(x) &= o(1) \quad (x \rightarrow 0) \\ f(x) &= o(x) \quad (x \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Observons que \mathcal{F} est un espace vectoriel sur \mathbb{C} , invariant par l'involution $f \mapsto \tilde{f}$. Dans ce qui suit nous écrirons des égalités du type

$$f_1(x, v) = f_2(x, v) \pmod{\mathcal{F}} \quad (40)$$

pour signifier que la différence $f_1 - f_2$ est une fonction de la seule variable x , appartenant de plus à \mathcal{F} . Dans ce qui suit, il sera crucial de s'assurer que $f_1(x, v) - f_2(x, v)$ ne dépend pas de la variable v afin d'écrire toute relation du type (40).

Nous commençons par un calcul d'intégrale.

Proposition 9 *On a*

$$a_0 = \int_0^1 \frac{e^{it} - 1}{t} dt + \int_1^\infty \frac{e^{it}}{t} dt = -\gamma + i\pi/2.$$

Démonstration

On a, d'après (33), pour $0 < \Re(s) < 1$,

$$\begin{aligned} e^{i\pi s/2} \Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{it} t^{s-1} dt = \int_0^1 + \int_1^\infty \\ &= \frac{1}{s} + \int_0^1 (e^{it} - 1) t^{s-1} dt + \int_1^\infty e^{it} t^{s-1} dt \\ &= \frac{1}{s} + a_0 + o(1), \end{aligned}$$

quand s tend vers 0 par valeurs positives, et d'autre part,

$$\begin{aligned} e^{i\pi s/2}\Gamma(s) &= (1 + i\pi s/2 + O(s^2)) \frac{\Gamma(1+s)}{s} \\ &= \frac{1}{s} - \gamma + i\pi/2 + o(1), \end{aligned}$$

puisque $\Gamma'(1) = -\gamma$. □

Nous passons maintenant à l'étude d'une intégrale dépendant de x et de v .

Proposition 10 *Pour $x > 0$ et $v > 0$ on a*

$$\int_1^v \frac{e^{2\pi itx}}{t} (\log t + 2\gamma) dt = \frac{1}{2} \log^2 \frac{1}{x} + \left(\gamma - \log 2\pi + i\frac{\pi}{2} \right) \log \frac{1}{x} + \varepsilon_0(x, v) \pmod{\mathcal{F}}$$

où

$$\varepsilon_0(x, v) = - \int_v^\infty \frac{e^{2\pi itx}}{\pi t} (\log t + 2\gamma) dt.$$

Démonstration

On a

$$\int_1^v \frac{e^{2\pi itx}}{\pi t} (\log t + 2\gamma) dt = \int_1^\infty - \int_v^\infty,$$

où les intégrales sont semi-convergentes. Le dernier terme est $\varepsilon_0(x, v)$.

Maintenant,

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{e^{2\pi itx}}{t} (\log t + 2\gamma) dt &= \int_{2\pi x}^\infty (\log(t/2\pi x) + 2\gamma) \frac{e^{it}}{t} dt \\ &= \int_{2\pi x}^\infty \log t \cdot \frac{e^{it}}{t} dt - (\log x + \log 2\pi - 2\gamma) \int_{2\pi x}^\infty \frac{e^{it}}{t} dt, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \int_{2\pi x}^\infty \log t \cdot \frac{e^{it}}{t} dt &= \int_{2\pi x}^1 \log t \frac{dt}{t} + \int_{2\pi x}^1 \log t \cdot \frac{e^{it} - 1}{t} dt + \int_1^\infty \log t \cdot \frac{e^{it}}{t} dt \\ &= -\frac{1}{2} \log^2 2\pi x \pmod{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{2\pi x}^\infty \frac{e^{it}}{t} dt &= \int_{2\pi x}^1 \frac{dt}{t} - \int_0^{2\pi x} \frac{e^{it} - 1}{t} dt + \int_0^1 \frac{e^{it} - 1}{t} dt + \int_1^\infty \frac{e^{it}}{t} dt \\ &= \log(1/2\pi x) + a_0 - \int_0^{2\pi x} \frac{e^{it} - 1}{t} dt, \end{aligned}$$

où $a_0 = -\gamma + i\pi/2$, d'après la proposition 9. Comme la fonction

$$x \mapsto (\log x + \log 2\pi - 2\gamma) \int_0^{2\pi x} \frac{e^{it} - 1}{t} dt$$

appartient à \mathcal{F} , on en déduit le résultat annoncé. \square

Rappelons la notation

$$\psi(x, v) = \sum_{n \leq v} \frac{\tau(n)}{n} e^{2\pi i n x}.$$

Dans la proposition suivante, nous ramenons l'étude de $\psi(x, v)$ à celle de l'intégrale $I(x, v)$ définie par (11).

Proposition 11 *Pour $x > 0$, $v > 0$, on a*

$$\psi(x, v) = -i\pi x I(x, v) + \frac{1}{2} \log^2 \frac{1}{x} + \left(\gamma - \log 2\pi + i\frac{\pi}{2} \right) \log \frac{1}{x} + \varepsilon_1(x, v) \pmod{\mathcal{F}}, \quad (41)$$

où $I(x, v)$ est défini par (11), et

$$\varepsilon_1(x, v) = - \int_v^\infty \frac{e^{2\pi i t x}}{\pi t} (\log t + 2\gamma) dt + \frac{e^{2\pi i v x}}{v} \Delta(v) - \int_v^\infty \Delta(t) \frac{e^{2\pi i t x}}{t^2} dt.$$

Démonstration

Nous commençons par effectuer une intégration par parties sur l'expression de $\psi(x, v)$ comme intégrale de Stieltjes :

$$\begin{aligned} \psi(x, v) &= \sum_{n \leq v} \frac{\tau(n)}{n} e^{2\pi i n x} = \int_{1^-}^v \frac{e^{2\pi i t x}}{t} d\left(\sum_{n \leq t} \tau(n) \right) \\ &= \int_1^v \frac{e^{2\pi i t x}}{t} (\log t + 2\gamma) dt + \int_{1^-}^v \frac{e^{2\pi i t x}}{t} d\Delta(t). \end{aligned} \quad (42)$$

La première intégrale de (42) est l'objet de la proposition 10. Quant à la seconde, on a :

$$\int_{1^-}^v \frac{e^{2\pi i t x}}{t} d\Delta(t) \quad (43)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{2\pi i t x}}{t} \Delta(t) \Big|_{1^-}^v - \int_1^v \Delta(t) \left(-\frac{e^{2\pi i t x}}{t^2} + 2i\pi x \frac{e^{2\pi i t x}}{t} \right) dt \\ &= (2\gamma - 1) e^{2i\pi x} + \int_1^\infty \Delta(t) \frac{e^{2\pi i t x}}{t^2} dt + 2i\pi x \int_0^1 \Delta(t) \frac{e^{2\pi i t x}}{t} dt - i\pi x I(x, v) + \varepsilon_2(x, v), \end{aligned} \quad (44)$$

où $I(x, v)$ est définie par (11) et où l'on a posé

$$\varepsilon_2(x, v) = \frac{e^{2\pi i v x}}{v} \Delta(v) - \int_v^\infty \Delta(t) \frac{e^{2\pi i t x}}{t^2} dt.$$

Les trois premiers termes de (44) sont des fonctions de la seule variable x , appartenant à \mathcal{F} (pour le troisième, cela résulte du lemme de Riemann-Lebesgue). On en déduit le résultat annoncé, avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \varepsilon_2$. \square

La proposition suivante contient l'argument principal de la démonstration, à savoir l'approximation de $xI(x, v) + \overline{I(1/x, x^2v)}$ par une transformée de Mellin inverse absolument convergente.

Proposition 12 *Pour $x > 0$, $v > 0$, on a*

$$xI(x, v) + \overline{I(1/x, x^2v)} = \eta(x, v) \pmod{\mathcal{F}}, \quad (45)$$

où

$$\begin{aligned} \eta(x, v) = & - \int_{|\tau| \leq V} \frac{\zeta^2(s)}{s} (2\pi)^{-s} (x^{1-s} \Lambda(s, V) + x^s \overline{\Lambda(1-s, V)}) \frac{d\tau}{\pi} \\ & + \int_{|\tau| > V} \frac{\zeta^2(s)}{s} (2\pi)^{-s} (x^{1-s} \lambda(s, V) + x^s \overline{\lambda(1-s, V)}) \frac{d\tau}{\pi} \\ & - \int_{|\tau| > V} \zeta(s) \zeta(1-s) H(s) x^s \frac{d\tau}{2\pi}, \end{aligned} \quad (46)$$

avec $V = 2\pi x v$, $s = \frac{1}{2} + i\tau$ et $H(s) = \frac{1}{s(1-s)} + i \left(\frac{\cot \pi s/2}{1-s} - \frac{\tan \pi s/2}{s} \right)$.

Démonstration

Appliquons l'identité (13) aux couples (x, v) et $(1/x, x^2v)$:

$$\begin{aligned} I(x, v) &= \int_{\Re s = \frac{1}{2}} \frac{\zeta^2(s)}{s} \lambda(s, 2\pi x v) (2\pi x)^{-s} \frac{d\tau}{\pi} \\ I(1/x, x^2v) &= \int_{\Re s = \frac{1}{2}} \frac{\zeta^2(1-s)}{1-s} \lambda(1-s, 2\pi x v) (2\pi/x)^{s-1} \frac{d\tau}{\pi}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} xI(x, v) + \overline{I(1/x, x^2v)} &= \int_{\Re s = \frac{1}{2}} \frac{\zeta^2(s)}{s} (2\pi)^{-s} (x^{1-s} \lambda(s, V) + x^s \overline{\lambda(1-s, V)}) \frac{d\tau}{\pi} \\ &= \int_{|\tau| \leq V} + \int_{|\tau| > V}, \end{aligned}$$

où $V = 2\pi xv$.

L'intégrale $\int_{|\tau|>V}$ est la deuxième intervenant dans $\eta(x, v)$. Quant à l'intégrale $\int_{|\tau|\leq V}$, elle vaut d'après la proposition 6

$$\int_{|\tau|\leq V} \frac{\zeta(s)\zeta(1-s)}{s} (x^{1-s}G(s) + x^s\overline{G(1-s)}) \frac{d\tau}{2\pi} \quad (47)$$

$$- \int_{|\tau|\leq V} \frac{\zeta^2(s)}{s} (2\pi)^{-s} (x^{1-s}\Lambda(s, V) + x^s\overline{\Lambda(1-s, V)}) \frac{d\tau}{\pi}. \quad (48)$$

L'intégrale (48) est la première intervenant dans $\eta(x, v)$. Nous réorganisons l'intégrale (47) : en séparant les termes correspondant aux expressions x^s et x^{1-s} , en effectuant un changement de variable $s \mapsto 1-s$ dans ces derniers, et finalement en regroupant, on obtient l'intégrale

$$\int_{|\tau|\leq V} \zeta(s)\zeta(1-s)H(s)x^s \frac{d\tau}{2\pi},$$

où

$$H(s) = \frac{G(1-s)}{1-s} + \frac{\overline{G(1-s)}}{s} = \frac{1}{s(1-s)} + i\left(\frac{\cot \pi s/2}{1-s} - \frac{\tan \pi s/2}{s}\right)$$

puisque $\overline{\tan z} = \tan \bar{z}$ et $\bar{s} = 1-s$ si $\Re s = \frac{1}{2}$. Par ailleurs l'identité

$$\tan \pi s/2 = \frac{1 + i \tanh(\pi\tau/2)}{1 - i \tanh(\pi\tau/2)} \quad (s = 1/2 + i\tau, \tau \in \mathbb{R}).$$

montre que $\tan(\pi s/2) = \pm i + o(\tau^{-1})$ ($s = \frac{1}{2} + i\tau, \tau \rightarrow \pm\infty$), et cela fournit la majoration

$$H(s) \ll (1 + \tau^2)^{-1} \quad (s = \frac{1}{2} + i\tau). \quad (49)$$

La fonction $s \mapsto \zeta(s)\zeta(1-s)H(s)x^s$ est donc intégrable sur la droite $\Re s = 1/2$, et nous pouvons ainsi écrire

$$\int_{|\tau|\leq V} \zeta(s)\zeta(1-s)H(s)x^s \frac{d\tau}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} - \int_{|\tau|>V}. \quad (50)$$

La dernière intégrale de (50) est la troisième composant $\eta(x, v)$. Quant à l'avant-dernière, c'est une fonction continue de $x > 0$ qui est uniformément $O(x^{1/2})$ et appartient donc à \mathcal{F} , d'où le résultat. \square

Pour conclure la démonstration de la proposition 2, il nous reste à estimer les fonctions ε_1 et η . C'est l'objet des deux propositions suivantes.

Proposition 13 Soit $K_1, K_2 > 0$. Pour $0 < x \leq K_1$, $v > 0$ et $x^2v \geq K_2$, on a

$$\varepsilon_1(x, v) - x\varepsilon_1(1/x, x^2v) \ll (x^2v)^{-1/2},$$

où la constante implicite dépend uniquement de K_1 et K_2 .

Démonstration

Nous commençons par estimer $\varepsilon_1(x, v)$ sous la seule hypothèse $v \geq K$ avec $K > 0$. Rappelons que

$$\varepsilon_1(x, v) = - \int_v^\infty \frac{e^{2\pi itx}}{\pi t} (\log t + 2\gamma) dt + \frac{e^{2\pi ivx}}{v} \Delta(v) - \int_v^\infty \Delta(t) \frac{e^{2\pi itx}}{t^2} dt.$$

Par le second théorème de la moyenne, la première intégrale est $\ll (\log(2+v))/xv$. En utilisant l'estimation de Dirichlet $\Delta(v) \ll v^{1/2}$, on voit que les autres termes sont $\ll v^{-1/2}$. On en déduit, si $0 < x \leq K_1$ et $x^2v \geq K_2$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x, v) - x\varepsilon_1(1/x, x^2v) &\ll (\log(2+v))/xv + v^{-1/2} + x(\log(2+x^2v))/xv + x(x^2v)^{-1/2} \\ &\ll (x^2v)^{-1/2}. \end{aligned} \quad \square$$

Proposition 14 Pour $0 < x \leq K_1$, $v > 0$ et $x^2v \geq K_2$, on a

$$\eta(x, v) \ll (x^2v)^{-1/2} \log^2(2+x^2v),$$

où la constante implicite dépend uniquement de K_1 et K_2 .

Démonstration En utilisant la proposition 8 et la majoration (49), on voit sur la définition (46) de $\eta(x, v)$ que

$$\eta(x, v) \ll x^{1/2} \int_0^\infty \frac{|\zeta(\frac{1}{2} + i\tau)|^2}{1 + \tau} \min(1, V^{1/2}|V - \tau|^{-1}) d\tau + x^{1/2} \int_V^\infty \frac{|\zeta(\frac{1}{2} + i\tau)|^2}{1 + \tau^2} d\tau \quad (51)$$

avec $V = 2\pi xv$. Nous utilisons la proposition 3 pour estimer la première intégrale de (51), et une intégration par parties ainsi que la majoration $I_2(T) \ll T \log(2+T)$ (cf §2.3) pour estimer la seconde. Nous obtenons la majoration

$$\eta(x, v) \ll x^{1/2} \frac{\log^2(2+V)}{V^{1/2}}.$$

Si $V < x^2v$, alors

$$\eta(x, v) \ll x^{1/2} \frac{\log^2(2+x^2v)}{(xv)^{1/2}} \ll \frac{\log^2(2+x^2v)}{\sqrt{x^2v}}.$$

Dans le cas contraire, la décroissance de $u \mapsto \log^2(2+u)/u$ sur $]0, \infty[$ donne

$$\eta(x, v) \ll (xV)^{1/2} \frac{\log^2(2+x^2v)}{x^2v} \ll \frac{\log^2(2+x^2v)}{\sqrt{x^2v}}. \quad \square$$

Le dernier résultat de ce paragraphe fournit l'assertion (8) de la proposition 2.

Proposition 15 Soit $K_1, K_2 > 0$. Pour $0 < x \leq K_1$, $v > 0$ et $x^2v \geq K_2$, on a

$$\psi(x, v) - \overline{x\psi(1/x, x^2v)} = \frac{1}{2} \log^2 \frac{1}{x} + \left(\gamma - \log 2\pi + i\frac{\pi}{2} \right) \log \frac{1}{x} + \mathfrak{F}(x) + O\left(\frac{\log^2(2 + x^2v)}{(x^2v)^{1/2}} \right)$$

où la constante implicite ne dépend que de K_1 et K_2 . La fonction \mathfrak{F} est continue sur $]0, \infty[$ et se prolonge par continuité en 0.

Démonstration Posons $\kappa = \gamma - \log 2\pi + i\pi/2$. D'après la proposition 11, on a

$$\begin{aligned} \psi(x, v) - \overline{x\psi(1/x, x^2v)} &= -i\pi \left(xI(x, v) + \overline{I(1/x, x^2v)} \right) + \frac{1}{2} \log^2 \frac{1}{x} + \kappa \log \frac{1}{x} - \frac{x}{2} \log^2 x - \kappa x \log x \\ &\quad + \varepsilon_1(1/x, x^2v) - \overline{x\varepsilon_1(1/x, x^2v)} \pmod{\mathcal{F}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \psi(x, v) - \overline{x\psi(1/x, x^2v)} &= -i\pi\eta(x, v) + \frac{1}{2} \log^2 \frac{1}{x} + \kappa \log \frac{1}{x} - \frac{x}{2} \log^2 x - \kappa x \log x \\ &\quad + \varepsilon_1(1/x, x^2v) - \overline{x\varepsilon_1(1/x, x^2v)} + f(x) \quad (\text{où } f \in \mathcal{F}, \text{ d'après la proposition 12}) \\ &= \mathfrak{F}(x) + \frac{1}{2} \log^2 \frac{1}{x} + \kappa \log \frac{1}{x} + O\left(\frac{\log^2(2 + x^2v)}{\sqrt{x^2v}} \right), \end{aligned}$$

où

$$\mathfrak{F}(x) = f(x) - \frac{x}{2} \log^2 x - \kappa x \log x,$$

et où nous avons utilisé les propositions 13 et 14. □

7 Détermination de la fonction $\mathfrak{F}(x)$

Dans ce paragraphe, la notation $(p.p)$ signifie qu'une identité a lieu pour presque tout nombre réel x de $]0, \infty[$. Nous utiliserons plusieurs fois le fait suivant : si deux fonctions continues sur $]0, \infty[$ coïncident presque partout sur $]0, \infty[$ alors elles sont égales. Posons

$$\psi(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\tau(n)}{n} e^{2\pi i n x}.$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \tau(n)^2/n^2$ est convergente, la série $\psi(x)$ converge presque partout d'après le théorème de Carleson[†]. L'équation fonctionnelle de Wilton montre alors que les fonctions $\psi(x)$

[†]. Le résultat découle déjà d'un des premiers théorèmes « ancêtres » du théorème de Carleson, dont l'énoncé dû à Jerosch et Weyl (1909, cf. [8], p. 78) affirme notamment la convergence presque partout des séries trigonométriques $\sum_n c_n e^{2\pi i n x}$ telles que $c_n = O((1 + |n|)^{-\kappa})$, avec $\kappa > 2/3$.

et $\tilde{\psi}(x) = \overline{x\psi(1/x)}$, définies presque partout, vérifient la relation

$$\psi(x) - \tilde{\psi}(x) = \mathfrak{F}(x) + \frac{1}{2} \log^2 \frac{1}{x} + \left(\gamma - \log 2\pi + \frac{1}{2}\pi i \right) \log \frac{1}{x} \quad (p.p.),$$

relation dont nous pouvons séparer les parties réelle et imaginaire :

$$\psi_1(x) - x\psi_1(1/x) = \Re \mathfrak{F}(x) + \frac{1}{2} \log^2 \frac{1}{x} + (\gamma - \log 2\pi) \log \frac{1}{x} \quad (p.p.),$$

$$\psi_2(x) + x\psi_2(1/x) = \Im \mathfrak{F}(x) + \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{x} \quad (p.p.).$$

7.1 Détermination de la fonction $\Im \mathfrak{F}(x)$

Nous proposons deux démonstrations de la relation (7) à partir des résultats de [1].

7.1.1 Première démonstration de (7)

Considérons la série

$$\xi(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{B_1(kx)}{k},$$

où B_1 est la première fonction de Bernoulli définie par $B_1(t) = \{t\} - \frac{1}{2} + [t \in \mathbb{Z}]/2$. On sait que cette série converge presque partout et dans $L^2(0, 1)$, et a pour somme $-\psi_2/\pi$ (cf. [1], p. 222). D'autre part, la proposition 8 de [1] fournit la relation

$$\xi(x) + x\xi(1/x) = -A(x) + \frac{1-x}{2} \log x + \frac{x+1}{2} (\log 2\pi - \gamma) \quad (p.p.),$$

d'où (7), en multipliant les deux membres par $-\pi$.

7.1.2 Deuxième démonstration de (7)

Nous utilisons maintenant la proposition 1 de [1] : on a l'identité

$$x \int_x^\infty \psi_2(t) \frac{dt}{t^2} = \pi A(x) + \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2} (1 - \gamma + \log 2\pi) \quad (x > 0). \quad (52)$$

En appliquant (52) à $1/x$, on obtient

$$\frac{1}{x} \int_0^x \psi_2(1/t) dt = \pi A(1/x) + \frac{\pi}{2} \log x - \frac{\pi}{2} (1 - \gamma + \log 2\pi) \quad (x > 0). \quad (53)$$

Comme $A(x) = xA(1/x)$, nous éliminons la fonction A entre (52) et (53) :

$$x \int_x^\infty \psi_2(t) \frac{dt}{t^2} - \int_0^x \psi_2(1/t) dt = \pi \frac{x+1}{2} \log \frac{1}{x} + \pi \frac{x-1}{2} (1 - \gamma + \log 2\pi).$$

En dérivant cette dernière relation, on obtient

$$\int_x^\infty \psi_2(t) \frac{dt}{t^2} - \psi_2(x)/x - \psi_2(1/x) = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{x} - \pi \frac{x+1}{2x} + \frac{\pi}{2} (1 - \gamma + \log 2\pi) \quad (p.p.),$$

d'où

$$\begin{aligned} \psi_2(x) + x\psi_2(1/x) &= \pi A(x) + \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2} (1 - \gamma + \log 2\pi) \\ &\quad - \pi \frac{x}{2} \log \frac{1}{x} + \pi \frac{x+1}{2} - \pi \frac{x}{2} (1 - \gamma + \log 2\pi) \\ &= \pi A(x) + \pi \frac{x-1}{2} \log x + \pi \frac{x+1}{2} (\gamma - \log 2\pi) \quad (p.p.), \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

7.2 Détermination de la fonction $\Re\mathfrak{F}(x)$

Notre démarche est d'adapter à ψ_1 le raisonnement mené pour ψ_2 au §7.1.2. Une observation préalable est que ψ_1 est l'opposée de la série trigonométrique conjuguée de ψ_2 . Cela motive l'emploi de la transformation de Hilbert.

La première étape est d'obtenir une identité analogue à (52) pour la fonction ψ_1 . Commençons avec

$$\alpha(x) = \int_0^x \psi_1(t) dt = \sum_{n \geq 1} \frac{\tau(n)}{2\pi n^2} \sin 2\pi n x.$$

Comme $\sin \in \mathcal{W}(-1, 0)$ et comme

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\tau(n)}{2\pi n^2} (2\pi n)^{-\sigma} < \infty \quad (\sigma > -1),$$

la fonction α appartient à $\mathcal{W}(-1, 0)$ et

$$M\alpha(s) = (2\pi)^{-s-1} \zeta^2(s+2) \sin(\pi s/2) \Gamma(s) \quad (-1 < \sigma < 0).$$

Par conséquent, la fonction β définie par

$$\beta(x) = -\frac{\alpha(x)}{x} + 2x \int_x^\infty \alpha(t) \frac{dt}{t^3} = x \int_x^\infty \psi_1(t) \frac{dt}{t^2}$$

appartient à $\mathcal{W}(0, 1)$ et a pour transformée de Mellin

$$\begin{aligned}
M\bar{\beta}(s) &= -M\alpha(s-1) + 2\frac{M\alpha(s-1)}{s+1} \\
&= \frac{1-s}{1+s}(2\pi)^{-s}\zeta^2(s+1)\sin(\pi(s-1)/2)\Gamma(s-1) \\
&= \frac{\zeta(s+1)}{s(s+1)} \cdot \zeta(s+1)(2\pi)^{-s}\cos(\pi s/2)\Gamma(s+1) \\
&= -\pi \cot(\pi s/2) \cdot \frac{\zeta(s+1)\zeta(-s)}{s(s+1)} \quad (0 < \sigma < 1),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'équation fonctionnelle de ζ sous la forme (15). En changeant s en $-s$, on a donc

$$M\beta(-s) = -\pi \cot(\pi s/2) \cdot \frac{\zeta(s)\zeta(1-s)}{s(1-s)} = F(s) \quad (-1 < \sigma < 0), \quad (54)$$

où F est la fonction méromorphe définie par le second membre de (30), et coïncidant avec la transformée de Mellin de la fonction B dans la bande $0 < \sigma < 1$.

Les deux relations (54) et (32) permettent d'appliquer la proposition 14 de [1]. La fonction méromorphe F a un unique pôle sur la droite $\sigma = 0$; il s'agit d'un pôle triple en 0 et un calcul standard montre que la partie polaire correspondante est

$$-\frac{1}{s^3} + \frac{-1 + \gamma - \log 2\pi}{s^2} + \frac{c}{s},$$

où

$$c = \frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{2}\log^2 2\pi + \frac{1}{2}\gamma^2 + \gamma \log 2\pi - \log 2\pi + \gamma + 2\gamma_1 - 1,$$

γ_1 désignant la constante de Stieltjes d'indice 1. En tenant compte de la relation (32), la proposition 14 de [1] fournit donc

$$B(x) - \beta(1/x) = -\frac{1}{2}\log^2 x + (\log 2\pi + 1 - \gamma)\log x + c \quad (x > 0). \quad (55)$$

Nous pouvons maintenant reproduire *mutatis mutandis* le raisonnement du §7.1.2. La relation (55) appliquée à x et $1/x$ donne

$$\int_0^x \psi_1(1/t)dt = xB(x) + \frac{1}{2}x\log^2 x + (\log 2\pi + 1 - \gamma)x\log \frac{1}{x} - cx, \quad (56)$$

$$x \int_x^\infty \psi_1(t)\frac{dt}{t^2} = B(1/x) + \frac{1}{2}\log^2 x + (\log 2\pi + 1 - \gamma)\log x - c. \quad (57)$$

Comme

$$xB(x) + B(1/x) = -2x \int_0^\infty \frac{A(t)}{x+t} \frac{dt}{t}$$

(cf. (27)) est indéfiniment dérivable sur $]0, \infty[$, on peut dériver l'identité obtenue en ajoutant (56) et (57) et obtenir ainsi pour presque tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \psi_1(1/x) - \psi_1(x)/x + \int_x^\infty \psi_1(t) \frac{dt}{t^2} &= -2 \int_0^\infty \frac{A(t)}{(x+t)^2} dt + \frac{\log x + \log 2\pi + 1 - \gamma}{x} \\ &\quad + \frac{1}{2} \log^2 x + (\log 2\pi - \gamma) \log \frac{1}{x} - \log 2\pi - 1 + \gamma - c \end{aligned}$$

puis, en réutilisant (57) :

$$\begin{aligned} x\psi_1(1/x) - \psi_1(x) &= -2x \int_0^\infty \frac{A(t)}{(x+t)^2} dt - B(1/x) - \frac{1}{2} \log^2 x - (\log 2\pi - \gamma) \log x \\ &\quad + x \left(\frac{1}{2} \log^2 x + (\log 2\pi - \gamma) \log \frac{1}{x} - \log 2\pi - 1 + \gamma - c \right) \\ &\quad + c + \log 2\pi + 1 - \gamma \quad (p.p). \end{aligned}$$

On obtient bien (6) en utilisant l'identité (29) :

$$2x \int_0^\infty \frac{A(t)}{(x+t)^2} dt + B(1/x) = 2x \cdot \text{v.p.} \int_0^\infty A(t) \frac{x^2 + t^2}{(t-x)(t+x)^2} \frac{dt}{t}$$

et la relation

$$c + \log 2\pi + 1 - \gamma = \frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{2} \ln^2 2\pi + \frac{1}{2} \gamma^2 + \gamma \ln 2\pi + 2\gamma_1.$$

REMERCIEMENTS

Outre leurs laboratoires respectifs, les auteurs remercient les institutions ayant favorisé leur travail sur cet article : le laboratoire franco-russe Poncelet (CNRS, Université Indépendante de Moscou), et l'Institut Mittag-Leffler (Djursholm).

Les auteurs ont également le plaisir de remercier l'arbitre anonyme pour sa lecture attentive de cet article, ses utiles suggestions, et pour le contenu du §5.

Références

- [1] L. BÁEZ-DUARTE, M. BALAZARD, B. LANDREAU et E. SAIAS – « Étude de l'autocorrélation multiplicative de la fonction « partie fractionnaire » », *Ramanujan J.* **9** (2005), p. 215–240.
- [2] J. BOURGAIN – « Decoupling, exponential sums and the Riemann Zeta function », *arXiv :1408.5794v1* (2014).
- [3] K. CHANDRASEKHARAN – *Arithmetical functions*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 167, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.

- [4] G. H. HARDY et J. E. LITTLEWOOD – « Some problems of diophantine approximation », *Acta Math.* **37** (1914), p. 193–239, II The trigonometrical series associated with the elliptic ϑ -function.
- [5] M. N. HUXLEY – « Exponential sums and the Riemann Zeta function. V », *Proc. London Math. Soc. (3)* **90** (2005), p. 1–41.
- [6] A. E. INGHAM – « Mean-value theorems in the theory of the Riemann Zeta-function », *Proc. London Math. Soc. (2)* **27** (1927), p. 273–300.
- [7] A. IVIĆ – *The Riemann zeta-function*, Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2003.
- [8] F. JEROSCH et H. WEYL – « Über die Konvergenz von Reihen, die nach periodischen Funktionen Fortschreiten. », *Math. Ann.* **66** (1909), p. 67–80.
- [9] F. W. KING – *Hilbert transforms, vol. 1*, Encyclopedia of mathematics and its applications, vol. 124, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [10] N. NIELSEN – *Handbuch der Theorie der Gammafunktionen.*, B. G. Teubner, Leipzig, 1906.
- [11] T. RIVOAL – « On the convergence of diophantine Dirichlet series », *Proc. Edimb. Math. Soc.* **55** (2012), p. 513–541.
- [12] T. RIVOAL et J. ROQUES – « Convergence and modular type properties of a twisted Riemann series », *Unif. Distrib. Theory* **8** (2013), p. 97–119.
- [13] T. RIVOAL et S. SEURET – « Hardy-Littlewood series and even continued fractions », *J. Anal. Math.* **125** (2015), p. 175–225.
- [14] G. TENENBAUM – *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 3^e éd., Belin, Paris, 2008.
- [15] E. C. TITCHMARSH – *Introduction to the theory of Fourier integrals*, second éd., Clarendon Press, Oxford, 1948.
- [16] — , *The theory of the Riemann zeta function*, second éd., Clarendon Press, Oxford, 1986, revised by D. R. Heath-Brown.
- [17] G. VORONOI – « Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques », *J. reine angew. Math* **126** (1903), p. 241–282.
- [18] G. VORONOI – « Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **21** (1904), p. 207–267, 459–533.
- [19] J. WILTON – « An approximate functional equation with applications to a problem of diophantine approximation », *J. reine angew. Math* **169** (1933), p. 219–237.
- [20] A. ZYGMUND – *Trigonometric series. Vol. I, II*, third éd., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

BALAZARD, Michel
Institut de Mathématiques de Marseille
CNRS, Université d'Aix-Marseille
Campus de Luminy, Case 907
13288 Marseille Cedex 9
FRANCE
Adresse électronique : balazard@math.cnrs.fr

MARTIN, Bruno
Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées
CNRS, Université du Littoral Côte d'Opale
50 rue F. Buisson, BP 599
62228 Calais Cedex
FRANCE
Adresse électronique : martin@lmpa.univ-littoral.fr