



HAL
open science

Singularité et section de Dirac

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

Jean Louis Jonot. Singularité et section de Dirac. [Rapport de recherche] Académie de Versailles. 2015. hal-01183554v3

HAL Id: hal-01183554

<https://hal.science/hal-01183554v3>

Submitted on 1 Jun 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

SINGULARITÉ ET SECTION DE DIRAC

JEAN LOUIS JONOT

ABSTRACT. Dans cet article, on propose une représentation géométrique de l'univers. Cette modélisation est construite à partir d'une section de Dirac à structures et s'étend à la notion de multivers de Banach-Schauder. On interprète l'univers comme un sous-espace connexe, d'une singularité de dimension quatre d'un multivers de Banach-Schauder. On peut à partir de cette représentation, étudier les sections des formes bilinéaires symétriques dégénérées à structures sur une variété fermée de dimension finie.

1. CHAMPS CHRONOLOGIQUES ET FEUILLETAGES EN ESPACE-TEMPS

L'univers Ω est une variété de dimension 4, on ne précise pas si son bord $\partial\Omega$ est vide ou non. Dans l'intérieur de cet univers il existe une métrique de Lorentz g , sauf peut être sur un sous-ensemble \mathcal{S} , dit ensemble des singularités de Ω . L'hypothèse que l'on fait est que chaque composante connexe de \mathcal{S} est une sous-variété fermée de dimension 0, 1, 2 ou 3. On suppose que cette métrique de Lorentz définie au moins un champ chronologique T , c'est-à-dire, un champ pour lequel

$$g(T, T) < 0 \text{ sur } \Omega \setminus \mathcal{S}.$$

Le champ chronologique T est normalisé si

$$g(T, T) = -1 \text{ sur } \Omega \setminus \mathcal{S},$$

et il est stable si en chaque événement ω de $\Omega \setminus \mathcal{S}$, il existe une carte U pour laquelle, si T s'écrit

$$T = T^\mu \partial_\mu$$

dans le local frame attaché à cette carte, on ait

$$\partial_\kappa (T^\mu g_{\nu\mu}) = \partial_\nu (T^\mu g_{\kappa\mu}), \forall i, \forall k$$

où

$$g_{\nu\mu} = g(\partial_\nu, \partial_\mu).$$

On définit le système de Pfaff

$$\tau : \omega \in \Omega \rightarrow \tau(\omega) = \mathbb{R}T(\omega)^\perp = \{u \in T_\omega\Omega : g(\omega)(u, T(\omega)) = 0\},$$

si T est stable ce système de Pfaff est involutif, la sous-variété intégrable contenant ω , est une sous-variété de dimension 3, on note \mathcal{E}_ω la composante connexe contenant l'événement ω . On a deux feuilletages transversaux sur $\Omega \setminus \mathcal{S}$ induit par τ et

$$\rho : \omega \in \Omega \rightarrow \tau(\omega) = \mathbb{R}T(\omega),$$

la feuille chronologique connexe contenant l'événement ω est notée \mathcal{T}_ω .

Date: 14 Juin 2015.

Key words and phrases. Section de Dirac à structures, Variété de Banach, Base de Schauder, Base de Schauder inconditionnelle, Champ chronologique stable, Feuilletage en espace-temps.

La notion de changement local de coordonnées entre deux espace-temps définis par les champs chronologiques T et S est la donnée d'une section θ , définie sur un ouvert connexe $U \subseteq \Omega \setminus \mathcal{S}$ du fibré

$$\text{Hom}(T\Omega) = \Lambda^1(\Omega) \otimes T\Omega$$

telle que

$$\theta \otimes T = S \tag{1.1}$$

et

$$g(\theta \otimes X, \theta \otimes Y) = g(X, Y)$$

sur U pour tout champ X, Y de Ω définis sur U , où g est la métrique de Lorentz sur $\Omega \setminus \mathcal{S}$ [2]. On rappelle que pour un champ X de Ω défini sur U ,

$$\theta \otimes X(\omega) = \theta(\omega)(X(\omega)), \forall \omega \in U$$

et l'application $\theta(\omega)$

$$\theta(\omega) : T_\omega\Omega \rightarrow T_\omega\Omega$$

est une $g(\omega)$ -isométrie, on dit que θ conserve la métrique de Lorentz g . On peut remarquer que ce changement d'espace-temps est un opérateur d'évolution [1].

Proposition 1. *Pour tous les champs chronologiques T et S , il existe un changement local de coordonnées.*

Proof. La preuve est donnée dans [4]. □

2. LES SINGULARITÉS DE L'UNIVERS

La métrique de Lorentz g est définie à partir d'une section de Dirac γ , dans le local frame associé à une carte elle s'écrit

$$g(\partial_\mu, \partial_\nu) = \gamma_{\mu\nu}$$

où $\gamma_{\mu\nu}$ est l'inverse du tenseur de Poisson

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu)$$

en dehors des événements singuliers

$$\mathcal{S} = \{o \in \Omega : \det(\gamma^{\mu\nu}(o)) = 0\}.$$

Notation 1. *On prendra par la suite pour tenseur de Poisson*

$$\gamma^{\mu\nu} = \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu).$$

Definition 1. *Le feuilletage espace-temps est continue aux singularités si pour tout événement singulier $o \in \mathcal{S}$, il existe une carte V de o et des champs locaux*

$$\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$$

tels que

$$\text{Vect}\{X_0(\omega)\} = T_\omega(\mathcal{T}), \text{Vect}\{X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega)\} = T_\omega(\mathcal{E}), \forall \omega \in V \cap (\Omega \setminus \mathcal{S})$$

et

$$\text{Vect}\{X_0(\omega), X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega)\} = T_\omega\mathcal{F}, \forall \omega \in \mathcal{S}$$

où $T_\omega(\mathcal{T})$ est l'espace tangent en ω à la feuille chronologique contenant ω , $T_\omega(\mathcal{E})$ est l'espace tangent en ω à la feuille espace contenant ω et $T_\omega\mathcal{F}$ est l'espace tangent de la composante connexe \mathcal{F} de \mathcal{S} contenant l'événement $\omega \in \Omega$.

Remark 1. *Cette définition a un sens que si on admet l'existence d'un champ chronologique stable T sur $V \cap (\Omega \setminus \mathcal{S})$.*

Le tenseur de Poisson existe dans les singularités. Si $o \in \mathcal{S}$, soit U^1 et U^2 deux cartes en o . On note $\{\partial_\nu^j\}$ le local frame attaché à la carte U^j . Sur $U^1 \cap U^2$ les champs locaux ∂_ν^2 s'écrivent dans le local frame $\{\partial_\nu^1\}$

$$\partial_\nu^2 = a_\nu^\mu \partial_\mu^1.$$

On note d_j^ν la 1-forme duale de ∂_ν^j définie par

$$d_j^\nu (\partial_\mu^j) = \delta_\mu^\nu$$

alors

$$d_2^\nu = b_\tau^\nu d_1^\tau, \mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$$

avec $\mathcal{A} = (a_\nu^\mu)$ et $\mathcal{B} = (b_\tau^\nu)$. Les matrices de Dirac associées aux 1-formes sont notées γ_j^ν et le tenseur de Poisson associé est noté

$$\gamma_j^{\nu\mu} = \text{Trace}(\gamma_j^\nu \gamma_j^\mu)$$

on a

$$\begin{aligned} \gamma_2^\nu &= b_\tau^\nu \gamma_1^\tau \text{ et } \gamma_2^\mu = b_\rho^\mu \gamma_1^\rho, \\ \gamma_2^\nu \gamma_2^\mu &= b_\tau^\nu b_\rho^\mu \gamma_1^\tau \gamma_1^\rho \end{aligned}$$

et

$$\gamma_2^{\nu\mu} = b_\tau^\nu b_\rho^\mu \gamma_1^{\tau\rho}, \gamma_j^{\tau\rho} = \text{Trace}(\gamma_j^\tau \gamma_j^\rho). \quad (2.1)$$

Si on pose $\tilde{\gamma}_j$ la matrice $(\tilde{\gamma}_j)^\rho_\tau = \gamma_j^{\tau\rho}$, l'équation 2.1 s'écrit

$$\tilde{\gamma}_2 = \mathcal{B} \times \tilde{\gamma}_1 \times (\text{Tr} \mathcal{B}),$$

les matrices de Poisson $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ sont congruentes.

Definition 2. *La signature d'un événement o est la signature de la matrice symétrique $\tilde{\gamma}$ qui est indépendante du choix de la carte choisie en o .*

La signature d'un événement o est la donnée d'un couple (n_+, n_-) , n_+ est le nombre de termes égaux à $+1$ et n_- est le nombre de termes égaux à -1 ,

$$4 - (n_- + n_+)$$

est le nombre de termes nuls. Pour un événement non singulier, la signature est $(3, 1)$.

On a fait l'hypothèse que les composantes connexes des points singuliers de signature $n_+ + n_- \leq \kappa < 4$ forment des sous-variétés fermées de dimension κ pour lesquelles

$$n_- = 0,$$

cela signifie qu'aux singularités il n'y a pas de champ chronologique. En particulier, la notion de temps n'existe pas dans les sous-variétés singulières associées à la section de Dirac γ .

Remark 2. *Le cas général sera étudié plus tard dans le cadre de la représentation de l'univers comme une sous-variété d'une variété de Banach.*

Definition 3. *Une section de Dirac est à structures si chaque composante connexe de l'ensemble des singularités \mathcal{S} , de signature (n_+, n_-) avec $n_+ + n_- \leq \kappa$ est une sous-variété fermée de dimension κ .*

Dorénavant, les sections de Dirac considérées sont à structures, on dit encore structurées.

On peut faire d'autres hypothèses sur le couple (n_+, n_-) , mais l'hypothèse précédente permet de décrire de façon intrinsèque les sous-variétés singulières. Sous notre hypothèse, si

$$n_+ = 0,$$

le temps et l'espace disparaissent, les sous-variétés connexes formées par ces singularités sont des points. Si

$$n_+ = 1,$$

les sous-variétés connexes formées par ces singularités sont des lacets difféomorphes à \mathbb{S}^1 . Dans le cas

$$n_+ = 2,$$

les composantes connexes sont des surfaces fermées de genre ζ et si

$$n_+ = 3,$$

chaque composante connexe est une sous-variété fermée de dimension 3 que l'on peut décrire à l'aide des huit géométries de Thurston [8] et [6]. Les sous-variétés de type $(3, 1)$ sont les composantes connexes de $\Omega \setminus \mathcal{S}$, ces univers sont feuilletés en feuilles espace et en feuilles chronologique si T est un champ chronologique stable sur $\Omega \setminus \mathcal{S}$. L'ensemble \mathcal{S}_r représente l'ensemble des événements singuliers de signature (n_+, n_-) avec $n_+ + n_- \leq r$, on a l'inclusion naturelle

$$\mathcal{S}_{r_1} \subset \mathcal{S}_{r_2}, r_1 < r_2$$

en particulier, les composantes connexes des événements de signature (n_+, n_-) ne forment pas, en général, une variété fermée comme dans le cas des événements de signature $(3, 1)$ dont une composante connexe représente l'univers observable. On note

$$\mathcal{S}_{(n_+, n_-)}$$

les événements de signature (n_+, n_-) avec $n_+ + n_- \leq r < 4$, alors sous l'hypothèse $n_- = 0$ on a

$$\mathcal{S}_r = \cup_{n=0}^3 \mathcal{S}_{(n, 0)}.$$

Remark 3. *Si on fait l'hypothèse que notre univers est la composante connexe de la variété singulière d'un univers de dimension ≥ 5 , on est amené à définir une section de Dirac sur cet univers qui est singulière. Notre univers Ω peut être ainsi le bord d'un univers de dimension 5. Si on veut que cette remarque soit cohérente il faut que n_- puisse prendre des valeurs non nulles.*

Sous l'hypothèse

$$n_- = 0$$

on a

$$\mathcal{S}_{(r, 0)} = \mathcal{S}_r \setminus \mathcal{S}_{r-1}$$

et il y a 4 types $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$ et $(3, 0)$, de singularités possibles. Les singularités de type $(0, 0)$ sont les singularités initiales. On choisit des champs localement sur une carte U en ω tels que la matrice, dans cette base, associée au tenseur de Poisson soit de forme réduite (n_+, n_-) . Si $\{X_j\}$ est une base locale de champs sur U et $\{X^j\}$ la base duale

$$X^k(X_l) = \delta_l^k,$$

alors le tenseur de Poisson γ^{kl} dans la base $\{X_j\}$ est

$$\gamma^{kl} = \text{Trace}(\gamma^k \gamma^l), \quad \gamma^k = \gamma^{X^k}.$$

Les sous-variétés \mathcal{S}_r sont, respectivement, formées des événements $(n_+, 0)$, $n_+ \leq r$. La condition nécessaire et suffisante pour que ω appartienne à une variété singulière de dimension r est que les r -champs locaux, $r = 2, 3$

$$\omega \in U \rightarrow \text{Vect} \{X_0(\omega), X_1(\omega)\},$$

$$\omega \in U \rightarrow \text{Vect} \{X_0(\omega), X_1(\omega), X_2(\omega)\},$$

soient complètement intégrables. Une base de sections locales sur U est dite réduite pour la section de Dirac γ sur \mathcal{S}_r si et seulement si la matrice du tenseur de Poisson dans cette base est réduite de type $(r, 0)$, $r \leq 3$. Cette base de section locale est dite totalement intégrable sur U si les p -champs locaux associés sont complètement intégrables.

Theorem 1. *γ est une section de Dirac à structures si et seulement si il existe localement en chaque événement $\omega \in \Omega$, une base de sections locales réduite et totalement intégrable.*

Cela signifie qu'il existe une base de sections locales $\{X_j\}$ dans laquelle la matrice du tenseur de Poisson est réduite et telle que

$$[X_0, X_1] \in \text{Vect} \{X_0, X_1\},$$

et

$$[X_k, X_l] \in \text{Vect} \{X_0, X_1, X_2\}, \quad k, l = 0, 1, 2.$$

Si on admet que notre univers est une variété singulière d'un univers de dimension supérieure, il faut étendre la notion d'involution à des champs

$$\{X_j, j = 0, 1, 2, \dots, m\}$$

vérifiant la propriété d'involution

$$[X_k, X_l] \in \text{Vect} \{X_0, \dots, X_r\}, \quad k, l = 0, \dots, r \text{ et } r = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Dans l'hypothèse, $r = 1, 2$ où 3 , sur les variétés singulières le tenseur de Poisson induit localement une métrique riemannienne sur $\mathcal{S}_r \setminus \mathcal{S}_{r-1}$ en dimension $1, 2$ et 3 qui est définie par

$$g_\gamma(X_k, X_l) = \delta_{kl}, \quad k, l = 0, \dots, r.$$

En effet, si $\{Y_j\}$ est une autre base réduite pour γ , soit \mathcal{P} la section locale de matrices de changement de base. On note J la forme réduite de γ dans chaque base

$$J = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & O_{4-r} \end{pmatrix}$$

alors

$$J = {}^{\text{Tr}} \mathcal{Q} \times J \times \mathcal{Q} \text{ avec } \mathcal{Q} = \mathcal{P}^{-1}. \quad (2.2)$$

On pose

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$$

où Q_{11} est une matrice carrée d'ordre r et Q_{22} est une matrice carrée d'ordre $4 - r$. La transposée de \mathcal{Q} s'écrit

$${}^{\text{Tr}} \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \text{Tr} Q_{11} & \text{Tr} Q_{21} \\ \text{Tr} Q_{12} & \text{Tr} Q_{22} \end{pmatrix}$$

et de 2.2 on a

$$Q_{12} = 0 \text{ et } \text{Tr} Q_{11} \times Q_{11} = I_r.$$

En particulier, on en déduit que si $\omega \in \mathcal{S}$ alors

$$\text{Vect} \{X_0(\omega), X_1(\omega)\} = \text{Vect} \{Y_0(\omega), Y_1(\omega)\} \quad (2.3)$$

et

$$\text{Vect} \{X_0(\omega), X_1(\omega), X_2(\omega)\} = \text{Vect} \{Y_0(\omega), Y_1(\omega), Y_2(\omega)\} \quad (2.4)$$

les variétés intégrables sont indépendantes du choix de la base réduite choisie. Si on admet l'existence d'un champ chronologique aux singularités alors les équations 2.3 et 2.4 ne sont plus vraies, la construction des variétés singulières dépend de la base réduite locale choisie, d'où l'hypothèse faite précédemment sur le choix de la valeur de n_- .

Remark 4. *Si $\omega \notin \mathcal{S}_2$ alors on a pas nécessairement*

$$\text{Vect} \{X_0(\omega), X_1(\omega)\} = \text{Vect} \{Y_0(\omega), Y_1(\omega)\}$$

et si $\omega \notin \mathcal{S}_3$ on a pas, en général, l'égalité

$$\text{Vect} \{X_0(\omega), X_1(\omega), X_2(\omega)\} = \text{Vect} \{Y_0(\omega), Y_1(\omega), Y_2(\omega)\}.$$

Le tenseur de Poisson induit une métrique riemannienne sur chaque sous-variété singulière $\mathcal{S}_r \setminus \mathcal{S}_{r-1}$ en posant,

$$g_\gamma(X_k, X_l) = \delta_{kl}, \quad k, l = 0, \dots, r \text{ sur } \mathcal{S}_r \setminus \mathcal{S}_{r-1}.$$

3. LE MULTIVERS DE BANACH-SCHAUDER

On veut donner une représentation de notre univers observable comme une sous-variété d'une variété de Banach [9]. Soit Ω une variété fermée de dimension n munie d'une section de Dirac γ . Un point $\omega \in \Omega$ est de signature (n_+, n_-) avec $n_+ + n_- \leq n$ si et seulement si il existe une base de champs locaux $\{X_\nu\}$ sur un voisinage U de ω pour laquelle la matrice du tenseur de Poisson

$$(\gamma^{\mu\nu})$$

soit réduite de signature (n_+, n_-) en ω , où

$$\gamma^{\mu\nu} = \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu)$$

et γ^μ est la section d'endomorphismes

$$\gamma^\mu(X) = \gamma(X^\mu \otimes X), \quad X \in TU$$

localement sur U , la 1-forme duale X^ν de X_ν est définie par

$$X^\nu(X_\mu) = \delta_\mu^\nu.$$

On rappelle que pour une 1-forme d et un champ X sur U

$$d \otimes X : U \rightarrow \Lambda^1 U \otimes TU$$

est définie par

$$d \otimes X(\omega) : T_\omega U \rightarrow T_\omega U, \quad d(\omega)(u) X(\omega), \quad u \in T_\omega U \text{ et } \omega \in U$$

la section de Dirac γ est une section du fibré $\text{Hom}(\Lambda^1 U \otimes TU, TU)$, c'est-à-dire,

$$\gamma(\omega) : \text{End}(T_\omega \Omega) \rightarrow T_\omega \Omega$$

on associe à chaque section du fibré $\text{End}(T\Omega)$ un champ de vecteur Y de Ω . On rappelle les définitions données dans [3] pour un fibré vectoriel quelconque. Une section de Dirac γ sur un fibré vectoriel E de base Ω est une section de

$$\text{Hom}(\Lambda^1\Omega \otimes E, E),$$

à toute section de $\Lambda^1\Omega \otimes E$ on associe une section de E . Si s est une section de E et d est une 1-forme sur Ω alors la section $d \otimes s$ de $\Lambda^1\Omega \otimes E$ est définie par

$$(d \otimes s)(\omega) : T_\omega\Omega \rightarrow E_\omega, (d \otimes s)(\omega)(u) = d(\omega)(u) \cdot s(\omega), u \in T_\omega\Omega$$

et un endomorphisme de Dirac est une section du fibré $\text{End}(E)$ définie par

$$\gamma^d(s) = \gamma(d \otimes s), d \in \Lambda^1\Omega \text{ et } s \in \Gamma(E).$$

Si on applique ces définitions au fibré tangent $T\Omega$ pour une sous-variété Ω , on retombe sur les définitions données précédemment. En particulier, pour une section de Dirac γ , les 1-formes d telles que

$$\gamma^d(X) = X, X \in T\Omega$$

sont dites triviales. En chaque événement ω , il existe une base réduite locale pour la section de Dirac. Cette définition ne dépend pas du choix de la base réduite. On fait la même hypothèse que précédemment sur les sous-ensembles formés par les événements de signature (n_+, n_-) avec $n_+ + n_- \leq \kappa$.

”Les composantes connexes des événements de signature (n_+, n_-) avec

$$n_+ + n_- \leq \kappa, \kappa \leq n$$

sont des variétés fermées de dimension k ”

Si $\mathcal{S}_{(n_+, n_-)}$ est formé des événements de signature (n_+, n_-) avec $n_+ + n_- \leq \kappa$ et

$$\mathcal{S}_\kappa = \cup_{n_+ + n_- \leq \kappa} \mathcal{S}_{(n_+, n_-)}$$

chaque composante connexe de \mathcal{S}_κ est une variété fermée et sur chaque composante connexe de $\mathcal{S}_{(n_+, n_-)}$ on peut définir une pseudo-métrique de signature (n_+, n_-) sur la sous-variété $\mathcal{S}_{(n_+, n_-)}$ de \mathcal{S}_n de dimension $n = n_+ + n_-$. Soit $\omega \in \mathcal{S}_{(n_+, n_-)}$ et \mathcal{S}_ω la composante connexe de $\mathcal{S}_{(n_+, n_-)}$ qui contient l'événement ω , on dit qu'une base

$$\{X_0, \dots, X_\nu, \dots, X_{m-1}\}, m = \dim \Omega$$

dans un voisinage U de ω est stable si la matrice restreinte $\tilde{\gamma}_X = (\gamma_\mu^\nu)$ avec $\mu \leq n-1$ et $\nu \leq n-1$, associée au tenseur de Poisson $\gamma^{\mu\nu}$

$$\gamma_\mu^\nu = \gamma^{\mu\nu} = \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu), \gamma^\mu = \gamma^{X^\mu} \text{ et } X^\mu(X_\nu) = \delta_\nu^\mu$$

est inversible en chaque événement α de $\mathcal{S}_\omega \cap U$ avec

$$\text{Vect}\{X_0(\alpha), X_1(\alpha), \dots, X_{n-1}(\alpha)\} = T_\alpha \mathcal{S}_\omega, \alpha \in \mathcal{S}_\omega \cap U$$

en identifiant canoniquement $T_\alpha \mathcal{S}_\omega$ à un sous-espace vectoriel de $T_\alpha \Omega$. On définit à partir de cette base une pseudo-métrique locale g sur $\mathcal{S}_\omega \cap U$ par

$$(g_{\mu\nu}) = \frac{1}{n} (\tilde{\gamma}_X)^{-1}$$

où $(\tilde{\gamma}_X)^{-1}$ la matrice inverse $\tilde{\gamma}_X$. Cette définition est indépendante du choix de la base stable $\{X_\nu\}$. Si on prend une autre base stable $\{Y_\nu\}$ alors

$$Y_\kappa = Y_\kappa^\tau X_\tau$$

et si $\mathcal{P} = (Y_\kappa^\tau)$ est la matrice de passage de $\{X_\nu\}$ à $\{Y_\nu\}$, on pose $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{-1}$,

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$$

où Q_{11} est une matrice carrée inversible d'ordre n et Q_{22} est une matrice carrée d'ordre $m - n$. Pour cette matrice, la stabilité implique

$$Q_{21} = o,$$

la transposée de \mathcal{Q} s'écrit

$$\text{Tr } \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \text{Tr } Q_{11} & o \\ \text{Tr } Q_{12} & \text{Tr } Q_{22} \end{pmatrix}$$

et

$$\widetilde{\gamma}_Y = \text{Tr } \mathcal{Q} \times \widetilde{\gamma}_X \times \mathcal{Q} \quad (3.1)$$

avec

$$\widetilde{\gamma}_X = \begin{pmatrix} \widetilde{\gamma}_{X11} & \widetilde{\gamma}_{X12} \\ \widetilde{\gamma}_{X21} & \widetilde{\gamma}_{X22} \end{pmatrix}$$

où $\widetilde{\gamma}_{X11}$ est la matrice carrée d'ordre n définie par $\widetilde{\gamma}_X$ pour les sections locales $\{X_\nu\}$. On cherche une relation entre $\widetilde{\gamma}_X$ et $\widetilde{\gamma}_Y$. En utilisant 3.1 on a

$$\widetilde{\gamma}_Y = \text{Tr } Q_{11} \times \widetilde{\gamma}_X \times Q_{11}$$

les matrices sont congruentes et inversibles et par conséquent, la pseudo-métrie est indépendante du choix de la base stable de champs locaux au voisinage U de ω .

On se place dans la catégorie des paires (\mathcal{S}, γ) , où \mathcal{S} est une variété fermée et γ est une section de Dirac à structures. On définit la relation d'ordre suivante

$$(\mathcal{S}_1, \gamma_1) \prec (\mathcal{S}_2, \gamma_2)$$

si \mathcal{S}_1 est une singularité de \mathcal{S}_2 pour la section de Dirac γ_2 et les singularités de \mathcal{S}_1 pour la section de Dirac γ_1 sont des singularités de \mathcal{S}_2 pour γ_2 telles que le tenseur de Poisson induit sur les singularités de \mathcal{S}_2 par γ_2 soit identique au tenseur de Poisson induit sur les singularités \mathcal{S}_1 par γ_1 .

$\mathcal{S}_\kappa = \cup_{n_+ + n_- \leq \kappa} \mathcal{S}_{(n_+, n_-)}$ est une pseudo-stratification de \mathcal{S}_κ . Ce n'est pas une stratification au sens de Thom [7], mais une stratification dans le sens suivant, les composantes connexes des événements de $\mathcal{S}_\kappa \setminus \mathcal{S}_{\kappa-1}$ sont formés des points de signature fixée (n_+, n_-) avec $n_+ + n_- = \kappa$, elles forment des sous-variétés ouvertes de \mathcal{S}_κ . Deux composantes connexes peuvent avoir des signatures différentes.

Remark 5. *Quand on parle de singularités de (\mathcal{S}, γ) , \mathcal{S} et les sous-variétés fermées formées par les composantes connexes des événements de signature (n_+, n_-) avec $n_+ + n_- < \dim \mathcal{S}$ sont les singularités de \mathcal{S} pour la section de Dirac γ à structures.*

Soit $\{(\mathcal{S}_\alpha, \gamma_\alpha)\}$ une famille ordonnée filtrante, c'est-à-dire, que pour tout α, β il existe κ tel que

$$(\mathcal{S}_\alpha, \gamma_\alpha) \prec (\mathcal{S}_\kappa, \gamma_\kappa) \text{ et } (\mathcal{S}_\beta, \gamma_\beta) \prec (\mathcal{S}_\kappa, \gamma_\kappa),$$

on pose \mathcal{S} la limite inductive

$$\mathcal{S} = \varinjlim (\mathcal{S}_\alpha, \gamma_\alpha)$$

en chaque événement $\omega \in \mathcal{S}$, on peut définir un espace vectoriel de dimension infinie

$$E_\omega = \varinjlim T_\omega \mathcal{S}_\alpha.$$

La limite inductive \mathcal{S} est appelé un multivers, \mathcal{S} est un multivers de Banach si \mathcal{S} est une variété de Banach et dans cette hypothèse

$$T_\omega \mathcal{S} = E_\omega,$$

et

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ \mathcal{S} \end{array}, E = \bigcup_{\omega \in \mathcal{S}} E_\omega$$

est le fibré tangent associé à cette structure.

Réciproquement, on veut construire à partir d'une variété de Banach de dimension infinie, une section de Dirac γ définie sur la variété dont les composantes connexes des variétés singulières attachées à γ soient des sous-variétés fermées de dimension finie de la variété de Banach. Deux obstacles se présentent, les endomorphismes de Dirac doivent être des endomorphismes à trace pour définir le tenseur de Poisson en dimension infinie et le second obstacle est qu'en dimension infinie il n'existe pas de base algébrique. On est amené à définir les fibrés de Schauder, pour cela on se fixe un fibré de Banach

$$\xi = (E, \pi, B, F)$$

où E et B sont des variétés de Banach, π est C^∞ pour les structures de Banach et F est un espace de Banach de dimension infinie de norme $|\cdots|$. Sur chaque fibre $E_b = \pi^{-1}(b)$, $b \in B$ on a une structure d'espace de Banach induite de norme $|\cdots|_b$ telle que pour toute section s de ξ l'application

$$b \rightarrow |s(b)|_b$$

est C^∞ au sens de Banach. Un fibré de Schauder est un fibré de Banach pour lequel la fibre F a une base de Schauder $\{f_n\}$. En particulier, en chaque point b , il existe une base de Schauder de sections locales $\{s_n\}$ pour laquelle toute section t s'écrit

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} t^n s_n = t^n s_n$$

où t^n sont des fonctions C^∞ au sens de Banach, définies localement sur un ouvert de trivialisatation de B , à valeurs dans \mathbb{R} .

Theorem 2. *Tout fibré de Banach ξ contient un sous-fibré de Schauder.*

Proof. C'est une conséquence du théorème Stanislaw Mazur, on peut consulter [5] pour une preuve. \square

On note $\Lambda^1(B)$, le fibré des 1-formes sur B , c'est-à-dire, l'ensemble des sections s^* qui à chaque $b \in B$ associe une forme linéaire continue

$$X^*(b) : T_b B \rightarrow \mathbb{R},$$

$X^*(b)$ est une forme linéaire continue pour la norme $|\cdots|_b$. Une section de Dirac γ à trace est une section de

$$\text{Hom}(\Lambda^1(B) \otimes E, E)$$

telle que pour toute 1-forme X^* , l'endomorphisme de Dirac

$$\gamma^{X^*}(b) : E_b \rightarrow E_b, \gamma^{X^*}(s) = \gamma(X^* \otimes s) \text{ et } s \in \Gamma(E)$$

est un endomorphisme à trace pour la structure de Banach sur $(E_b, |\cdot\cdot\cdot|_b)$. On se place dans le fibré tangent

$$E = TB,$$

on fait l'hypothèse que ce fibré est un fibré de Schauder. Sur un ouvert de trivialisatation U , on prend une base de champs locaux $\{X_n\}$ formant une base de Schauder locale, c'est-à-dire, pour tout $b \in U$, $\{X_n(b)\}$ est une base de Schauder de

$$(T_b B, |\cdot\cdot\cdot|_b).$$

On définit la base duale locale de $\{X_n\}$ par $\{X^m\}$

$$X^m(X_n) = \delta_n^m$$

alors $X^m \in \Lambda^1(U)$. Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$\gamma^m = \gamma^{X^m}$$

la section sur U d'endomorphismes de Dirac, par hypothèse, ces endomorphismes sont à trace, on en déduit l'existence du tenseur de Poisson sur U en dimension infinie

$$\gamma^{mn} = \text{Trace}(\gamma^m \gamma^n).$$

On définit le sous-ensemble de B formé des éléments finis de B , noté B_{fini} . Un élément $b \in B$ est fini s'il existe un voisinage de trivialisatation U de TB , $b \in U$ et une base locale de champs de Schauder pour laquelle l'ensemble des $\gamma^{mn} \neq 0$ est fini. Le plus petit entier qui réalise la propriété précédente est le rang de b . **On fait l'hypothèse que les composantes connexes, des éléments b de rang $\leq \kappa$ sont des variétés fermées de dimension κ .** On note \mathcal{S}_b^κ , la composante connexe contenant b , si on impose à la fibre d'avoir une base de Schauder **inconditionnelle**, on peut écrire, localement dans cette base la matrice infinie $(\gamma_m^n) = (\gamma^{mn})$ sous la forme

$$(\gamma_m^n(b)) = \begin{pmatrix} A_\kappa(b) & o \\ o & o \end{pmatrix},$$

$A_\kappa(b)$ est une matrice symétrique carrée d'ordre κ . Cette matrice est congrue à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} I_\mu & o & o \\ o & -I_\nu & o \\ o & o & O_{\kappa-(\mu+\nu)} \end{pmatrix}.$$

Le couple (μ, ν) est indépendant du choix de la base de Schauder **inconditionnelle**, c'est la signature de b dans \mathcal{S}_b^κ et le rang de b est $\mu + \nu$, les composantes connexes des points $b \in B$, de signature (μ, ν) sont notées $\mathcal{S}_{(\mu, \nu)}$. Une base locale de Schauder **inconditionnelle** $\{X_n\}$ est stable sur \mathcal{S}^κ si après réindexation de la base de Schauder, notée encore $\{X_n\}$, on ait pour tous les entiers n , $1 \leq n \leq \kappa$

$$b \rightarrow \text{Vect} \{X_n(b), n = 1, \dots, m\}, m \leq \kappa$$

est un m -champ intégrable. Sous cette hypothèse les germes des variétés intégrables sont les traces des variétés fermées et

$$T_b \mathcal{S}^\kappa = \text{Vect} \{X_n(b), n = 1, \dots, \kappa\}.$$

Le multivers de Banach-Schauder est la donnée d'une variété de Banach modélée sur un espace de Banach muni d'une base de Schauder **inconditionnelle** et d'une section de Dirac à trace γ . Les singularités sont les points b de signature

$$(\mu, \nu, \kappa),$$

ils forment une réunion de sous-variétés de dimension $\mu + \nu$ de \mathcal{S}^κ .

Remark 6. Sur $B \setminus B_{\text{fini}}$ il n'existe pas, en général pour une section de Dirac à trace, une notion de métrique induite par cette section, sauf sur les points non singuliers définis par les éléments de $b \in B$ dont la matrice infinie

$$(\gamma_n^m(b)) = (\gamma^{nm}(b))$$

induite par le tenseur de Poisson est inversible, c'est-à-dire, pour laquelle toutes ses sous-matrices carrées finies sont inversibles. On parle de points pour les éléments de la variété de Banach et d'événements pour les éléments des sous-variétés singulières. Le tenseur définie par

$$\gamma_\kappa^{nm}(b) = \gamma^{nm}(b), \quad n \text{ et } m \leq \kappa$$

est le tenseur réduit en b relativement à la base locale de Schauder inconditionnelle $\{X_n\}$.

On peut généraliser cette théorie aux sections g des formes bilinéaires symétriques quelconques sur une variété de Banach B de dimension finie. Les points singuliers b pour g sont les points pour lesquels la forme bilinéaire $g(b)$ sur $T_b B$ est dégénérée. La signature du point b est définie par la signature (n_+, n_-) de la forme bilinéaire g . On note $\text{Sign}(b)$ la signature de b . La section g des formes bilinéaires est à structure si chaque composante de \mathcal{S}^κ formée des points b de signature (n_+, n_-) avec $n_+ + n_- \leq \kappa$ est une variété fermée de dimension κ . On pose

$$\mathcal{S}_{(n_+, n_-)}^\kappa = \{b \in \mathcal{S}^\kappa : \text{Sign}(b) = (n_+, n_-)\}$$

alors

$$\mathcal{S}^\kappa = \sum_{n_+ + n_- \leq \kappa} \mathcal{S}_{(n_+, n_-)}^\kappa,$$

la réunion disjointe est indexée sur une partie des paires $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$, $\alpha + \beta \leq \kappa$. On définit une pseudo-stratification de \mathcal{S}^κ pour laquelle sur chaque sous-variété $\mathcal{S}_{(n_+, n_-)}^\kappa$ on a une métrique de signature (n_+, n_-) induite par g .

4. CONCLUSION

Avec la présentation géométrique développée précédemment, notre univers observable est une partie d'une composante connexe d'une singularité \mathcal{S}^4 de dimension 4 d'une structure géométrique au dessus de \mathcal{S}^4 qu'on définit comme une variété de Banach-Schauder. On note \mathbf{S}^4 cette variété fermée de dimension 4. En dehors des singularités de \mathbf{S}^4 , g induit une métrique de signature $(3, 1)$ qui est une métrique de Lorentz. Les composantes connexes des singularités contenues dans \mathbf{S}^4 sont des points, des lacets, des surfaces de genre ζ et des sous-variétés de dimension 3. Dans ces variétés de dimension 3, on a deux types de variété, celles qui séparent \mathbf{S}^4 et découpent \mathbf{S}^4 en sous-variétés à bord et les sous-variétés singulières de dimension 3 contenues dans chaque composante connexe définie précédemment. Notre univers observable Ω est l'une des composantes connexes privée de ses singularités. Les signatures des points singuliers ne peuvent prendre que les valeurs

$$(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0)$$

$$\text{et } (0, 1), (1, 1), (2, 1).$$

Sur les sous-variétés $\mathbf{S}_{(n_+, n_-)}$ formées des événements de signature (n_+, n_-) on définit des métriques de signature (n_+, n_-) . Supposons que sur \mathbf{S}^4 privé des

événements singuliers noté \mathbf{V}^4 , il existe un champ chronologique stable pour lequel on puisse feuilletter \mathbf{V}^4 , pour les singularités $\mathbf{S}_{(n_+,0)}$ les feuilles chronologiques s'enroulent le long de ces singularités sans jamais les atteindre. Pour les singularités $\mathbf{S}_{(n_+,1)}$, si $n_+ = 0$ les feuilles espaces s'enroulent le long de la singularité. Lorsque le feuilletage est continue aux singularités, dans les deux autres cas, on perd une à deux dimensions d'espace.

REFERENCES

- [1] Jonot J.L. " Sur la ∇^γ -quantification" hal.archives-ouvertes.fr/hal-01083059/document (2014-2015)
- [2] Jonot J.L."Dirac-Weyl-Fock equation along a chronological field" hal.archives-ouvertes.fr/hal-01063612 (2014)
- [3] Jonot J.L."Quantification des fibrés des états" hal.inria.fr/file/index/docid/1063595 (2014-2015)
- [4] Jonot J.L. "Sur l'espace-temps d'Einstein" hal.archives-ouvertes.fr/hal-01147933/document (2014-2015)
- [5] Köthe G. " Mazur's Contributions to functional analysis", Mathematische Annalen, vol. 277, 1987, p. 489-528
- [6] Perelman G."The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, 2002. arXiv: math.DG/0211159
- [7] Thom R. "Ensembles et morphismes stratifiés", Bulletin of the American Mathematical Society 75 (1969), 240–284
- [8] Thurston W. "The geometry and topology of three-manifolds", Princeton lecture notes (1978–1981).
- [9] Tumpach A.B."Variétés kähleriennes et hyperkählériennes de dimension infinie" Thèse HAL archives-ouvertes, 2006.

E-mail address: jean-louis.jonot@ac-versailles.fr