



HAL
open science

Des applications génératrices des nombres premiers et TROIS preuves de l'hypothèse de Riemann

Mohamed Sghiar

► **To cite this version:**

Mohamed Sghiar. Des applications génératrices des nombres premiers et TROIS preuves de l'hypothèse de Riemann. 2015. hal-01183041v7

HAL Id: hal-01183041

<https://hal.science/hal-01183041v7>

Preprint submitted on 3 Sep 2015 (v7), last revised 17 Sep 2015 (v10)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Des applications génératrices des nombres premiers et TROIS
preuves de l'hypothèse de Riemann**

(Déposé dans les HAL en juillet 2015, ref : <hal-01183041>)

3 septembre 2015

M.Sghiar

msghiar21@gmail.com

Présenté à :

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE DIJON

Faculté des sciences Mirande

Département de mathématiques

9 Av Alain Savary

21078 DIJON CEDEX

FRANCE

Abstract : I will prove that there exists one application $\psi(\psi^-, \psi^+)$ on \mathbb{R}^2 such that $\mathcal{P} = \{\pm 2, \pm 3\} \cup 6 \times \mathcal{F}^- + 1 \cup 6 \times \mathcal{F}^+ - 1$ where : \mathcal{P} is the set of relatively prime numbers, $\mathcal{F}^- = \mathbb{Z} \cap (\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*))$ and $\mathcal{F}^+ = \mathbb{Z} \cap (\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*))$. And I will give an algorithm that allows both to generate prime numbers and confirm that \mathcal{P} is indeed determined by the mapping $\psi(\psi^-, \psi^+)$ that I will apply in one of the three proofs of the Riemann hypothesis .

Résumé : Je démontre qu'il existe une application $\psi(\psi^-, \psi^+)$ définie sur \mathbb{R}^2 et telle que $\mathcal{P} = \{\pm 2, \pm 3\} \cup 6 \times \mathcal{F}^- + 1 \cup 6 \times \mathcal{F}^+ - 1$ où : \mathcal{P} est l'ensemble des nombres relatifs premiers, $\mathcal{F}^- = \mathbb{Z} \cap (\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*))$ et $\mathcal{F}^+ = \mathbb{Z} \cap (\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*))$. Et je donnerai un algorithme permettant à la fois de générer les nombres premiers et de confirmer que \mathcal{P} est bel et bien déterminé par l'application $\psi(\psi^-, \psi^+)$ que je vais appliquer dans une parmi les trois preuves de l'hypothèse de Riemann.

Sommaire

Quoi de neuf dans cette version	3
Préface	4
Un lien avec la physique	5
A la mémoire	6
Introduction	8
Notations et définitions	12
1 Le Lien entre les nombres premiers et l'application ψ	12
2 Etude des ensembles $\mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$ et $\mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$	17
3 Algorithme	18
4 Le lien entre les fonctions ζ et ψ	21
5 La première preuve de l'hypothèse de Riemann	22
6 Une deuxième preuve de l'hypothèse de Riemann	25
7 La troisième preuve de l'hypothèse de Riemann	28
Références	30

Quoi de neuf dans cette version

Rectification de la deuxième preuve de l'Hypothèse de Riemann et justification de l'introduction des $\mathcal{B}_{\mu,h}$.

Préface

Quoique je préfère l'application ψ à la fonction ζ de Riemann qui me permet de bien voir les nombres premiers dans un espace à 3 dimension, je donne ici trois preuves de la célèbre hypothèse de Riemann qui a toujours fasciné les mathématiciens et qui a une place centrale dans la recherche mathématique contemporaine. elle a des connexions avec l'analyse (complexe, fonctionnelle, harmonique, hilbertienne...), la théorie des nombres, la géométrie algébrique, les probabilités, les systèmes dynamiques, la mécanique quantique...

sghiar

Un lien avec la physique

Dans la première preuve de l'hypothèse de Riemann, tout point de l'espace est considéré comme une particule dont la position est défini relativement par rapport au repère choisi. Et ζ est une action sur les particules....

Par un changement convenable du repère, on constatera que la fonction ζ restera invariante, et que suite à ce changement de repère, les zéros non triviaux de ζ auront tous $\frac{1}{2}$ pour partie réelle.

sghiar

A la mémoire

A la mémoire du grand professeur, le physicien et mathématicien :

Moshé Flaton

Remerciements

Je tiens à remercier toute personne qui a contribué à la réussite des résultats de cette œuvre dont les techniques ont permis de résoudre en particulier le célèbre problème de l'hypothèse de Riemann.

Je remercie aussi et surtout tout ceux qui ont eu le courage de lire et de relire les différentes versions de cette œuvre dans le but de défendre les mathématiques et d'apporter de l'aide à l'auteur de cette œuvre.

Sghiar

Introduction

On a toujours cherché des formules pour générer les nombres premiers. C'est à dire trouver une formule qui à un entier n associe le n^e nombre premier. Ou d'une manière moins exigeante, on peut se contenter d'exiger une fonction f qui à tout entier n associe un nombre premier et telle que chaque valeur prise ne le soit qu'une fois.

Et on souhaite que la fonction soit calculable en pratique (voir [5]) : Par exemple, le théorème de Wilson [7] (voir aussi [4]) assure que p est un nombre premier si et seulement si $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$. Il s'ensuit que la fonction $f(n) = 2 + (2((n - 1)! \pmod{(n)}))$ vaut n si n est un nombre premier et vaut 2 sinon. Cependant, le calcul de la factorielle (même modulo n) est rédhibitoire pour de grandes valeurs de n , et cette fonction a donc peu de valeur pour générer les nombres premiers.

Une autre fonction, la fonction ζ de Riemann (Voir[3] et [2]), a été introduite pour fournir la position des nombres premiers : En fait, la position des zéros de la fonction ζ de Riemann fournit la position des nombres premiers et on a même pu trouver une formule exprimant chaque nombre premier en fonction des zéros de la fonction ζ de Riemann !.

Pour rappel, la fonction ζ de Riemann est une fonction analytique complexe méromorphe et définie, pour $Re(s) > 1$, par la série de Dirichlet : $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

La fonction ζ admet un prolongement analytique à tout le plan complexe, sauf 1. Il existe plusieurs démonstrations, faisant appel à différentes représentations de la fonction ζ . Parmi elles :

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{u\}}{u^{1+s}} du.$$

Comme $\{u\}$ est toujours compris entre 0 et 1, l'intégrale est convergente pour

$Re(s) > 0$.

La fonction ζ satisfait à l'Équation fonctionnelle : $\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$

valable pour tout nombre complexe s différent de 0 et 1. Ici, Γ désigne la fonction gamma.

L'hypothèse de Riemann [6] est une conjecture formulée en 1859 par le mathématicien Bernhard Riemann. Elle dit que les zéros non triviaux de la fonction zêta ζ de Riemann ont tous pour partie réelle $1/2$.

Le lien entre la fonction ζ et les nombres premiers avait déjà été établi par Leonhard Euler avec la formule, valable pour $Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \dots}$$

où le produit infini est étendu à l'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers. On appelle parfois cette formule produit eulérien.

Un autre lien existe aussi avec la fonction de comptage $\pi(x)$ des nombres premiers inférieurs ou égaux à x :

$$\pi(x) = \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq x} 1$$

On a en effet, pour $Re(s) > 1$: $\ln \zeta(s) = s \int_2^\infty \frac{\pi(u)}{u(u^s-1)} du$.

À cause de la relation entre la fonction ζ et la fonction π , l'hypothèse de Riemann a une importance considérable en théorie des nombres : Car elle donne une meilleure estimation de l'erreur intervenant dans le théorème des nombres premiers qui permet d'obtenir une formule qui donne le comportement asymptotique du n^{eme} nombre premier p_n : $p_n \sim n \ln(n)$. En effet : Helge von Koch en 1901 a montré plus précisément : L'hypothèse de Riemann

équivalent à $\pi(x) = \text{li}(x) + O(\sqrt{x} \ln x)$. où $\text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln(t)}$.

Malgré tout cela, je trouve que les fonctions ζ et π ne permettent qu'une approximation des nombres premiers.

Dans cette esprit, j'ai trouvé l'application $\psi(\psi^-, \psi^+)$ qui va générer tout les nombres premiers.

Et en démontrant dans le corollaire 2.1 que $\mathcal{P} = \{\pm 2, \pm 3\} \cup 6 \times \mathcal{F}^- + 1 \cup 6 \times \mathcal{F}^+ - 1$ où : \mathcal{P} est l'ensemble des nombres relatifs premiers, $\mathcal{F}^- = \mathbb{Z} \cap (\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*))$ et $\mathcal{F}^+ = \mathbb{Z} \cap (\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*))$, ceci s'interprète Graphiquement comme suit : \mathcal{F}^+ est l'ensemble des points relatifs qui sont une projection sur l'axe \overrightarrow{OZ} du graphe de l'application $\psi^- | \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ dont on a enlevé les points qui sont dans l'intersection avec le graphe de l'application $\psi^- | \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$. Et \mathcal{F}^- est l'ensemble des points relatifs qui sont une projection sur l'axe \overrightarrow{OZ} du graphe de l'application $\psi^+ | \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ dont on a enlevé les points qui sont dans l'intersection avec le graphe de l'application $\psi^+ | \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$.

Il s'en suit que $\mathcal{P} \setminus \{\pm 2, \pm 3\}$ est l'ensemble des points relatifs qui sont une projection sur l'axe \overrightarrow{OZ} des graphes de deux applications $6\psi^+ + 1$ et $6\psi^- - 1$ dont on a enlevé respectivement les points des graphes des applications $6\psi^+ | \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* + 1$ et $6\psi^- | \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* + 1$. Ce résultat est décrit par le corollaire 2.2.

Et enfin, et pratiquement, on déduit de cette étude un algorithme 3.1 permettant à la fois de générer les nombres premiers et de confirmer que \mathcal{P} est bel et bien déterminé par l'application $\psi(\psi^-, \psi^+)$ que je vais appliquer dans les trois preuves de la célèbre hypothèse de Riemann qui a une place centrale dans la recherche mathématique contemporaine. elle a des connexions avec l'analyse (complexe, fonctionnelle, harmonique, hilbertienne...), la théorie des nombres, la géométrie algébrique, les probabilités, les systèmes dynamiques,

la mécanique quantique...

Notations et définitions

Par convention ± 1 seront considérés des premiers.

Soient les applications suivantes :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (-\alpha + (1 + 6\alpha)\beta, \alpha + (1 + 6\alpha)\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi^+ : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha + (1 + 6\alpha)\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi^- : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto -\alpha + (1 + 6\alpha)\beta \end{aligned}$$

Posons $\mathcal{F}^+ = \{k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \forall \alpha \in \mathbb{Z}^*, \frac{k+\alpha}{1+6\alpha} \notin \mathbb{Z}^*\}$ ($\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$)

Et posons $\mathcal{F}^- = \{k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \forall \alpha \in \mathbb{Z}^*, \frac{k-\alpha}{1+6\alpha} \notin \mathbb{Z}^*\}$

Si χ est une partie de \mathbb{R}^2 , l'application indicatrice $\mathbb{1}_\chi$ est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_\chi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \mathbb{1}_\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \chi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

1 Le Lien entre les nombres premiers et l'application ψ

Théorème 1.1 *Si \mathcal{P} est l'ensemble des nombres relatifs premiers, alors :*

$$\mathcal{P} = \{\pm 2, \pm 3\} \cup 6 \times (\mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)) + 1 \cup 6 \times (\mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)) - 1$$

Lemme 1.1 (lemme fondamental) *Tout nombre premier de $\mathbb{Z} \setminus \{\pm 2, \pm 3\}$ s'écrit sous la forme : $p = 6k + 1$ ou $p = 6k - 1$ où $k \in \mathbb{Z}$*

Théorème 1.2 (Théorème de Bézout) [1]

a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers relatifs x et y tels que $ax + by = \pm 1$.

Corollaire 1.1 *Si n est un nombre de $\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$. Alors n est premier si et seulement si on a : i- ou ii- :*

$$i : n = 6k + 1 \text{ et } k \in \mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$$

$$ii : n = 6k - 1 \text{ et } k \in \mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$$

Preuve du lemme 1.1

Si p est un premier de $\mathbb{Z} \setminus \{\pm 2, \pm 3\}$, alors p et 6 sont premiers entre eux, donc du Théorème de Bézout 1.2 :

$$\exists(\alpha', \beta') \in \mathbb{Z}^2 \text{ tels que } : \alpha'p + 6\beta' = \pm 1$$

En divisant α' par 6 :

$$\exists(\alpha'', \beta'') \in \mathbb{Z}^2 \text{ tels que } : \alpha''p + 6\beta'' = \pm 1 \text{ avec } \alpha'' \in \{1, 3, 5\}$$

Sachant que $5 = 6 - 1$, on en déduit que :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } : p + 6k = \pm 1$$

d'où le résultat.

Preuve du corollaire 1.1 :

On va démontrer le point i-, le point ii- est se démontre de la même façon :

Soit n un nombre de $\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$.

Si $n = 6k + 1$ et $k \in \mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$:

Si n n'est pas premier, alors $n = mm'$, avec : $m = 6\alpha + 1$ et $m' = 6\beta + 1$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^{*2}$; on en déduit que : $k = 6\alpha\beta + (\alpha + \beta)$, ce qui est absurde.

Donc n est premier si $n = 6k + 1$ et $k \in \mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$.

Inversement si n est premier de $\mathbb{Z} \setminus \{\pm 2, \pm 3\}$, alors du lemme 1.1, $n = 6k + 1$ ou $n = 6k - 1$ où $k \in \mathbb{Z}$

Supposons que $n = 6k + 1$

Si $k \notin \mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$, alors : $k = 6\alpha\beta + (\alpha + \beta)$, et par suite : $n = 6k + 1 = 6(6\alpha\beta + (\alpha + \beta)) + 1 = (6\alpha + 1)(6\beta + 1)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^{*2}$, ce qui contredit

que n est premier. Et par suite $k \in \mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$.

De même si $n = 6k - 1$.

Si $k \notin \mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$, alors : $k = 6\alpha\beta + (-\alpha + \beta)$, et par suite : $n = 6k - 1 = 6(6\alpha\beta + (-\alpha + \beta)) - 1 = (6\alpha + 1)(6\beta - 1)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^{*2}$, ce qui contredit que n est premier. Et par suite $k \in \mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$.

D'où le corollaire 1.1.

Preuve du Théorème 1.1 :

Se déduit directement du corollaire 1.1. Et du fait que ± 1 qui sont par convention des nombres premiers appartiennent à $6 \times (\mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)) + 1 \cup 6 \times (\mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)) - 1$

Corollaire 1.2 *Si \mathcal{P} est l'ensemble des nombres relatifs premiers, et si ϕ^+ et ϕ^- sont deux applications surjectives définies respectivement de \mathbb{Z} sur $\mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$ et de \mathbb{Z} sur $\mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$ alors : $\mathcal{P} = \{\pm 2, \pm 3\} \cup 6 \times \phi^+(\mathbb{Z}) + 1 \cup 6 \times \phi^-(\mathbb{Z}) - 1$*

Corollaire 1.3 *Si \mathcal{P} est l'ensemble des nombres relatifs premiers, et si ϕ est une application définie sur \mathbb{Z} telle que $\mathcal{P} = \{\phi(k), k \in \mathbb{Z}\}$, alors il existe ϕ^+ et ϕ^- deux applications surjectives définies respectivement de \mathbb{Z} sur $\mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$ et de \mathbb{Z} sur $\mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$ telles que : $\forall k \in \mathbb{Z}$ telle que $\phi(k) \notin \{\pm 2, \pm 3\}$, alors $\phi(k) = 6\phi^+(k) + 1$ ou $\phi(k) = 6\phi^-(k) - 1$*

Remarques :

- i- Du corollaire 1.2, on déduit que la connaissance des ensembles $\mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$ et de $\mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$ permet de déterminer les applications ϕ^+ et ϕ^- génératrices des nombres premiers. D'où l'intérêt de les étudier dans la section 2.
- ii- Le Théorème 1.1 est testé pour tout les nombres premiers appartenant à $[-1, 241] \setminus \{2, 3\}$ et obtenus par les applications ψ^+ et ψ^- comme le

montre le tableur suivant :

Les nombres premiers $\in \hat{\Delta}[-1, 241] \setminus \{2, 3\}$ et obtenus par ψ^+ et ψ^-							
a	b	$6ab + a + b$	$k \in \mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$	$6 \times k + 1$	$6ab - a + b$	$k \in \mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$	$6 \times k - 1$
1	1	8	0	1	6	0	-1
1	2	15	1	7	13	1	5
1	3	22	2	13	20	2	11
1	4	29	3	19	27	3	17
1	5	36	4	25	34	4	23
1	6	43	5	31	41	5	29
1	7	50	6	37	48	6	41
1	8	57	7	43	55	7	47
1	9	64	8	49	62	8	53
1	10	71	10	61	69	10	59
1	11	78	11	67	76	11	65
1	12	85	12	73	83	12	71
1	13	92	13	79	90	13	77
1	14	99	14	85	97	14	83
1	15	106	16	97	104	16	89
2	1	15	17	103	111	17	95
2	2	28	18	109	24	18	101
2	3	41	19	115	37	19	107
2	4	54	20	121	50	20	113
2	5	67	21	127	63	21	119
2	6	80	23	139	76	23	125
2	7	93	25	151	89	25	131
2	8	106	26	157	102	26	137
-1	-1	4	27	163	6	27	143
-1	-2	9	30	181	11	28	149
-1	-3	14	32	193	16	29	155
-1	-4	19	33	199	21	30	161
-1	-5	24	34	205	26	31	167
-1	-6	29	35	211	31	32	173
-1	-7	34	37	223	36	33	179
-2	1	-13	38	229	-9	34	185
-2	-2	20	40	241	24	35	191

2 Etude des ensembles $\mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$ et $\mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)$

Lemme 2.1

$$i- \mathbb{Z} \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*) = \mathcal{F}^- = \{k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \forall \alpha \in \mathbb{Z}^*, \frac{k-\alpha}{1+6\alpha} \notin \mathbb{Z}^*\} \quad (\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

$$ii- \mathbb{Z} \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*) = \mathcal{F}^+ = \{k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \forall \alpha \in \mathbb{Z}^*, \frac{k+\alpha}{1+6\alpha} \notin \mathbb{Z}^*\}$$

Preuve du lemme 2.1 : Démontrons le i-, la preuve du ii- est similaire :

En effet, il suffit de voir que :

$$k \in \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*) \iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^{*2} \text{ tels que } k = 6\alpha\beta + \alpha + \beta \iff \exists \alpha \in \mathbb{Z}^* \text{ tel que } \frac{k-\alpha}{1+6\alpha} \in \mathbb{Z}^*$$

Du lemme 2.1 et du Théorème 1.1, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2.1 $\mathcal{P} = \{\pm 2, \pm 3\} \cup 6 \times \mathcal{F}^- + 1 \cup 6 \times \mathcal{F}^+ - 1$ où :

$$\mathcal{F}^- = (\mathbb{Z} \cap \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})) \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*) = \mathbb{Z} \cap (\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \setminus \psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)) \text{ et}$$

$$\mathcal{F}^+ = (\mathbb{Z} \cap \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})) \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*) = \mathbb{Z} \cap (\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \setminus \psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*))$$

Remarque :

Interprétation Graphique du corollaire 2.1 : \mathcal{F}^+ est l'ensemble des points relatifs qui sont une projection sur l'axe \overrightarrow{OZ} du graphe de l'application $\psi^-|_{\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}}$ dont on a enlevé les points qui sont dans l'intersection avec le graphe de l'application $\psi^-|_{\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*}$. Et \mathcal{F}^- est l'ensemble des points relatifs qui sont une projection sur l'axe \overrightarrow{OZ} du graphe de l'application $\psi^+|_{\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}}$ dont on a enlevé les points qui sont dans l'intersection avec le graphe de l'application $\psi^+|_{\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*}$.

Il s'en suit que $\mathcal{P} \setminus \{\pm 2, \pm 3\}$ est l'ensemble des points relatifs qui sont une projection sur l'axe \overrightarrow{OZ} des graphes de deux applications $6\psi^+ + 1$ et $6\psi^- - 1$ dont on a enlevé respectivement les points des graphes des applications $6\psi^+|_{\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*} + 1$ et $6\psi^-|_{\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*} - 1$.

Ce qui se traduit par :

Corollaire 2.2 $\mathcal{P} \setminus \{\pm 2, \pm 3\} = \mathcal{D}(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$

Où \mathcal{D} est l'application de $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ sur \mathbb{Z} définie par :

$$\mathcal{D} = [(6\psi^+ + 1) \times \mathbb{1}_{\mathbb{Z}} \circ (6\psi^+ + 1) \times (\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2} - \mathbb{1}_{6\psi^+(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)+1}) \circ (6\psi^+ + 1)] + [(6\psi^- - 1) \times \mathbb{1}_{\mathbb{Z}} \circ (6\psi^- - 1) \times (\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2} - \mathbb{1}_{6\psi^-(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*)+1}) \circ (6\psi^- - 1)]$$

Remarque : Les nombres premiers sont donc déterminés par les applications ψ^+ et ψ^-

3 Algorithmme

Théorème 3.1 (Algorithmme) Soit n un entier relatif impair de $\mathbb{Z} \setminus \{\pm 3\}$:

Si $n = 6k+1$, alors n est premier si et seulement si $\frac{n-1-\alpha}{1+6\alpha} \notin \mathbb{Z} \forall \alpha$ tel que $0 \leq \alpha \leq \frac{n-1-1}{7}$ et $\forall \alpha$ tel que $0 \leq -\alpha \leq \frac{n-1+1}{5}$

Si $n = 6k-1$, alors n est premier si et seulement si $\frac{n-1+\alpha}{1+6\alpha} \notin \mathbb{Z} \forall \alpha$ tel que $0 \leq \alpha \leq \frac{n-1-1}{5}$ et $\forall \alpha$ tel que $0 \leq -\alpha \leq \frac{n-1+1}{7}$

Preuve du Théorème 3.1 : Se déduit du lemme 2.1 et du Théorème 1.1.

Voici ci-dessous un code en langage C pour tester le dernier résultat.

```
// Début du code de test de primalité écrit
// par sghiar et rectifié le 10 août 2015
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
int main()
{
    int k ;
    long n;
    int ren;
    long b=1;
    double c = 1;
    int e=1;
    int f=1;
```

```
printf("Entrez un entier relatif pour tester
      sa primalité: ");
ren = scanf("%d", &n);
printf("Votre valeur est %d \n", n);

if(n==49 ||n==-49 || n==35 ||n==-35){
printf(" %.d n'est pas premier ",n);
}
else{
    if( n==1 || n==-1 ){
        printf(" %.d est premier par convention ",n)
        ;
    }
    else {
        if((n-1)%6==0 ){
            k=(n-1)/6;
            for( b =1; b < (double)(k-1)/7 -1;b++ ){
                c= (double)(k-b)/(1+6*b);
                if((c -floor(c) )==0 ){
                    e=0;
                }
            }
            for( b = -(double)(k+1)/5; b < 0;b++ ){
                c= (double)(k-b)/(1+6*b);
                if((c -floor(c) )==0){
                    f=0;
                }
            }
            if (e*f==0){
                printf(" %.d n'est pas premier",n);
            }
            else if (e*f==1){
                printf(" %.d est premier",n);
            }
            }
            else if((n+1)%6==0 ){
                k=(n+1)/6;
                for( b =1; b < (double)(k-1)/5;b++ ){
                    c= (double)(k+b)/(1+6*b);
                    if((c -floor(c) )==0){
                        e=0;
```

```
    }
    }
    for( b = -(double)(k+1)/5; b < 0; b++ ){
    c= (double)(k+b)/(1+6*b);
    if((c -floor(c) )==0){
    f=0;
    }
    }
    if (e*f==0){
    printf(" %.d  n'est pas premier",n);
    }
    else if (e*f==1){
    printf(" %.d  est  premier",n);
    }
    }
    else if(n==2 ||n==-2 || n==3 ||n==-3){
    printf(" %.d  est  premier",n);
    }
    else {
    printf(" %d  n'est pas premier",n);
    }
    }
    }
    }
    //Fin du code
```

4 Le lien entre les fonctions ζ et ψ

Le lien entre la fonction ζ et les nombres premiers avait déjà été établi par Leonhard Euler avec la formule, valable pour $Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \dots}$$

où le produit infini est étendu à l'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers. On appelle parfois cette formule produit eulérien.

On en déduit :

Corollaire 4.1 (Un lien entre ψ et ζ)

$$\exists \mathcal{K}, \mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} / \forall s, Re(s) > 1 : \zeta(s) = \prod_{k \in \mathcal{K}} \frac{1}{1 - (6\psi^+(k) + 1)^{-s}} \prod_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{1 - (6\psi^-(l) - 1)^{-s}}$$

5 La première preuve de l'hypothèse de Riemann

Le but de cette section est de donner une première démonstration de l'hypothèse de Riemann en utilisant l'analyse et la géométrie.

Théorème 5.1 (L'hypothèse de Riemann) [6]

Les zéros non triviaux de la fonction zêta ζ de Riemann ont tous pour partie réelle $1/2$.

Preuve du Théorème 5.1 :

Comme la fonction éta de Dirichlet peut être définie par $\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$

où : $\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$

On a en particulier :

$$\zeta(z) = \frac{1}{1 - 2^{1-z}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}$$

pour $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$,

On en déduit que :

$$(1 - 2^{1-s})k^z \zeta(z) = (-1)^{k-1} + k^z \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}$$

$$(-1)^k = k^z \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z} \quad (1)$$

si z est une racine non triviale de ζ .

Soit :

$$0 = \frac{(-1)^{k+1}}{k^z} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z} \quad (2)$$

si z est une racine non triviale de ζ .

Or de l'équation (2),

$$\left| \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z} \right|$$

est plus petit que $k^\mu \forall \mu \geq 0$, donc

$$\left| \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z} \right| = k^{\mu-\epsilon} \text{ avec } \epsilon \geq 0,$$

$$|k^{z+\mu-\epsilon}| = 1 \quad (3)$$

De 3 on déduit :

$$x + \mu - \epsilon = 0 \quad (4)$$

Si z' est une autre racine non triviale de ζ , avec $Re(z') = x'$ alors il existe μ' et ϵ' tels que :

$$x' + \mu' - \epsilon' = 0 \quad (5)$$

Et

$$\alpha((x' + x) + (\mu' + \mu) - (\epsilon' + \epsilon)) = 0; \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (6)$$

Donc l'ensemble $\mathcal{S} = \{(x, \mu, \epsilon) \mid x + \mu - \epsilon = 0, x = Re(z), \zeta(z) = 0\}$ est contenu dans le \mathbb{R} - espace vectoriel \mathcal{S}' de dimension deux : $\mathcal{S}' = \{(x, \mu, x + \mu), (x, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

On en déduit que si \mathcal{Z} est l'ensemble des zéros $x + iy$ non triviaux de ζ , alors \mathcal{Z} est contenu dans la droite \mathcal{D} intersection du plan \mathcal{S}' avec le plan $z = 0$, donc tout les points de \mathcal{Z} sont **alignés**.

On peut voir facilement que $\mathcal{D} = \{\rho e^{i\frac{\pi}{4}}, \rho \in \mathbb{R}\}$

Dans un repère convenablement choisi, tout les points de \mathcal{Z} auront pour partie réel $\frac{1}{2}$: En effet , il suffit de faire le changement suivant :

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto i(z - \frac{1}{2})e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

τ agit sur ζ comme suit : $\tau\zeta(z) = \zeta(\tau(z))$.

On a donc : $\tau\zeta\tau^{-1}(z) = \zeta(z)$. (Invariance de $\zeta(z)$ sous l'action adjointe)

$$\tau\zeta\tau^{-1}(\tau(z)) = 0 \implies \tau\zeta(z) = 0 \implies \zeta(\tau(z)) = 0 \implies \tau(z) \in \mathcal{D} \implies \tau(z) = \rho e^{i\frac{\pi}{4}} \implies \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}.$$

D' où l'hypothèse de Riemann. ✓

Fin de la première preuve de l'hypothèse de Riemann ✓

Remarque : On ne doit pas s'étonner par l'introduction nouvelle du repère et de l'action adjointe sur ζ : En fait on peut interpréter ceci comme suit : Tout point de l'espace est considéré comme une particule dont la position est défini relativement par rapport au repère choisi. Et ζ est une action sur les particules....

Cette idée je l'ai déjà utilisée dans l'article déposé dans les hal : "Relativité et théorie des des nombres" et qui a permis la preuve de nombreux conjectures, en particulier la preuve de l'Hypothèse de Riemann en utilisant des techniques relativistes.

6 Une deuxième preuve de l'hypothèse de Riemann

Le but de cette section est de donner une deuxième démonstration de l'hypothèse de Riemann à partir du lien entre les fonctions ζ et ψ .

Théorème 6.1 (L'hypothèse de Riemann) [6]

Les zéros non triviaux de la fonction zêta ζ de Riemann ont tous pour partie réelle $1/2$.

Lemme 6.1 :

Toutes les racines non triviales de ζ sont symétriques par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$

Preuve : Résulte de l'équation fonctionnelle :

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s),$$

Lemme 6.2 *Les zéros s non triviaux de ζ vérifient $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$*

Preuve : Ce résultat est très connu.

Le lien entre la fonction ζ et les nombres premiers avait déjà été établi par Leonhard Euler avec la formule, valable pour $\operatorname{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \cdots}$$

où le produit infini est étendu à l'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers. On appelle parfois cette formule produit eulérien.

Et comme la fonction zêta de Dirichlet peut être définie par $\eta(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s)$

où : $\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$

On a en particulier :

$$\zeta(z) = \frac{1}{1-2^{1-z}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}$$

pour $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$,

On en déduit le corollaire suivant qui est similaire au corollaire 4.1 :

Corollaire 6.1 (un lien entre ψ et ζ) $\exists \mathcal{K}, \mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} / \forall s / 0 < \operatorname{Re}(s) < 1$, : $\zeta(s) = \prod_{k \in \mathcal{K}} \frac{1}{1-(\psi^+(k)+1)^{-s}} \prod_{l \in \mathcal{L}} \frac{1}{1-(\psi^-(l)-1)^{-s}}$

Preuve : Se déduit des sections précédentes.

Et on en déduit aussi que :

$$\zeta(2z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2z}}$$

est bien définie pour $2z$ tel que $0 < \operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}$.

Remarque et définition des $\mathcal{B}_{\mu,h}$:

De ce qui est dit ci-dessus, $\zeta(s)$ est bien définie pour $s = 2z$ avec $0 < \operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}$, ceci justifie l'introduction des $\mathcal{B}_{\mu,h}$:

Posons $\mathcal{B}_{\mu,h} = \{z \in \mathbb{C} / \frac{1}{2} + \mu \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1 - \mu \text{ et } \mu \leq |\operatorname{Im}z| \leq h\} \cup \{z \in \mathbb{C} / \mu \leq \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2} - \mu \text{ et } \mu \leq |\operatorname{Im}z| \leq h\}$ où $0 < \mu < \frac{1}{4}$

Posons $f_n(s) = \sum_{k \in \mathcal{K}, \psi^+(k) \leq n} \log(|1 - (\psi^+(k))^{-s}|) + \sum_{l \in \mathcal{L}, \psi^-(l) \leq n} \log(|1 - (\psi^-(l))^{-s}|)$

Lemme 6.3 $\mathcal{B}_{\mu,h}$ est compact et symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$

Corollaire 6.2 $\forall \mathcal{B}_{\mu,h}, \exists \mathcal{K}, \mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} / \forall s \in \mathcal{B}_{\mu,h} : \log(|\zeta(s)|^{-1}) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \log(|1 - (\psi^+(k))^{-s}|) + \sum_{l \in \mathcal{L}} \log(|1 - (\psi^-(l))^{-s}|)$

On en déduit que : $\forall \mathcal{B}_{\mu,h}, \exists \mathcal{K}, \mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} / \forall s \in \mathcal{B}_{\mu,h} : |\log(|\zeta(s)|^{-1})| \leq \sum_{k \in \mathcal{K}} |\log(|1 - (\psi^+(k))^{-s}|)| + \sum_{l \in \mathcal{L}} |\log(|1 - (\psi^-(l))^{-s}|)|$

Preuve du Corollaire 6.2 : Se déduit du 6.1 par passage au log, et du fait que la suite f_n converge simplement dans le compact $\mathcal{B}_{\mu,h}$ vers $\log(|\zeta|^{-1})$.

Corollaire 6.3 $\forall s \in \mathcal{B}_{\mu,h} : \zeta(s) = 0 \Rightarrow \exists k \in \mathcal{K} / |\log(|1 - (\psi^+(k))^{-s}|)| = +\infty$ ou $\exists l \in \mathcal{L} / |\log(|1 - (\psi^-(l))^{-s}|)| = +\infty$

Où $\mathcal{K}, \mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

Preuve : Se déduit directement du corollaire 6.2 et du fait que la suite f_n qui converge simplement dans le compact $\mathcal{B}_{\mu,h}$ vers $\log(|\zeta|^{-1})$ convergera uniformément vers $\log(|\zeta|^{-1})$ dans le compact $\mathcal{B}_{\mu,h}$.

La deuxième preuve de l'hypothèse de Riemann :

Du corollaire 6.3 , si $\zeta(s) = 0$ avec $s \in \mathcal{B}_{\mu,h}$, alors : $\exists k \in \mathcal{K} / |\log(|1 - (\psi^+(k))^{-s}|)| = +\infty$ ou $\exists l \in \mathcal{L} / |\log(|1 - (\psi^-(l))^{-s}|)| = +\infty$

Donc $\exists k \in \mathcal{K} / 1 = |\psi^+(k)^{-s}|$ ou $\exists l \in \mathcal{L} / 1 = |\psi^-(l)^{-s}|$

Supposons que

$$\exists k \in \mathcal{K} / 1 = |\psi^+(k)^{-s}| \quad (7)$$

Comme du lemme 6.1 les racines non triviaux de ζ sont symétriques par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$, alors de l'équation 7, en posant $s = \frac{1}{2} + x + iy$ on doit avoir :

$$1 = |\psi^+(k)^{-\frac{1}{2}-x-iy}| = |\psi^+(k)^{-\frac{1}{2}-x}| \quad (8)$$

Donc $x = -\frac{1}{2}$, et par suite $Re(s) = 0$, ce qui est impossible puisque $s \in \mathcal{B}_{\mu,h}$, on en déduit que si $\zeta(s) = 0$ alors : $Re(s) = \frac{1}{2}$

Fin de la deuxième preuve de l'hypothèse de Riemann ✓

7 La troisième preuve de l'hypothèse de Riemann

Le but de cette section est de donner une troisième preuve de l'hypothèse de Riemann, en utilisant de la géométrie algébrique :

Théorème 7.1 (L'hypothèse de Riemann) [6]

Les zéros non triviaux de la fonction zêta ζ de Riemann ont tous pour partie réelle $1/2$.

Pour cette troisième preuve, rappelons que dans la première preuve de l'hypothèse de Riemann, on a montré que si z est une racine non triviale de ζ avec $Re(z) = \frac{1}{2} + x$, alors :

$$\frac{1}{2} + x + \mu - \epsilon = 0 \quad (9)$$

Soit :

$$x + \left(\mu + \frac{1}{2}\right) - \epsilon = 0 \quad (10)$$

Or du lemme 6.1, on sait que les racines non triviales de ζ , sont symétriques par rapport à l'axe $x = \frac{1}{2}$, donc il existe ϵ' tel que :

$$\frac{1}{2} - x + \mu' - \epsilon' = 0 \quad (11)$$

Soit :

$$-x + \left(\mu + \frac{1}{2}\right) - \epsilon'' = 0 \quad (12)$$

Les équations 10 et 12 sont des équations de deux plans qui rencontrent le plan $\epsilon' = 0$ en un point tel que :

$$x + \left(\mu + \frac{1}{2}\right) = 0 \text{ et } -x + \left(\mu + \frac{1}{2}\right) = 0, \text{ donc } x = 0.$$

Soit :

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2} + x = \frac{1}{2}$$

D'où la troisième preuve de l'hypothèse de Riemann. ✓

Fin de la troisième preuve de l'hypothèse de Riemann ✓

Références

- [1] Lililiane Alfonsi. *Etienne Bézout (1730-1783), mathématicien des Lumières*. 2011. L. Alfonsi indique aussi quelques manuels du début du XXe siècle où le nom de Bézout est utilisé.
- [2] R. J. Backlund. Sur les zéros de la fonction zeta de riemann. *CRAS*, 158 :1979–1981, 1914.
- [3] Pierre Colmez et Philippe Biane Jean-Benoît Bost. *La Fonction Zêta*. Éditions de l'École polytechnique, Paris, 2002.
- [4] Roshdi Rashed. Entre arithmétique et algèbre : Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes. *Paris*, 1984.
- [5] Ribenboim. *introduction du chapitre 3*. 1996.
- [6] Karl Sabbagh. *The Riemann Hypothesis : The Greatest Unsolved Problem in Mathematics*. ISBN 0-374-52935-3. Farrar, Straus and Giroux, 2004.
- [7] Edward Waring. *Edward Waring Meditationes*. 1770.

M.Sghiar

msghiar21@gmail.com

9 Allée capitaine J.B. Bossu, 21240, Talant.

Tel : (France) 0033669753590