Un modèle de poutre de Timoshenko construit à partir de la méthode des développements asymptotiques

Qian Zhao, Patrice Cartraud, Panagiotis Kotronis

▶ **To cite this version:**

Qian Zhao, Patrice Cartraud, Panagiotis Kotronis. Un modèle de poutre de Timoshenko construit à partir de la méthode des développements asymptotiques. CSMA 2015, 12ème Colloque National en Calcul des Structures, May 2015, Presqu'île de Giens (Var), France. hal-01180339

HAL Id: hal-01180339
https://hal.science/hal-01180339

Submitted on 20 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2015
12e Colloque National en Calcul des Structures
18-22 Mai 2015, Presqu'île de Giens (Var)

Un modèle de poutre de Timoshenko construit à partir de la méthode des développements asymptotiques

Q. Zhao[1], P. Cartraud[1], P. Kotronis[1]

[1] *GeM, Ecole Centrale Nantes, {qian.zhao,patrice.cartraud,panagiotis.kotronis}@ec-nantes.fr*

Résumé — Dans ce travail l'objectif est de définir un modèle de poutre de Timoshenko en utilisant la méthode des développements asymptotiques, qui conduit à la résolution de problèmes locaux. En considérant les problèmes locaux d'ordre supérieur, il est possible de caractériser la réponse de la structure en flexion simple, et par la suite de définir sa rigidité en cisaillement transverse. Un exemple numérique illustre la qualité du modèle de Timoshenko ainsi obtenu.
Mots clés — méthode des développements asymptotiques, cisaillement transverse, Timoshenko.

1 Instructions générales

Les modèles de poutre sont très largement utilisés pour l'analyse des structures élancées. Ils correspondent en effet à un modèle 1D et à des temps de calculs négligeables, ce qui constitue un avantage important par rapport à une modélisation 3D. D'un point de vue théorique, le modèle d'Euler-Bernoulli peut être justifié rigoureusement comme étant le modèle limite obtenu quand l'élancement tend vers l'infini. Ceci peut par exemple être réalisé à partir de la méthode des développements asymptotiques et grâce à des théorèmes de convergence [1], Trabucho and Viaño [2].

Il existe cependant des situations fréquentes – élancement fini, structures hétérogènes – pour lesquelles le modèle d'Euler-Bernoulli est trop approximatif. Si on cherche alors à obtenir un modèle 1D plus précis que celui-ci par une approche asymptotique, il s'avère que c'est possible, avec une très bonne approximation de la solution 3D Buannic and Cartraud [3] et à condition de prendre en compte les effets de bords. Cependant ce modèle met en jeu des gradients de contraintes généralisées et de déformation. Certes il serait possible de définir un modèle à gradient, comme cela a été réalisé sur les plaques [4], mais ce type d'approchen'est pas réellement adaptée à une utilisation « industrielle ».

En revanche, pour les applications citées ci-dessus, il est classique d'utiliser un modèle de type Timoshenko. L'objectif de ce travail est de montrer comment un tel modèle peut être construit à partir d'une approche asymptotique, dont le point de départ est l'élasticité 3D. Ce travail est donc proche de [5] mais sans utiliser d'approche variationnelle. L'objectif précédent soulève essentiellement deux questions 1) formuler à partir de l'approche asymptotique un problème bien posé qui caractérise la réponse de la structure à un effort tranchant 2) définir à partir de la solution de ce problème les constantes matérielles qui interviennent dans le modèle de Timoshenko.

Pour répondre à ces deux questions il convient de rappeler les grandes étapes de la méthode des développements asymptotiques, pour une poutre à section hétérogène mais invariante selon son axe. Le problème d'élasticité 3D met en jeu un petit paramètre qui est égal à l'inverse de l'élancement de la structure. En recherchant la solution en déplacement de ce problème selon un développement en puissances croissantes de ce petit paramètre, le problème 3D initial se décompose en une série de problèmes macroscopiques 1D et de problèmes microscopiques 1D posés sur la section.

La première série de problèmes microscopiques permet de caractériser la réponse de la structure en traction, flexion ou torsion pures. Le problème macroscopique correspondant est un problème de poutre d'Euler-Bernoulli, dont la loi de comportement découle de la solution des problèmes microscopiques

précédents. A l'ordre supérieur, le problème microscopique correspond à la réponse de la structure à un gradient du moment de flexion, c'est-à-dire précisément à un effort tranchant. Ceci apporte la réponse à la première question évoquée précédemment. Le modèle macroscopique à cet ordre est un modèle à gradient difficilement exploitable pour l'ingénieur.

Cependant, puisque le problème microscopique est à effort tranchant imposé, une fois résolu, la rigidité en cisaillement de la poutre de Timoshenko peut être définie par exemple selon une méthode d'équivalence énergétique, en écrivant que l'énergie de déformation de la poutre de Timoshenko soumise à un effort tranchant est égale à l'énergie de déformation 2D issue du problème microscopique. Ceci permet de répondre à la deuxième question.

Cette méthode a été appliquée à une poutre sandwich. Figure 1 montre la solution 3D calculée selon un modèle éléments finis détaillé de la structure. La solution d'Euler-Bernoulli s'avère éloignée de la solution 3D. En revanche on obtient une très bonne approximation de la solution 3D grâce à la solution de Timoshenko.

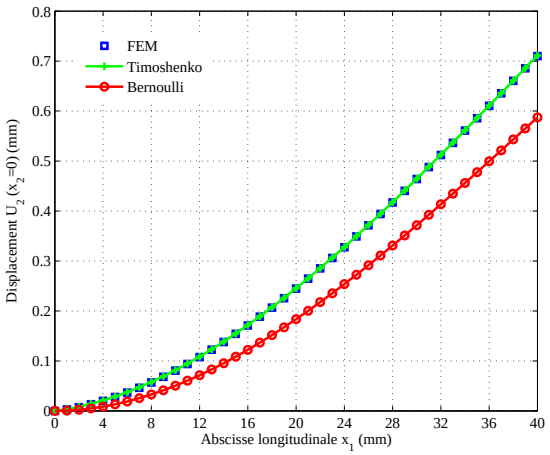

FIGURE 1 – Flexion simple dans le plan $e_1 - e_2$ d'une poutre sandwich

Ceci valide l'approche proposée dans ce travail dont l'originalité est que le modèle de Timoshenko est nourri par la solution des problèmes d'ordre supérieur de la méthode des développements asymptotiques.

Références

[1] J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia. *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*, Masson, 1992.

[2] L. Trabucho, J.M. Viaño. *Mathematical Modelling of Rods, Handbook of Numerical Analysis, éd. par P.G. Ciarlet and J.L. Lions*, Elsevier, 1996.

[3] N. Buannic, P. Cartraud. *Higher-order effective modeling of periodic heterogeneous beam. I. Asymptotic expansion method*, International Journal of Solids and Structures, Elsevier, 38 :7139-7161, 2001.

[4] A. Lebée, K. Sab. *A bending-Gradient model for thick plates. Part I : Theory*, International Journal of Solids and Structures, Elsevier, 48 :2878-2888, 2011.

[5] B. Popescu and D. Hodges *On asymptotically correct Timoshenko-like anisotropic beam theory*, International Journal of Solids and Structures, Elsevier, 37 :535-558, 1999.