



**HAL**  
open science

## Le De Linearum... de MacLaurin : entre Newton et Poncelet

Olivier Bruneau

► **To cite this version:**

Olivier Bruneau. Le De Linearum... de MacLaurin : entre Newton et Poncelet. Revue d'Histoire des Mathématiques, 2011, 17 (1), pp.9-39. hal-01179968

**HAL Id: hal-01179968**

**<https://hal.science/hal-01179968>**

Submitted on 20 Apr 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Revue d'Histoire des Mathématiques



*Le De Linearum de MacLaurin :  
entre Newton et Poncelet*

Olivier Bruneau

Tome 17 Fascicule 1

**2 0 1 1**

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publiée avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

# REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

---

## RÉDACTION

**Rédacteur en chef :**

Norbert Schappacher

**Rédacteur en chef adjoint :**

Philippe Nabonnand

**Membres du Comité de rédaction :**

Tom Archibald

Alain Bernard

Frédéric Brechenmacher

Marie-José Durand-Richard

Étienne Ghys

Hélène Gispert

Jens Høyrup

Agathe Keller

Laurent Mazliak

Karen Parshall

Jeanne Peiffer

Sophie Roux

Joël Sakarovitch

Dominique Tournès

**Directeur de la publication :**

Bernard Helffer

## COMITÉ DE LECTURE

Philippe Abgrall

June Barrow-Greene

Liliane Beaulieu

Umberto Bottazzini

Jean Pierre Bourguignon

Aldo Brigaglia

Bernard Bru

Jean-Luc Chabert

François Charette

Karine Chemla

Pierre Crépel

François De Gandt

Moritz Epple

Natalia Ermolaëva

Christian Gilain

Catherine Goldstein

Jeremy Gray

Tinne Hoff Kjeldsen

Jesper Lützen

Antoni Malet

Irène Passeron

Christine Proust

David Rowe

Ken Saito

S. R. Sarma

Erhard Scholz

Reinhard Siegmund-Schultze

Stephen Stigler

Bernard Vitrac

---

**Secrétariat :**

Nathalie Christiaën

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré

11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05

Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96

Mél : [revues@smf.ens.fr](mailto:revues@smf.ens.fr) / URL : <http://smf.emath.fr/>

---

**Périodicité :** La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

**Tarifs 2010 :** prix public Europe : 66 €; prix public hors Europe : 75 €;

prix au numéro : 38 €.

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

**Diffusion :** SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9  
Hindustan Book Agency, O-131, The Shopping Mall, Arjun Marg, DLF  
Phase 1, Gurgaon 122002, Haryana, Inde  
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

## LE *DE LINEARUM* DE MACLAURIN : ENTRE NEWTON ET PONCELET

OLIVIER BRUNEAU

---

RÉSUMÉ. — Colin MacLaurin (1698–1746) est surtout connu pour les formules qui portent son nom ou pour son ouvrage majeur, le *Treatise of Fluxions*. Pourtant, il est avant tout un géomètre. En effet, sa production de jeunesse est complètement tournée vers la géométrie, en particulier, la *Geometria Organica* parue en 1720 et le *De Linearum Geometricarum Proprietatibus Generalibus Tractatus* dont le début de l'écriture commence en 1721 et qui est paru de façon posthume en 1748. On s'intéressera plus particulièrement au second écrit et on montrera ici comment MacLaurin prend appui sur l'*Enumeratio* de Newton, comment il l'introduit dans sa propre production scientifique et finalement comment il le dépasse. Après avoir étudié dans le détail l'ouvrage de MacLaurin, on donnera quelques pistes de l'appropriation que font deux géomètres du XIX<sup>e</sup> siècle, Chasles et Poncelet, de son œuvre.

ABSTRACT (The *De Linearum* by MacLaurin : between Newton and Poncelet)

Even if Colin MacLaurin is more known for his formulae or for his major book, the *Treatise of Fluxions*, he is above all a geometer. Indeed, his first mathematical production is completely turned towards geometry, in particular, the *Geometria Organica* published in 1720 and the *De Linearum Geometricarum Proprietatibus Generalibus Tractatus* which his writing started in 1721 and posthumously published in 1748. The aim of this paper is to focus on the second one and to show how MacLaurin examines Newton's *Enumeratio*, how he uses this in his own scientific production and finally how he goes beyond what Newton's done. After studying MacLaurin's book, we account the reading of this geometry by two 19th-Century French geometers, Chasles and Poncelet.

---

Texte reçu le 2 octobre 2009, révisé et accepté le 30 juin 2010.

OLIVIER BRUNEAU, Centre François Viète, Faculté des sciences et des techniques,  
2, rue de la Houssinière BP 92208, 44322 Nantes Cedex 3.

Courrier électronique : [bruneauolive@free.fr](mailto:bruneauolive@free.fr)

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A50, 01A55, 1403, 5103.

Mots clés : MacLaurin, géométrie, Poncelet, Newton, Chasles.

Key words and phrases. — MacLaurin, geometry, Poncelet, Newton, Chasles.

## 1. INTRODUCTION

Plusieurs formules et des ellipsoïdes portent le nom de Colin MacLaurin (1698–1746). C’est donc principalement dans ces domaines-là que ce savant écossais est connu. Néanmoins, des travaux récents<sup>1</sup> ont montré qu’il est bien plus qu’un savant mineur et qu’il a développé, à la suite de Newton, les mathématiques et leurs utilisations de façon importante. Son œuvre majeure, le *Treatise of Fluxions* [1742], est dorénavant bien commentée<sup>2</sup>, au moins en partie, et elle montre combien l’apport de MacLaurin est significatif. Mais, ses textes géométriques de jeunesse<sup>3</sup> ont été négligés par les historiens des sciences. La *Geometria Organica* [1720] qui fait suite à deux articles parus dans les *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, reçut l’appui de Newton lui-même. Le deuxième, *De Linearum Geometricarum Proprietatibus Generalibus Tractatus*, n’est paru que sous forme d’annexe de son *Treatise of Algebra* [1748] posthume. Dans ces deux ouvrages, il existe de nombreux résultats fort intéressants qui seront repris soit sous la même forme, soit sous une forme plus développée par des mathématiciens du XIX<sup>e</sup> siècle.

Dans cet article, nous nous appuyerons uniquement sur le *De Linearum...* pour lequel nous nous attacherons à déterminer les sources d’inspiration. Nous montrerons donc que c’est à partir de Newton et plus particulièrement son traité, l’*Enumeratio linearum tertii ordinis* [1704b] que le travail de l’Écossais commence. Puis, nous regarderons comment ce dernier s’échappe des résultats newtoniens en montrant l’originalité du texte de MacLaurin, à la fois dans les résultats et dans les procédés. Enfin, nous étudierons la lecture de ses derniers par deux géomètres français du XIX<sup>e</sup> siècle, Chasles et Poncelet et nous émettrons quelques conclusions sur l’influence de l’Écossais sur ces deux savants.

---

<sup>1</sup> Les articles de Judith Grabiner, [Grabiner 1996], [Grabiner 1998], [Grabiner 2002] montrent avec pertinence le rôle important qu’a eu MacLaurin sur la vie intellectuelle en Grande-Bretagne.

<sup>2</sup> Voir par exemple [Grabiner 1997], [Guicciardini 1984], [Guicciardini 1989], [Panza 1986].

<sup>3</sup> Au début du siècle dernier, Charles Tweedie [1916] a présenté la *Geometria Organica* mais il refait certaines démonstrations et n’a pas, contrairement au titre, de souci d’ordre historique.

## 2. LE DE LINEARUM GEOMETRICARUM PROPRIETATIBUS GENERALIBUS TRACTATUS

### 2.1. Un essai paru en annexe du *Treatise of Algebra de 1748*

Le *De Linearum Geometricarum Proprietatibus Generalibus Tractatus*<sup>4</sup> ne paraît qu'en 1748. Quelle est donc sa date d'écriture ? Dans ce texte, aucune indication n'est fournie quant à sa période d'élaboration. Dans la préface, les éditeurs insistent sur le fait qu'il est important de fournir cet écrit qui semble, du vivant de l'auteur, n'avoir jamais été publié. À l'instar de plusieurs historiens<sup>5</sup>, Erik Sageng [1989, p. 16] date la publication de cet écrit en 1720 et déclare qu'il a été publié à Londres et qu'il est très rare. Malheureusement, nous n'avons pu le localiser ni en France ni à l'étranger. Le couple Wallis [1986, p. 57] n'indique aucun ouvrage paru en 1720 autre que la *Geometria Organica*. Dans les archives de MacLaurin<sup>6</sup> auxquelles nous avons eu accès, il n'est fait mention à aucun endroit d'une version manuscrite ou imprimée du *De Linearum*. De plus, dans sa correspondance, MacLaurin ne fait pas souvent allusion directement à cet ouvrage. Dans l'introduction de l'annexe, les éditeurs signalent que notre auteur a eu connaissance d'un résultat de Cotes (1682–1716)<sup>7</sup> par le révérend Robert Smith (1689–1768) du Trinity College de Cambridge. La seule fois où MacLaurin fait référence au *De Linearum*, c'est dans une lettre adressée à Sir Martin Folkes datée du 10 janvier 1744 dans laquelle il signale qu'il doit envoyer à Robert Smith une démonstration du résultat

---

<sup>4</sup> Pour les premières éditions de cet ouvrage, l'appendice du *Treatise of Algebra* est en latin, puis à partir de la quatrième édition, elle est traduite en anglais par Lawson. Jonquières [1856] fournit une traduction française du *De Linearum*. Nous prenons pour les citations, la quatrième édition (1779) du *Treatise of Algebra*.

<sup>5</sup> Par exemple, dans la section consacrée à MacLaurin, Rouse Ball [1901, p. 396] considère que cet ouvrage paraît à Londres en 1720. Mais, il nous semble que Rouse Ball n'a pas lu avec une extrême rigueur le *De Linearum* et la *Geometria Organica*. En effet, dans la description de ce dernier, il mélange des résultats des deux ouvrages précédemment cités. Turnbull [1951] indique la même référence.

<sup>6</sup> Elles sont principalement réparties dans les bibliothèques universitaires de Glasgow, d'Édimbourg et d'Aberdeen.

<sup>7</sup> Pour avoir une vision relativement exhaustive de ce savant dont l'œuvre mathématique est trop méconnue voir le livre de Ronald Gowing [1983].

de Cotes [Mills 1982, p. 395–396]. Ce théorème est inclus dans un projet plus important sur l'étude des lignes courbes de plus haut degré :

I must send my theorems first to Dr Smith before I can make them publick, because I take in a most elegant one discovered by Mr Cotes & communicated by Dr Smith to me without a demonstration, which I have deduced from the same principles by which I demonstrated the rest, particularly that mentioned in Art. 401 of my Fluxions. This theorem I cannot publish without his agreeing to it, and I would be glad he would publish Mr Cotes's demonstration, which I am sure will be excellent. It is pity it is delayed, for this theorem with the consequences & the others I have derived from my principles, before I demonstrated Mr Cotes's will throw a new light on the doctrine of the higher Loci, which is an obscure part of the high Geometry at present. [Mills 1982, p. 395–396]

Le théorème de Cotes sera énoncé plus loin. Le résultat cité dans cette lettre a été donné par Smith relativement tard par rapport à la publication supposée de l'ouvrage de MacLaurin. Alors comment situer les résultats contenus dans le *De Linearum* dans la vie de MacLaurin ? Dans la lettre ci-dessus, ce dernier déclare qu'il a utilisé des résultats pour élaborer une partie de son *Treatise of Fluxions* dont l'écriture débute vers 1734–1735 et dont une grande partie de l'ensemble est finie en 1737. La partie du *Treatise of Fluxions* dont l'inspiration géométrique provient du *De Linearum* a dû être écrite vers 1737 comme il le signale dans la préface de son *Treatise of Fluxions* [MacLaurin 1742, p. ix]. De plus, il annonce dans l'article 401 à la suite d'un exemple de construction concernant les sections coniques que

nous développerons cette propriété avec ses conséquences, plus amplement dans une autre occasion, & nous ferons voir comment on peut décrire une ligne du troisième ordre (soit qu'elle ait un double point ou non) par sept points, ensorte qu'elle touche deux lignes droites données de position en deux de ces points [MacLaurin a, vol. 1, p. 269].

Un autre indice sur l'écriture plus ou moins partielle de ce texte se trouve être la polémique que MacLaurin a eue avec William Braikenridge dans les années 30. Il n'est pas nécessaire de revenir sur ce débat [Bruneau 2011, p. 144–148] mais signalons que, pour se justifier, MacLaurin déclare qu'il trouva certains des résultats lors d'un trajet entre Douvres et Calais qu'il effectua à la fin de 1722 et qu'il les incorpora dans son enseignement dès 1725.

En résumé, on peut considérer que l'écriture commence dès 1721–1722 soit juste après la parution de la *Geometria Organica*, que ce traité a été amendé et développé dans les années 20 en particulier suite à son introduction dans son enseignement. La dernière véritable augmentation provient de la démonstration du théorème de Cotes qui intervient sûrement après l'écriture du *Treatise of Fluxions* dans lequel se trouve une partie d'un chapitre consacrée aux rayons de courbure et aux cercles osculateurs [MacLaurin 1742, vol. 1, ch. XI, p. 304–338]<sup>8</sup>.

## 2.2. *L'Enumeratio Linearum Tertii ordinis de Newton*

Avant d'aborder l'étude mathématique du texte de MacLaurin, il est nécessaire de faire quelques remarques sur un des derniers textes mathématiques édités par Newton. En effet, l'*Enumeratio* [Newton 1704b] paraît avec un autre traité mathématique, le *Tractatus de quadratura curvarum* [Newton 1704c]<sup>9</sup>, en annexe de son *Opticks* [Newton 1704a]. Mais, l'écriture de la première ébauche intervient à la fin des années 1660 ou au début des années 1670 [Newton MP, vol. II, p. 10–89]. Puis, il revient sur celle-ci dans les années 1678–1679<sup>10</sup> [Newton MP, vol. IV, p. 354–405]. Enfin, la version quasi-définitive est produite en 1695 [Newton MP, vol. VII]. C'est surtout lors du deuxième temps d'écriture que l'essentiel des idées est présenté. Nous renvoyons à Niccolò Guicciardini [2009, p. 109–136] pour une étude approfondie de texte, et nous donnons simplement quelques remarques sur ce qui a été utilisé par l'Écossais. Comme le titre l'indique, Newton cherche à classer toutes les courbes algébriques de degré 3, même s'il en oublie quelques unes<sup>11</sup>. Pour ce faire, il donne quelques définitions issues pour la plupart des sections coniques, comme diamètre, sommets, centres, axes et asymptotes. Puis, à partir de ce qu'il

<sup>8</sup> Dans cette partie, MacLaurin s'appuie essentiellement sur la notion de fluxion. Il est relativement loin de ce qu'il fait dans le *De Linearum*.

<sup>9</sup> Il existe une traduction commentée en langue anglaise parue au XIX<sup>e</sup> siècle [Newton 1861].

<sup>10</sup> Selon les spécialistes de Newton, la datation des deux premiers manuscrits pose problème et est en débat [Guicciardini 2009, p. 109n].

<sup>11</sup> Stirling [1717] ajoute quelques courbes qui ne figurent pas dans l'annexe de l'*Opticks* mais qui sont présentes dans les manuscrits de 1695 [Newton MP, vol. VII, p. 426 n. 54 et p. 431 n. 65].

connaît des sections coniques, il énonce ce que nous appelons théorème de Newton sur lequel MacLaurin s'appuiera :

V And just as in non-parabolic conics the square of the ordinate, that is, the rectangle of the ordinates which are drawn to opposite sides of their diameter, is to the rectangle of the parts of the diameter which terminate at the ellipse's or hyperbola's vertices as a certain line which is called the *latus rectum* to the part of the diameter lying between the vertices which is called the *latus transversum* (*transverse diameter*) ; so in non-parabolic curves of the second kind the 'parallelepiped' (solid product) of the three ordinates is to that of the parts of the diameter cut off at the ordinates and the three vertices of the figure in a given ratio, while if three straight lines be taken in this ratio to the three parts of the diameter situated between the vertices of the figure, each to a separate one, then those three lines can be called *latera recta* of the figure, and the parts of the diameter between the vertices *transverse diameters*. And as in the conic parabola, which has pertaining to one and the same diameter but a single vertex, the rectangle contained by the ordinates is equal to the rectangle beneath the part of the diameter cut off at the ordinates and the vertex and under a given straight line which is called the *latus rectum* ; so in curves of the second kind which have but two vertices pertaining to the same diameter the 'parallelepiped' contained by the three ordinates is equal to that contained beneath the two parts of the diameter cut off at the ordinates and those two vertices and under a given straight line, which can in consequence be called the *latus rectum*.

VI Finally, just as in conics, when two parallels terminating on either side at the curve are cut by two parallels terminating on either side at the curve, the first by the third and the second by the fourth, the rectangle of the parts of the first is to that parts of the parts of the third as the rectangle of the parts of the second to that of the parts of the fourth ; so when four such straight lines meet a curve of the second kind, each individually in three points, the 'parallelepiped' (solid products) of the parts of the first line will be to that of the parts of the third as the 'parallelepiped' of the parts of the second to that of the parts of the fourth. [Newton *MP*, VII, p. 592–593]

Comme souvent, Newton ne fournit pas de démonstration même si, dans les manuscrits, il en existe une [Newton *MP*, IV, p. 354–360] qui a un caractère algébrique prononcé et qui fait intervenir les racines des équations algébriques. Nous verrons que celle de MacLaurin s'apparente

à celle-ci. Selon Guicciardini [2009, p. 113–117], l’absence de démonstration dans la version éditée serait due à la volonté de Newton de se dégager d’une démarche algébrique cartésienne.

À la fin de l’*Enumeratio*, l’auteur propose une construction « organique »<sup>12</sup> des courbes en particulier les sections coniques [1704a, p. 158]. MacLaurin ignore complètement cela dans le *De Linearum* mais consacre une part importante de la *Geometria Organica* à ce problème [MacLaurin 1720, p.n 2–78]. C’est une des raisons pour lesquelles Newton insiste en 1719 pour que cet ouvrage soit publié. De plus, les remarques sur les sections coniques sont présentes aussi dans le *Treatise of Algebra* [MacLaurin 1748, p. 342–351].

Dans le *De linearum*, MacLaurin semble ne pas reprendre la génération par les « ombres » de Newton. Ce dernier affirme qu’à l’instar des sections coniques qui peuvent être vues comme des ombres d’un cercle projeté sur un plan, les courbes du troisième ordre peuvent se déduire projectivement à partir de cinq courbes du troisième ordre particulières<sup>13</sup>.

### 2.3. *L’ambition de MacLaurin dans le De Linearum*

Avant de faire l’étude de l’appendice, il nous semble intéressant de confronter cet écrit de MacLaurin avec celui de Newton portant sur l’étude des courbes du troisième ordre. Dans l’introduction, l’Écossais se réclame ouvertement du savant anglais. Il considère l’*Enumeratio* comme une œuvre majeure dans l’étude des courbes algébriques et il insiste sur le fait que c’est Newton qui s’est aperçu d’une analogie entre les propriétés des sections coniques et celles des cubiques et qu’il a montré la voie

---

<sup>12</sup> Chez Newton et MacLaurin, la « géométrie organique » (*geometria organica*) désigne une géométrie dans laquelle les courbes sont construites à l’aide d’instruments. Par exemple, dans l’*Enumeratio*, Newton construit une conique comme ceci : soient deux angles donnés,  $PAD$  et  $PBD$  qui tournent autour de leurs sommets (fixes), on suppose que le point d’intersection  $P$  des branches  $AP$  et  $BP$  décrit une droite, alors  $D$  le point d’intersection des deux autres branches,  $AD$  et  $BD$ , décrit une section conique [Newton 1704a, p. 158].

<sup>13</sup> À propos de la géométrie projective chez Newton, voir par exemple, les positions de Salmon [1869], Milne [1927], Whiteside [Newton *MP*, VII, p. 413] et Guicciardini [2009, p. 122–130].

à de nombreux géomètres sur l'étude des courbes du troisième ordre. MacLaurin se situe dans cette voie des géomètres qui sont à sa suite.

Mais les résultats du *De Linearum* ne sont pas du même type que ceux de l'*Enumeratio*. Même si MacLaurin commence par démontrer une proposition simplement énoncée par Newton, la façon d'aborder celle-ci est différente. Ce dernier prend appui sur une notion de segments de parallèles et d'asymptotes, ce que ne fait pas l'Écossais. En effet, même dans l'énoncé et la démonstration de la première proposition, il ne fait intervenir ni des segments de parallèles ni des asymptotes. Une grande partie de son inspiration provient de la notion de moyenne harmonique déduite des travaux de De la Hire [1673]. Cela lui permet à la fois de démontrer le théorème de Cotes et de simplifier l'écriture de certaines expressions faisant intervenir ce qu'il appelle les réciproques de longueurs (ce que nous appelons inverses). Il retrouve des résultats énoncés par Newton mais en utilisant une méthode démonstrative différente.

L'ambition de l'*Enumeratio* est de donner et de classer les courbes du troisième ordre et son auteur donne des méthodes de construction de cubiques (organique ou par des ombres). La volonté de l'Écossais est tout autre ici. En effet, alors que Newton annonçait l'extension des propriétés des coniques à celles des cubiques, MacLaurin montre que celles-ci ne sont en réalité que des cas particuliers de propriétés valables pour toutes les courbes algébriques. En d'autres termes, notre auteur relativise les résultats newtoniens et les incorpore dans une étude plus large et plus universelle.

De plus, à partir de ces résultats, en utilisant la même démarche géométrique, il donne quelques caractéristiques des courbes. Par exemple, les rayons de courbure d'une courbe peuvent être donnés en utilisant les moyennes harmoniques, c'est-à-dire avec une approche non pas analytique mais géométrique. Pour conclure, nous pouvons dire que Newton et MacLaurin ne poursuivent pas le même projet, qu'ils sont en quelque sorte complémentaires et que ce dernier ne s'est pas cantonné à un type de courbes mais étend ses recherches à d'autres types de courbes algébriques. Étudions d'un peu plus près quelques résultats et la manière dont l'Écossais parvient à ceux-ci.

## 2.4. Des propriétés générales des courbes

Selon MacLaurin, les sections coniques ont été largement étudiées par les grecs et par les géomètres modernes, en revanche, peu de résultats concernant les courbes de degré supérieur ont été trouvés avant Newton et son *Enumeratio*. Ce dernier a été le point de départ de nombreux savants pour développer la géométrie dans des voies souvent difficiles. Dans l'introduction [[MacLaurin 1748](#)], il se place clairement à la suite de l'*Enumeratio*. Il déclare qu'il étudie, au moins dans son projet, certaines propriétés générales de courbes algébriques à la suite de Newton. Par des considérations géométriques, il donne une construction du cercle osculateur à une courbe algébrique quelconque en généralisant une méthode et un théorème de Newton. Il nous apparaît utile et important d'étudier de près la démarche démonstrative de ces quelques résultats car, outre le fait que les démonstrations sont originales, elles permettent de mieux comprendre comment notre auteur « fait » de la géométrie.

Dans un premier temps, nous étudierons le théorème de Newton cité plus haut qui se trouve à l'origine de la démarche de MacLaurin, puis dans un second temps, nous donnerons la construction du cercle osculateur, enfin, nous examinerons le théorème qui aboutit au résultat de Cotes.

### 2.4.1. Le premier théorème

La première étape importante concerne le théorème énoncé par Newton dans l'*Enumeratio*. Soit un angle donné, APM, si les branches de l'angle coupent une courbe algébrique en autant de points que sa dimension<sup>14</sup>, alors le produit des longueurs entre le sommet P et les points d'intersection d'une branche avec la courbe est toujours proportionnels au produit des longueurs entre le sommet P et les points d'intersection entre la courbe et l'autre branche [[Newton 1704a](#), p. 141] (fig. 1)<sup>15</sup>.

---

<sup>14</sup> Au XVIII<sup>e</sup> siècle, le degré d'une courbe algébrique est appelé soit dimension soit ordre.

<sup>15</sup> Les figures qui suivent ont été redessinées à l'ordinateur en partant des illustrations originales.

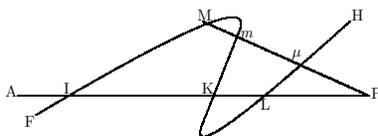


FIGURE 1.

Pour exposer sa démonstration<sup>16</sup>, Maclaurin se place dans le cas d'une étude d'une courbe de degré trois. Il prend comme axe des abscisses la droite AP d'origine A, l'abscisse est représentée par  $AP = x$  et l'ordonnée PM par  $y$ . Il arrange l'équation de la courbe comme ceci :

$$y^3 - (ax + b)y^2 + (cx^2 - dx + e)y - fx^3 + gx^2 - hx + k = 0$$

Les points M,  $m$ ,  $\mu$  sont des points d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées. Ainsi, PM, Pm et P $\mu$  sont les racines de l'équation ci-dessus dont l'inconnue considérée est  $y$ . Comme le produit des racines est égal au coefficient constant (au signe près), alors

$$PM.Pm.P\mu = fx^3 - gx^2 + hx - k.$$

Les points d'intersection de cette courbe avec l'axe des abscisses (ici I, K, L) sont donnés par les solutions de l'équation lorsque  $y$  s'annule, c'est-à-dire les solutions de

$$x^3 - \frac{g}{f}x^2 + \frac{h}{f}x - \frac{k}{f} = 0.$$

En reliant les deux expressions, il arrive bien au résultat voulu (dans le cas d'une courbe du troisième ordre) :

$$IP.KP.LP = \frac{1}{f}PM.Pm.P\mu.$$

Il ajoute que la démonstration est analogue dans le cas d'une courbe algébrique de degré quelconque.

Le premier théorème (fig. 2) de MacLaurin que nous donnons est le suivant : Soit un point P donné, soient deux droites, PA et Pa, qui rencontrent une courbe algébrique en autant de points, A, B, C, et  $a, b, c$ , etc. que le degré de celle-ci. Traçons les tangentes à la courbe, AK, BL, CM, etc. et  $ak$ ,

<sup>16</sup> Nous avons délibérément choisi de rester proche du texte original, les notations sont celles de MacLaurin.

$bl, cm$ , en chacun de ces points. Elles rencontrent une droite EP respectivement en K, L, M, etc. et  $k, l, m$ , etc. Alors

$$(1) \quad \frac{1}{PK} + \frac{1}{PL} + \frac{1}{PM} + \&c. = \frac{1}{Pk} + \frac{1}{Pl} + \frac{1}{Pm} + \&c.$$

Cette relation est vraie quelle que soit la droite EP, P restant fixe [MacLaurin 1748, p. 378-379].

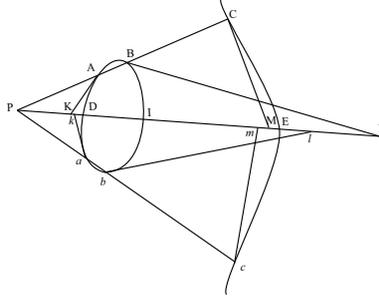


FIGURE 2.

Le premier temps de la démonstration de cette propriété utilise le résultat préliminaire en considérant les points A, B, C et  $a, b, c$  qui se trouvent sur la courbe. Les produits des longueurs sont en rapport constant. En appliquant la dérivée logarithmique, MacLaurin arrive à la relation

$$(2) \quad \frac{\dot{A}P}{AP} + \frac{\dot{B}P}{BP} + \frac{\dot{C}P}{CP} + \&c. = \frac{\dot{a}P}{aP} + \frac{\dot{b}P}{bP} + \frac{\dot{c}P}{cP} + \&c.$$

Puis, en s'appuyant sur la propriété de la sous-tangente, appliquée aux différents points (c'est-à-dire A, B, C, etc.), il considère, pour le point A<sup>17</sup>,

$$\frac{\dot{A}P}{AP} = \frac{\dot{E}P}{PK}.$$

En remplaçant dans (2), les expressions du type  $\frac{\dot{A}P}{AP}$  par celles du type  $\frac{\dot{E}P}{PK}$ , il arrive à

$$\frac{\dot{E}P}{PK} + \frac{\dot{E}P}{PL} + \frac{\dot{E}P}{PM} + \&c. = \frac{\dot{E}P}{Pk} + \frac{\dot{E}P}{Pl} + \frac{\dot{E}P}{Pm} + \&c.$$

<sup>17</sup> Pour les autres points, il suffit de remplacer, dans l'expression, A par les autres points et K par les points d'intersection avec les tangentes respectives.

Ainsi, en prenant  $\dot{E}P = 1$ , il énonce bien l'expression voulue (1). À la suite de cette démonstration, il fait une remarque qui sera essentielle pour démontrer le Théorème 2. Si l'on note D, I, E, les points d'intersection entre la droite PE du théorème et la courbe (fig. 2), alors on a la relation suivante :

$$\frac{1}{PK} + \frac{1}{PL} + \frac{1}{PM} + \&c. = \frac{1}{PD} + \frac{1}{PE} + \frac{1}{PI} + \&c.$$

Il annonce ensuite dans le cas où le pied de la tangente se trouve de l'autre côté de P par rapport aux autres points, qu'il faut alors changer le signe du rapport concerné. Par exemple, si K tombe sur la droite de l'autre côté de P par rapport à A, alors dans la formule, il faut remplacer  $\frac{1}{PK}$  par  $-\frac{1}{PK}$ .

#### 2.4.2. Une construction géométrique du cercle osculateur

La partie centrale de sa démarche démonstrative pour construire géométriquement le cercle osculateur en un point à une courbe algébrique donnée est le théorème 2.

Avant de l'énoncer, donnons un résultat préparatoire concernant une propriété particulière du cercle. Soit un cercle de diamètre DR. Par C, un point (mobile) du cercle, il construit une droite non parallèle à DR et non tangente au cercle (en C). Cette droite coupe la droite DR en P (extérieur au cercle dans la fig. 3) et le cercle en N. La tangente au cercle en C coupe la droite DR en M. Il place ensuite les points q et v, respectivement sur PC et DR tels que qv soit parallèle à CM. Lorsque le point C se déplace sur

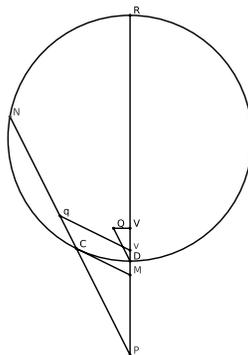


FIGURE 3.



en D telle que Q appartienne à DA et V à DE et satisfaisant la relation  $QV^2 : DV^2 = m : 1$ . Enfin, soit R sur la droite DE tel que

$$\frac{m}{DR} = \frac{1}{DE} + \frac{1}{DI} + \&c. - \frac{1}{DK} + \frac{1}{DL} + \&c.$$

Alors le cercle de diamètre DR est le cercle osculateur à la courbe en D et donc la longueur DR est le double du rayon de courbure de la courbe en D [MacLaurin 1748, p. 382–383]<sup>19</sup>.

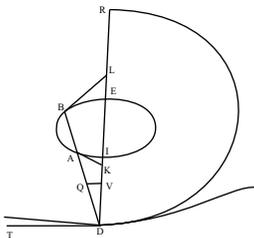


FIGURE 5.

Ainsi, pour avoir le diamètre du cercle osculateur, au point D de la courbe, il choisit C suffisamment proche de D. Alors la dernière valeur de la différence  $\frac{1}{PM} - \frac{1}{PD}$  considérée avec des points sur la courbe algébrique dépend de sa courbure,  $\frac{m}{DR}$ . Il lui reste alors à évaluer d'une autre manière la différence ci-dessus. C'est à ce moment qu'intervient le théorème 1. En effet, avec les notations et les conditions de ce théorème, on a :

$$\frac{1}{PK} + \frac{1}{PL} + \frac{1}{PM} + \&c. = \frac{1}{PD} + \frac{1}{PE} + \frac{1}{PI} + \&c.$$

Donc, en réarrangeant cette relation, c'est-à-dire en mettant la différence qui l'intéresse d'un côté et le reste de l'autre,

$$\frac{1}{PM} - \frac{1}{PD} = \frac{1}{PE} + \frac{1}{PI} + \&c. - \frac{1}{PK} - \frac{1}{PL} - \&c.$$

et en faisant coïncider P avec D<sup>20</sup>, il arrive bien au résultat énoncé dans le théorème 2 :

$$\frac{m}{DR} = \frac{1}{DE} + \frac{1}{DI} + \&c. - \frac{1}{DK} - \frac{1}{DL} - \&c.$$

<sup>19</sup> Le rapport  $QV : DV$  est la tangente de l'angle  $\widehat{BDR}$  qui dépend du choix de la droite choisie au départ. Maclaurin donne le cas particulier où la droite choisie fait un angle de  $\pi/4$  avec la normale et donc  $m = 1$  ce qui simplifie les calculs.

<sup>20</sup> C'est le cas lorsqu'il fait tendre le point C vers D.

Nous pouvons remarquer que pour avoir le rayon du cercle osculateur, on suppose déjà construite la normale à la courbe au point D. En effet, ce théorème nous fournit une construction géométrique du rayon de courbure uniquement en présupposant la droite DR donnée. D'autre part, pour simplifier cette relation, le choix de la droite DA est important. Si c'est possible, il se place dans le cas où l'angle que fait cette droite avec la normale est de 45°. Ainsi, dans ce cas, le rapport  $\frac{QV}{DV}$  vaut 1 et  $m = 1$ , d'où

$$\frac{1}{DR} = \frac{1}{DE} + \frac{1}{DI} + \&c. - \frac{1}{DK} - \frac{1}{DL} - \&c.$$

Sa technique permet de connaître le rayon de courbure. Elle peut, en plus, évaluer sa variation lorsque le point D se déplace sur la courbe. Il donne donc par une construction géométrique du même type que dans le théorème 2, une proposition qui permet de calculer la variation du rayon de courbure en un point. L'énoncé est le suivant.

Soit D un point de la courbe (fig. 6). Soit DS le diamètre du cercle osculateur (construit avec la méthode du théorème 2), la droite DS coupe la courbe en autant de points que sa dimension, D, A, B, ... Soit DT la tangente à la courbe en D. Elle coupe la courbe en I, ... Soient les tangentes à la courbe issues de A, B, ..., elles rencontrent DT en K, L, ... Alors la variation de la courbure sera égale à

$$\frac{1}{DS} \times \left( \frac{1}{DK} + \frac{1}{DL} + \dots - \frac{1}{DI} - \dots \right) \text{ [MacLaurin 1748, p. 386] .}$$

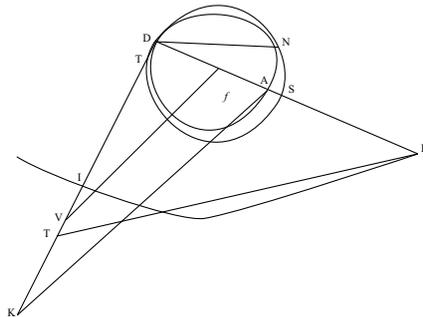


FIGURE 6.

De plus, en considérant  $V$  un point de  $DT$  (la tangente à la courbe en  $D$ ) tel que  $DV$  satisfasse la relation

$$\frac{1}{DV} = \frac{1}{DK} + \frac{1}{DL} + \dots - \frac{1}{DI} - \dots$$

et  $f$  est le centre du cercle osculateur (ou  $Df$  est le rayon de courbure) et en construisant le point  $N$  sur le cercle osculateur tel que  $\widehat{SDN} = \widehat{DVf}$ , alors la parabole passant par  $D$ , admettant  $DT$  comme tangente et de paramètre  $DN$  aura la même variation de courbure que la courbe en  $D$  et donc peut être considérée comme une osculatrice [MacLaurin 1748, p. 387–388]. Nous reviendrons plus loin sur la notion de courbe osculatrice à une autre. En effet, quand MacLaurin donnera des propriétés spécifiques aux courbes du troisième ordre, il s'interrogera sur la possibilité qu'une parabole soit une courbe osculatrice à une cubique.

#### 2.4.3. *Le théorème de Cotes*

À partir de cette proposition, il prend une autre direction et se consacre au théorème de Cotes dont il est question dans l'introduction de l'appendice : Étant donnés une courbe algébrique et un point du plan,  $P$ , soit  $\Delta$  une droite mobile passant par  $P$ .  $\Delta$  rencontre la courbe en autant de points,  $D, E, I$ , etc. que le degré de la courbe. Alors le point  $M$  de  $\Delta$  tel que

$$\frac{1}{PM} = \pm \frac{1}{PD} \pm \frac{1}{PE} \pm \frac{1}{PI} \pm \&c.$$

(où le signe dépend de la position des points) décrit une droite lorsque  $\Delta$  tourne autour de  $P$  (fig. 7) [MacLaurin 1748, p. 392].

MacLaurin a besoin pour cela des droites harmoniques données par De la Hire [1673] qui introduit la notion de droite coupée harmoniquement. En effet,

j'appelle une ligne droite  $AD$  coupée en 3 parties harmoniquement quand le rectangle contenu sous la toute  $Ad$  & la partie du milieu  $BC$  est égal au rectangle contenu sous les deux parties extrêmes  $AB, CD$  : ou bien lorsque la toute  $AD$  est à l'une des 2 extrêmes  $AB, CD$  comme l'autre extrême  $CD$  ou  $AB$  est à la partie du milieu ce qui est la même chose [De La Hire 1673, p. 1]

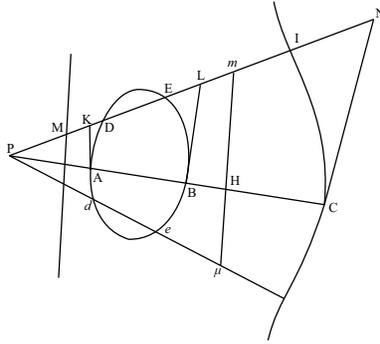


FIGURE 7.

soit  $AD \times BC = AB \times CD$ . Cette définition est équivalente à ce que nous appelons la division harmonique du segment AC par les points B et D, c'est-à-dire que les points A, B, C et D sont tels que

$$\frac{2}{AC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}.$$

MacLaurin privilégie la seconde écriture par rapport à celle de De la Hire. Il étend cela et propose la définition de la moyenne harmonique. La droite  $Pm$  est appelée moyenne harmonique de PD et PE quand  $\frac{2}{Pm} = \frac{1}{PD} + \frac{1}{PE}$ , de la même manière,  $Pm$  est appelée moyenne harmonique des  $n$  droites quelconques, PD, PE, PI, etc, si

$$\frac{n}{Pm} = \frac{1}{PD} \pm \frac{1}{PE} \pm \frac{1}{PI} \pm \&c. \quad [\text{MacLaurin 1748, p. 392-393}].$$

En utilisant cette propriété, le théorème de Cotes n'est qu'un corollaire du premier théorème énoncé dans ce chapitre.

Ce qui est intéressant ici n'est pas tant le résultat en lui-même mais la méthode démonstrative mise en place par MacLaurin. En effet, en introduisant la moyenne harmonique, il permet une nouvelle façon d'appréhender ce problème. De plus, comme nous le verrons plus bas, Poncelet, tout en reconnaissant la nouveauté et la force des résultats de MacLaurin, prend appui sur la méthodologie de la division harmonique de l'Écossais.

#### 2.4.4. *Les applications aux coniques et aux cubiques*

Dans les sections 2 et 3, il applique les théorèmes qu'il a démontrés dans la première section aux sections coniques (section 2) puis aux cubiques (section 3).

Dans la section 2, il donne quelques résultats déduits de la moyenne harmonique appliqués aux coniques et l'étude de la courbure de ce type de courbes. Beaucoup de résultats énoncés sont connus avant MacLaurin. Nous pouvons signaler ce théorème : Soit une conique, soient  $A$ ,  $B$ ,  $F$ , et  $G$  des points sur cette conique. Le point d'intersection de  $AB$  et  $FG$  se nomme  $P$ , celui entre  $AG$  et  $BF$ ,  $p$ ,  $K$  est le point d'intersection des tangentes en  $A$  et  $F$  et  $L$  celui des tangentes en  $B$  et  $G$ , alors les points  $P$ ,  $L$ ,  $p$  et  $K$  sont colinéaires [MacLaurin 1748, p. 398] (fig. 8).

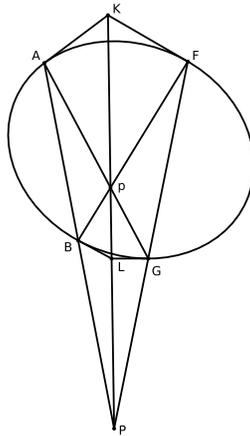


FIGURE 8.

Dans la section 3 consacrée aux cubiques, il énonce vingt-quatre propriétés. Comme pour la précédente section, il donne des résultats connus par différents mathématiciens. Par exemple, les deux premières propositions de cette section ont été énoncées par Newton [Newton 1704b, p. 140–141]. Néanmoins, il propose de nouveaux résultats : les tangentes à une cubique en trois points colinéaires rencontrent cette même cubique en trois autres points colinéaires, ou encore, que si par un point  $A$  d'une cubique,

on peut tracer trois tangentes à cette courbe, AF, AG et Af (F, G et f appartenant à cette cubique), et si la droite Gf rencontre la courbe en N, la droite FN rencontre la cubique en g, alors Ag est aussi tangente à la courbe en g [MacLaurin 1748, p. 409] (fig. 9).

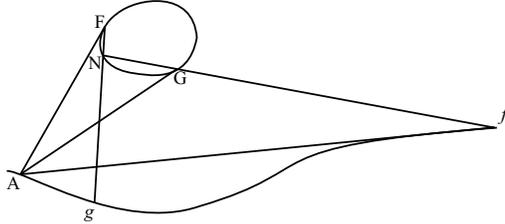


FIGURE 9.

Il montre alors que d'un point d'une cubique, on ne peut tirer que quatre tangentes à cette courbe au maximum [MacLaurin 1748, p. 410]. Nous pouvons encore signaler une proposition aussi énoncée par De Gua [1740, p. 1779] : si une droite passe par deux points d'inflexion d'une cubique, alors cette droite rencontrera la cubique en un troisième point qui sera aussi un point d'inflexion.

MacLaurin ne s'intéresse pas simplement aux cercles comme osculateurs à une courbe. Comme nous l'avons déjà vu, il a donné la construction d'une parabole osculatrice. Dans cette section, comme il se restreint à l'étude des courbes algébriques du troisième ordre, il reprend quelques théorèmes en les simplifiant. Par exemple, pour la variation du rayon de courbure, et donc de la construction de la parabole osculatrice, en prenant la même écriture que dans le théorème 3 (fig. 10), et en prenant le point V sur la droite DI tel que

$$\frac{1}{DV} = \frac{1}{DK} + \frac{1}{DL} - \frac{1}{DI}$$

alors la variation de la courbure est égale à la tangente de l'angle  $\widehat{DVS}$  soit le rapport  $\frac{DS}{DV}$  [MacLaurin 1748, p. 431].

Enfin, il est important de noter que quelques propositions démontrées par MacLaurin dans la troisième section étaient connues de Newton même si ce dernier ne les a pas publiées. Par exemple, la proposition VI [MacLaurin 1748, p. 406–407] : étant données une droite qui coupe une courbe

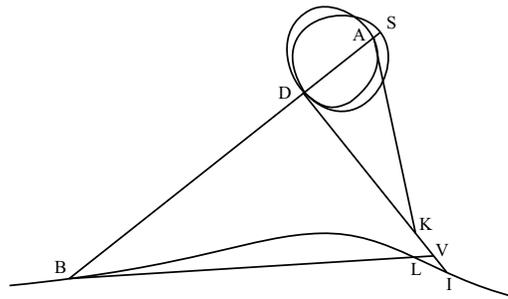


FIGURE 10.

du troisième ordre en trois points, les tangentes en ces points à la courbe coupent à nouveau cette dernière. Alors ces points d'intersection sont alignés. Newton [[Newton MP](#), II, p. 45–46] donne un cas particulier où la droite est à l'infini. La proposition X [[MacLaurin 1748](#), p. 411] était aussi connue de l'Anglais [[Newton MP](#), II, p. 68–70].

### 3. CHASLES ET PONCELET, LECTEURS DE MACLAURIN

#### 3.1. *Les éloges de Chasles*

Même s'il ne les utilise pas explicitement dans ses propres travaux sur la géométrie, Michel Chasles connaît très bien tous les ouvrages majeurs de MacLaurin. En effet, il a lu (ou simplement parcouru) la *Geometria Organica*, le *De Linearum...* et le *Treatise of Fluxions*. Il consacre même une partie de son livre [[1837](#)] à l'œuvre géométrique de MacLaurin. Nous pouvons y lire une sorte d'éloge des méthodes utilisées par ce dernier dans ces trois ouvrages. Ainsi, il déclare que

dans le premier [la *Geometria Organica*] (...), ses démonstrations, traitées par la méthode des coordonnées, n'offrent pas toujours un degré de simplicité satisfaisant; mais le deuxième écrit de MacLaurin, intitulé : *De Linearum Geometricarum Proprietatibus Generalibus Tractatus*, est d'une élégance et d'une précision remarquable [[Chasles 1837](#), p. 146].

Ce type de construction uniquement géométrique qui n'utilise pas (ou très peu) les méthodes de l'analyse a ravi le géomètre français qui s'étonne

du peu d'écho chez les mathématiciens de la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle et du début du XIX<sup>e</sup> siècle. Ainsi, il remarque que

cette construction géométrique de cercle osculateur, sur la figure même, et sans le secours du calcul des fluxions, ni même de l'analyse de Descartes, paraît être restée inaperçue dans l'ouvrage de MacLaurin, car nous ne voyons pas qu'on en ait jamais parlé. Nous croyons pourtant qu'elle méritait d'y être remarquée, parce que ce problème avait paru jusque là exiger absolument l'emploi de l'analyse. [Chasles 1837, p. 148]

Mais qu'en est-il dans ses travaux ? Dans son article [Chasles 1830] sur les moyennes harmoniques qu'il appelle à la suite de Newton, diamètre, Chasles redonne quelques résultats connus de Newton et démontrés par MacLaurin. S'il évoque explicitement l'illustre Anglais, il néglige complètement l'Écossais qu'il semble n'avoir pas lu à cette époque. Ceci paraît étonnant car il cite l'article sur les moyennes harmoniques de Poncelet dans lequel se trouvent maintes références au texte de MacLaurin. Mais quelques années plus tard, il en parle dans son *Aperçu...* [Chasles 1837] et surtout dans son *Traité de Géométrie supérieure* [Chasles 1852]. Il semble qu'il ait découvert les textes de l'Écossais relativement tard. Lorsqu'il introduit les rapports harmoniques à la suite des rapports anharmoniques, il insiste sur le fait que la définition qu'il donne est équivalente à celles de Poncelet et de MacLaurin [Chasles 1852, p. 43]. Mais, lorsqu'il cite une propriété [Chasles 1852, p. 231], il ne donne pas la paternité à MacLaurin mais à Poncelet, pourtant ce dernier dans l'article cité par Chasles annonce qu'il est dû à MacLaurin. Il semble que Chasles n'ait pas véritablement lu le texte de ce dernier qu'il considère comme

un excellent ouvrage [Chasles 1852, p. 43n],

mais s'est contenté de le citer uniquement à partir de ce qu'en disait d'autres auteurs ou ce qui était écrit dans l'article COURBE de l'*Encyclopédie*<sup>21</sup>.

<sup>21</sup> En effet, lors d'une note, Chasles renvoie à l'ouvrage de Newton [1704b] et l'article COURBE de l'*Encyclopédie* dans lequel l'ouvrage de MacLaurin [1748] est cité [Encyclopédie, t. 4, p. 382b].

### 3.2. Poncelet à la suite de MacLaurin

Néanmoins, Chasles fait référence à MacLaurin au sujet de la moyenne harmonique dans les travaux de Poncelet. D'après lui, ce dernier utilise la moyenne harmonique qu'il nomme centre des moyennes harmoniques dans un mémoire paru dans le *Journal de Crelle* [Poncelet 1828]. En revanche, Chasles ne fait pas allusion à l'utilisation de la méthode géométrique de construction des cercles osculateurs de MacLaurin par Poncelet dans son *Traité des Propriétés projectives des figures* paru en 1822<sup>22</sup>. Pourtant, ce dernier considère que

cet illustre successeur de Cotes et de Newton, (...) dans son *Traité des Fluxions* et son *Algèbre posthume*, aborda la question [détermination des osculatrices] par des considérations directes purement géométriques, dans lesquelles il cherche à tracer, par une série de points successifs, le cercle osculateur, le diamètre et le paramètre de la parabole osculatrice du 3ème ordre en un point donné d'une courbe continue quelconque, censée décrite sur un plan, en faisant pour cela simplement intervenir les portions de la courbe qui avoisinent le point de contact, et traçant une nouvelle ligne ou dérivée qui sert à déterminer certains points ou paramètres du cercle de courbure ou de la conique osculatrice. [Poncelet 1864, t. 2, p. 585]

Cet extrait nous montre sa bonne connaissance d'une partie des écrits britanniques. En effet, quand il fait référence à « l'algèbre posthume » de MacLaurin, il considère le *De Linearum*, en particulier la méthode utilisée pour trouver le rayon de courbure que nous avons décrit plus haut. Il fait aussi référence au *Traité des Fluxions* dans lequel toute une partie est consacrée à la courbure en général traitée de manière géométrique, d'une part, et avec la théorie fluxionnelle d'autre part [MacLaurin 1742, p. 304–412]. De plus, il annonce clairement qu'il s'est servi ces écrits pour échafauder sa géométrie projective [Poncelet 1822]. En effet, il déclare

qu'en m'occupant des matières du II<sup>e</sup> Cahier de ce second volume [méthode des transversales], je me proposai de déterminer, sans tâtonnements, d'une manière directe et rationnelle, pour un point donné d'une courbe décrite

---

<sup>22</sup> Poncelet publie en 1864 un ouvrage dans lequel il retrace (ou réécrit) l'histoire de son *Traité des propriétés projectives des figures*. C'est pourquoi, avant de rentrer dans le *Traité* lui-même, nous donnons quelques indications sur ce livre tardif.

sur un plan, non pas seulement la tangente, mais l'osculatrice conique d'un ordre quelconque, en suivant partiellement les traces de l'illustre MacLaurin. [Poncelet 1864, t. 2, p. 584]

D'après son propre témoignage, Poncelet a eu connaissance du *De Linearum* en 1816 qui lui a permis de réorienter sa recherche,

j'en suis venu à changer de route et à me rapprocher de la méthode de MacLaurin que j'avais ignorée jusque-là [Poncelet 1864, t. 2, p. 102n].

Plus loin, il ajoute

qu'en 1816, on ne connaissait rien de plus original en France, où ces travaux du savant anglais étaient pour ainsi dire complètement ignorés ou oubliés [Poncelet 1864, t. 2, p. 107n].

C'est par l'intermédiaire de François Français, un de ses anciens professeurs, que Poncelet eut connaissance du *Traité d'Algèbre* et donc de l'appendice qu'il

[s'empessa] d'en faire, pour mon usage particulier, une translation exacte du latin en français, sans commentaires, interprétations ni mutilations quelconques, comme il convient quand il s'agit d'une production en elle-même aussi correcte et remarquable d'un grand géomètre : cette traduction littérale est demeurée jusqu'à ce jour, entre mes mains, dans un état qui en permettrait la publication immédiate, si le goût des sérieuses études géométriques venait à se propager davantage. [Poncelet 1864, t. 2, p. 120n]

À notre connaissance, il ne s'est jamais occupé de publier cette traduction<sup>23</sup>. Il [1822] déclare que les travaux de MacLaurin l'ont inspiré. À maintes reprises, des résultats de ce dernier sont énoncés. Par exemple, la propriété suivante : Si on inscrit un quadrilatère quelconque ABCD à une section conique, et qu'on lui circonscrive un autre abcd, dont les côtés touchent la courbe aux sommets du premier, alors les quatre diagonales de ces deux quadrilatères se croiseront en un même point P [Poncelet 1822, p. 100]. Ce résultat est donné dans la deuxième section sur les sections coniques du *De Linearum*, [MacLaurin 1748, p. 400]. L'énoncé

---

<sup>23</sup> Celle-ci se trouve dans le fonds Poncelet de la bibliothèque de l'École polytechnique.

est différent et la façon d’appréhender le problème l’est aussi mais la conclusion du Français est équivalente à celle de MacLaurin.

Dans le *Journal de Crelle* [Poncelet 1828], il revient sur un thème déjà abordé dans son *Traité des Figures projectives*, les moyennes harmoniques. Dans cet article écrit en 1823, il reconnaît que la moyenne harmonique introduite par MacLaurin [1748, p. 388–397] est le point de départ de son projet. Il cite la définition de ce dernier :

La moyenne harmonique entre un nombre quelconque de quantités est telle que sa réciproque est moyenne arithmétique entre toutes celles des autres, prises avec un signe convenable. [Poncelet 1828, p. 219]

Cette définition permet

d’arriver par là, à un théorème fort beau de Côtes sur les courbes algébriques et à quelques autres analogues sur la courbure de ces lignes, qui se présentent comme des corollaires très particuliers du résultat de mon travail. [Poncelet 1828, p. 219–220]

En effet, Poncelet modifie la définition initiale :

Soit AB une droite ou distance quelconque ; prenons sur cette droite et son prolongement, les points Q et P, tels qu’on ait

$$\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB} = \frac{PQ - PA}{PB - PQ}$$

la distance AB sera divisée harmoniquement en P et Q, et cette définition devra s’étendre au cas même où l’un quelconque des points proposés sera supposé à l’infini. [Poncelet 1828, p. 221]

De plus les projetés des points A, B, P et Q sur une droite quelconque issue d’un point conservent l’égalité ce qui lui fait écrire que « cette relation est projective » [Poncelet 1828, p. 222] (fig. 11). En modifiant la relation énoncée plus haut, il retrouve alors la définition de MacLaurin.

Par sa méthode, Poncelet démontre une construction simple du point Q, centre des moyennes harmoniques lorsque P, A et B sont connus. Soit une nouvelle transversale sur laquelle sont projetés les points A et B, les nouveaux points sont appelés A'' et B''. Alors le point d’intersection, S', des droites AB'' et A''B est sur la droite passant par S et contenant Q (qui se trouve lui aussi sur la droite AB). Cette construction a été donnée par MacLaurin [1748, p. 389–390] mais sa démonstration fait intervenir des



cela simplement pour remarquer que Poncelet, encore vivant, semble avoir ignoré cet ouvrage car à aucun endroit il n'en fait mention.

#### 4. CONCLUSION

Les travaux géométriques de la première moitié du XVIII<sup>e</sup> siècle sont souvent négligés par les historiens des sciences. Même si ceux de Colin MacLaurin sont cités par D'Alembert dans l'*Encyclopédie*, ce dernier nie leur intérêt :

M. MacLaurin nous a même donné un savant ouvrage intitulé, *Geometria Organica*, dans lequel il donne des moyens fort ingénieux de tracer ainsi plusieurs courbes. ... Mais toutes ces méthodes sont plus curieuses qu'utiles & commodes [*Encyclopédie*, t. 4, p. 878b].

Colin MacLaurin se décrit dans l'ouvrage que l'on a étudié comme un continuateur de la pensée newtonienne. Mais, à la lecture de cet écrit, il ressort qu'il dépasse largement l'ambition de Newton quant à l'étude des courbes de troisième ordre comme dans le *De Linearum*. De plus, cet appendice est le résultat d'une grande maîtrise de la géométrie propre à MacLaurin. Le *Treatise of Fluxions* en est un autre exemple. C'est peut-être cet attrait pour la géométrie passée de mode qui donne ce ton un peu méprisant à D'Alembert dans l'article DESCRIPTION de l'*Encyclopédie*. Néanmoins, lorsqu'on lit Chasles et surtout Poncelet, il est frappant de remarquer que ces derniers ont eu une lecture attentive de l'œuvre du savant écossais et qu'elle était en résonance avec leurs propres recherches.

Sans pour autant exagérer l'influence des écrits de MacLaurin sur Poncelet, il est indéniable que les méthodes et l'esprit ont reçu un écho très favorable chez lui. Ainsi, les œuvres géométriques de MacLaurin peuvent être considérées comme un pont entre la géométrie du XVII<sup>e</sup> dont Newton est un des derniers représentants et la géométrie projective de Poncelet, une des nouvelles géométries du XIX<sup>e</sup> siècle.

Je tiens à remercier les rapporteurs pour leurs judicieuses remarques.

## BIBLIOGRAPHIE

## BRUNEAU (Olivier)

- [2005] *Pour une biographie intellectuelle de Colin MacLaurin (1698-1746)*, Thèse, Université de Nantes, 2005.
- [2011] *Colin MacLaurin ou l'obstination mathématicienne d'un newtonien*, Presses Universitaires de Nancy, 2011.

## CHASLES (Michel)

- [1830] Théorèmes généraux sur les diamètres des surfaces du second degré, *C.G.Q.*, 6 (1830), p. 255–258.
- [1837] *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Bruxelles : Hayes, 1837.
- [1852] *Traité de géométrie supérieure*, Paris : Bachelier, 1852.

## DE GANDT (François)

- [1995] *Force and geometry in Newton's Principia*, Princeton : Princeton Univ. Press, 1995.

## DE GUA (Jean-Paul)

- [1740] *Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir, sans le secours du calcul différentiel, les propriétés des lignes géométriques de tous les ordres*, Paris : Briasson, 1740.

## DE LA HIRE (Philippe)

- [1673] *Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques...*, Paris : Moette, 1673.
- [1730] Sur les Conchoïdes en général, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris pour l'année 1708*, 1730, p. 32–60.

## D'ALEMBERT (Jean) &amp; DIDEROT (Denis)

- [*Encyclopédie*] *Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, 1751–1765.

## GOWING (Ronald)

- [1983] *Roger Cotes - natural philosopher*, Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1983.

## GRABINER (Judith)

- [1996] A mathematician among molasses barrels : MacLaurin's unpublished memoir on Volumes, Introduction : MacLaurin's memoir and its place in 18th century Scotland, *Proceeding of Edinburgh Mathematical Society*, 39(2) (1996), p. 193–240.

- [1997] Was Newton's calculus a dead end? The continental influence of MacLaurin's Treatise of Fluxions, *American Mathematical Monthly*, 104(5) (1997), p. 393–410.
- [1998] Some disputes of consequences : MacLaurin among molasses barrels, *Social Studies of Science*, 28(1) (1998), p. 139–168.
- [2002] MacLaurin and Newton : The Newtonian style and the authority of mathematics, 2002 ; in [Withers & Wood 2002, p. 143–171].
- [2004] Newton, MacLaurin, and the Authority of Mathematics, *American Mathematical Monthly*, 111(10) (2004), p. 841–852.

GREENSTREET (W. J.)

- [1927] *Isaac Newton, 1642-1727*, A memorial volume edited for the Mathematical Association, Londres : G. Bell and Sons, 1927.

GUICCIARDINI (Niccoló)

- [1984] Una riposta a Berkeley : Colin MacLaurin e i fondamenti del calcolo flussionale, *Epistemologia*, 7 (1984), p. 201–224.
- [1989] *The Development of Newtonian Calculus in Britain 1700-1800*, Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1989.
- [1998] Did Newton use his calculus in the Principia?, *Centaurus*, 46 (1998), p. 303–344.
- [1999] *Reading The Principia : The Debate on Newton's Mathematical Methods for Natural Philosophy from 1687 to 1736*, Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1999.
- [2009] *Isaac Newton on Mathematical certainty and method*, Cambridge : MIT Press, 2009.

HALL (Rupert)

- [1996] *Isaac Newton : Adventurer in thought*, Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1996.

JONQUIÈRES (Ernest de)

- [1856] *Mélanges de Géométrie Pure comprenant diverses applications des Théories exposées dans le Traité de Géométrie Supérieure de M. Chasles. Au Mouvement infiniment petit d'un corps, aux sections coniques aux courbes du troisième ordre, etc. et la Traduction du Traité de MacLaurin sur les courbes du troisième ordre*, Paris : Mallet-Bachelier, 1856.

LORIA (Gino)

- [1902] *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven, Theorie und Geschichte*, Leipzig : Teubner, 1902.

## MACLAURIN (Colin)

- [1713] *Dissertatio Philosophica Inauguralis, De Gravitate, aliisque viribus Naturalibus*, Édimbourg, 1713.
- [1720] *Geometria Organica : sive Descriptio Linearum Curvarum Universalis*, Londres : William and John Innys, 1720.
- [1742] *Treatise of Fluxions in two books*, Édimbourg, 1742.
- [1748] *A Treatise of Algebra in three Parts. (...) To which added an Appendix, Concerning the General Properties of Geometrical Lines*, Londres : Millar & Nourse, 1748.
- [a] *Traité des Fluxions en deux livres*; trad. française de [MacLaurin 1742].
- [b] *De Linearum Geometricarum Proprietatibus Generalibus Tractatus (Treatise of Algebra)*, p. 435–404, trad. anglaise de [MacLaurin 1748].

## MILLS (Stella)

- [1982] *The Collected Letters of Colin MacLaurin*, Nantwich : Shiva, 1982.

## MILNE (J.J.)

- [1927] Newton's contributions to the geometry of conics, 1927; in [Greensreet 1927, p. 96–114].

## NEWTON (Isaac)

- [MP] *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1967–1981.
- [1704a] *Opticks : or, a Treatise of the reflexions, refractions, inflexions and colours of light. Also two treatises of the species and magnitude of curvilinear figures*, Londres : Smith and Walford, 1704.
- [1704b] *Enumeratio Lineatum tertii ordinis*, 1704; in [Newton 1704a, p. 138–163].
- [1704c] *Tractatus de Quadratura Curvarum*, 1704; in [Newton 1704a, p. 164–211].
- [1707] *Arithmetica Universalis; sive De Compositione et Resolutione Arithmetica Liber*, Londres : Tooke, 1707.
- [1720] *Universal Arithmetick : or, a Treatise of Arithmetical Composition and Resolution...*, Londres, 1720; trad. anglaise de Raphson de Newton [1707].
- [1861] *Enumeration of Lines of the Third Order : Generation of Curves by Shadows, Organic Description of Curves, and Construction of Equations by Curves*, Translation and commentary by Christopher R. M. Talbot. Londres : Bohn, 1861; trad. anglaise de [Newton 1704b].

## PANZA (Marco)

- [1986] *La statua di Fidia*, Milan : Unicopli, 1986.
- [2005] *Newton et les origines de l'Analyse, 1664-1666*, Paris : Albert Blanchard, 2005.

## PONCELET (Jean-Victor)

- [1817–1818] Théorèmes nouveaux sur les lignes du second ordre, *Annales de Mathématiques pures et appliquées dits de Gergonne*, 1817–1818, p. 1–13.
- [1822] *Traité des propriétés projectives des figures...*, Paris : Bachelier, 1822.
- [1828] Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques..., *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 3 (1828), p. 213–272.
- [1832] Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et des surfaces géométriques..., *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 8 (1832), p. 21–41, 117–137, 213–252, 370–410.
- [1864] *Applications d'analyse et de géométrie, qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figures*, Paris : Gauthier-Villars, 1864.

## PYCIOR (Helena)

- [1997] *Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements : British Algebra through the Commentaries on Newton's Universal Arithmetick*, Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1997.

## ROUSE BALL (W. W.)

- [1890] On Newton's Classification of Cubic Curves, *Proc. London Math. Soc.*, 22 (1890), p. 104–143.
- [1901] *A Short Account of the History of Mathematics*, Londres : Macmillan & Co, 3<sup>e</sup> édition, 1901.

## SAGENG (Erik)

- [1989] *Colin MacLaurin and the Foundations of the Method of Fluxions*, Thèse, Princeton University, 1989.

## SALMON (George)

- [1869] *A treatise on conic sections : containing an account of some of the most important modern algebraic and geometric methods*, Londres : Longmans, Green, Reader & Dyer, 5<sup>e</sup> édition, 1869.

## STIRLING (James)

- [1717] *Isaaci Newtoni Enumeratio linearum tertii ordinis; sequitur illustratio ejusdem tractatus*, Paris : Duprat, 1717.

## TURNBULL (Herbert)

- [1951] *Bi-centenary of the Death of Colin MacLaurin (1698-1746)*, Aberdeen : Aberdeen University Press, 1951.

## TWEEDIE (Charles)

- [1916] The 'Geometria Organica' of Colin Maclaurin : a historical and critical Survey, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 36(1) (1916), p. 87–150.

WALLIS (Peter) & WALLIS (Ruth)

[1986] *Bio-bibliography of British Mathematics and its Application*, PHIBB, Newcastle Upon Tyne : Epsilon Press, 1986.

WITHERS (Charles) & WOOD (Paul), éd.

[2002] *Science and Medecine in the Scottish Enlightenment*, East Linton : Tuckwell Press, 2002.

