



# Implémentation éléments finis d'une condition optimale de préservation de l'orientation

François Peyraut, Zhi-Qiang Feng

## ► To cite this version:

François Peyraut, Zhi-Qiang Feng. Implémentation éléments finis d'une condition optimale de préservation de l'orientation : Cas du contact en grandes déformations hyperélastiques. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 2004, 13 (8), pp.899-914. 10.3166/reef.13.889-914 . hal-01179532

**HAL Id: hal-01179532**

**<https://hal.science/hal-01179532>**

Submitted on 30 Aug 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Implémentation éléments finis d'une condition optimale de préservation de l'orientation

## Cas du contact en grandes déformations hyperélastiques

François Peyraut\* — Zhi-Qiang Feng\*\*

\* Laboratoire M3M, Université de Technologie de Belfort-Montbéliard (UTBM)  
Rue de Leupe, Sévenans, F-90010 Belfort cedex  
francois.peyraut@utbm.fr

\*\* Laboratoire de Mécanique d'Evry, Université d'Evry-Val d'Essonne  
40, rue du Pelvoux, F-91020 Evry cedex  
feng@iup.univ-evry.fr

---

*RÉSUMÉ. Pour le modèle hyperélastique compressible de Blatz-Ko, un défaut de préservation de l'orientation conduit à la divergence de l'algorithme de Newton-Raphson. Il est donc important de disposer de critère permettant de détecter un tel défaut au cours d'un calcul numérique. Dans cet article, on propose un critère basé sur le changement de signe des valeurs propres de la matrice gradient des déformations entre les configurations déformée et non déformée. On montre que ce critère ne dépend pas de la géométrie et du chargement considéré et qu'il permet une convergence optimale. Son implémentation dans un code de calcul éléments finis est présenté. Enfin, le critère que nous proposons est validé sur plusieurs exemples dont l'un traite du contact entre deux corps hyperélastiques déformables.*

*ABSTRACT. For the Blatz-Ko compressible hyperelastic model, an orientation preservation defect leads to the divergence of the Newton-Raphson algorithm. It is thus important to find a criterion in order to detect such a defect during a numerical calculation. In this paper, we propose a criterion based on the change of sign of the deformation gradient matrix eigenvalues between the deformed and undeformed configurations. It is shown that this criterion does not depend on the geometry and the loading and that it allows an optimal convergence. Its implementation in a finite element software is presented. Finally, this criterion is validated on several examples. One of these examples deals with the contact problem between two deformable hyperelastic bodies.*

*MOTS-CLÉS : préservation de l'orientation, hyperélasticité compressible, modèle de Blatz-Ko, mécanique du contact.*

*KEYWORDS: orientation preservation, compressible hyperelasticity, Blatz-Ko model, contact mechanics.*

## 1. Introduction

Aujourd'hui, les grands déplacements et les grandes déformations hyperélastiques suscitent encore de nombreuses interrogations. En effet, l'existence et l'unicité de la solution ne sont pas toujours assurées (Ciarlet, 1988). Par ailleurs, dans le cas particulier du modèle compressible de Blatz-Ko (Blatz *et al.*, 1962), la perte d'ellipticité des équations d'équilibre entraîne des difficultés numériques à proximité des valeurs critiques de chargement (Wineman *et al.*, 1995). Enfin, les problèmes de convergence de l'algorithme de Newton-Raphson en liaison avec le modèle de Blatz-Ko et le principe de préservation de l'orientation ont été abordés dans (Peyraut *et al.*, 2001).

Pour éviter une perte de la préservation de l'orientation au cours d'un calcul numérique, le critère usuel, qui porte sur la positivité du déterminant de la matrice gradient des déformations  $\mathbf{F}$ , n'est pas suffisant. En effet, ce critère se base sur les changements de volume infinitésimaux entre les configurations déformée et non déformée. Il ne prend donc pas en compte les retournements de surface. Pour se prémunir de tels retournements, le critère basé sur le changement de signe des valeurs propres de  $\mathbf{F}$  entre les configurations déformée et non déformée est plus efficace (Peyraut *et al.*, 2003b). Dans l'article, on montre qu'on peut déduire de ce critère une condition numérique générale et optimale. Elle est générale car elle s'applique à n'importe quelle géométrie, n'importe quel chargement et n'importe quelle loi de comportement. Elle est optimale car elle permet la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson avec le minimum de pas sur le chargement. Nous avons réalisé son implémentation dans le code de calcul aux éléments finis FER avec une formulation Lagrangienne totale. Les calculs s'en trouvent ainsi simplifiés, la configuration initiale restant constante (Wood *et al.*, 1977). Pour traiter efficacement du contact, les non-linéarités matérielles sont séparées des non-linéarités de contact (Feng *et al.*, 1994 ; Feng, 1995) et le potentiel de contact non différentiable est régularisé par la méthode du Lagrangien augmenté (De Saxcé *et al.*, 1998).

Trois exemples d'application avec le modèle hyperélastique compressible de Blatz-Ko sont présentés. Avec les deux premiers, on valide la condition optimale implémentée dans FER en la comparant avec une solution analytique de référence. Le premier exemple concerne un cube en compression dans un container rigide et le second une éprouvette rectangulaire en compression. Avec le troisième et dernier exemple, qui concerne le contact en grands glissements et grandes déformations entre deux solides hyperélastiques, on vérifie la fiabilité de la condition implémentée dans FER sur un cas où il n'existe pas de solution analytique de référence.

## 2. Formulation éléments finis du contact en hyperélasticité

L'analyse non linéaire peut être réalisée en utilisant la formulation du Lagrangien total ou du Lagrangien actualisé, chacune de ces approches comportant des

avantages et des inconvénients respectifs. Avec le Lagrangien total, la configuration initiale reste constante. En conséquence, son implémentation ne nécessite pas d'actualisation de maillage à chaque itération contrairement au Lagrangien actualisé (Crisfield, 1991). En contrepartie, le Lagrangien total nécessite le calcul de la matrice initiale de raideur en déplacement qui disparaît en Lagrangien actualisé.

En grandes déformations élastoplastiques, qui n'est pas notre propos dans cet article, la formulation du Lagrangien actualisé est particulièrement bien adaptée en raison du fait qu'il faut introduire des configurations intermédiaires pour la décomposition du gradient de déformation en une partie élastique et une partie plastique (Sidoroff, 1982). Mais comme cette décomposition ne concerne pas le domaine hyperélastique qui nous intéresse, le fait de ne pas actualiser le maillage simplifie l'implémentation. C'est la raison pour laquelle nous avons retenu une approche Lagrangien total pour la discrétisation éléments finis. Classiquement, le déplacement  $\mathbf{U}$  de la structure est donné par le produit des fonctions de forme  $\mathbf{N}$  avec les déplacements nœuds  $\mathbf{u}$  :

$$\mathbf{U} = \mathbf{N} \mathbf{u} \quad [1]$$

En raison des grands déplacements et des grandes rotations hyperélastiques, le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  est adopté pour décrire la relation non linéaire entre les déformations et les déplacements nœuds  $\mathbf{u}$  :

$$\mathbf{E} = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})) \mathbf{u} \quad [2]$$

où  $\mathbf{B}_L$  est la matrice qui relie la partie linéaire des déformations aux déplacements nœuds et  $\mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})$  est la matrice qui relie la partie non linéaire des déformations aux déplacements nœuds. D'après [2], la forme incrémentale de la relation entre les déformations et les déplacements est donnée par :

$$\delta \mathbf{E} = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})) \delta \mathbf{u} \quad [3]$$

Pour le modèle hyperélastique de Blatz-Ko, le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff  $\mathbf{S}$  est donné en fonction de  $\mathbf{E}$  par :

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) = G \left\{ J (2\mathbf{E} + \mathbf{I})^{-1} - (2\mathbf{E} + \mathbf{I})^{-2} \right\} \quad [4]$$

L'incrément de contrainte  $\delta \mathbf{S}$  est donc relié à l'incrément de déformations  $\delta \mathbf{E}$  par :

$$\delta \mathbf{S} = \mathbf{D} \delta \mathbf{E} = \mathbf{D} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})) \delta \mathbf{u} \quad [5]$$

où les coefficients de la matrice 6x6  $\mathbf{D}$  sont obtenus en dérivant [4] par rapport à  $\mathbf{E}$  :

$$D_{ijkl} = G \left\{ -2 J (2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{ik}^{-1} (2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{lj}^{-1} + J (2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{lk}^{-1} (2\mathbf{E} + \mathbf{I})_{ij}^{-1} \right\}$$

$$+ 2 \left[ \left( 2 \mathbf{E} + \mathbf{I} \right)_{ik}^{-1} \left( 2 \mathbf{E} + \mathbf{I} \right)_{lj}^{-2} + \left( 2 \mathbf{E} + \mathbf{I} \right)_{ik}^{-2} \left( 2 \mathbf{E} + \mathbf{I} \right)_{lj}^{-1} \right] \} \quad [6]$$

Au passage, il est intéressant de noter que la version eulérienne de [5] s'obtient en dérivant les contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  par rapport au tenseur des déformations de Cauchy-Green à gauche  $\mathbf{B}$  :

$$\partial \boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{D}} \partial \mathbf{B} \quad [7]$$

les coefficients de la matrice 6x6  $\tilde{\mathbf{D}}$  étant donnés par :

$$\tilde{D}_{ijkl} = G J^{-1} \left\{ \mathbf{B}_{ik}^{-1} \mathbf{B}_{lj}^{-1} + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{lk}^{-1} \mathbf{B}_{ij}^{-1} \right\} \quad [8]$$

Le calcul de la matrice de la loi incrémentale est donc moins coûteux en formulation lagrangienne actualisée qu'en formulation lagrangienne totale puisque le coût numérique de [8] correspond au coût numérique du premier terme de [6]. Néanmoins, comme l'essentiel du temps calcul n'est pas consacré au calcul des coefficients  $D_{ijkl}$  ou  $\tilde{D}_{ijkl}$ , nous conserverons par la suite la formulation lagrangienne totale. Avec cette formulation, on utilise de manière classique le principe des déplacements virtuels pour obtenir :

$$\mathbf{F}_{\text{int}} - \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{R} = 0 \quad [9]$$

où  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  est le vecteur des forces internes,  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  le vecteur des forces extérieures et  $\mathbf{R}$  le vecteur des réactions de contact.

L'équation [9] est fortement non linéaire en raison des grands déplacements et des grandes déformations hyperélastiques. De plus, le contact avec frottement est généralement représenté par des inégalités et le potentiel de contact est même non différentiable. Aussi, plutôt que de résoudre [9] en considérant toutes les non-linéarités en même temps, nous proposons une approche consistant à séparer les non-linéarités afin de rendre moins complexes les calculs et d'augmenter la stabilité numérique.

Dans un premier temps, on utilise la méthode du Lagrangien augmenté dans le but d'éviter les potentiels non différentiables qui apparaissent en mécanique du contact (De Saxcé *et al.*, 1998). On aboutit alors à une équation implicite que l'on résout par un algorithme d'Uzawa, avec une phase de prédiction et une phase de correction. Le point clef de la méthode est que la correction peut être calculée analytiquement (De Saxcé *et al.*, 1998). Ce calcul des efforts de contact, qui s'effectue dans un système réduit ne concernant que les nœuds de contact, permet de déterminer les réactions  $\mathbf{R}$ .

Dans un deuxième temps, les déplacements sont calculés dans toute la structure en considérant les réactions de contact et de frottement comme des forces extérieures. Le système qui en résulte est résolu avec l'algorithme itératif de Newton-Raphson (Belytschko *et al.*, 2002) :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_T^i \Delta \mathbf{u} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{R} - \mathbf{F}_{\text{int}}^i \\ \mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \Delta \mathbf{u} \end{cases} \quad [10]$$

où  $\mathbf{u}_i$  représente le déplacement connu à l'itération  $i$  et  $\mathbf{u}_{i+1}$  le déplacement à calculer à l'itération  $i+1$ .  $\mathbf{K}_T^i$  est la matrice de raideur tangente,  $\Delta \mathbf{u}$  est l'incrément des déplacements nodaux et  $\mathbf{F}_{\text{int}}^i$  est le vecteur des forces internes.

L'ensemble de la démarche présentée dans ce paragraphe, qui consiste à séparer les non-linéarités matérielles associées à l'hyperélasticité des non-linéarités locales de contact, a été implémenté dans le code de calcul aux éléments finis FER. La démarche est valable aussi bien en 2D qu'en 3D et permet d'obtenir des résultats très stables et très précis.

### 3. Implémentation d'une condition optimale de préservation de l'orientation dans le code FER

Dans (Peyraut *et al.*, 2001 ; Peyraut, 2003a et Peyraut *et al.*, 2003b), il a été établi qu'il existe des conditions analytiques permettant une convergence optimale en relation avec la préservation de l'orientation. Cependant, ces conditions ne sont valables que pour les cas particuliers étudiés (cube en compression dans un container rigide, sphère sous pression hydrostatique, éprouvette en compression simple). Elles ne sont donc pas générales. C'est la raison pour laquelle on se propose de généraliser nos travaux antérieurs à une géométrie et à un chargement quelconques. Le prix à payer de cette généralisation est que la condition optimale de convergence ne sera plus analytique mais numérique. On discute alors de son implémentation dans un code de calcul aux éléments finis.

Pour trouver une condition générale et optimale de convergence, l'idée consiste à déterminer la limite entre la zone de préservation de l'orientation et la zone de non-préservation de l'orientation puis de choisir le nombre de pas sur le chargement (ou le rayon d'arc) correspondant. Cette limite est caractérisée par l'existence d'au moins une valeur propre nulle de la matrice gradient des déformations  $\mathbf{F} = \mathbf{Id} + \nabla \mathbf{u}$ . En effet, il a été établi dans (Peyraut *et al.*, 2003b) que la préservation de l'orientation se traduit par des valeurs propres toutes strictement positives alors que la non-préservation de l'orientation se caractérise par au moins une valeur propre négative ou nulle. Il est donc logique de définir la limite de ces deux zones par :

$$\det(\mathbf{F}) = 0 \quad [11]$$

où la matrice gradient des déformations est calculée avec le gradient lagrangien des déplacements.

La limite étant recherchée sur la structure discrétisée en éléments finis, on formule le problème en Lagrangien total pour les mêmes raisons que celles évoquées au début du paragraphe 2. En utilisant [1], [11] s'écrit encore :

$$\det(\mathbf{Id} + \nabla(\mathbf{N} \cdot \mathbf{u})) = 0 \quad [12]$$

où, d'après [10],  $\mathbf{u}$  est solution, à la première itération de Newton-Raphson, du système linéaire :

$$\mathbf{K}_T \mathbf{u} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad [13]$$

On ne considère que la première itération de Newton-Raphson car, sur des cas particuliers (Peyraut *et al.*, 2001 ; Peyraut, 2003a et Peyraut *et al.*, 2003b), on a constaté que c'était cette itération qui conditionnait la convergence. Avec la version incrémentale de l'algorithme de Newton-Raphson,  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  devient  $\alpha \mathbf{F}_{\text{ext}}$ , le paramètre réel  $\alpha$  appartenant à l'intervalle ]0,1]. Par linéarité  $\mathbf{u}$  devient  $\alpha \mathbf{u}$ . La condition [12] s'écrit alors :

$$\det(\mathbf{Id} + \alpha \nabla(\mathbf{N} \cdot \mathbf{u})) = 0 \quad [14]$$

Cette égalité permet de choisir le paramètre  $\alpha$  de manière optimale. En effet,  $\alpha$  étant non nul, [14] est équivalent à :

$$\det\left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{Id} + \nabla(\mathbf{N} \cdot \mathbf{u})\right) = 0 \quad [15]$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \mathbf{Id} + \mathbf{Id} + \nabla(\mathbf{N} \cdot \mathbf{u})\right) = 0 \quad [16]$$

$$\Leftrightarrow \det(\mathbf{F} - \lambda \mathbf{Id}) = 0 \quad [17]$$

en posant :

$$\lambda = 1 - \frac{1}{\alpha} \quad [18]$$

Autrement dit,  $\lambda$  est une valeur propre de  $\mathbf{F}$ . Le nombre  $\alpha$  étant compris entre 0 et 1, il est facile de vérifier avec [18] que  $\lambda$  est négative ou nulle. La matrice  $\mathbf{F}$  pouvant avoir trois valeurs propres distinctes, trois choix sont alors possibles pour  $\alpha$ .



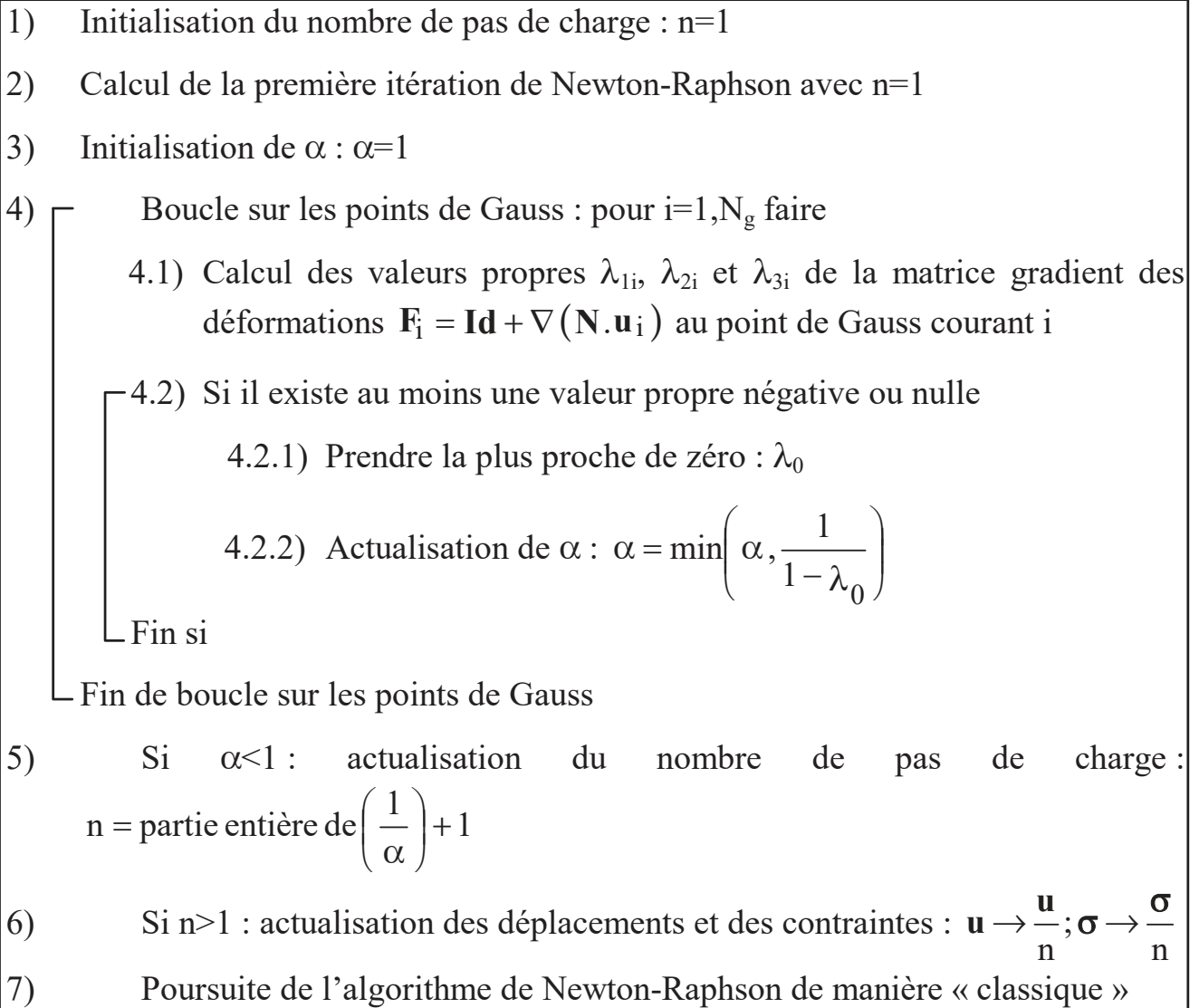
Le meilleur est celui qui donne le plus grand  $\alpha$  puisque c'est celui qui permet d'avoir le nombre d'itérations le plus faible. Comme [18] est équivalent à :

$$\alpha = \frac{1}{1 - \lambda} \quad [19]$$

on cherchera la valeur propre de  $\mathbf{F}$  négative ou nulle la plus proche de zéro. Cette recherche doit s'effectuer à tous les points de Gauss du maillage. Comme il correspond à chaque point un  $\alpha$  optimal différent, on prendra le minimum des  $\alpha$  pour éviter localement des zones de non-préservation de l'orientation. Une fois le nombre  $\alpha$  optimal déterminé, on en déduit le nombre optimal de pas de charge :

$$n = \text{partie entière de} \left( \frac{1}{\alpha} \right) + 1 \quad [20]$$

L'algorithme permettant de calculer ce nombre optimal a été implémenté dans le code de calcul aux éléments finis FER. Il est résumé par l'organigramme de la figure 1.



**Figure 1.** Implémentation de la condition optimale de convergence dans FER



L'étape 6 de l'organigramme permet de gagner du temps de calcul en évitant de recalculer la première itération de Newton-Raphson. En effet, si l'algorithme de Newton-Raphson est dédié à la résolution de problèmes non linéaires, il n'en demeure pas moins que chaque itération est linéaire. Si on connaît la solution  $\mathbf{u}$  associée à un chargement égal à  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  (étape 2), on sait donc que la solution associée à un chargement égal à  $\mathbf{F}_{\text{ext}}/n$  est donnée par  $\mathbf{u}/n$ . Il est donc inutile de la recalculer, l'étape 6 la donne directement.

L'étape 7 de l'organigramme suppose que les problèmes de préservation de l'orientation ne peuvent survenir qu'à la première itération. C'est en tout cas ce qu'on observe avec les trois exemples qui seront traités au paragraphe suivant. Si, sur d'autres exemples, des problèmes de préservation de l'orientation devaient survenir ultérieurement à la première itération, il suffirait d'adapter l'organigramme de la figure 1 en appliquant les étapes 1 à 6 à chaque itération.

Enfin, dans la présentation de cet organigramme, on note l'absence d'hypothèses restrictives liées à la version de la méthode de Newton-Raphson. Cela signifie que notre approche est valable quelle que soit la version utilisée (descente adaptée, *line search*, bisection, pilotage par longueur d'arc...). La seule adaptation mineure à effectuer concerne une approche avec pilotage par longueur d'arc. Comme cela est préconisé dans (Peyraut *et al.*, 2001) et dans (Peyraut *et al.*, 2003b), il suffit dans ce cas de compléter l'étape 4) par la définition suivante de la longueur d'arc initiale :

$$r = \frac{1}{n} \quad [21]$$

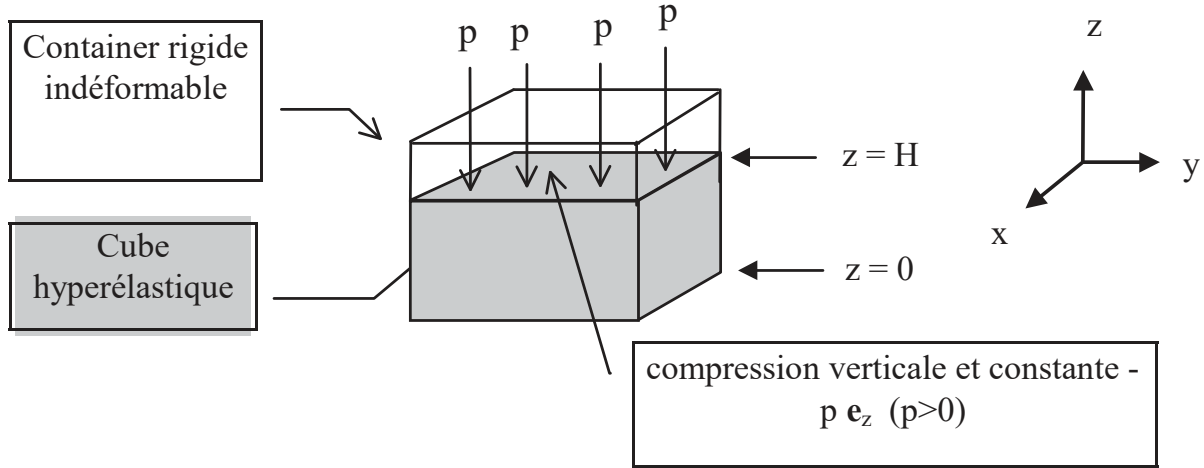
#### 4. Validation de la condition optimale de convergence

La condition optimale de convergence a été implémentée dans le code de calcul FER selon l'organigramme exposé à la figure 1. Elle a été validée sur plusieurs exemples qui sont présentés dans les sections 4.1 à 4.3 qui suivent. Dans les sections 4.1 et 4.2, on traite de chargement et de géométries particulières pour lesquels le nombre de pas optimal est connu analytiquement. A chaque fois, le nombre de pas optimal calculé numériquement par FER correspond exactement aux formules analytiques.

La section 4.3 traite ensuite du contact entre deux solides hyperélastiques, cas pour lequel on ne dispose pas de formule analytique de référence. On vérifie cependant la fiabilité du nombre de pas de charge optimal calculé numériquement par FER en constatant qu'il y a convergence pour ce nombre de pas de charge et divergence si on le diminue de 1.

#### 4.1. Cube en compression dans un container rigide

On considère un cube hyperélastique de hauteur  $H = 0.5$  m et soumis à un effort de compression  $p$  dans un container rigide indéformable (figure 2). On suppose que le contact entre les parois latérales du cube et le container est sans frottement et que la base du cube est parfaitement collée sur le fond du container.



**Figure 2.** Cube en compression dans un container rigide

Il a été établi dans (Peyraut *et al.*, 2001) que le nombre optimal de pas sur le chargement est donné pour un cube en compression dans un container rigide par :

$$n = \text{partie entière de } \left[ \frac{p}{3G} \right] + 1 \quad [22]$$

Si on applique cette formule analytique avec une compression de  $p = 5$  MPa, le module de cisaillement  $G$  étant pris par ailleurs égal à 220711 Pa en accord avec les résultats expérimentaux obtenus par Blatz et Ko (Blatz *et al.*, 1962), on obtient le nombre optimal de pas :  $n = 8$ . Un calcul éléments finis avec FER donne le même résultat. En effet, avec un pas de chargement, le calcul avec FER montre qu'il existe une valeur propre négative :  $\lambda = -6.55135$ . FER utilise ensuite [19] pour obtenir :

$$\alpha = \frac{1}{1 - \lambda} = 0.13243 \quad [23]$$

FER calcule enfin  $n$  d'après [20] :

$$n = \text{partie entière de } \left( \frac{1}{\alpha} \right) + 1 = 8 \quad [24]$$

Dans le tableau 1, plusieurs calculs ont été réalisés en faisant varier la pression. Pour chaque calcul, la tolérance sur le résidu est de  $10^{-7}$  et le nombre moyen

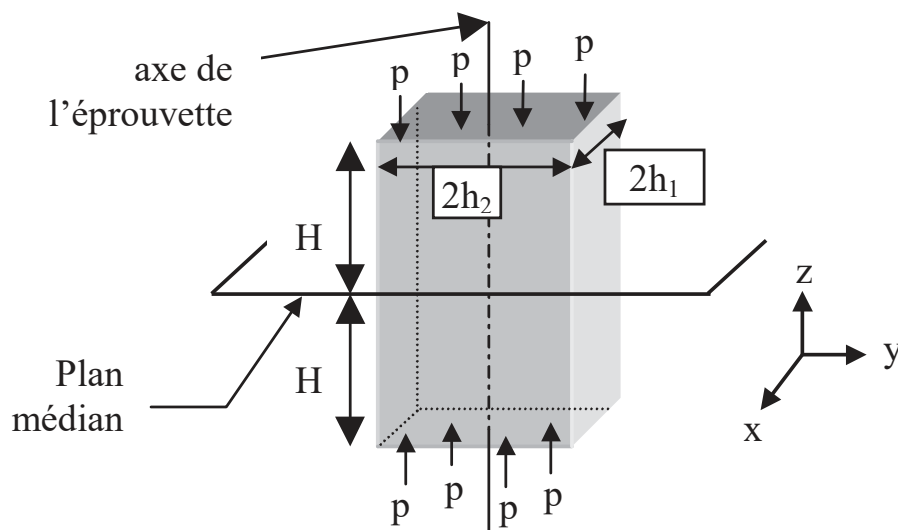
d'itération par pas est de 3. On constate à nouveau que le contrôle numérique par FER du nombre optimal de pas donne le même résultat que la formule analytique [22]. Pour l'exemple traité dans ce paragraphe, l'implémentation du contrôle de la préservation dans FER est validée.

Méthode	$p = 2 \text{ MPa}$	$p = 5 \text{ MPa}$	$p = 8 \text{ MPa}$	$p = 11 \text{ MPa}$
Analytique $n$ :	4	8	13	17
Numérique $n$ :	4	8	13	17
Numérique $\lambda$ :	-2,02054	-6,55135	-11,0822	-15,613
Déplacement $u_z$ (m)	-0,268395265	-0,325818682	-0,350281662	-0,365029766

**Tableau 1.** Comparaison des résultats en fonction de la pression

## 4.2. Eprouvette en compression

On considère une éprouvette de section rectangulaire soumise à une compression surfacique uniforme  $p$  sur ses faces inférieure et supérieure (figure 3). Les dimensions de l'éprouvette sont prises égales à :  $2h_1 = 5 \text{ cm}$ ,  $2h_2 = 2.5 \text{ cm}$ ,  $2H = 50 \text{ cm}$ .



**Figure 3.** Eprouvette en compression

Il a été établi dans (Peyraut *et al.*, 2003b) que le nombre optimal de pas sur le chargement est donné pour une éprouvette en compression par :

$$n = \text{partie entière de} \left[ \frac{p}{E} \right] + 1 \quad [25]$$

Si on applique cette formule analytique avec une compression de  $p = 6\,000\,000 \text{ Pa}$ , le module d'Young  $E$  étant pris par ailleurs égal à  $551\,778 \text{ Pa}$  en

accord avec les résultats expérimentaux obtenus par Blatz et Ko (Blatz *et al.*, 1962), on obtient le nombre optimal de pas :  $n = 11$ . Un calcul éléments finis avec FER donne le même résultat. En effet, avec un pas de chargement, le calcul avec FER montre qu'il existe une valeur propre négative :  $\lambda = -9.87394$ . FER utilise ensuite [19] pour obtenir :

$$\alpha = \frac{1}{1 - \lambda} = 0.091963 \quad [26]$$

FER calcule enfin  $n$  d'après [20] :

$$n = \text{partie entière de} \left( \frac{1}{\alpha} \right) + 1 = 11 \quad [27]$$

Dans le tableau 2, plusieurs calculs ont été réalisés en faisant varier la pression. Pour chaque calcul, la tolérance sur le résidu est de  $10^{-4}$  et le nombre moyen d'itération par pas est de 3. On constate à nouveau que le contrôle numérique par FER du nombre optimal de pas donne le même résultat que la formule analytique [25]. Pour l'exemple traité dans ce paragraphe, l'implémentation du contrôle de la préservation dans FER est validée.

Méthode	$p = 2 \text{ MPa}$	$p = 4 \text{ MPa}$	$p = 5 \text{ MPa}$	$p = 6 \text{ MPa}$
Analytique $n$ :	4	8	10	11
Numérique $n$ :	4	8	10	11
Numérique $\lambda$ :	-2,62465	-6,24929	-8,06162	-9,87394
Déplacement $u_z$ (m)	-0,150717226	-0,173197636	-0,179460554	-0,184236279

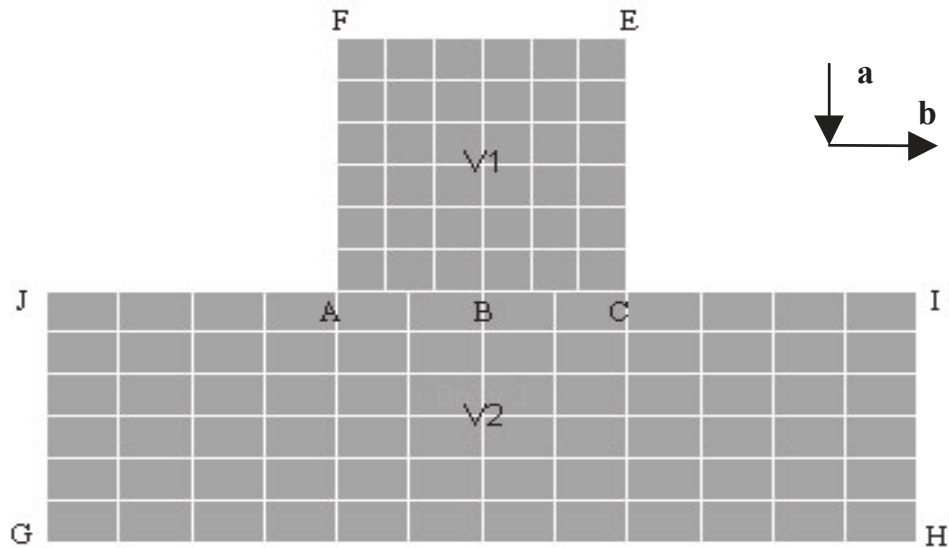
**Tableau 2.** Comparaison des résultats en fonction de la pression

#### 4.3. Contact entre deux solides hyperélastiques déformables

Dans ce paragraphe, on présente les résultats numériques obtenus dans le cas du contact avec frottement et grand glissement entre deux solides hyperélastiques (figure 4). La surface EF du solide 1 est soumise à un déplacement rigide, désigné par deux vecteurs **a** et **b**. La surface inférieure AC du solide 1 vient en contact avec la surface supérieure IJ du solide 2. Les données numériques de cet exemple sont :

- données géométriques :  $AC=CE=EF=FA=IH=JG = 500 \text{ mm}$ ;  $IJ=HG = 1500 \text{ mm}$
- module de cisaillement :  $G_1 = 5 \text{ MPa}$ ,  $G_2 = 2,5 \text{ Mpa}$
- coefficient de frottement :  $\mu = 0.2$

– conditions aux limites :  $|\mathbf{a}| = 60 \text{ mm}$ ,  $|\mathbf{b}| = 400 \text{ mm}$  sur EF ; déplacements nuls sur GH.



**Figure 4.** *Contact entre deux solides hyperélastiques*

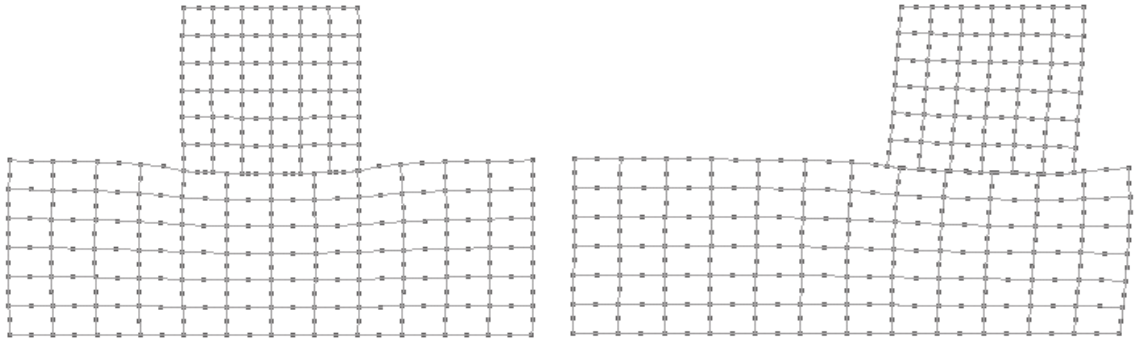
La discrétisation éléments finis comprend 386 nœuds et 108 éléments isoparamétriques à 8 nœuds en déformations planes. Chaque élément comprend 9 points d'intégration. Le contact est traité avec un scénario comprenant deux étapes. La première étape, associée à l'application du déplacement rigide **a**, fait intervenir des grandes déformations hyperélastiques mais des petits glissements. La seconde étape, associée à l'application du déplacement rigide **b**, met en jeu des grands glissements.

Dans la première étape de compression du volume 2 par le volume 1, le contrôle optimal de la préservation de l'orientation par FER indique que 13 pas de chargement sont nécessaires. Cette prédiction s'avère juste car FER converge pour  $n = 13$  et diverge pour  $n$  compris entre 1 et 12.

Dans la deuxième étape du chargement, avec un contact opérant conduisant à des transitions entre du contact glissant et du contact adhérent, la conclusion est la même. Pour un pas compris entre 1 et 12, Newton-Raphson diverge en raison de la perte de la préservation de l'orientation alors que l'orientation est préservée pour un pas égal à 13. En revanche, ces 13 pas ne suffisent pas à assurer la convergence de l'étape de glissement car des problèmes numériques, autres que ceux liés à la préservation de l'orientation, entrent alors en jeu. Pour assurer un bon traitement des grands glissements, 150 pas sont utilisés. Cela montre la nécessité d'adjoindre au contrôle de la préservation de l'orientation un traitement numérique spécifique au contact, l'un et l'autre étant indispensables à la convergence. Les problèmes numériques associés au contact, au demeurant parfaitement gérés par le logiciel FER, ont été largement traités dans la littérature (De Saxcé *et al.*, 1998 ; Feng *et al.*, 1994 ; Feng, 1995) mais ne font pas l'objet du présent papier qui focalise sur la préservation de l'orientation.

Pour ce calcul, la tolérance sur le résidu est de  $10^{-4}$  et le nombre moyen d'itération par pas est de 4. La figure 5 montre les maillages déformés pour chaque

étape du scénario. On remarque que la solution finale correspond bien à une déformation en grands glissements et que le contact entre les deux solides est respecté (pas de pénétration de matière). Grâce à l'approche locale du problème de contact, ces résultats ont été obtenus dans un laps de temps très court (32 secondes de temps CPU sur un PC muni d'un processeur Pentium 4 cadencé à 2.8 GHz).



**Figure 5.** *Maillage déformé après l'application de  $a$  et  $b$*



**Figure 6.** *Isovaleurs de déformations de compression  $E_{yy}$*

Les déformations  $E_{yy}$  sont présentées sur la figure 6. On observe logiquement une concentration de déformation sur des zones en compression qui possèdent une singularité géométrique.

## 5. Conclusions et perspectives

Dans cet article, on a montré qu'il est possible de contrôler numériquement la préservation de l'orientation au cours d'un calcul éléments finis. Le contrôle que

nous proposons est général car il est valable pour une géométrie et un chargement quelconques. Il consiste à réguler, dans le cadre d'un algorithme traditionnel de Newton-Raphson, le signe des valeurs propres de la matrice gradient des déformations aux points de Gauss du maillage et à chaque itération. Cette régulation s'exerce indépendamment de la version de Newton-Raphson utilisée (descente adaptée, line search, bisection, pilotage par longueur d'arc...), ce qui constitue un autre avantage de notre approche.

Le contrôle que nous proposons permet par ailleurs de déterminer numériquement un nombre de pas de charge optimal, l'optimalité étant comprise au sens où la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson a lieu avec un minimum d'itérations. L'implémentation de ce nombre de pas de charge optimal a été réalisée dans le code de calcul éléments finis FER. Il a été validé avec trois exemples académiques concernant le modèle hyperélastique compressible de Blatz-Ko. Avec les deux premiers exemples (compression dans un container rigide et compression simple), on dispose de formules analytiques permettant de faire des comparaisons avec les calculs numériques. Avec le troisième exemple, on a abordé le problème relativement peu traité à ce jour du contact entre deux corps hyperélastiques compressibles. Ce troisième exemple nous a permis de valider notre approche du contrôle de la préservation de l'orientation sur un cas académique plus complexe à traiter que les précédents puisqu'aucune solution analytique n'est disponible. La complexité provient de la prise en compte simultanée de deux niveaux de non-linéarités : le contact avec frottement, qui induit des non-linéarités locales, et les grands déplacements et grandes déformations hyperélastiques qui se manifestent à l'échelle globale de la structure.

Par rapport aux codes éléments finis industriels, notre approche présente deux avantages. Le premier est qu'elle prévoit un contrôle a priori de la préservation de l'orientation, contrairement à un code industriel comme ANSYS par exemple. Sans contrôle a priori, lorsqu'un calcul diverge, il est nécessaire de redémarrer les calculs en changeant les paramètres numériques. On conçoit qu'une telle procédure de calcul peut être coûteuse lorsque la structure éléments finis comporte un grand nombre de degrés de liberté. Le second avantage de notre approche se situe au niveau du traitement du contact bien que ce point n'ait pas été abordé dans l'article. La méthode du bi-potentiel implémentée dans FER est en effet beaucoup plus rapide et robuste que les méthodes de pénalisation proposées dans de nombreux codes de calcul (Renaud *et al.*, 2003).

Par ailleurs, un dernier avantage du contrôle que nous avons implémenté dans FER (outre le fait qu'il soit optimal, indépendant de la géométrie, indépendant du chargement et indépendant de la version de Newton-Raphson utilisée), est qu'il ne dépend pas non plus de la loi de comportement considérée. Une continuité possible de notre travail consisterait alors à tester ce contrôle pour d'autres modèles hyperélastiques que celui proposé par Blatz et Ko.



Enfin, l'implémentation d'une formulation éléments finis en Lagrangien actualisée peut être envisagée comme autre perspective. En effet, la formulation en Lagrangien total nous a semblé a priori plus opportune car elle ne nécessite pas de remaillage. Pour autant, elle comporte quelques inconvénients puisqu'elle nécessite le calcul de la matrice initiale de raideur en déplacement et que la loi de comportement incrémentale est un peu plus complexe. Une étude numérique précise mériterait donc d'être menée afin de lever les incertitudes qui pèsent sur les performances comparées des deux formulations.

## 6. Bibliographie

- Belytschko T, Liu Wk, Moran B., *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Chichester (UK): Wiley, 2000.
- Blatz P.J., Ko W.L., "Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials", *Transactions of the Society of Rheology*, vol. 6, 1962, p. 223-251.
- Ciarlet P.G., *Mathematical Elasticity*, vol. 1, *Three-dimensional elasticity*, North-Holland, 1988.
- Crisfield Ma., *Non-linear finite element analysis of solid and structures*, Chichester (UK), Wiley, 1991.
- De Saxcé G., Feng Z.Q., "The bipotential method : a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms", *Int. J. of Mathematical and Computer Modeling*, special issue, Recent Advances in Contact Mechanics, 28, n° 4-8, 1962, p. 225-245.
- Feng Z.Q., Domaszewski M., "Coupled treatment of frictional contact problems in a reduced system and applications in large deformation context", *2<sup>nd</sup> Contact Mechanics International Symposium*, Carry-Le-Rouet, France, (September 19-23, 1994), Contact Mechanics, Ed. Raous *et al.* Plenum Press, p. 169-172, 1995.
- Feng Z.Q., "2D or 3D frictional contact algorithms and applications in a large deformation context", *Numerical Methods in Engineering*, 11, p. 409-416, 1995.
- Peyraut F., Labed N., "Préservation de l'orientation et convergence de Newton-Raphson avec le modèle hyperélastique compressible de Blatz-Ko", *Revue Européenne des Eléments Finis*, vol. 10, n° 5, 2001, p. 595-6051.
- Peyraut F., "Orientation preservation and Newton-Raphson convergence in the case of an hyperelastic sphere subjected to an hydrostatic pressure," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, n° 9-10, 2003, p. 1107-1117.
- Peyraut F., Labed N., « Condition de préservation de l'orientation - application en hyperélasticité compressible », *Revue Européenne des Eléments Finis*, n° 1, vol. 12, 2003, p. 99 -116.
- Renaud C., Feng Z.Q., "BEM and FEM analysis of Signorini contact problems with friction", *Computational Mechanics*, 51, n° 5, p. 390-399, 2003.
- Sidoroff F., Cours sur les grandes déformations, Rapport GRECO, n° 51, 1982.

Wineman A.S., Waldron Jr W.K., “Normal stress effects induced during circular shear of a compressible non-linear elastic cylinder”, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, vol. 30, n° 3, p. 323-339, 1995.

Wood Rd, Zienkiewicz Oc., “Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells”, *Comput & Struct*, 7, 1977, p. 725-735.