

Absence d'effet Efimov à quatre corps dans le problème à $2 + 2$ fermions

Shimpei Endo¹ et Yvan Castin¹

¹Laboratoire Kastler Brossel, ENS-PSL, CNRS, UPMC-Sorbonne Universités, Collège de France, Paris, France

Dans l'espace libre tridimensionnel, nous considérons une paire de fermions identiques \uparrow d'une certaine espèce ou dans un certain état interne, et une paire de fermions identiques \downarrow d'une autre espèce ou dans un autre état. Il y a une interaction résonnante dans l'onde s (c'est-à-dire de portée nulle et de longueur de diffusion infinie) entre les fermions des paires différentes, et aucune interaction au sein de la même paire. Nous déterminons si ce système à $2 + 2$ fermions peut présenter (comme le système à $3 + 1$ fermions) un effet Efimov à quatre corps en l'absence d'effet Efimov à trois corps, c'est-à-dire lorsque le rapport de masse α entre les fermions \uparrow et \downarrow et son inverse sont tous deux inférieurs à $13,6069\dots$. Dans ce but, nous étudions des solutions d'énergie nulle invariantes d'échelle de l'équation de Schrödinger à quatre corps, qui sont des fonctions positivement homogènes des coordonnées de degré $s - 7/2$, où s est un exposant d'Efimov généralisé qui devient purement imaginaire en présence d'un effet d'Efimov à quatre corps. En utilisant l'invariance par rotation dans l'espace des impulsions, on trouve que les valeurs autorisées de s sont telles que $M(s)$ a une valeur propre nulle ; ici l'opérateur $M(s)$, qui dépend du moment cinétique total ℓ , agit sur des fonctions de deux variables réelles (le cosinus de l'angle entre deux vecteurs d'onde et le logarithme du rapport de leurs modules), et nous l'écrivons explicitement en termes d'un noyau intégral matriciel. Nous avons effectué une analyse spectrale de $M(s)$, analytique pour s imaginaire pur quelconque dans le cas du spectre continu, numérique et limitée à $s = 0$ et $\ell \leq 12$ dans le cas du spectre discret. Nous concluons qu'aucune valeur propre de $M(0)$ ne croise zéro sur l'intervalle de rapport de masse $\alpha \in [1 ; 13,6069\dots]$, même si, dans le secteur de parité $(-1)^\ell$, le spectre continu de $M(s)$ a partout un bord inférieur nul. Par conséquent, il n'y a pas de possibilité d'effet d'Efimov à quatre corps pour $2 + 2$ fermions.

Nous avons également énoncé une conjecture sur le quatrième coefficient d'amas du gaz unitaire de fermions de spin $1/2$, inspirée de la forme analytique connue du troisième coefficient d'amas et faisant apparaître l'intégrale par rapport à s sur l'axe imaginaire pur de s fois la dérivée logarithmique du déterminant de $M(s)$ sommée sur tous les moments cinétiques. La valeur conjecturée est en désaccord avec les résultats expérimentaux.

I. INTRODUCTION ET MOTIVATION

Dans les gaz atomiques froids tridimensionnels, grâce aux résonances magnétiques de Feshbach, il est maintenant possible d'induire des interactions résonnantes dans l'onde s entre les particules [1]. Cela signifie que la longueur de diffusion a dans l'onde s est, en valeur absolue, beaucoup plus grande que la portée (ou la portée effective) de l'interaction. Essentiellement, on peut supposer que $1/a = 0$, et puisque la longueur d'onde de de Broglie atomique est également beaucoup plus grande que la portée de l'interaction, on peut remplacer les interactions par des conditions de contact à deux corps de Wigner-Bethe-Peierls invariantes d'échelle sur la fonction d'onde [2] : on réalise la limite unitaire tant recherchée.

Le phénomène le plus frappant qui peut se produire dans ce régime est peut-être l'effet Efimov, prédit pour trois particules ayant des statistiques et des rapports de masse appropriés [3]. Il correspond à l'apparition d'un nombre infini d'états liés, avec un spectre asymptotiquement géométrique près du point d'accumulation d'énergie nulle. La partie géométrique du spectre est caractérisée par une raison, prédite par la théorie de portée nulle d'Efimov, et une échelle d'énergie globale qui dépend des détails microscopiques de l'interaction. La simple existence d'une telle échelle d'énergie nous oblige à compléter les conditions de contact à deux corps par des conditions à trois corps, qui font intervenir une échelle de lon-

gueur, appelée paramètre à trois corps, et qui brisent l'invariance d'échelle au niveau du trois corps. C'est à ce prix que le modèle de portée nulle devient bien défini et conduit à un hamiltonien auto-adjoint. L'effet Efimov est maintenant observé expérimentalement avec des atomes froids [4], ce qui donne accès à la valeur du paramètre à trois corps [5].

Une question naturelle est de savoir si un effet Efimov à quatre corps est possible [6, 7], conduisant à un spectre infini, asymptotiquement géométrique, de tétramères, avec une raison en énergie prédite par la théorie de portée nulle et une échelle d'énergie globale fixée par un paramètre à quatre corps apparaissant dans des conditions de contact à quatre corps. On a maintenant compris qu'une condition préalable à l'effet Efimov à quatre corps est l'absence d'effet Efimov à trois corps : on s'attend en effet à ce que l'introduction de conditions de contact à trois corps (en termes d'un paramètre à trois corps) imposées par l'effet Efimov à trois corps soit suffisante pour rendre également le problème à quatre corps bien défini, c'est-à-dire sans la nécessité d'un paramètre à quatre corps ; comme le prédit la référence [6], aucune suite géométrique d'états tétramères ne peut alors être trouvée mais, comme il a été montré numériquement pour quatre bosons [8], des suites géométriques de résonances d'énergie complexes à quatre corps sont attendues en général, avec la même raison que le spectre de trimères d'Efimov (voir [9, 10] pour les premières études igno-

rant la partie imaginaire de l'énergie). Cette condition préalable exclut les systèmes avec plus d'un boson [3] comme candidats possibles pour un effet Efimov à quatre corps, et suggère d'utiliser des fermions pour contrebalancer l'effet Efimov par le principe d'exclusion de Pauli, au moins à trois dimensions (ce qui se passe dans les dimensions inférieures ou avec des interactions résonnantes dans d'autres voies que l'onde s est discuté dans [11, 12]).

Considérons alors le problème dit à $p + q$ fermions : p fermions identiques de la même espèce ou dans le même état de spin interagissent de manière résonnante dans l'espace libre avec q fermions identiques d'une autre espèce ou dans un autre état de spin. On suppose qu'il n'y a pas d'interaction entre les fermions identiques, puisqu'ils ne peuvent pas diffuser dans l'onde s . Il est commode d'adopter une notation de pseudo-spin, avec \uparrow pour la première espèce et \downarrow pour la seconde. Les deux espèces ont en général des masses différentes m_\uparrow et m_\downarrow , et l'idée cruciale est d'utiliser leur rapport de masse comme paramètre ajustable pour rechercher l'effet Efimov à quatre corps sans déclencher celui à trois corps.

Le problème résonnant à $3 + 1$ fermions ou $\uparrow\uparrow\downarrow$ a été étudié dans la référence [13]. Un effet Efimov à quatre corps a été prédit pour un rapport de masse tel que $13,384 < m_\uparrow/m_\downarrow < 13,6069 \dots$. Au delà de $13,6069 \dots$, l'effet Efimov à trois corps se produit comme l'a montré la référence [3, 14, 15], ce qui empêche l'effet Efimov à quatre corps comme discuté plus haut : à part un nombre fini d'états tétramères, on s'attend à un nombre infini de résonances à quatre corps avec la même raison géométrique que pour le problème $2 + 1$.

La motivation principale du présent travail est de déterminer la présence ou l'absence d'un effet Efimov à quatre corps dans le problème à $2 + 2$ fermions ou $\uparrow\uparrow\downarrow$. A notre connaissance, aucune réponse générale et rigoureuse n'a été donnée à ce problème. On peut penser l'attaquer avec l'approximation de Born-Oppenheimer. Nous nous attendons en effet (comme pour le cas à trois corps) à ce que la seule possibilité pour un effet Efimov à quatre corps soit d'avoir un grand rapport de masse entre les deux espèces, avec par exemple des fermions \uparrow beaucoup plus massifs que les \downarrow . On constate qu'en présence de deux fermions \uparrow à des positions fixées, il existe un *seul* état lié pour la particule \downarrow , ce qui crée une attraction effective $\propto -\hbar^2/(m_\downarrow r^2)$ entre les fermions \uparrow . Pour un rapport de masse m_\uparrow/m_\downarrow suffisamment grand, ceci l'emporte en effet sur la barrière centrifuge $\propto \hbar^2/(m_\uparrow r^2)$ entre les particules \uparrow (comme elles sont fermioniques, elles se rapprochent les unes des autres avec un moment cinétique non nul), ce qui explique qualitativement l'apparition d'un effet Efimov à trois corps dans le problème $2 + 1$, comme l'a souligné Efimov [3] en 1973. Cependant, comme il y a une *seule* orbitale liante, on ne peut pas mettre un *second* fermion \downarrow dans cette orbitale, mais on peut au mieux en mettre un dans l'état de diffusion fondamental, à énergie nulle, ce qui a deux conséquences : (i) le potentiel attractif de Born-Oppenheimer entre les particules \uparrow n'est pas abaissé par le second fermion \downarrow , donc aucun effet Efi-

mov à quatre corps n'est prévu à un rapport de masse strictement inférieur au seuil de l'effet Efimov à trois corps, et (ii) comme souligné dans [16], le second fermion \downarrow , étant dans un état propre d'énergie nulle, n'a pas un mouvement rapide par rapport à celui des particules lourdes, ce qui jette des doutes sur la validité de l'approximation de Born-Oppenheimer. Alternativement, on peut s'attendre à ce que ce problème $2 + 2$ ait déjà été résolu numériquement dans la littérature ; cependant, aucune couverture assez fine et convaincante de l'intervalle de rapport de masse entre 1 et $13,6069 \dots$ ne semble être disponible dans les études numériques [17] compte tenu de l'étroitesse de l'intervalle de masse mentionné ci-dessus. Pour obtenir une réponse fiable à la question, nous généralisons la méthode de la référence [13, 18], en déduisant du modèle de portée nulle les équations intégrales dans l'espace des impulsions pour le problème à $2 + 2$ fermions à énergie nulle (voir aussi la formulation la plus générale de la référence [19]), et en utilisant la symétrie de rotation et l'invariance d'échelle pour les réduire à une forme traitable numériquement.

Une autre motivation est d'ouvrir la voie au calcul du quatrième coefficient du viriel d'un gaz unitaire de fermions à deux composantes : cela jetterait un pont intéressant entre la physique à petit nombre de corps et la physique à N corps. Pour un rapport de masse unité $m_\uparrow/m_\downarrow = 1$, la valeur de ce coefficient du viriel a déjà été obtenue expérimentalement à partir d'une mesure de l'équation d'état d'un gaz d'atomes froids [20, 21]. Du côté de la théorie, il existe deux méthodes de calcul principales. Premièrement, la méthode diagrammatique, utilisée de manière exacte (tous les diagrammes sont conservés) pour le troisième coefficient du viriel [22, 23], et de manière approchée (seuls certains diagrammes sont conservés, ceux qui sont pertinents dans le régime perturbatif d'une grande portée effective ou d'une faible longueur de diffusion) pour le quatrième coefficient du viriel [24] conduisant à une prédiction différente mais raisonnablement proche de la valeur expérimentale. Deuxièmement, la technique du régulateur harmonique [25], utilisée avec succès pour le troisième coefficient du viriel [26–29], qui nécessite de déterminer le spectre d'énergie jusqu'à quatre particules dans un piège harmonique isotrope. Une première solution numérique frontale de ce problème à quatre corps piégés [30] n'a pas permis de retrouver même le signe de la valeur expérimentale. D'une manière plus analytique, ce spectre peut être déduit des solutions du problème dans l'espace libre à énergie nulle [31, 32], grâce à la symétrie dynamique $SO(2, 1)$ du gaz unitaire de fermions [32–34], de sorte que les équations intégrales à quatre corps écrites ici peuvent également être utiles pour la solution du problème du viriel.

Notre article est organisé comme suit. Dans la section II, nous obtenons les équations intégrales dans l'espace des impulsions à énergie nulle sous une forme générale. Dans la section III, nous utilisons successivement l'invariance par rotation, l'invariance d'échelle et l'invariance

par parité pour mettre les équations intégrales sous une forme maximale réduite.

Cette forme réduite, écrite dans la section IV A, exprime exactement le fait qu'un opérateur M , dépendant du moment cinétique ℓ et de l'exposant d'échelle s , a une valeur propre nulle, ce qui motive son analyse spectrale ; celle-ci permet de montrer que deux composantes du spectre continu de M peuvent être exprimées exactement en termes de fonctions transcendentes d'Efimov apparaissant dans les problèmes à trois corps $\uparrow\uparrow\downarrow$ et $\uparrow\downarrow\downarrow$ (voir la section IV B) et qu'il existe un troisième continuum inattendu dû à un terme sans équivalent dans le problème 3+1 (voir la section IV C). La question de l'existence de l'effet Efimov à quatre corps dans le problème à 2+2 fermions fait l'objet de la section V, alors que la motivation secondaire de ce travail, c'est-à-dire le quatrième coefficient du viriel du gaz unitaire de fermions de spin 1/2, est relégué dans l'annexe B, où son expression en termes de l'opérateur M est conjecturée par une transposition au problème à 4 corps de l'expression analytique connue du troisième coefficient du viriel [28, 29], et la valeur conjecturée est comparée aux valeurs expérimentales [20, 21] et théoriques [24, 30]. Nous concluons dans la section VI.

II. OBTENTION DES ÉQUATIONS INTÉGRALES GÉNÉRALES À QUATRE CORPS

Les particules 1 et 2, de positions \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 , appartiennent à l'espèce \uparrow . Les particules 3 et 4, de positions \mathbf{r}_3 et \mathbf{r}_4 , appartiennent à l'espèce \downarrow . La fonction d'onde à quatre corps ψ est soumise aux conditions de contact habituelles de Wigner-Bethe-Peierls, pour une interaction de portée nulle de longueur de diffusion a dans l'onde s entre des particules de spins opposés. Pour tout $i \in \{1, 2\}$ et tout $j \in \{3, 4\}$, lorsque la distance r_{ij} entre les particules i et j tend vers zéro, à position fixée $\mathbf{R}_{ij} = (m_\uparrow \mathbf{r}_i + m_\downarrow \mathbf{r}_j)/(m_\uparrow + m_\downarrow)$ de leur centre de masse (différente des positions des deux particules restantes), on impose

$$\psi_{\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \underset{r_{ij} \rightarrow 0}{=} \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{1}{a} \right) \frac{\mu_{\uparrow\downarrow}}{2\pi\hbar^2} \times \mathcal{A}_{ij}((\mathbf{r}_k - \mathbf{R}_{ij})_{k \neq i, j}) + O(r_{ij}) \quad (1)$$

où la forme de la partie régulière \mathcal{A}_{ij} suppose que le centre de masse des quatre particules est au repos, et où $\mu_{\uparrow\downarrow} = m_\uparrow m_\downarrow / (m_\uparrow + m_\downarrow)$ est la masse réduite de deux particules de spins opposés. En raison de l'antisymétrie fermionique, les parties régulières ne sont pas des fonctions indépendantes :

$$\mathcal{A}_{13} = \mathcal{A}_{24} = -\mathcal{A}_{14} = -\mathcal{A}_{23} \equiv \mathcal{A} \quad (2)$$

L'équation de Schrödinger à l'énergie propre nulle $E = 0$, s'écrit alors au sens des distributions

$$\begin{aligned} H\psi_{\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow} = & \mathcal{A}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_{13}, \mathbf{r}_4 - \mathbf{R}_{13})\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \\ & - \mathcal{A}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_{14}, \mathbf{r}_3 - \mathbf{R}_{14})\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4) \\ & - \mathcal{A}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_{23}, \mathbf{r}_4 - \mathbf{R}_{23})\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \\ & + \mathcal{A}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_{24}, \mathbf{r}_3 - \mathbf{R}_{24})\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4) \end{aligned} \quad (3)$$

avec l'hamiltonien d'énergie cinétique

$$H = \sum_{n=1}^4 -\frac{\hbar^2}{2m_n} \Delta_{\mathbf{r}_n} \quad (4)$$

et $\delta(\mathbf{r})$ est la distribution de Dirac tridimensionnelle, provenant de l'identité $\Delta_{\mathbf{r}}(1/r) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$.

Nous passons maintenant dans l'espace des impulsions et nous prenons la transformée de Fourier de l'équation de Schrödinger. Au premier membre, chaque opérateur de Laplace fait sortir un facteur $-k_n^2$, où \mathbf{k}_n est le vecteur d'onde de la particule numéro n . Au second membre, on obtient par exemple pour le premier terme :

$$\begin{aligned} \int \prod_{n=1}^4 d^3 r_n e^{-i \sum_{n=1}^4 \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_n} \mathcal{A}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_{13}, \mathbf{r}_4 - \mathbf{R}_{13})\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \\ = (2\pi)^3 \tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4) \delta\left(\sum_{n=1}^4 \mathbf{k}_n\right) \end{aligned} \quad (5)$$

où le tilde repère la transformée de Fourier. En introduisant la fonction $D \equiv (2\pi)^3 \tilde{\mathcal{A}}$, on obtient l'ansatz dans l'espace des impulsions à quatre corps généralisant au problème à 2+2 fermions celui du problème à 3+1 fermions [13, 18] :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = & \frac{\delta\left(\sum_{n=1}^4 \mathbf{k}_n\right)}{\sum_{n=1}^4 \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m_n}} [D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4) \\ & - D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) - D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4) + D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3)] \end{aligned} \quad (6)$$

L'ansatz obéit à l'antisymétrie fermionique et à l'équation de Schrödinger, mais pas encore à la condition de contact (1), qu'il suffit d'implémenter pour $(i, j) = (1, 3)$. On prend donc la transformée de Fourier inverse de $\tilde{\psi}$ en $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)$, avec la paramétrisation :

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_{13} + \frac{m_3}{m_1 + m_3} \mathbf{r}_{13} \quad (7)$$

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{R}_{13} - \frac{m_1}{m_1 + m_3} \mathbf{r}_{13} \quad (8)$$

Seule la contribution ψ_{24} de $D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4)$ à ψ diverge pour $r_{13} \rightarrow 0$; dans cette transformée de Fourier inverse, on prend alors $\mathbf{K}_{13} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3$, $\mathbf{k}_{13} = \mu_{13}(\mathbf{k}_1/m_1 - \mathbf{k}_3/m_3)$ et $\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4$ comme variables d'intégration (on a évidemment

$\mu_{13} = \mu_{\uparrow\downarrow}$), de sorte que $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}_3 = \mathbf{K}_{13} \cdot \mathbf{R}_{13} + \mathbf{k}_{13} \cdot \mathbf{r}_{13}$ et $\frac{\hbar^2 k_1^2}{2m_1} + \frac{\hbar^2 k_3^2}{2m_3} = \frac{\hbar^2 k_{13}^2}{2\mu_{13}} + \frac{\hbar^2 K_{13}^2}{2(m_1 + m_3)}$; l'intégration sur \mathbf{K}_{13} est simple, en raison de la conservation de la quantité de mouvement, et l'intégration sur \mathbf{k}_{13} peut aussi être faite en utilisant

$$u(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 k_{13}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}_{13} \cdot \mathbf{r}}}{k_{13}^2 + q_{13}^2} = \frac{e^{-q_{13}r}}{4\pi r} \quad (9)$$

On obtient

$$\psi_{24}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = \int \frac{d^3 k_2 d^3 k_4}{(2\pi)^9} \frac{2\mu_{13}}{\hbar^2} u(r_{13}) \times e^{i[\mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_{13}) + \mathbf{k}_4 \cdot (\mathbf{r}_4 - \mathbf{R}_{13})]} D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4) \quad (10)$$

avec $q_{13} \geq 0$ tel que

$$\frac{\hbar^2 q_{13}^2}{2\mu_{13}} = \frac{\hbar^2 (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4)^2}{2(m_1 + m_3)} + \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m_2} + \frac{\hbar^2 k_4^2}{2m_4} \quad (11)$$

Prendre la limite $r_{13} \rightarrow 0$ dans ψ_{24} est alors élémentaire. Dans la contribution de $D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$, $D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4)$ et $D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3)$ à ψ , notée $\psi_{\neq 24}$, on peut directement prendre $\mathbf{r}_{13} = \mathbf{0}$. Grâce à la conservation de l'impulsion, on peut remplacer $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3$ par $-(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4)$ dans le facteur de phase dépendant de la position, ce qui fait apparaître les positions relatives $\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_{13}$ et $\mathbf{r}_4 - \mathbf{R}_{13}$ comme dans l'équation (10) :

$$\begin{aligned} \psi_{\neq 24}(\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_{13}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 = \mathbf{R}_{13}, \mathbf{r}_4) = & \int \frac{d^3 k_2 d^3 k_4}{(2\pi)^9} e^{i[\mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_{13}) + \mathbf{k}_4 \cdot (\mathbf{r}_4 - \mathbf{R}_{13})]} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_3}{(2\pi)^3} \\ & \delta\left(\sum_{n=1}^4 \mathbf{k}_n\right) \frac{[-D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) - D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4) + D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3)]}{\sum_{n=1}^4 \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m_n}} \quad (12) \end{aligned}$$

Enfin, la condition de contact à la limite unitaire, c'est-à-dire pour $1/a = 0$, conduit à l'équation intégrale suivante sur D :

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\mu_{\uparrow\downarrow}^{3/2}}{2\pi\hbar^2} \left[\frac{(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4)^2}{m_{\uparrow} + m_{\downarrow}} + \frac{k_2^2}{m_{\uparrow}} + \frac{k_4^2}{m_{\downarrow}} \right]^{1/2} D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4) \\ & + \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_3}{(2\pi)^3} \frac{\delta\left(\sum_{n=1}^4 \mathbf{k}_n\right)}{\sum_{n=1}^4 \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m_n}} [D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) + D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4) - D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3)] \quad (13) \end{aligned}$$

où le premier terme est simplement $\frac{q_{13}\mu_{13}}{2\pi\hbar^2} D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4)$. Contrairement au cas à 3 + 1 fermions [13, 18], D n'est soumis à aucune condition de symétrie d'échange.

III. TIRER PARTI DES SYMÉTRIES

A. Vue d'ensemble

La fonction inconnue $D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4)$ dans l'équation intégrale (13) dépend de six variables réelles. Il s'agit déjà d'une forte réduction, par rapport aux douze variables réelles de la fonction d'onde originale à quatre corps, mais la solution numérique reste difficile.

Heureusement, on peut utiliser l'invariance par rotation comme dans la section III B : la fonction inconnue D peut être considérée par exemple comme étant la composante $m_z = 0$ d'un spineur de moment cinétique ℓ . On sait alors comment les différentes composantes $2\ell + 1$ du spineur se transforment sous une rotation conjointe arbitraire de \mathbf{k}_2 et \mathbf{k}_4 , en termes de matrices de rotation ayant des harmoniques sphériques comme éléments de matrice, de sorte qu'il suffit de connaître la valeur de la composante $2\ell + 1$ du spineur dans la configuration particulière où le vecteur \mathbf{k}_2 pointe le long de l'axe Ox dans la direction positive et \mathbf{k}_4 se trouve dans le demi-plan xOy supérieur $y \geq 0$, avec un angle $\theta_{24} \in [0, \pi]$ par rapport à \mathbf{k}_2 . Comme cette configuration particulière est caractérisée par le cosinus de l'angle θ_{24} et les deux modules k_2 et k_4 , la fonction inconnue $D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4)$ peut être représentée en termes de $2\ell + 1$ fonctions inconnues $f_{m_z}^{(\ell)}$ de ces trois variables réelles [18] :

$$D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4) = \sum_{m_z = -\ell}^{\ell} [Y_{\ell}^{m_z}(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{4\perp 2} \cdot \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{24} \cdot \mathbf{e}_z)]^* \times f_{m_z}^{(\ell)}(k_2, k_4, u_{24}) \quad (14)$$

Dans cette expression, nous avons introduit les vecteurs unitaires

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{k}_2}{k_2} \quad (15)$$

$$\mathbf{e}_{4\perp 2} = \frac{1}{v_{24}} \left(\frac{\mathbf{k}_4}{k_4} - u_{24} \mathbf{e}_2 \right) \quad (16)$$

$$\mathbf{e}_{24} = \frac{\mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{k}_4}{|\mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{k}_4|} \quad (17)$$

Ici $\theta_{24} \in [0, \pi]$ est l'angle entre \mathbf{k}_2 et \mathbf{k}_4 , et les notations

$$u_{24} \equiv \cos \theta_{24} \quad \text{et} \quad v_{24} \equiv \sin \theta_{24} \quad (18)$$

seront utilisées tout au long de l'article. Il est évident que $\mathbf{e}_{4\perp 2}$ est obtenu en projetant $\mathbf{e}_4 = \mathbf{k}_4/k_4$ orthogonalement à \mathbf{e}_2 et en renormalisant le résultat à un. Du coup, $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{4\perp 2}, \mathbf{e}_{24})$ forme une base orthonormale directe. Dans cette base, un vecteur (unitaire) arbitraire \mathbf{n} a des coordonnées sphériques définies de façon unique, à savoir l'angle polaire $\theta_{\mathbf{n}} \in [0, \pi]$ par rapport à l'axe porté par \mathbf{e}_{24} et l'angle azimutal $\phi_{\mathbf{n}} \in [0, 2\pi[$ dans le plan $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_{4\perp 2}$ par rapport à l'axe porté par \mathbf{e}_2 . Alors

$$Y_{\ell}^{m_z}(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}, \mathbf{e}_{4\perp 2} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{e}_{24} \cdot \mathbf{n}) \equiv Y_{\ell}^{m_z}(\theta_{\mathbf{n}}, \phi_{\mathbf{n}}) \quad (19)$$

où le second membre est la notation habituelle pour les harmoniques sphériques [35]. Des équations intégrales peuvent alors être obtenues pour les $f_{m_z}^{(\ell)}$, voir la section III B.

Pour une longueur de diffusion infinie dans l'onde s , les conditions de contact de Wigner-Bethe-Peierls (1) sont invariantes d'échelle. Comme l'équation intégrale (13) a été spécialisée au cas d'énergie nulle, sa solution peut être considérée comme invariante d'échelle, ce qui permet d'éliminer une variable supplémentaire [13] :

$$f_{m_z}^{(\ell)}(k_2, k_4, u_{24}) = (k_2^2 + k_4^2)^{-(s+7/2)/2} (\text{ch } x)^{s+3/2} \times e^{im_z \theta_{24}/2} \Phi_{m_z}^{(\ell)}(x, u_{24}) \quad (20)$$

avec

$$x \equiv \ln \frac{k_4}{k_2} \quad (21)$$

Le premier facteur contient l'exposant d'échelle de la solution, qui met en jeu la quantité inconnue s . En insérant l'ansatz (20) dans les équations intégrales linéaires de la section III B, on obtient des équations intégrales linéaires sur les fonctions inconnues $\Phi_{m_z}^{(\ell)}(x, u)$, représentées par un opérateur $M^{(\ell)}(s)$ qui dépend paramétriquement de s , voir la section III C; en imposant que les fonctions $\Phi_{m_z}^{(\ell)}(x, u)$ ne soient pas identiquement nulles, on obtient une équation implicite sur s , de la forme [49]

$$\det M^{(\ell)}(s) = 0 \quad (22)$$

Notre paramétrisation du premier facteur dans l'Eq. (20) par la quantité s assure la compatibilité avec la notation utilisée par Efimov pour le problème à trois corps [3]. Dans le problème à trois corps, l'effet Efimov a lieu si et seulement si l'un des exposants d'échelle s est imaginaire pur, et le spectre d'énergie du trimère est géométrique de raison $\exp(-2\pi/|s|)$. Dans le problème à quatre corps, avec notre définition de s , l'effet Efimov à quatre corps se produit si et seulement s'il existe un s imaginaire pur solution de l'Eq. (22), auquel cas il existe une suite géométrique d'énergies propres de tétramère de raison $\exp(-2\pi/|s|)$. Une justification est donnée dans [13]. Le second facteur de l'ansatz (20) assure que l'opérateur $M(s)$ est hermitien pour s imaginaire pur, avec des éléments de matrice diagonaux bornés, ce qui est à la fois mathématiquement et numériquement avantageux; par rapport à [13], il contient un terme supplémentaire s dans l'exposant, qui pour s imaginaire pur supprime les oscillations de phase dans les éléments de matrice de $M(s)$ à grand $|x|$ [50]. Le troisième facteur de l'Eq. (20) est un facteur de phase prenant en compte le fait que l'échange de \mathbf{k}_2 et \mathbf{k}_4 dans l'Eq. (14) transforme les harmoniques sphériques $Y_\ell^{m_z}$ en $(-1)^\ell e^{im_z \theta_{24}} Y_\ell^{-m_z}$ avec les mêmes valeurs des variables [18]; il assure que l'opérateur $M(s)$ se transforme de la manière la plus simple possible sous l'échange de m_\uparrow et m_\downarrow , ce qui doit laisser notre problème $2 + 2$ invariant.

Une dernière réduction du problème peut être obtenue à partir de l'invariance par parité. En effet, sous la transformation $(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4) \rightarrow (-\mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_4)$, le terme d'indice m_z dans la somme (14) prend un facteur $(-1)^{m_z}$ [18]. Les fonctions de parité impaire $\Phi_{m_z}^{(\ell)}$ (c'est-à-dire avec m_z impair) sont donc découplées des fonctions de parité paire $\Phi_{m_z}^{(\ell)}$ (c'est-à-dire avec m_z pair) dans les équations intégrales, et $M^{(\ell)}(s)$ a des éléments de matrice nuls entre les voies impaire et paire.

B. Invariance par rotation

Pour obtenir les équations intégrales sur les fonctions inconnues $f_{m_z}^{(\ell)}$ dans l'équation (14), nous utilisons une formulation variationnelle : l'équation intégrale (13) est équivalente à

$$\partial_{D^*(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4)} \mathcal{E}[D, D^*] = 0 \quad (23)$$

où D et son complexe conjugué D^* sont pris comme variables indépendantes, ∂_{D^*} est la dérivée fonctionnelle par rapport à D^* et la fonctionnelle \mathcal{E} est donnée par

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{diag}} + \mathcal{E}_{24,23} + \mathcal{E}_{24,14} - \mathcal{E}_{24,13} \quad (24)$$

avec la partie diagonale

$$\mathcal{E}_{\text{diag}} = \int d^3 k_2 d^3 k_4 D^*(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4) D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4) \times \frac{\mu_{\uparrow\downarrow}^{3/2}}{2\pi\hbar^2} \left[\frac{(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4)^2}{m_\uparrow + m_\downarrow} + \frac{k_2^2}{m_\uparrow} + \frac{k_4^2}{m_\downarrow} \right]^{1/2} \quad (25)$$

et la partie générique non diagonale

$$\mathcal{E}_{24,ij} = \int \frac{d^3 k_2 d^3 k_4 d^3 k_1 d^3 k_3}{(2\pi)^3} D^*(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4) D(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j) \times \frac{\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)}{\frac{\hbar^2}{2m_\uparrow}(k_1^2 + k_2^2) + \frac{\hbar^2}{2m_\downarrow}(k_3^2 + k_4^2)} \quad (26)$$

Puis on insère l'ansatz (14) dans ces fonctionnelles. En supposant que l'on puisse intégrer sur toutes les variables autres que k_2, k_4, θ_{24} et k_i, k_j, θ_{ij} , on obtient une fonctionnelle des $f_{m_z}^{(\ell)}$ et $f_{m_z}^{(\ell)*}$, qu'il reste à différentier par rapport à $f_{m_z}^{(\ell)*}$ pour obtenir les équations intégrales sur les $f_{m_z}^{(\ell)}$.

L'intégration est simplifiée par la remarque suivante : les équations intégrales finales et leurs solutions $f_{m_z}^{(\ell)}$ ne peuvent pas dépendre du choix particulier du vecteur \mathbf{e}_z introduit dans l'équation (14). On peut alors remplacer \mathbf{e}_z par un vecteur unitaire arbitraire \mathbf{n} dans l'ansatz (14), et on peut faire la moyenne de la fonctionnelle résultante \mathcal{E} sur \mathbf{n} uniformément sur la sphère unité, pour $f_{m_z}^{(\ell)}$ fixé. Le résultat de cette moyenne est particulièrement simple lorsque la base orthonormale des Eqs. (15,16,17) se réduit à la base cartésienne habituelle :

$$(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{4\perp 2}, \mathbf{e}_{24}) = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) \quad (27)$$

Alors [51]

$$\begin{aligned} \langle Y_\ell^{m_z}(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}, \mathbf{e}_{4 \perp 2} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{e}_{24} \cdot \mathbf{n}) [Y_\ell^{m'_z}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}, \mathbf{e}_{j \perp i} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{e}_{ij} \cdot \mathbf{n})]^* \rangle_{\mathbf{n}} \\ = \frac{1}{4\pi} \left(\langle \ell, m_z | R^{(ij)} | \ell, m'_z \rangle \right)^* \end{aligned} \quad (28)$$

où $\langle \dots \rangle_{\mathbf{n}}$ indique la moyenne sur la direction de \mathbf{n} et l'opérateur quantique $R^{(ij)}$ représente (dans la représentation irréductible habituelle de spin ℓ , avec les vecteurs $|\ell, m_z\rangle$ de moment cinétique $m_z \hbar$ selon Oz) l'unique rotation $\mathcal{R}^{(ij)}$ de l'espace réel qui envoie la base cartésienne sur la base $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{j \perp i}, \mathbf{e}_{ij})$:

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{j \perp i}, \mathbf{e}_{ij}) = \mathcal{R}^{(ij)}(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) \quad (29)$$

Après moyenne sur \mathbf{n} , et intégration sur \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_3 dans $\mathcal{E}_{24,ij}$, il reste une intégrale sur \mathbf{k}_2 et \mathbf{k}_4 , avec un intégrand invariant par rotation conjointe de \mathbf{k}_2 et \mathbf{k}_4 . Pour évaluer cet intégrand, on peut alors effectivement supposer que \mathbf{k}_2 est selon Ox (dans le sens positif) et que \mathbf{k}_4 se trouve dans le plan xOy dans la moitié supérieure $y \geq 0$:

$$\mathbf{k}_2 = k_2 \mathbf{e}_x \quad (30)$$

$$\mathbf{k}_4 = k_4 (\cos \theta_{24} \mathbf{e}_x + \sin \theta_{24} \mathbf{e}_y) \text{ avec } \theta_{24} \in [0, \pi] \quad (31)$$

auquel cas

$$(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{4 \perp 2}, \mathbf{e}_{24}) = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) \quad (32)$$

et on peut utiliser les Eqs. (28,29). On fait sortir alors un facteur 4π (résultant de l'intégration sur l'angle solide de \mathbf{k}_2) compensé par le dénominateur 4π de l'Eq. (28), et un facteur 2π non compensé (résultant de l'intégration sur l'angle azimutal de \mathbf{k}_4 dans les coordonnées sphériques d'axe polaire $\mathbf{k}_2/k_2 = \mathbf{e}_x$ pour \mathbf{k}_4), et on se retrouve avec une intégration sur les modules k_2 et k_4 et sur l'angle θ_{24} .

Pour la fonctionnelle $\mathcal{E}_{\text{diag}}$, cela donne un résultat simple : puisqu'alors $i = 2$ et $j = 4$, la matrice $\mathcal{R}^{(ij)}$ est la matrice identité, $R^{(ij)}$ se réduit à l'opérateur identité ; de plus, il n'y a pas d'intégration à faire sur \mathbf{k}_1 ou \mathbf{k}_3 . On obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{diag}} = \sum_{m_z = -\ell}^{\ell} 2\pi \int_0^\infty dk_2 k_2^2 dk_4 k_4^2 \int_{-1}^1 du_{24} |f_{m_z}(k_2, k_4, u_{24})|^2 \\ \times \frac{\mu_{\uparrow\downarrow}^{3/2}}{2\pi \hbar^2} \left(\frac{k_2^2 + k_4^2 + 2k_2 k_4 u_{24}}{m_\uparrow + m_\downarrow} + \frac{k_2^2}{m_\uparrow} + \frac{k_4^2}{m_\downarrow} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (33)$$

avec la même notation que dans l'Eq. (18). Pour la forme générale non diagonale, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{24,ij} = \sum_{m_z, m'_z = -\ell}^{\ell} 2\pi \int_0^\infty dk_2 k_2^2 dk_4 k_4^2 \int_{-1}^1 du_{24} \int \frac{d^3 k_1 d^3 k_3}{(2\pi)^3} \\ \left(\langle \ell, m_z | R^{(ij)} | \ell, m'_z \rangle \right)^* f_{m_z}^{(\ell)*}(k_2, k_4, u_{24}) f_{m'_z}^{(\ell)}(k_i, k_j, u_{ij}) \\ \times \frac{\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)}{\frac{\hbar^2(k_1^2 + k_2^2)}{2m_\uparrow} + \frac{\hbar^2(k_3^2 + k_4^2)}{2m_\downarrow}} \end{aligned} \quad (34)$$

La bonne manière d'intégrer sur les directions de \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_3 dépend des indices i et j .

1. Cas $(i, j) = (2, 3)$

Pour $(i, j) = (2, 3)$, on intègre trivialement sur \mathbf{k}_1 en utilisant la distribution de Dirac, qui impose $\mathbf{k}_1 = -(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$, et on intègre sur \mathbf{k}_3 en utilisant les coordonnées sphériques d'axe polaire \mathbf{e}_x et d'axe azimutal \mathbf{e}_y ; l'angle azimutal est appelé ϕ , et l'angle polaire est appelé θ_{23} puisqu'il est l'angle entre \mathbf{k}_2 et \mathbf{k}_3 [voir Fig. 1(a)]. Alors $\mathcal{R}^{(ij)}$ dans l'Eq. (29) est la rotation d'axe Ox et d'angle ϕ :

$$\mathcal{R}^{(23)} = \mathcal{R}_x(\phi) \text{ et } R^{(23)} = e^{-i\phi L_x / \hbar} \quad (35)$$

où L_x est l'opérateur moment cinétique selon Ox . Aussi

$$\begin{aligned} k_1^2 = k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + 2k_2 k_3 u_{23} + 2k_2 k_4 u_{24} \\ + 2k_3 k_4 (u_{23} u_{24} + v_{23} v_{24} \cos \phi) \end{aligned} \quad (36)$$

avec $u_{23} = \cos \theta_{23}$ et $v_{23} = \sin \theta_{23}$ comme dans l'Eq. (18). Cela donne

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{24,23} = \sum_{m_z, m'_z = -\ell}^{\ell} 2\pi \int_0^\infty dk_2 dk_3 dk_4 k_2^2 k_3^2 k_4^2 \int_{-1}^1 du_{23} du_{24} \int_0^{2\pi} d\phi \\ \frac{\langle \ell, m_z | e^{i\phi L_x / \hbar} | \ell, m'_z \rangle f_{m_z}^{(\ell)*}(k_2, k_4, u_{24}) f_{m'_z}^{(\ell)}(k_2, k_3, u_{23})}{(2\pi)^3 \left[\frac{\hbar^2(k_1^2 + k_2^2)}{2m_\uparrow} + \frac{\hbar^2(k_3^2 + k_4^2)}{2m_\downarrow} \right]} \end{aligned} \quad (37)$$

où k_1 est donné par l'Eq. (36) et nous avons utilisé le fait que L_x a des éléments de matrice réels dans la base standard $|\ell, m_z\rangle$.

2. Cas $(i, j) = (1, 4)$

Pour $(i, j) = (1, 4)$, on intègre sur \mathbf{k}_3 en utilisant la distribution de Dirac, qui impose $\mathbf{k}_3 = -(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4)$ et on intègre sur \mathbf{k}_1 en utilisant des coordonnées sphériques dans une base tournée

$$(\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z) = (\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_4) \text{ avec } \mathbf{e}_4 = \frac{\mathbf{k}_4}{k_4}. \quad (38)$$

La direction \mathbf{e}_Z de \mathbf{k}_4 est prise comme axe polaire, de sorte que l'angle polaire est θ_{14} ; \mathbf{e}_X est pris comme axe azimutal, avec l'angle azimutal appelé ϕ , voir Fig. 1(b). Alors la rotation $\mathcal{R}^{(ij)}$ dans l'espace réel vaut dans l'Eq. (29)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{(14)} = \mathcal{R}_Z(\phi - \frac{\pi}{2}) \mathcal{R}_z(\theta_{24} - \theta_{14}) \\ = \mathcal{R}_z(\theta_{24}) \mathcal{R}_x(\phi - \frac{\pi}{2}) \mathcal{R}_z(-\theta_{14}) \end{aligned} \quad (39)$$

et l'opérateur correspondant a des éléments de matrice

$$\begin{aligned} \langle \ell, m_z | R^{(14)} | \ell, m'_z \rangle = e^{-im_z \theta_{24}} \\ \times \langle \ell, m_z | e^{-i(\phi - \frac{\pi}{2}) L_x / \hbar} | \ell, m'_z \rangle e^{im'_z \theta_{14}} \end{aligned} \quad (40)$$

En utilisant $\mathbf{e}_x = [\mathcal{R}^{(14)}]^{-1}\mathbf{e}_1 = u_{24}\mathbf{e}_Z + v_{24}\mathbf{e}_Y$ et $\mathbf{e}_1 = u_{14}\mathbf{e}_Z + v_{14}(\cos\phi\mathbf{e}_X + \sin\phi\mathbf{e}_Y)$ on obtient

$$k_3^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_4^2 + 2k_1k_2[u_{14}u_{24} + v_{14}v_{24}\cos(\phi - \pi/2)] + 2k_1k_4u_{14} + 2k_2k_4u_{24}. \quad (41)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{24,14} = & \sum_{m_z, m'_z = -\ell}^{\ell} 2\pi \int_0^{\infty} dk_1 dk_2 dk_4 k_1^2 k_2^2 k_4^2 \int_{-1}^1 du_{14} du_{24} \int_0^{2\pi} d\phi \\ & \frac{e^{im_z\theta_{24}} \langle \ell, m_z | e^{i(\phi - \pi/2)L_x/\hbar} | \ell, m'_z \rangle e^{-im'_z\theta_{14}}}{(2\pi)^3 \left[\frac{\hbar^2(k_1^2 + k_2^2)}{2m_{\uparrow}} + \frac{\hbar^2(k_3^2 + k_4^2)}{2m_{\downarrow}} \right]} \\ & \times f_{m_z}^{(\ell)*}(k_2, k_4, u_{24}) f_{m'_z}^{(\ell)}(k_1, k_4, u_{14}) \quad (42) \end{aligned}$$

où k_3 est donné par l'Eq. (41).

3. Cas $(i, j) = (1, 3)$

Pour $(i, j) = (1, 3)$, nous trouvons commode de remplacer l'intégration sur \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_3 par une intégration sur les modules k_1 et k_3 , sur l'angle $\theta_{13} \in [0, \pi]$ et sur une matrice de rotation \mathcal{R} uniformément distribuée sur le groupe des rotations $\text{SO}(3)$, les vecteurs \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_3 étant engendrés par l'action de \mathcal{R} sur des vecteurs fixés dans le plan xOy :

$$\mathbf{k}_1 = \mathcal{R}\mathbf{k}_1^{\text{fix}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{k}_1^{\text{fix}} = k_1\mathbf{e}_x \quad (43)$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathcal{R}\mathbf{k}_3^{\text{fix}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{k}_3^{\text{fix}} = k_3(u_{13}\mathbf{e}_x + v_{13}\mathbf{e}_y) \quad (44)$$

Alors \mathcal{R} est précisément la matrice de rotation $\mathcal{R}^{(ij)}$ de l'Eq. (29) et

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{24,13} = & \sum_{m_z, m'_z = -\ell}^{\ell} 2 \int_0^{\infty} \left(\prod_{n=1}^4 dk_n k_n^2 \right) \int_{-1}^1 du_{13} du_{24} \int_{\text{SO}(3)} d\mathcal{R} \\ & \langle \ell, m_z | R | \ell, m'_z \rangle^* f_{m_z}^{(\ell)*}(k_2, k_4, u_{24}) f_{m'_z}^{(\ell)}(k_1, k_3, u_{13}) \\ & \times \frac{\delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4 + \mathcal{R}(\mathbf{k}_1^{\text{fix}} + \mathbf{k}_3^{\text{fix}}))}{\frac{\hbar^2(k_1^2 + k_2^2)}{2m_{\uparrow}} + \frac{\hbar^2(k_3^2 + k_4^2)}{2m_{\downarrow}}} \quad (45) \end{aligned}$$

où le facteur 2 provient de $(4\pi \times 2\pi)^2 / [4\pi(2\pi)^3]$, R est l'opérateur représentant \mathcal{R} et $d\mathcal{R}$ est la mesure invariante sur le groupe $\text{SO}(3)$ normalisée à l'unité (voir §8.2 de la référence [35] [52]). Pour intégrer sur \mathcal{R} , nous utilisons la paramétrisation d'Euler comme dans l'Eq. (7.1-12) de la référence [35] :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_Z(\alpha)\mathcal{R}_Y(\beta)\mathcal{R}_Z(\gamma) \quad (46)$$

où les angles d'Euler α et γ décrivent un intervalle de longueur 2π et l'angle d'Euler β décrit $[0, \pi]$, de sorte que la mesure invariante est (voir §8.2 de la référence [35])

$$d\mathcal{R} = \frac{d\alpha \sin\beta d\beta d\gamma}{8\pi^2} \quad (47)$$

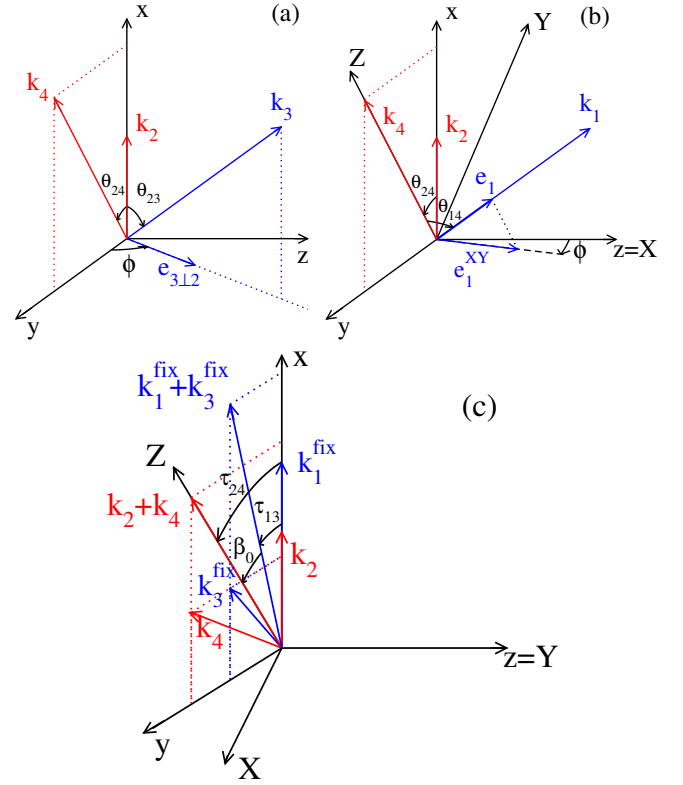


FIGURE 1: Positions et paramétrages des vecteurs d'onde apparaissant dans l'intégration angulaire dans les fonctionnelles $\mathcal{E}_{24,ij}$. Les vecteurs \mathbf{k}_2 et \mathbf{k}_4 sont donnés par les équations (30,31). (a) Pour $(i, j) = (2, 3)$, on a $\mathbf{k}_1 = -(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$ et on intègre sur \mathbf{k}_3 en utilisant les coordonnées sphériques d'axe polaire Ox et d'axe azimutal Oy . (b) Pour $(i, j) = (1, 4)$, on a $\mathbf{k}_3 = -(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4)$ et on intègre sur \mathbf{k}_1 en utilisant l'axe polaire OZ (direction de \mathbf{k}_4) et l'axe azimutal OX (direction de \mathbf{e}_z) comme dans l'équation (38), conduisant à l'angle polaire θ_{14} et l'angle azimutal ϕ (< 0 sur la figure). La ligne tiretée donne la direction de la composante \mathbf{e}_1^{XY} de $\mathbf{e}_1 = \mathbf{k}_1/k_1$ dans le plan XOY . (c) Pour $(i, j) = (1, 3)$, on intègre sur la rotation \mathcal{R} , telle que \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_3 sont donnés par l'action de \mathcal{R} sur les vecteurs $\mathbf{k}_1^{\text{fix}}$ et $\mathbf{k}_3^{\text{fix}}$ dans le plan xOy comme dans les Eqs. (43,44), en utilisant la paramétrisation en termes des angles d'Euler associés au choix commode des axes OX , OY et OZ de l'Eq. (48).

Comme $\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4$ apparaît dans l'argument de la distribution de Dirac de l'équation (45), la base orthonormale directe la plus pratique définissant les axes de rotation OX , OY et OZ est maintenant [voir Fig. 1(c)]

$$(\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z) = (\mathbf{e}_z \wedge \frac{\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4}{|\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4|}, \mathbf{e}_z, \frac{\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4}{|\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4|}). \quad (48)$$

La distribution de Dirac peut alors être écrite sous la forme [53]

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4 + \mathcal{R}(\mathbf{k}_1^{\text{fix}} + \mathbf{k}_3^{\text{fix}})) = & \delta(\sin\gamma)\delta(\sin(\beta_0 - \beta\cos\gamma)) \\ & \times \frac{\delta(|\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4|\cos(\beta_0 - \beta\cos\gamma) + |\mathbf{k}_1^{\text{fix}} + \mathbf{k}_3^{\text{fix}}|)}{|\sin\beta_0| |\mathbf{k}_1^{\text{fix}} + \mathbf{k}_3^{\text{fix}}| |\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4|} \quad (49) \end{aligned}$$

où nous avons introduit l'angle orienté β_0 entre $\mathbf{k}_1^{\text{fix}} + \mathbf{k}_3^{\text{fix}}$ et $\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4$ de telle sorte que [voir Fig. 1(c)]

$$\mathbf{k}_1^{\text{fix}} + \mathbf{k}_3^{\text{fix}} = |\mathbf{k}_1^{\text{fix}} + \mathbf{k}_3^{\text{fix}}|(-\sin \beta_0 \mathbf{e}_x + \cos \beta_0 \mathbf{e}_z). \quad (50)$$

Il n'y a aucune dépendance en α au second membre de l'Eq. (49) : dans l'argument de δ , on peut écrire $\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4$ comme $\mathcal{R}_Z(\alpha)(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4)$ et, en raison de l'invariance par rotation de la distribution de Dirac tridimensionnelle, on peut mettre en facteur puis omettre la rotation $\mathcal{R}_Z(\alpha)$. L'intégration sur α dans l'équation (45) fait alors sortir dans l'élément de matrice de R le projecteur orthogonal sur l'état de moment cinétique total ℓ et de moment cinétique nul selon OZ :

$$\int_0^{2\pi} d\alpha e^{-i\alpha L_z/\hbar} = 2\pi |\ell, m_z = 0\rangle \langle \ell, m_z = 0| \quad (51)$$

Dans l'intégrale sur γ , par exemple sur l'intervalle $[-\pi/2, 3\pi/2]$, seuls les points $\gamma = 0$ et $\gamma = \pi$ contribuent. La contribution de $\gamma = \pi$ peut être déduite de celle de $\gamma = 0$ en changeant β en $-\beta$, grâce à $\mathcal{R}_Z(\pi)\mathcal{R}_Y(\beta)\mathcal{R}_Z(\pi) = \mathcal{R}_Y(-\beta)$ et à l'invariance de $\mathbf{k}_1^{\text{fix}} + \mathbf{k}_3^{\text{fix}}$ et $|m_z = 0\rangle$ par rotation d'axe OZ . Dans l'intégrale sur $\beta \in [0, \pi]$, on peut alors prendre en compte la contribution de $\gamma = \pi$ en étendant l'intégration de la contribution de $\gamma = 0$ à $\beta \in [-\pi, 0]$: on peut prendre $\gamma = 0$ dans l'Eq. (49) et on tombe sur

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} d\beta |\sin \beta| e^{i\beta m'_z} \delta(\sin(\beta_0 - \beta)) \delta(|\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4| \cos(\beta_0 - \beta) \\ & + |\mathbf{k}_1^{\text{fix}} + \mathbf{k}_3^{\text{fix}}|) = \delta(|\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4| - |\mathbf{k}_1^{\text{fix}} + \mathbf{k}_3^{\text{fix}}|) \\ & \times \int_{-\pi}^{\pi} d\beta |\sin \beta| e^{i\beta m'_z} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\beta - \beta_0 - \pi - 2\pi n) \\ & = \delta(|\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4| - |\mathbf{k}_1^{\text{fix}} + \mathbf{k}_3^{\text{fix}}|) |\sin \beta_0| (-1)^{m'_z} e^{i\beta_0 m'_z} \quad (52) \end{aligned}$$

En raison de la périodicité de 2π de l'intégrande nous avons décalé le domaine d'intégration pour ne garder par exemple que le terme $n = 0$ du peigne de Dirac. Enfin, en utilisant $\beta_0 = \tau_{24} - \tau_{13}$, où τ_{24} est l'angle $\in [0, \pi]$ entre \mathbf{k}_2 et $\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4$ et τ_{13} est l'angle $\in [0, \pi]$ entre $\mathbf{k}_1^{\text{fix}}$ et $\mathbf{k}_1^{\text{fix}} + \mathbf{k}_3^{\text{fix}}$ de sorte que (à un facteur de phase près)

$$|\ell, m_z = 0\rangle = e^{-i\tau_{24} L_z/\hbar} |\ell, m_x = 0\rangle, \quad (53)$$

et en utilisant la propriété [54]

$$\langle \ell, m_x = 0 | \ell, m'_z \rangle = 0 \quad \text{si } \ell + m'_z \text{ est impair}, \quad (54)$$

qui permet de remplacer $(-1)^{m'_z}$ par $(-1)^\ell$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{24,13} &= \sum_{m_z, m'_z = -\ell}^{\ell} \frac{(-1)^\ell}{2\pi} \int_0^\infty \left(\prod_{n=1}^4 dk_n k_n^2 \right) \int_{-1}^1 du_{13} du_{24} \\ & \frac{e^{im_z \tau_{24}} \langle \ell, m_z | \ell, m_x = 0 \rangle \langle \ell, m_x = 0 | \ell, m'_z \rangle e^{-im'_z \tau_{13}}}{|\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4| \left[\frac{\hbar^2(k_1^2 + k_2^2)}{2m_\uparrow} + \frac{\hbar^2(k_3^2 + k_4^2)}{2m_\downarrow} \right] |\mathbf{k}_1^{\text{fix}} + \mathbf{k}_3^{\text{fix}}|} \\ & \times \delta(|\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4| - |\mathbf{k}_1^{\text{fix}} + \mathbf{k}_3^{\text{fix}}|) f_{m_z}^{(\ell)*}(k_2, k_4, u_{24}) f_{m'_z}^{(\ell)}(k_1, k_3, u_{13}) \quad (55) \end{aligned}$$

sachant que $|\ell, m_x = 0\rangle$ a des composantes réelles dans la base $|\ell, m_z\rangle$ à une phase globale près, et que \mathbf{k}_2 et \mathbf{k}_4 sont donnés par les Eqs. (30,31) et $\mathbf{k}_1^{\text{fix}}$ et $\mathbf{k}_3^{\text{fix}}$ par les Eqs. (43,44).

C. Invariance d'échelle

Pour profiter de l'invariance d'échelle de la solution à énergie nulle, on utilise l'ansatz (20) avec $s \in i\mathbb{R}$, comme expliqué physiquement dans la section III A, et on le reporte dans les différents termes (33,37,42,55) de la fonctionnelle (24). Dans l'Eq. (33) on effectue dans l'intégrale sur k_4 le changement de variable $k_4 = e^x k_2$, où x va de $-\infty$ à $+\infty$, et on pose $u_{24} = u$ pour abrégier, en introduisant aussi le rapport de masse

$$\alpha \equiv \frac{m_\uparrow}{m_\downarrow}. \quad (56)$$

On sort un facteur constant \mathcal{F} , qui sera spécifié et discuté plus tard, pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{diag}} &= \mathcal{F} \sum_{m_z = -\ell}^{\ell} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{-1}^1 du \left[\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \left(1 + \frac{u}{\text{ch } x} \right) \right. \\ & \left. + \frac{e^{-x} + \alpha e^x}{2(\alpha+1)\text{ch } x} \right]^{1/2} |\Phi_{m_z}^{(\ell)}(x, u)|^2 \quad (57) \end{aligned}$$

Dans l'Eq. (37) on effectue le changement de variable $k_4 = e^x k_2$ et $k_3 = e^{x'} k_2$ dans les intégrales sur k_4 et k_3 , en posant également $\theta_{24} = \theta$, $u_{24} = u$, $v_{24} = v$ et $\theta_{23} = \theta'$, $u_{23} = u'$, $v_{23} = v'$ pour abrégier. On sort ensuite le même facteur \mathcal{F} pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{24,23} &= \mathcal{F} \sum_{m_z, m'_z = -\ell}^{\ell} \int_{\mathbb{R}} dx dx' \int_{-1}^1 du du' \left(\frac{e^x \text{ch } x'}{e^{x'} \text{ch } x} \right)^{s/2} \\ & \times \left(\frac{e^{x+x'}}{4 \text{ch } x \text{ch } x'} \right)^{1/4} \Phi_{m_z}^{(\ell)*}(x, u) \Phi_{m'_z}^{(\ell)}(x', u') \\ & \times \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(2\pi)^2} \frac{e^{-im_z \theta/2} \langle \ell, m_z | e^{i\phi L_x/\hbar} | \ell, m'_z \rangle e^{im'_z \theta'/2}}{\mathcal{D}_{24,23}(\phi; x, u; x', u'; \alpha)} \quad (58) \end{aligned}$$

Au dénominateur, nous avons introduit la notation

$$\mathcal{D}_{24,23} = \frac{\frac{\hbar^2(k_1^2 + k_2^2)}{2m_\uparrow} + \frac{\hbar^2(k_3^2 + k_4^2)}{2m_\downarrow}}{\frac{\hbar^2 k_3 k_4}{\mu_{\uparrow\downarrow}}} \quad (59)$$

où k_1 est donné par l'Eq. (36) de sorte que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{24,23}(\phi; x, u; x', u'; \alpha) &= \text{ch}(x - x') \\ & + \frac{1}{1+\alpha} (e^{-x-x'} + e^{-x'} u + e^{-x} u' + uu' + vv' \cos \phi). \quad (60) \end{aligned}$$

Dans l'Eq. (42) on effectue le changement de variables $k_4 = e^x k_2$ et $k_1 = e^{x-x'} k_2$ (donc $k_4/k_1 = e^{x'}$) dans les intégrales sur k_4 et k_1 , et le changement de variable $\phi = \frac{\pi}{2} + \phi'$ dans l'intégrale sur ϕ [55], en posant également $\theta_{24} = \theta$, $u_{24} = u$, $v_{24} = v$ et $\theta_{14} = \theta'$, $u_{14} = u'$, $v_{14} = v'$. En sortant à nouveau le facteur \mathcal{F} , on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{24,14} = & \mathcal{F} \sum_{m_z, m'_z = -\ell}^{\ell} \int_{\mathbb{R}} dx dx' \int_{-1}^1 du du' \left(\frac{e^{-x} \operatorname{ch} x'}{e^{-x'} \operatorname{ch} x} \right)^{s/2} \\ & \times \left(\frac{e^{-(x+x')}}{4 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} x'} \right)^{1/4} \Phi_{m_z}^{(\ell)*}(x, u) \Phi_{m'_z}^{(\ell)}(x', u') \\ & \times \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{(2\pi)^2} \frac{e^{im_z \theta/2} \langle \ell, m_z | e^{i\phi' L_x / \hbar} | \ell, m'_z \rangle e^{-im'_z \theta'/2}}{\mathcal{D}_{24,14}(\phi'; x, u; x', u'; \alpha)} \end{aligned} \quad (61)$$

Au dénominateur, nous avons introduit la notation

$$\mathcal{D}_{24,14} = \frac{\frac{\hbar^2(k_1^2 + k_2^2)}{2m_{\uparrow}} + \frac{\hbar^2(k_3^2 + k_4^2)}{2m_{\downarrow}}}{\frac{\hbar^2 k_1 k_2}{\mu_{\uparrow\downarrow}}} \quad (62)$$

avec k_3 donné par l'Eq. (41) de sorte que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{24,14}(\phi'; x, u; x', u'; \alpha) = & \operatorname{ch}(x - x') \\ & + \frac{\alpha}{1 + \alpha} (e^{x+x'} + e^{x' u} + e^{x u'} + u u' + v v' \cos \phi'). \end{aligned} \quad (63)$$

Enfin, dans l'Eq. (55), on effectue le changement de variables $k_4 = e^x k_2$ et $k_3 = e^{x'} k_1$ dans les intégrales sur k_4 et k_3 , en posant également $\theta_{24} = \theta$, $u_{24} = u$, $\tau_{24} = \tau$ et $\theta_{13} = \theta'$, $u_{13} = u'$, $\tau_{13} = \tau'$. L'intégration sur k_1 est simple en raison de l'apparition d'une distribution de Dirac dans l'équation (55). À cause du facteur de phase dans l'ansatz (20), les angles $\gamma \equiv \tau - \theta/2$ et $\gamma' \equiv \tau' - \theta'/2$ apparaissent naturellement. Puisque τ est l'angle entre \mathbf{k}_2 et $\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4$ [voir Fig. 1(c)], on a d'après les Eqs. (30,31) et en utilisant la représentation habituelle des vecteurs dans le plan xOy par des nombres complexes :

$$e^{i\gamma} = \frac{1 + e^x e^{i\theta}}{|1 + e^x e^{i\theta}|} e^{-i\theta/2} = \frac{e^{(x+i\theta)/2} + e^{-(x+i\theta)/2}}{|e^{(x+i\theta)/2} + e^{-(x+i\theta)/2}|} \quad (64)$$

Comme $\theta \in [0, \pi]$, la partie réelle $\cos \gamma$ de cette expression est supérieure ou égale à zéro de sorte que l'on peut prendre $\gamma \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Puis en formant le rapport de la partie imaginaire et de la partie réelle de la même expression, on obtient la valeur de $\tan \gamma$ et

$$\gamma = \operatorname{atan} \left[\operatorname{th} \left(\frac{x}{2} \right) \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \text{ avec } \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) = \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^{1/2} \quad (65)$$

On a les mêmes expressions pour γ' , en remplaçant les variables x, θ et u par x', θ', u' . Cela conduit à

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{24,13} = & \mathcal{F} \sum_{m_z, m'_z = -\ell}^{\ell} \int_{\mathbb{R}} dx dx' \int_{-1}^1 du du' \left[\frac{(u' + \operatorname{ch} x') \operatorname{ch} x'}{(u + \operatorname{ch} x) \operatorname{ch} x} \right]^{s/2} \\ & \times \frac{(-1)^{\ell} \Phi_{m_z}^{(\ell)*}(x, u) \Phi_{m'_z}^{(\ell)}(x', u')}{4\pi[(u + \operatorname{ch} x)(u' + \operatorname{ch} x') \operatorname{ch} x \operatorname{ch} x']^{1/4}} \\ & \times \frac{e^{im_z \gamma} \langle \ell, m_z | \ell, m_x = 0 \rangle \langle \ell, m_x = 0 | \ell, m'_z \rangle e^{-im'_z \gamma'}}{\left(\frac{e^{-x'} + \alpha e^{x'}}{1 + \alpha} \right) (u + \operatorname{ch} x) + \left(\frac{e^{-x} + \alpha e^x}{1 + \alpha} \right) (u' + \operatorname{ch} x')} \end{aligned} \quad (66)$$

Dans tous les résultats (57,58,61,66) apparaît un facteur

$$\mathcal{F} = \frac{\mu_{\uparrow\downarrow}}{8\hbar^2} \int_0^{+\infty} \frac{dk_2}{k_2}. \quad (67)$$

Ce facteur contient une intégrale divergente, ce qui rend ces derniers calculs non rigoureux. Nous avons cependant vérifié que c'est toujours la même intégrale divergente qui sort, même si l'on particularise un nombre d'onde autre que k_2 (en effectuant par exemple le changement de variables $k_2 = e^{-x} k_4$ et $k_1 = e^{-x'} k_4$ dans les intégrales sur k_2 et k_1 dans l'Eq. (42)). Ceci est certainement dû à l'invariance d'échelle de $dk_2/k_2 = d(\ln k_2)$. Alternativement, on peut écrire l'équation intégrale sur $f_{m_z}^{(\ell)}$ déduite des dérivées fonctionnelles des Eq. (33,37,42,55) de l'Eq. (24) par rapport à $f_{m_z}^{(\ell)*}$; à ce stade, on a seulement utilisé l'invariance par rotation. Ensuite, on introduit l'ansatz invariant d'échelle (20), et on obtient exactement les mêmes équations intégrales sur $\Phi_{m_z}^{(\ell)}$ que celles obtenues par dérivation fonctionnelle des Eqs. (57,58,61,66) par rapport à $\Phi_{m_z}^{(\ell)*}$.

D. Invariance par parité

Le terme d'indice m_z dans l'ansatz (14) est simplement multiplié par $(-1)^{m_z}$ sous l'action de la parité $(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4) \rightarrow (-\mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_4)$ [18]. Cela signifie que les composantes de m_z impair de $\Phi_{m_z}^{(\ell)}$ sont découplées des composantes de m_z pair de $\Phi_{m_z}^{(\ell)}$ dans l'équation intégrale. Cette propriété peut également être obtenue par un calcul explicite : premièrement, pour m_z et m'_z de parités différentes, l'amplitude de couplage entre $|\ell, m_z\rangle$ et $|\ell, m'_z\rangle$ doit s'annuler dans l'Eq. (55); ceci peut être vu à partir de l'Eq. (54). Deuxièmement, elle s'annule également dans les équations (58,61) après intégration sur ϕ ou ϕ' : L_x satisfait à la règle de sélection $\Delta m_z = \pm 1$, et dans un développement de $e^{i\phi L_x}$ en puissances de ϕ , seules les puissances paires de ϕ et L_x survivent compte tenu de la parité du dénominateur \mathcal{D} . Dans ce qui suit, à un moment cinétique donné ℓ , nous distinguerons le secteur de parité $(-1)^{\ell+1}$, où $\mathcal{E}_{24,13}$ et la contribution de $D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3)$ dans l'Eq. (13) sont nuls, et le secteur de parité

$(-1)^\ell$ où ils sont *a priori* non nuls. Notons que, dans le cas particulier $\ell = 0$, il n'existe que le secteur de parité $(-1)^\ell$.

IV. FORME FINALE ET ANALYSE ASYMPTOTIQUE

A. Forme explicite de l'équation intégrale

En prenant la dérivée fonctionnelle de \mathcal{E} par rapport à $\Phi_{m_z}^{(\ell)}$ dans l'Eq. (24), en utilisant les formes (57,58,61,66)

$$0 = \left[\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \left(1 + \frac{u}{\text{ch } x} \right) + \frac{e^{-x} + \alpha e^x}{2(\alpha+1)\text{ch } x} \right]^{1/2} \Phi_{m_z}^{(\ell)}(x, u) + \int_{\mathbb{R}} dx' \int_{-1}^1 du' \sum_{m'_z = -\ell}^{\ell} K_{m_z, m'_z}^{(\ell)}(x, u; x', u'; \alpha) \Phi_{m'_z}^{(\ell)}(x', u') \quad (68)$$

avec l'expression suivante pour le noyau intégral matriciel $K^{(\ell)}$:

$$\begin{aligned} K_{m_z, m'_z}^{(\ell)}(x, u; x', u'; \alpha) = & \left(\frac{e^x \text{ch } x'}{e^{x'} \text{ch } x} \right)^{s/2} \left(\frac{e^{x+x'}}{4 \text{ch } x \text{ch } x'} \right)^{1/4} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(2\pi)^2} \frac{e^{-im_z\theta/2} \langle \ell, m_z | e^{i\phi L_x / \hbar} | \ell, m'_z \rangle e^{im'_z\theta'/2}}{\text{ch}(x-x') + \frac{1}{1+\alpha} [(u+e^{-x})(u'+e^{-x'}) + vv' \cos \phi]} \\ & + \left(\frac{e^{-x} \text{ch } x'}{e^{-x'} \text{ch } x} \right)^{s/2} \left(\frac{e^{-x-x'}}{4 \text{ch } x \text{ch } x'} \right)^{1/4} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(2\pi)^2} \frac{e^{im_z\theta/2} \langle \ell, m_z | e^{i\phi L_x / \hbar} | \ell, m'_z \rangle e^{-im'_z\theta'/2}}{\text{ch}(x-x') + \frac{\alpha}{1+\alpha} [(u+e^x)(u'+e^{x'}) + vv' \cos \phi]} \\ & - \frac{(-1)^\ell}{4\pi[(u+\text{ch } x)(u'+\text{ch } x')\text{ch } x \text{ch } x']^{1/4}} \left(\frac{(u'+\text{ch } x')\text{ch } x'}{(u+\text{ch } x)\text{ch } x} \right)^{s/2} \frac{e^{im_z\gamma} \langle \ell, m_z | \ell, m_x = 0 \rangle \langle \ell, m_x = 0 | \ell, m'_z \rangle e^{-im'_z\gamma'}}{\left(\frac{e^{-x'} + \alpha e^x}{1+\alpha} \right) (u+\text{ch } x) + \left(\frac{e^{-x} + \alpha e^{x'}}{1+\alpha} \right) (u'+\text{ch } x')} \end{aligned} \quad (69)$$

Ici, l'exposant d'échelle s est imaginaire pur, de sorte qu'un effet Efimov à quatre corps a lieu dans notre problème à 2 + 2 fermions si l'Eq. (68) a une solution $\Phi^{(\ell)}$ non identiquement nulle pour une certaine valeur non nulle de s . Nous rappelons que l'angle $\theta \in [0, \pi]$ est tel que $u = \cos \theta$ et $v = (1 - u^2)^{1/2} = \sin \theta$, et que l'angle γ est donné par l'Eq. (65); les mêmes relations s'appliquent pour les variables primées.

Les première, deuxième et troisième contributions dans l'Eq. (69) proviennent respectivement des termes $D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$, $D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4)$ et $D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3)$ dans l'équation intégrale non réduite (13); le terme diagonal dans l'Eq. (68) provient du terme diagonal de cette équation. Les intégrales sur ϕ peuvent être effectuées explicitement après insertion d'une relation de fermeture dans la base propre de L_x [56]. Il est important de noter que la troisième contribution dans l'Eq. (69) s'annule lorsque $\ell + m_z$ ou $\ell + m'_z$ sont impairs, c'est-à-dire dans le secteur de parité $(-1)^{\ell+1}$, comme le montre la propriété (54) et comme nous l'avons déjà souligné dans la section III D.

Il est intéressant de noter la séparabilité des

des différents termes et en n'oubliant pas le signe moins devant la dernière contribution dans l'Eq. (24), on obtient la forme de l'équation intégrale (13) maximale réduite par utilisation de la symétrie de rotation et de l'invariance d'échelle :

préfacteurs dans chaque contribution de l'Eq. (69), de la forme $[f(x, u)]^{s/2+1/4} [f(x', u')]^{-s/2+1/4}$ avec une fonction f donnée par $e^x/(2 \text{ch } x)$, $e^{-x}/(2 \text{ch } x)$ et $1/[(u + \text{ch } x)\text{ch } x]$, respectivement. Le fait que cette fonction $f(x, u)$ ne soit pas commune à toutes les contributions empêche de faire disparaître la dépendance en s du noyau matriciel $K^{(\ell)}$ par un simple changement de jauge sur $\Phi^{(\ell)}$: comme on pouvait s'y attendre, la dépendance en s du problème (68) est non triviale.

Nos résultats (68,69) doivent satisfaire à la symétrie du problème 2 + 2 sous l'échange de \uparrow et \downarrow . Premièrement, cet échange a pour effet de changer le rapport de masse α en son inverse $1/\alpha$, voir l'Eq. (56). Deuxièmement, les vecteurs d'onde \mathbf{k}_2 et \mathbf{k}_4 dans $D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4)$ sont échangés, de sorte que la variable x définie par l'équation (21) est changée en son opposé; ceci inverse également la direction de l'axe de quantification $\mathbf{k}_2 \wedge \mathbf{k}_4$ selon lequel le moment cinétique m_z est mesuré dans l'équation (14) : cela change m_z en $-m_z$ d'après l'identité [18]

$$e^{-i\pi L_x / \hbar} | \ell, m_z \rangle = (-1)^\ell | \ell, -m_z \rangle; \quad (70)$$

au contraire, l'angle non orienté $\theta_{24} \in [0, \pi]$ entre \mathbf{k}_2 et \mathbf{k}_4 reste inchangé, de sorte que la variable u n'est pas affectée. Par conséquent, on doit avoir

$$K_{m_z, m'_z}^{(\ell)}(x, u; x', u'; \alpha) = K_{-m_z, -m'_z}^{(\ell)}(-x, u; -x', u'; \alpha^{-1}) \quad (71)$$

pour toutes les valeurs de l'argument et des indices du noyau. Il est clair que l'Eq. (69) satisfait bien à la contrainte de symétrie (71) : les première et deuxième contributions sont échangées, tandis que la troisième est invariante puisque γ est changé en $-\gamma$, voir l'Eq. (65). On notera que nos résultats respectent également l'invariance par parité, voir la section III D, et que le noyau matriciel est hermitien comme le garantit notre obtention variationnelle :

$$K_{m_z, m'_z}^{(\ell)}(x, u; x', u'; \alpha) = \left[K_{m'_z, m_z}^{(\ell)}(x', u'; x, u; \alpha) \right]^* \quad (72)$$

B. Retrouver le problème à trois corps dans le comportement asymptotique à quatre corps

Le second membre de l'équation intégrale (68) définit un opérateur $M^{(\ell)}(s)$ agissant sur les fonctions spinorielles $\Phi_{m_z}^{(\ell)}(x, u)$. Le spectre de cet opérateur est physiquement pertinent, puisqu'un effet Efimov à quatre corps a lieu avec un exposant d'échelle Efimov $s \in i\mathbb{R}$ si et seulement si l'une des valeurs propres Ω de $M^{(\ell)}(s)$ est nulle. Comme $M^{(\ell)}(s)$ est un opérateur hermitien, puisque s est ici imaginaire pur, son spectre est réel et comprend en général une partie discrète et une partie continue. Le spectre discret correspond à des fonctions propres localisées, de carré intégrable; nous ne savons le déterminer que numériquement. La contribution attendue au spectre continu est le fait des fonctions propres étendues, qui restent de l'ordre de l'unité pour des valeurs arbitrairement grandes de $|x|$; comme nous l'expliquons maintenant, elle peut être déterminée analytiquement à partir de l'analyse asymptotique du noyau (69) lorsque x et x' tendent vers $\pm\infty$, par une généralisation de la discussion de la référence [13]. Il y a aussi une contribution inattendue au spectre continu, dont l'analyse est reportée à la section IV C.

Secteur $x \rightarrow +\infty, x' \rightarrow +\infty$. Il est clair que la partie diagonale de $M^{(\ell)}(s)$ dans l'Eq. (68) tend exponentiellement vers une valeur finie et non nulle, et que les deuxième et troisième contributions au noyau dans l'Eq. (69) tendent exponentiellement vers zéro. Dans la première contribution de l'Eq. (69), le préfacteur tend exponentiellement vers un puisque $e^x/(2 \operatorname{ch} x) \rightarrow 1$, et dans le dénominateur de l'intégrande, tous les termes dépendant de x ou x' sont exponentiellement supprimés, sauf le premier $\operatorname{ch}(x - x')$ puisqu'aucune hypothèse ne doit être faite sur la différence $x - x'$. Le problème aux

valeurs propres se réduit alors asymptotiquement à

$$\Omega \rightarrow^{(\ell)} \tilde{\Phi}_{m_z}^{(\ell)}(x, u) = \left[\frac{\alpha(2 + \alpha)}{(1 + \alpha)^2} \right]^{1/2} \tilde{\Phi}_{m_z}^{(\ell)}(x, u) + \int_{\mathbb{R}} dx' \sum_{m'_z = -\ell}^{\ell} \int_{-1}^1 du' \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{(2\pi)^2} \frac{\langle \ell, m_z | e^{i\phi' L_x / \hbar} | \ell, m'_z \rangle}{\operatorname{ch}(x - x') + \frac{uu' + vv' \cos \phi'}{1 + \alpha}} \tilde{\Phi}_{m'_z}^{(\ell)}(x', u') \quad (73)$$

où la flèche dans l'exposant de Ω indique que x et x' tendent vers plus l'infini, et les facteurs de phase $e^{-im_z \theta/2}$ et $e^{im'_z \theta'/2}$ ont été éliminés par un changement de jauge sur le spineur, $\Phi_{m_z}^{(\ell)}(x, u) = e^{-im_z \theta/2} \tilde{\Phi}_{m_z}^{(\ell)}(x, u)$. Ensuite, on effectue une rotation de spin, en passant dans la base interne des états propres $|\ell, m_x\rangle$ de L_x , dans laquelle $e^{i\phi L_x / \hbar}$ est diagonale : les composantes $\tilde{\Phi}_{m_x}^{(\ell)}(x, u)$ sont toutes découplées. Pour un m_x donné, avec $|m_x| \leq \ell$, l'astuce consiste à étendre $\tilde{\Phi}_{m_x}^{(\ell)}(x, u)$ en une fonction de la variable réelle x et du vecteur \mathbf{n} sur la sphère unité à deux dimensions :

$$F_{m_x}^{(\ell)}(x, \mathbf{n}) \equiv \tilde{\Phi}_{m_x}^{(\ell)}(x, \cos \theta) e^{im_x \phi} \quad (74)$$

où $\theta \in [0, \pi]$ et $\phi \in [0, 2\pi]$ sont les angles polaire et azimutal de \mathbf{n} en coordonnées sphériques, par exemple par rapport aux axes Ox et Oy , $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi)$. Dans le facteur de phase $e^{im_x \phi'}$ au numérateur et dans $\cos \phi'$ au dénominateur, on peut alors remplacer ϕ' par $\phi' - \phi$: l'intégrande est une fonction périodique de ϕ' de période 2π et son intégrale a la même valeur quel que soit l'intervalle de longueur 2π décrit par ϕ' . On reconnaît alors le produit scalaire $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = uu' + vv' \cos(\phi - \phi')$ où $\mathbf{n}' = (\cos \theta', \sin \theta' \cos \phi', \sin \theta' \sin \phi')$. Le problème aux valeurs propres s'écrit maintenant

$$\Omega \rightarrow^{(\ell)} F_{m_x}^{(\ell)}(x, \mathbf{n}) = \frac{[\alpha(2 + \alpha)]^{1/2}}{1 + \alpha} F_{m_x}^{(\ell)}(x, \mathbf{n}) + \int_{\mathbb{R}} dx' \int_{|\mathbf{n}'|=1} \frac{d^2 n'}{(2\pi)^2} \frac{F_{m_x}^{(\ell)}(x', \mathbf{n}')}{\operatorname{ch}(x - x') + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'}{1 + \alpha}} \quad (75)$$

L'opérateur correspondant est invariant par translation de la variable x et par rotation des variables \mathbf{n} sur la sphère unité. Ses fonctions propres $F_{m_x}^{(\ell)}(x, \mathbf{n})$ peuvent donc être prises comme le produit d'une onde plane en la variable x et d'une harmonique sphérique en les variables (θ, ϕ) , avec le même nombre quantique m_x (imposé par la forme (74)) mais avec un nombre quantique entier $L \geq |m_x|$ quelconque pour le moment cinétique total :

$$F_{m_x}^{(\ell)}(x, \mathbf{n}) = e^{ikx} Y_L^{m_x}(\theta, \phi) \quad (76)$$

Comme d'habitude pour un opérateur invariant par rotation, la valeur propre ne dépend pas de m_x . Elle ne dépend que de L , il suffit donc de se spécialiser au cas $m_x = 0$, où $Y_L^0(\theta, \phi) \propto P_L(\cos \theta)$, où $P_L(X)$ est le polynôme de Legendre de degré L . On obtient alors le

spectre continu “à droite” ($x, x' \rightarrow +\infty$) :

$$\Omega_{m_x}^{\rightarrow(\ell)}(\alpha) \in \{\Lambda_L(ik, \alpha^{-1}), \forall k \in \mathbb{R}, \forall L \geq |m_x|\} \quad (77)$$

La fonction Λ_L de $s \in i\mathbb{R}$ et du rapport de masse a été introduite et calculée analytiquement dans [36, 37], généralisant des résultats antérieurs [38, 39] :

$$\begin{aligned} \Lambda_L(s, \beta) &\equiv \frac{(1+2\beta)^{1/2}}{1+\beta} + \int_{-1}^1 du \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{2\pi} \frac{e^{-sx} P_L(u)}{\operatorname{ch} x + \frac{\beta}{1+\beta} u} \\ &= \cos \nu(\beta) + \frac{1}{\sin \nu(\beta)} \int_{\frac{\pi}{2}-\nu(\beta)}^{\frac{\pi}{2}+\nu(\beta)} d\theta P_L \left(\frac{\cos \theta}{\sin \nu(\beta)} \right) \frac{\sin(s\theta)}{\sin(s\pi)} \end{aligned} \quad (78)$$

où, dans la deuxième expression obtenue après intégration sur x [37], on a introduit l’angle de masse

$$\nu(\beta) = \alpha \sin \frac{\beta}{1+\beta} \quad (79)$$

Pour tout $\beta > 0$, on constate numériquement pour L pair que la valeur maximale de $\Lambda_L(s, \beta)$ sur $s \in i\mathbb{R}^+$ est atteinte en $s = 0$, et que la valeur minimale est atteinte en $|s| \rightarrow +\infty$ (où $\Lambda_L(s, \beta)$ tend vers $\cos \nu(\beta)$). Pour L impair, on constate que la situation est inversée : $\Lambda_L(s, \beta)$ est minimal en $s = 0$ et maximal à l’infini. En résumé, nous nous attendons à ce que

$$\begin{aligned} \cos \nu(\beta) &\leq \Lambda_L(s, \beta) \leq \Lambda_L(0, \beta) \quad \forall s \in i\mathbb{R}, L \text{ pair}, \\ \Lambda_L(0, \beta) &\leq \Lambda_L(s, \beta) \leq \cos \nu(\beta) \quad \forall s \in i\mathbb{R}, L \text{ impair} \end{aligned} \quad (80)$$

Ceci permet de déterminer les bords de la composante continue de nombre quantique L dans l’Eq. (77), voir Fig. 2. Une explication physique de l’apparition de la fonction Λ_L est donnée à la fin de la section.

Secteur $x \rightarrow -\infty, x' \rightarrow -\infty$. Le calcul ressemble beaucoup au précédent, sauf que c’est maintenant la deuxième contribution au second membre de l’Eq. (69) qui survit. Ceci était prévisible compte tenu de la relation de symétrie (71). Nous aboutissons au spectre continu “à gauche” ($x, x' \rightarrow -\infty$) :

$$\Omega_{m_x}^{\leftarrow(\ell)}(\alpha) \in \{\Lambda_L(ik, \alpha), \forall k \in \mathbb{R}, \forall L \geq |m_x|\} \quad (81)$$

qui diffère de (77) par la présence de α (plutôt que $1/\alpha$) dans l’argument de la fonction Λ_L [57]. Les bords des composantes de nombre quantique L de ce continuum sont représentés sur la Fig. 2 pour les premières valeurs de L , en utilisant la propriété (80) vérifiée numériquement.

Considérations sur la parité. À ℓ fixé, les résultats (77,81) sont exprimés en termes du nombre quantique m_x , alors que le problème original ne fait la distinction qu’entre un secteur de parité paire (m_z est pair) et un secteur de parité impaire (m_z est impair). En pratique, en raison de la propriété (54), les continums (77,81) avec $L = 0$ ne peuvent être réalisés que dans le secteur de parité $(-1)^\ell$, quel que soit le moment cinétique total

considéré ℓ (évidemment on doit alors prendre $m_x = 0$). Les autres continums (avec $L \geq 1$) peuvent tous être réalisés, dans les secteurs pairs et impairs, pour toutes les valeurs de $\ell \geq 0$ [58].

Discussion physique. La fonction $\Lambda_L(s, \beta)$ apparaît dans le problème unitaire à trois corps de deux particules fermioniques interagissant avec une seule particule discernable, β étant le rapport de masse entre espèces majoritaire et minoritaire. Pour $s \in i\mathbb{R}$, cette fonction est donnée au second membre de l’équation (78); elle peut être étendue analytiquement aux valeurs réelles de s en utilisant par exemple le troisième membre de l’équation (78) [37]. Les solutions à énergie nulle de ce problème à trois corps ont un exposant d’échelle d’Efimov s : la fonction d’onde à trois corps varie comme R^{s-2} , R étant l’hyperrayon des trois particules, et les valeurs autorisées de s pour une valeur L du moment cinétique total vérifient l’équation

$$\Lambda_L(s, \beta) = 0. \quad (82)$$

Ce système à trois corps présente un effet Efimov si et seulement si cette équation a une solution imaginaire pure $s \in i\mathbb{R}^*$. Cela ne se produit que pour des valeurs impaires de L , à partir d’un rapport de masse [14]

$$\beta > \alpha_c(2; 1) = 13,60696 \dots \quad (83)$$

pour $L = 1$, et à des rapports de masse critiques croissants pour $L = 3, 5, \dots$ [37, 40].

Il est donc évident que l’analyse asymptotique du problème à $2 + 2$ fermions fait apparaître le problème à trois corps. Ceci est intuitif dans l’espace des positions : imaginez qu’à position fixée $\mathbf{r}_4 \neq \mathbf{0}$ de la quatrième particule (de spin \downarrow), les positions $(\mathbf{r}_i)_{1 \leq i \leq 3}$ des autres particules (de spin $\uparrow\uparrow\downarrow$) tendent simultanément vers zéro ; alors la fonction d’onde à quatre corps $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)$ doit reproduire le comportement de l’état de diffusion à énergie nulle de deux particules \uparrow et une particule \downarrow , caractérisé par un rapport de masse $\beta = m_\uparrow/m_\downarrow = \alpha$, en particulier elle doit présenter les mêmes exposants d’échelle s que le problème $2 + 1$ (voir §5.3.6 dans la référence [34]) ; comme ces exposants d’échelle sont solutions de l’Eq. (82) avec $\beta = \alpha$, cela explique l’apparition de $\Lambda_L(s, \alpha)$ dans le spectre (81) [59]. Même si $\ell = 0$ pour le système à quatre corps, L peut prendre n’importe quelle valeur, car le moment cinétique peut être distribué entre la particule 4 et les trois premières particules. L’équivalent dans l’espace des impulsions de la limite considérée est d’avoir $(\mathbf{k}_i)_{1 \leq i \leq 3}$ divergent à \mathbf{k}_4 fixé, ce qui, en raison de l’invariance d’échelle, est équivalent à avoir $\mathbf{k}_4 \rightarrow \mathbf{0}$ à $(\mathbf{k}_i)_{1 \leq i \leq 3}$ fixé, c’est-à-dire $x \rightarrow -\infty$ d’après l’Eq. (21). C’est pourquoi $\beta = \alpha$ conduit au spectre (81). Un raisonnement similaire avec \mathbf{r}_2 fixé et $(\mathbf{r}_i)_{i \neq 2}$ tendant vers zéro conduit à $\beta = 1/\alpha$ et $x \rightarrow +\infty$, comme dans le spectre (77).

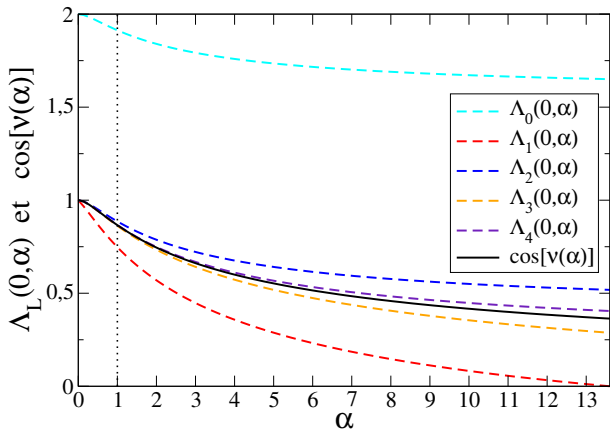


FIGURE 2: Bords du spectre continu de $M(s)$ ($s \in i\mathbb{R}^+$) obtenus analytiquement (ils correspondent aux limites $x \rightarrow \pm\infty$). Il s'agit de la réunion de composantes caractérisées par un nombre quantique de moment cinétique L d'un problème asymptotique à trois corps (à ne pas confondre avec le moment cinétique total ℓ des états à quatre corps), conduisant à un intervalle de valeurs propres allant de $\Lambda_L(0, \alpha)$ à $\cos[\nu(\alpha)]$ pour $x \rightarrow -\infty$, et allant de $\Lambda_L(0, 1/\alpha)$ à $\cos[\nu(1/\alpha)]$ pour $x \rightarrow +\infty$, où α est le rapport de masse donné par l'Eq. (56), la fonction Λ_L est donnée par l'Eq. (78) et l'angle de masse ν est donné par l'Eq. (79). Nous représentons $\cos[\nu(\alpha)]$ (trait plein noir continu) et $\Lambda_L(0, \alpha)$ (tiretés colorés, avec $L = 0, 2, 4$ de haut en bas au-dessus de la ligne continue, et $L = 1, 3$ de bas en haut en dessous de la ligne continue) en fonction de $\alpha \in [0, \alpha_c(2; 1)]$ où $\alpha_c(2; 1)$ est le rapport de masse critique (83) de l'effet Efimov dans le problème à trois corps $\uparrow\uparrow\downarrow$. En raison de la symétrie $\alpha \leftrightarrow 1/\alpha$ du problème à 2 + 2 fermions, on peut se limiter à $\alpha \geq 1$ (c'est-à-dire à la partie à droite de la ligne pointillée verticale); les bords du continuum $x \rightarrow -\infty$ peuvent alors être lus directement sur la figure, et celles du continuum $x \rightarrow +\infty$ peuvent être obtenues en repliant mentalement la partie $\alpha \leq 1$ de la figure sur la partie $\alpha \geq 1$.

C. Un troisième continuum inattendu

Les deux premières contributions de l'Eq. (69) sont inoffensives : le dénominateur de leurs intégrandes ne peut pas s'annuler, voir les Eq. (59,60) et les Eq. (62,63), et, comme nous l'avons vu, elles sont à courte portée dans l'espace (x, x') . Au contraire, la troisième contribution dans l'Eq. (69), qui n'est non nulle que dans le secteur de parité $(-1)^\ell$, diverge lorsque $(x, u) \rightarrow (0, -1)$ ou $(x', u') \rightarrow (0, -1)$. Ceci laisse craindre que les valeurs propres de $M(s)$, $s \in i\mathbb{R}$, ne soient pas bornées pour cette parité. Nous étudions ce problème mathématiquement dans l'annexe A et nous concluons que $M(s)$ reste borné.

Physiquement, cette divergence du noyau conduit à un effet assez intéressant : l'émergence d'une troisième composante du spectre continu de $M(s)$, différente des continums $x \rightarrow \pm\infty$ précédemment discutés. L'idée intuitive est que l'on peut transformer le problème aux valeurs propres $\Omega\Phi = M(s)\Phi$ en une équation intégrale à noyau borné par un changement de variables approprié, avec pour conséquence qu'une des nouvelles variables,

que nous appellerons t , peut tendre vers $-\infty$, auquel cas le vecteur propre Φ acquiert une structure d'onde plane $\propto \exp(ikt)$, $k \in \mathbb{R}$, avec un spectre

$$\Omega^{\odot(\ell)} \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{(-1)^\ell}{\text{ch}(k\pi/2)} \right], \forall k \in \mathbb{R} \right\} [\text{parité}(-1)^\ell] \quad (84)$$

C'est une caractéristique inattendue du problème à 2 + 2 fermions, absente dans le cas à 3 + 1 fermions [13].

Pour obtenir ce résultat, nous construisons une approximation locale de l'équation intégrale au voisinage de $(x, u) = (0, -1)$, $(x', u') = (0, -1)$, en ne conservant que les contributions les plus divergentes. Nous utilisons

$$y \equiv \pi - \theta \quad (85)$$

plutôt que $u = \cos \theta$ comme variable d'intégration, de sorte que $y, y' \rightarrow 0$ quand $u, u' \rightarrow -1$. Cela fait sortir un jacobien $\sin y'$ que nous réabsorbons (en préservant l'hermiticité du problème) par un changement de fonction. Nous prenons également en compte le fait que la troisième contribution divergente dans l'Eq. (69) fait intervenir un projecteur sur l'état $|\ell, m_x = 0\rangle$, et que les facteurs de phase $e^{im_z \gamma}$ et $e^{-im'_z \gamma'}$, $[(u + \text{ch } x) \text{ch } x]^{-s/2}$ et $[(u' + \text{ch } x') \text{ch } x']^{s/2}$ peuvent être éliminés par un changement de jauge. D'où l'ansatz

$$\Phi_{m_z}^{(\ell)}(x, u) = \frac{(x^2 + y^2)^{-s/2}}{y^{1/2}} e^{im_z \gamma} |\ell, m_z \rangle |\ell, m_x = 0\rangle \Phi(x, y) \quad (86)$$

où $\sin y$ a été linéarisé, $u + \text{ch } x$ a été quadratisé. Le problème aux valeurs propres qui en résulte localement est

$$\left(\Omega - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Phi(x, y) = -\frac{(-1)^\ell}{2^{1/2}\pi} \int_D \frac{dx' dy' (yy')^{1/2}}{[(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)]^{1/4}} \times \frac{\Phi(x', y')}{x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2} \quad (87)$$

où nous avons commodément restreint l'intégration à la moitié supérieure ($y > 0$) du disque D de rayon $\rho_0 \ll 1$ centré sur $(0, 0)$. En coordonnées polaires,

$$(x, y) = (\rho \cos \psi, \rho \sin \psi) \quad (88)$$

seul $(yy')^{1/2}$ dépend de ψ dans le noyau. Il en dépend de manière factorisée de sorte que Φ est aussi factorisé :

$$\Phi(x, y) = \rho^{-1/2} \Phi(\rho) (\sin \psi)^{1/2} \quad (89)$$

et, puisque $\int_0^\pi d\psi' \sin \psi' = 2$,

$$\left(\Omega - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Phi(\rho) = -\frac{(-1)^\ell 2^{1/2}}{\pi} \int_0^{\rho_0} d\rho' \frac{(\rho\rho')^{1/2}}{\rho^2 + \rho'^2} \Phi(\rho') \quad (90)$$

L'invariance d'échelle de ce noyau suggère le changement de variable logarithmique

$$t = \ln \frac{\rho}{\rho_0} \quad \text{et} \quad \phi(t) = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/2} \Phi(\rho) \quad (91)$$

Le problème aux valeurs propres

$$\Omega\phi(t) = \frac{1}{2^{1/2}}\phi(t) - \frac{(-1)^\ell}{2^{1/2}\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{dt'\phi(t')}{\text{ch}(t-t')} \quad (92)$$

qui en résulte admet l'Eq. (84) comme spectre continu avec des fonctions propres $\phi(t)$ qui sont pour $t \rightarrow -\infty$ des superpositions linéaires de e^{ikt} et e^{-ikt} , puisque $\int_{\mathbb{R}} dt e^{ikt} / \text{ch} t = \pi / \text{ch}(k\pi/2)$; nous avons vérifié numériquement qu'il n'a pas de valeur propre discrète [60].

Interprétation physique. Nous rassemblons les Eq. (86,89,91), en prenant comme solution particulière de l'Eq. (92) à t grand et négatif la fonction $\phi(t) = 1$, qui correspond à une onde plane asymptotique dans l'espace des t avec un vecteur d'onde nul, c'est-à-dire à $k = 0$ dans l'Eq. (84) [61]. En se limitant pour simplifier à un moment cinétique total nul $\ell = 0$ [62], on trouve alors que

$$\Phi_0^{(0)}(x, u) \underset{(x,u) \rightarrow (0,-1)}{\propto} \frac{1}{\rho^{s+3/2}} \quad (93)$$

Une écriture plus éclairante s'obtient en termes des vecteurs d'onde du centre de masse $\mathbf{K}_{24} = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4$ et relatifs $\mathbf{k}_{24} = (\mathbf{k}_2 - \alpha\mathbf{k}_4)/(1 + \alpha)$ des particules 2 et 4 :

$$\Phi^{(0)}(x, u) \underset{K_{24}/k_{24} \rightarrow 0}{\propto} \left(\frac{k_{24}}{K_{24}} \right)^{s+3/2} \quad (94)$$

On a en effet $\rho^2 \simeq 2(u + \text{ch} x)$ et $K_{24}^2 = 2k_2^2 e^x (u + \text{ch} x)$, de sorte que K_{24} et ρ tendent vers zéro de la même manière lorsque $(x, u) \rightarrow (0, -1)$; de même, le rapport K_{24}/k_{24} tend vers zéro si et seulement si $u + \text{ch} x \rightarrow 0$ [63]. En se limitant à un petit voisinage de la singularité, $K_{24} < \epsilon k_{24}$, où $\epsilon \ll 1$, nous pouvons approximer dans l'ansatz (20) le facteur $(\text{ch} x)^{s+3/2}$ par un et, au dénominateur, $k_2^2 + k_4^2 = 2k_{24}^2 + 2\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\mathbf{k}_{24} \cdot \mathbf{K}_{24} + \frac{1+\alpha^2}{(1+\alpha)^2}K_{24}^2$ par son terme d'ordre dominant $2k_{24}^2$ pour isoler le comportement singulier de $D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4)$:

$$D_{\text{sing}}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4) \propto \frac{1}{k_{24}^{s+7/2}} \left(\frac{k_{24}}{K_{24}} \right)^{s+3/2} \quad (95)$$

L'idée clé est alors de montrer que cela se traduit par une singularité de la partie régulière \mathcal{A}_{13} de la fonction d'onde à quatre corps dans la condition de contact de Wigner-Bethe-Peierls (1). Comme nous l'avons vu après l'Eq. (5), $\mathcal{A}_{13} = \mathcal{A}$ est relié à $D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4)$ par une transformée de Fourier; en prenant $(\mathbf{k}_{24}, \mathbf{K}_{24})$ plutôt que $(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4)$ comme variables d'intégration, et en utilisant le fait que $\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{r}_4 = \mathbf{k}_{24} \cdot \mathbf{r}_{24} + \mathbf{K}_{24} \cdot \mathbf{R}_{24}$, où $\mathbf{r}_{24} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4$ et $\mathbf{R}_{24} = (m_2\mathbf{r}_2 + m_4\mathbf{r}_4)/(m_2 + m_4)$ sont les coordonnées relatives et du centre de masse des particules 2 et 4, nous obtenons pour la contribution de la singularité de D à la partie

régulière \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{sing}}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_{13}, \mathbf{r}_4 - \mathbf{R}_{13}) &\propto \int_{K_{24} < \epsilon k_{24}} d^3 k_{24} d^3 K_{24} e^{i\mathbf{K}_{24} \cdot (\mathbf{R}_{24} - \mathbf{R}_{13})} \\ &\times \frac{e^{i\mathbf{k}_{24} \cdot \mathbf{r}_{24}}}{k_{24}^{s+7/2}} \left(\frac{k_{24}}{K_{24}} \right)^{s+3/2} \end{aligned} \quad (96)$$

En intégrant sur les angles solides des vecteurs \mathbf{k}_{24} et \mathbf{K}_{24} , en effectuant le changement de variable $K_{24} = qk_{24}r_{24}/|\mathbf{R}_{24} - \mathbf{R}_{13}|$ à k_{24} fixé, en changeant l'ordre d'intégration sur k_{24} et q et finalement en intégrant sur k_{24} [64] nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{sing}}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_{13}, \mathbf{r}_4 - \mathbf{R}_{13}) &\propto \frac{|\mathbf{R}_{24} - \mathbf{R}_{13}|^{s-3/2}}{r_{24}} \\ &\times \int_0^{\epsilon|\mathbf{R}_{24} - \mathbf{R}_{13}|/r_{24}} \frac{dq}{q^{s+1/2}} [|q-1|^{s-1/2} - (q+1)^{s-1/2}] \end{aligned} \quad (97)$$

Il devient alors évident que la singularité dans $D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4)$ en $\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4 = \mathbf{0}$ est liée à une divergence en $1/r_{24}$ de la partie régulière \mathcal{A}_{13} de la fonction d'onde à quatre corps en $r_{24} = 0$ [65] [66]. Ceci était physiquement attendu : $\mathcal{A}_{13}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_{13}, \mathbf{r}_4 - \mathbf{R}_{13})$ est essentiellement la fonction d'onde des particules 2 et 4 sachant que les particules 1 et 3 ont convergé au même point dans l'onde s ; puisque 2 et 4 sont dans des états de spin différents, elles interagissent dans l'onde s et sont soumises aux conditions de contact 2-4 de Wigner-Bethe-Peierls, ce qui implique une divergence en $1/r_{24}$ lorsque $r_{24} \rightarrow 0$. Une telle divergence de \mathcal{A}_{13} a déjà été mise en évidence dans le problème de la diffusion de deux dimères $\uparrow\downarrow$ dans la référence [41], et dans le problème général à $N_\uparrow + N_\downarrow$ fermions lorsque $N_\uparrow \geq 2$ et $N_\downarrow \geq 2$ dans la référence [42] (voir la note 20 de cette référence) [67].

Cette interprétation de la singularité du noyau matriciel en $(x, u) = (0, -1)$ a une implication simple, mais éclairante : la divergence en $1/r_{24}$ de \mathcal{A}_{13} ne peut avoir lieu que lorsque les particules 2 et 4 convergent vers le même point dans l'onde partielle relative de moment cinétique nul, puisque les particules \uparrow et \downarrow n'interagissent de manière résonnante que dans l'onde s . Dans une telle configuration, le moment cinétique ℓ de la fonction \mathcal{A}_{13} (c'est-à-dire du système total) est porté par le mouvement du centre de masse des particules 2 et 4 par rapport à \mathbf{R}_{13} ; il existe alors un lien univoque entre le moment cinétique ℓ et la parité, comme pour les systèmes à une seule particule, et la parité de \mathcal{A}_{13} doit être $(-1)^\ell$. Ceci explique pourquoi la singularité en $(x, u) = (0, -1)$, et finalement le troisième continuum (84), ne peuvent apparaître que dans ce secteur de parité [68].

V. RECHERCHE DE L'EFFET EFIMOV À QUATRE CORPS

Dans le problème à 3 + 1 fermions, la signature d'un effet Efimov à quatre corps est qu'une valeur propre de

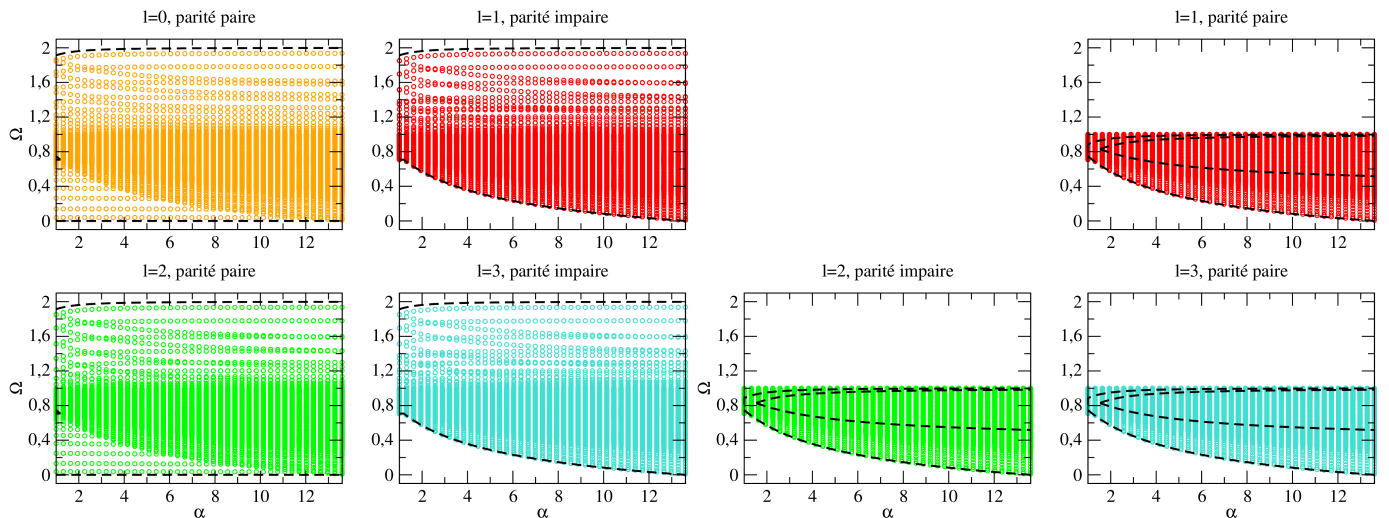


FIGURE 3: Valeurs propres de $M(s=0)$ en fonction du rapport de masse $\alpha \in [1; 13,6]$, pour différentes valeurs du moment cinétique ℓ et de la parité [moitié gauche pour la parité $(-1)^\ell$, moitié droite pour la parité $(-1)^{\ell+1}$], obtenues numériquement après discrétisation et troncature des variables x et θ dans la zone $\rho \equiv [x^2 + (\pi - \theta)^2]^{1/2} > \rho_0$ et de leurs versions log-polaires $t \equiv \ln(\rho/\rho_0)$ et ψ dans la zone $\rho < \rho_0$ (voir texte) : $x_{\max} = -x_{\min} = 12$, $dx = 1/5$, $d\theta \simeq \pi/15$, $\rho_0 = 2/5$, $t_{\min} = -12$, $dt = 1/5$, $d\psi = \pi/15$, avec la méthode d'intégration de Gauss-Legendre pour les intégrales sur θ et ψ , et la méthode d'intégration du point milieu pour les intégrales sur x et t . Pour les voies de parité $(-1)^{\ell+1}$, la zone $\rho < \rho_0$ n'est pas utile et n'est pas incluse dans les calculs. Les limites du spectre continu de $M(s)$ sont représentées par des courbes noires en tirets épais : pour les voies de parité $(-1)^{\ell+1}$, cela correspond aux continus $x \rightarrow \pm \infty$ des Eqs. (77,81) avec tous les $L \geq 1$; pour les voies de parité $(-1)^\ell$, cela correspond aux continus $x \rightarrow \pm \infty$ des Eqs. (77,81) avec tous les $L \geq 0$ et au continuum $(x, \theta) \rightarrow (0, \pi)$ [c'est-à-dire $t \rightarrow -\infty$] de l'Eq. (84). Contrairement au cas $3+1$, aucune valeur propre de $M(s=0)$ ne croise zéro pour $\alpha < \alpha_c(2; 1) = 13,6069\dots$: on ne trouve aucun effet Efimov à quatre corps dans le problème à $2+2$ fermions.

l'opérateur $M(s=0)$ correspondant croise zéro pour une certaine valeur de α en dessous de $\alpha_c(2; 1) \simeq 13,6069$, spécifiquement pour $\alpha = \alpha_c(3; 1) \simeq 13,384$ [13]. La question ici est de savoir si oui ou non un tel croisement peut se produire pour le problème à $2+2$ fermions, c'est-à-dire pour l'opérateur $M(s=0)$ correspondant aux Eqs. (68,69). Nous répondons à cette question par un calcul numérique des valeurs propres de $M(s=0)$.

Mise en œuvre numérique. Dans le secteur de parité $(-1)^{\ell+1}$, nous tronquons la variable x de manière symétrique, c'est-à-dire à l'intervalle $[x_{\min} = -x_{\max}, x_{\max}]$, et nous la discrétisons avec un pas uniforme dx selon la méthode habituelle d'intégration du point milieu. Nous utilisons θ plutôt que $u = \cos \theta$ comme variable d'intégration, de sorte que nous utilisons $\check{\Phi}(x, \theta) = (\sin \theta)^{1/2} \Phi(x, u)$ plutôt que $\Phi(x, u)$ comme fonction inconnue; en multipliant le problème aux valeurs propres $\Omega \Phi = M(s=0) \Phi$ par $(\sin \theta)^{1/2}$, nous obtenons un problème aux valeurs propres hermitien avec les mêmes valeurs propres, la même partie diagonale et un noyau $\check{K}_{m_z, m'_z}^{(\ell)}(x, \theta; x', \theta') = (\sin \theta \sin \theta')^{1/2} K_{m_z, m'_z}^{(\ell)}(x, u; x', u')$ où $u = \cos \theta$, $u' = \cos \theta'$. Pour une meilleure précision, nous utilisons la méthode d'intégration de Gauss-Legendre [44] pour θ' car cette variable angulaire est naturellement limitée à $[0, \pi]$ [69].

Dans le secteur de parité $(-1)^\ell$, il y a une complication supplémentaire : le noyau diverge au point $(x, \theta) =$

$(0, \pi)$, ce qui rend la discrétisation de (x, θ) précédente numériquement inefficace. À petite distance de ce point, disons moins de ρ_0 , le jeu optimal de variables est (t, ψ) , où $\psi \in [0, \pi]$ est défini par l'équation (88) et $t \in \mathbb{R}^-$ est donné par l'équation (91), puisque le noyau résultant est borné après le changement commode de fonction inconnue $\check{\Phi}_{m_z}^{(\ell)}(t, \psi) = \rho \check{\Phi}_{m_z}^{(\ell)}(x, \theta)$, voir l'équation (92). Nous avons donc recours à une méthode mixte : pour $\rho = [x^2 + (\pi - \theta)^2]^{1/2} > \rho_0$, nous utilisons le jeu de variables (x, θ) , avec x discrétisé uniformément avec un pas dx sous-multiple de ρ_0 et θ discrétisé selon la méthode de Gauss-Legendre sur l'intervalle $[0, \theta_{\max}]$ où $\theta_{\max} = \pi$ pour $|x| > \rho_0$ et $\theta_{\max} = \pi - (\rho_0^2 - x^2)^{1/2}$ pour $|x| \leq \rho_0$, le nombre total de points angulaires variant linéairement avec θ_{\max} ; pour $\rho < \rho_0$, nous utilisons le jeu de variables (t, ψ) , avec t tronqué à $[t_{\min}, 0]$ et discrétisé avec un pas uniforme dt selon la méthode d'intégration du point milieu, et $\psi \in [0, \pi]$ discrétisé selon la méthode de Gauss-Legendre [70].

Résultats. Le spectre de $M(s=0)$ obtenu numériquement pour le problème à $2+2$ fermions est représenté sur la Fig. 3 [moitié gauche pour les voies de parité $(-1)^\ell$, moitié droite pour les voies de parité $(-1)^{\ell+1}$], pour les premières valeurs $0 \leq \ell \leq 3$ du nombre quantique ℓ du moment cinétique interne à quatre corps, en fonction du rapport de masse $\alpha = \frac{m_\uparrow}{m_\downarrow}$. C'est une fonction symétrique sous l'échange $\alpha \leftrightarrow 1/\alpha$ donc la figure est limitée à $\alpha \geq 1$; comme l'équation intégrale de départ (13) suppose l'inva-

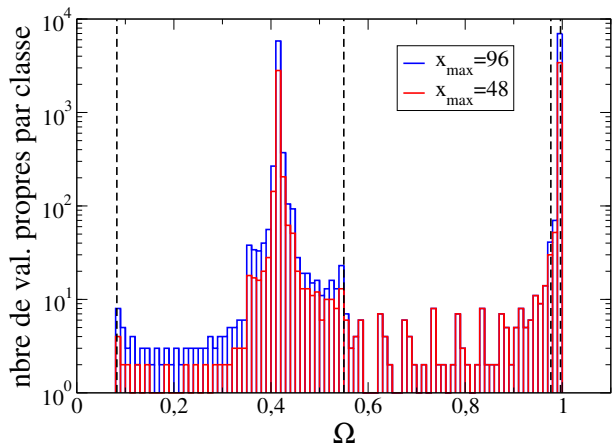


FIGURE 4: Histogramme des valeurs propres Ω de $M(s=0)$ pour un rapport de masse $\alpha = 10$ et un moment cinétique $\ell = 1$ dans les voies de parité $(-1)^{\ell+1}$, obtenu numériquement après discrétisation et troncature des variables x et θ . La grille numérique est la même que sur la Fig. 3, sauf que des valeurs beaucoup plus grandes de $x_{\max} = -x_{\min}$ sont utilisées, pour révéler l'émergence de la partie continue du spectre dans la limite $x_{\max} \rightarrow +\infty$: $x_{\max} = 48$ (barres rouges au premier plan) et $x_{\max} = 96$ (barres bleues en arrière-plan). Les lignes tiretées verticales noires indiquent les bords du spectre continu prédits analytiquement (comme sur la Fig. 3); entre les deux premières et entre les deux dernières, on observe en effet que le nombre de valeurs propres par classe est approximativement multiplié par deux lorsque x_{\max} est doublé. Au contraire, l'histogramme n'est pas affecté par le changement de x_{\max} dans les classes situées strictement entre les deuxième et troisième lignes tiretées, ce qui indique que les valeurs propres correspondantes appartiennent au spectre discret de $M(s=0)$, avec des fonctions propres localisées dans l'espace des x .

riance d'échelle, qui est rompue par l'effet Efimov à trois corps au-delà du seuil $\alpha_c(2;1) = 13,6069\dots$, la figure est également limitée à $\alpha < \alpha_c(2;1)$.

Pour les voies de parité $(-1)^\ell$, le spectre tient entièrement dans les limites du spectre continu prédit analytiquement, qui sont représentées en tiretés, sauf pour ℓ pair dans un petit triangle [71] à peine visible près de $\Omega = 0,75$ avec $1 \leq \alpha \lesssim 1,2$: cela signifie que le spectre numérique, par nature discret, doit tendre vers un continuum lorsque les troncatures $x_{\max} = -x_{\min}$ et t_{\min} tendent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$. Le bord inférieur du continuum est donné pour les ℓ pairs par la limite $k \rightarrow 0$ de l'Eq. (84), c'est-à-dire zéro, et pour les ℓ impairs par la plus petite des deux quantités, $1/\sqrt{2}$ [c'est la limite $k \rightarrow +\infty$ de l'Eq. (84)] et $\Lambda_{L=1}(0, \alpha)$ [c'est la valeur minimale de l'Eq. (81), voir Fig. 2]. Le bord supérieur du continuum est donné, quelle que soit la parité de ℓ , par $\Lambda_{L=0}(0, 1/\alpha)$ [c'est la valeur maximale de l'Eq. (77), voir Fig. 2].

Pour les voies de parité $(-1)^{\ell+1}$, il y a trois différences. Premièrement, le continuum (84) n'existe plus, de sorte que le bord inférieur du spectre continu de $M(s=0)$,

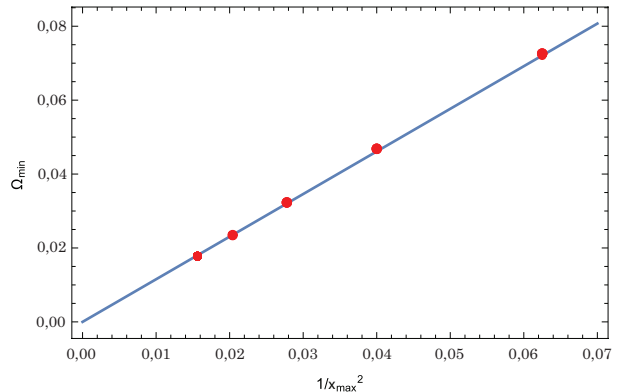


FIGURE 5: Valeur propre minimale Ω_{\min} de $M^{(\ell)}(s=0)$ déterminée numériquement presque au rapport de masse critique à trois corps, $\alpha = 13,6069 \simeq \alpha_c(2;1)$, en fonction de la troncature numérique $t_{\min} = -x_{\max}$. Pour chaque valeur de troncature considérée, chaque moment cinétique ℓ de 0 à 12 et secteur de parité $(-1)^\ell$ et $(-1)^{\ell+1}$ contribue par un point sur la figure : le fait que les points (en rouge) se superposent et ne peuvent être distingués montre que Ω_{\min} ne dépend pas de ℓ ni de la parité. De plus, Ω_{\min} est toujours positif, il est linéaire en $1/x_{\max}^2$ et s'extrapole à zéro pour une troncature infinie (en bleu) : ceci est parfaitement cohérent avec le fait que Ω_{\min} reproduit le bord inférieur $\Lambda_{L=1}(ik, \alpha)$ du continuum $2+1$, où k a une valeur minimale discrète variant comme $1/x_{\max}$ en présence de la troncature numérique, et que $\Lambda_{L=1}(ik, \alpha_c(2;1))$ s'annule quadratiquement en $k=0$. En d'autres termes, il n'y a pas de Ω_{\min} négatif ni d'effet Efimov à quatre corps pour $2+2$ fermions.

maintenant donné par $\Lambda_{L=1}(0, \alpha)$, n'atteint zéro qu'en $\alpha = \alpha_c(2;1)$. Deuxièmement, les continums de $L=0$ dans les équations (77, 81) n'existent plus, de sorte que le bord supérieur du continuum de $M(s=0)$, donné par $\Lambda_{L=2}(0, 1/\alpha)$, est partout en dessous de $1 = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \Lambda_{L=2}(0, 1/\alpha)$. Troisièmement, le continuum présente, dans le plan $\alpha - \Omega$ pour $1,53 \lesssim \alpha$, une grande zone intérieure vide, correspondant à $\Lambda_{L=2}(0, \alpha) < \Omega < \Lambda_{L=1}(0, 1/\alpha)$. Pourtant, de nombreuses valeurs propres trouvées numériquement se trouvent dans cette zone intérieure : ces valeurs propres doivent correspondre au spectre discret de $M(s=0)$, avec des fonctions propres localisées (de carré intégrable) [72]. Nous l'avons vérifié numériquement en calculant la densité d'états de $M(s=0)$, en pratique l'histogramme de ses valeurs propres, pour des valeurs croissantes de la troncature numérique $x_{\max} = -x_{\min}$: en doublant les valeurs de x_{\max} et x_{\min} , l'espacement $\approx \pi/x_{\max}$ entre les valeurs de k successives dans les Eqs. (77,81) est approximativement divisé par deux de sorte que la densité d'états du quasi-continuum numérique est approximativement multipliée par deux, alors que la densité d'états du spectre discret n'est essentiellement pas (seulement exponentiellement faiblement) affectée dès que x_{\max} est beaucoup plus grand que la largeur des fonctions propres localisées dans l'espace des x . C'est ce qui est observé sur la Fig. 4, sachant que les emplacements des bords interne et externe du continuum

(correspondant aux lignes tiretées de la Fig. 3) sont indiqués par des lignes tiretées verticales sur la Fig. 4.

Synthèse. Contrairement au cas $3 + 1$, aucune valeur propre discrète de $M(s = 0)$ (nécessairement discrète car elle se trouverait sous le bord inférieur du continuum) ne croise zéro pour $\alpha < \alpha_c(2; 1) = 13,6069\dots$, c'est-à-dire avant le seuil de l'effet Efimov à trois corps : aucun effet Efimov à quatre corps n'est trouvé pour le problème à $2 + 2$ fermions [73]. Cette conclusion est apparente sur la Fig. 3, obtenue pour tous les nombres quantiques de moment cinétique interne $0 \leq \ell \leq 3$. Elle s'étend à toutes les valeurs de moment cinétique que nous avons pu explorer numériquement, $4 \leq \ell \leq 12$, comme nous l'avons montré avec une analyse spectrale soignée presque exactement au rapport de masse critique à trois corps, $\alpha = 13,6069$, voir Fig. 5.

VI. CONCLUSION

Nous avons étudié à trois dimensions un système à quatre corps à $2 + 2$ fermions avec des interactions résonnantes et nous avons obtenu ses équations intégrales dans l'espace des impulsions à énergie nulle. En utilisant l'invariance par rotation et l'invariance d'échelle, nous les avons réduites à une forme bidimensionnelle traitable numériquement (la fonction inconnue ne dépend que de deux variables). Avec ces équations, nous avons montré numériquement qu'aucun effet Efimov à quatre corps ne se produit pour le système à $2 + 2$ fermions dans les voies de moment cinétique $0 \leq \ell \leq 12$. Le système à $3 + 1$ fermions reste donc le seul connu à présenter un effet Efimov à quatre corps [13].

Un traitement détaillé de la deuxième motivation pour l'obtention de ces équations intégrales, c'est-à-dire le calcul du quatrième coefficient d'amas déjà mesuré [20, 21] b_4 du gaz unitaire de fermions de spin $1/2$, sort du cadre de cet article. Nous avons tout de même obtenu numériquement une estimation de b_4 inspirée de l'expression analytique du troisième coefficient d'amas b_3 [28, 29] : il s'avère que cette estimation ne reproduit pas la valeur expérimentale (voir l'annexe B), de sorte qu'une étude spécifique est nécessaire ; nous la remettons à plus tard.

Remerciements

Nous remercions J. Levinsen et D. Gridnev pour d'utiles discussions. S.E. remercie la Société japonaise pour la promotion de la science (JSPS) pour son soutien. Le groupe de Y.C. est affilié à l'IFRAF.

Annexe A: Le spectre de $M(s)$ est-il borné ?

Dans le secteur de parité $(-1)^\ell$, la troisième contribution dans l'Eq. (69) diverge lorsque $(x, u) \rightarrow (0, -1)$ ou

$(x', u') \rightarrow (0, -1)$. La question est de savoir si cela rend l'opérateur $M(s)$ non borné, pour un $s = iS$ imaginaire pur.

Pour étudier ce problème, nous construisons une fonctionnelle simplifiée qui se concentre sur la partie divergente du noyau matriciel (69), en remplaçant chaque expression de limite non nulle par sa limite, et en remplaçant les expressions de limite nulle par leurs approximations d'ordre dominant (ici quadratiques) :

$$u + \text{ch } x \simeq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \text{ avec } y \equiv \pi - \theta. \quad (\text{A1})$$

En omettant les facteurs numériques et autres contributions bornées (par exemple la partie élevée à la puissance s , de module un), nous obtenons la fonctionnelle moyenne de Ω

$$\langle \Omega \rangle = \frac{\int dx du \int dx' du' \frac{\Phi^*(x, u)\Phi(x', u')}{[(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)]^{1/4}(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2)}}{\int dx du |\Phi(x, u)|^2} \quad (\text{A2})$$

où les intégrales sont prises sur un voisinage de $(x, u) = (0, -1)$. Il est commode d'utiliser l'angle θ plutôt que $u = \cos \theta$ comme variable d'intégration, ce qui fait sortir un jacobien $\sin \theta \simeq y$; nous l'absorbons dans l'intégrale au dénominateur de l'Eq. (A2) avec le changement de fonction

$$\check{\Phi} = (\sin \theta)^{1/2} \Phi(x, u) \quad (\text{A3})$$

Un facteur $(\sin \theta \sin \theta')^{1/2} \simeq (yy')^{1/2}$ reste dans l'intégrande au numérateur. Nous limitons l'intégration sur (x, y) à la moitié supérieure $y > 0$ du disque $x^2 + y^2 < 1$. Il est alors naturel de passer en coordonnées polaires :

$$(x, y) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) \quad (\text{A4})$$

de sorte que $x^2 + y^2 = \rho^2$, $x'^2 + y'^2 = \rho'^2$ et $(yy')^{1/2} = (\rho\rho')^{1/2}(\sin \phi \sin \phi')^{1/2}$. L'apparition des jacobiens ρ et ρ' dans les éléments $\rho d\rho$ et $\rho' d\rho'$ motive le changement de variable dans l'intégration radiale :

$$X = \rho^2 \text{ et } X' = \rho'^2. \quad (\text{A5})$$

Puis, en considérant $\check{\Phi}$ comme une fonction de X et ϕ , on obtient

$$\langle \Omega \rangle = \frac{\int_0^1 \frac{dX dX'}{X+X'} \int_0^\pi d\phi d\phi' (\sin \phi \sin \phi')^{1/2} \check{\Phi}^*(X, \phi) \check{\Phi}(X', \phi')}{2 \int_0^1 dX \int_0^\pi d\phi |\check{\Phi}(X, \phi)|^2} \quad (\text{A6})$$

Pour se débarrasser de l'angle polaire ϕ , on introduit

$$\Phi_a(X) \equiv \int_0^\pi d\phi (\sin \phi)^{1/2} \check{\Phi}(X, \phi) \quad (\text{A7})$$

afin que l'intégrale sur ϕ et ϕ' au numérateur de l'équation (A6) se réduise au produit $\Phi_a^*(X)\Phi_a(X')$. Dans ce numérateur, nous utilisons le fait que le module de l'intégrale sur X et X' est inférieur à l'intégrale du module, et que $\frac{1}{X+X'} \leq \frac{1}{(X^2 + X'^2)^{1/2}}$. Au dénominateur

de l'Eq. (A6), à X fixé, on applique sur l'intervalle $\phi \in [0, \pi]$ l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\langle f|g \rangle|^2 \leq \langle f|f \rangle \langle g|g \rangle$ (en notation de Dirac) avec $f(\phi) = (\sin \phi)^{1/2}$ et $g(\phi) = \check{\Phi}(X, \phi)$; après intégration sur X de l'inégalité qui en résulte, on obtient :

$$\int_0^1 dX |\Phi_a(X)|^2 \leq 2 \int_0^1 dX \int_0^\pi d\phi |\check{\Phi}(X, \phi)|^2 \quad (\text{A8})$$

dont le second membre est le dénominateur de l'Eq. (A6). Nous arrivons à

$$|\langle \Omega \rangle| \leq \frac{\int_0^1 dX \int_0^1 dX' \frac{|\Phi_a(X)| |\Phi_a(X')|}{(X^2 + X'^2)^{1/2}}}{\int_0^1 dX |\Phi_a(X)|^2} \quad (\text{A9})$$

Nous passons à nouveau en coordonnées polaires

$$(X, X') = (r \cos \psi, r \sin \psi) \quad (\text{A10})$$

de manière à simplifier le facteur $\frac{1}{(X^2 + X'^2)^{1/2}} = \frac{1}{r}$ avec le jacobien et obtenir

$$|\langle \Omega \rangle| \leq \frac{\int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^{R(\psi)} dr |\Phi_a(r \cos \psi)| |\Phi_a(r \sin \psi)|}{\int_0^1 dX |\Phi_a(X)|^2} \quad (\text{A11})$$

Le domaine d'intégration sur (X, X') étant le carré $[0, 1]^2$, ψ décrit $[0, \pi/2]$ et, à ψ fixé, r décrit $[0, R(\psi)]$ avec

$$R(\psi) = \min \left(\frac{1}{\cos \psi}, \frac{1}{\sin \psi} \right). \quad (\text{A12})$$

Dans l'intégrale sur r à ψ fixé, nous utilisons à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur l'intervalle $r \in [0, R(\psi)]$ avec $f(r) = |\Phi_a(r \cos \psi)|$ et $g(r) = |\Phi_a(r \sin \psi)|$:

$$\int_0^{R(\psi)} dr |\Phi_a(r \cos \psi)| |\Phi_a(r \sin \psi)| \leq \left[\int_0^{R(\psi)} dr |\Phi_a(r \cos \psi)|^2 \right]^{1/2} \left[\int_0^{R(\psi)} dr |\Phi_a(r \sin \psi)|^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A13})$$

Dans le premier facteur au second membre de l'Eq. (A13), nous effectuons le changement de variable $X = r \cos \psi$, de sorte que

$$\int_0^{R(\psi)} dr |\Phi_a(r \cos \psi)|^2 = \frac{1}{\cos \psi} \int_0^{R(\psi) \cos \psi} dX |\Phi_a(X)|^2 \leq \frac{1}{\cos \psi} \int_0^1 dX |\Phi_a(X)|^2 \quad (\text{A14})$$

où nous avons utilisé $R(\psi) \cos \psi \leq 1$ et la positivité de $|\Phi_a|^2$. La dernière intégrale de l'équation (A14) n'est rien d'autre que le dénominateur du second membre de l'équation (A11)! Nous procédons de la même

manière pour le deuxième facteur au second membre de l'Eq. (A13), si ce n'est que $\cos \psi$ est remplacé par $\sin \psi$. Enfin, le dénominateur de l'Eq. (A11) se simplifie, de sorte que

$$|\langle \Omega \rangle| \leq \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{(\cos \psi \sin \psi)^{1/2}} < +\infty \quad (\text{A15})$$

et le spectre de $M(s)$ est borné, lorsque $s \in i\mathbb{R}$.

Annexe B: Énoncer et tester une conjecture sur b_4

1. Le développement en amas

Considérons un gaz de fermions de spin 1/2 spatialement uniforme à l'équilibre thermique dans l'ensemble grand canonique à la limite thermodynamique, à la température T , et avec un potentiel chimique μ commun aux deux états internes puisque le gaz est non polarisé. Le développement bien connu en amas est un développement en série de la pression en puissances de la fugacité $z = \exp(\beta\mu)$ dans la limite non dégénérée $\mu \rightarrow -\infty$ pour une température T fixée, avec $\beta = 1/(k_B T)$ [45]. Pour notre gaz, on l'écrit en général comme

$$\frac{P\lambda^3}{k_B T} = 2 \sum_{n \geq 1} b_n z^n \quad (\text{B1})$$

où le facteur 2 global représente le nombre de composantes de spin et λ est la longueur d'onde thermique de de Broglie

$$\lambda = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right)^{1/2} \quad (\text{B2})$$

Lorsqu'il est redéveloppé en puissances du petit paramètre de dégénérescence $\rho\lambda^3$, où ρ est la densité totale, le développement en amas donne lieu au développement du viriel avec des coefficients du viriel a_n [45]. En pratique, on considère plutôt l'écart Δb_n de b_n à sa valeur pour le gaz parfait de fermions, c'est-à-dire (pour $n > 1$) au simple effet de la statistique de Fermi :

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{5/2}} + \Delta b_n \quad (\text{B3})$$

Alors que le développement en amas a été étudiée depuis longtemps et que le second coefficient d'amas b_2 a été obtenu analytiquement dans la référence [46] ($b_1 = 1$ d'après la loi du gaz parfait), il y a un regain d'intérêt pour les coefficients d'amas d'ordre $n > 2$. Tout d'abord, le nouveau défi consiste à calculer les b_n pour une interaction résonnante dans l'onde s (avec une longueur de diffusion a beaucoup plus grande en valeur absolue que la portée de l'interaction), alors que les études précédentes se concentraient sur le modèle d'une interaction de sphère dure [47]. Deuxièmement, dans la limite

unitaire, les coefficients b_n ont été extraits jusqu'à l'ordre $n = 4$ d'une mesure de l'équation d'état des gaz d'atomes froids fermioniques [20, 21]. Les valeurs du quatrième coefficient d'amas obtenues indépendamment par ces deux références sont en accord :

$$\Delta b_4^{\text{ENS}} = 0,096(15) \quad \text{et} \quad \Delta b_4^{\text{MIT}} = 0,096(10) \quad (\text{B4})$$

2. Dans la limite unitaire

Pour des interactions de portée nulle avec une longueur de diffusion dans l'onde s infinie $a^{-1} = 0$, c'est-à-dire dans la limite unitaire, la méthode du régulateur harmonique utilisée dans [25], qui introduit un potentiel de piégeage harmonique isotrope, est assez efficace, en raison de la symétrie dynamique $\text{SO}(2,1)$ résultant de l'invariance d'échelle [33, 48] et de la séparabilité subséquente de l'équation de Schrödinger en coordonnées hypersphériques [32, 38] dans le piège. La valeur de b_n peut être déduite des fonctions de partition canoniques, c'est-à-dire des spectres d'énergie, de tous les problèmes possibles à k corps dans le piège, avec $k \leq n$. On obtient le développement suivant du grand potentiel Ω du gaz à l'équilibre thermique dans le piège :

$$\frac{-\Omega}{k_B T Z_1} = \sum_{(n_\uparrow, n_\downarrow) \in \mathbb{N}^{2^*}} B_{n_\uparrow, n_\downarrow}(\omega) z_\uparrow^{n_\uparrow} z_\downarrow^{n_\downarrow} \quad (\text{B5})$$

où Z_1 est la fonction de partition canonique pour une particule piégée, et il est commode à ce stade d'être général et d'introduire des potentiels chimiques indépendants μ_σ pour les différentes composantes de spin σ , de sorte que $z_\sigma = \exp(\beta\mu_\sigma)$. Ensuite, à partir de l'approximation d'homogénéité locale asymptotiquement exacte [26] (voir également [25]), et en introduisant également les écarts $\Delta B_{n_\uparrow, n_\downarrow}(\omega)$ de $B_{n_\uparrow, n_\downarrow}(\omega)$ à leurs valeurs [74] dans le gaz parfait de fermions, on obtient

$$2\Delta b_n = n^{3/2} \sum_{n_\uparrow=1}^{n-1} \Delta B_{n_\uparrow, n_\downarrow=n-n_\uparrow}(0^+) \quad (\text{B6})$$

où $\Delta B(0^+) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \Delta B(\omega)$ et où nous avons pu restreindre la somme à $n_\sigma \neq 0$, $\sigma = \uparrow, \downarrow$, puisque les configurations entièrement polarisées n'interagissent pas et ont des écarts nuls au gaz parfait.

Pour $n = 3$, en étendant aux fermions la technique initialement développée pour les bosons [28], l'expression analytique suivante a été obtenue [29] [75] :

$$\Delta B_{2,1}(0^+) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \int_0^{+\infty} \frac{dS}{\pi} S \frac{d}{dS} [\ln \Lambda_\ell(iS, \alpha)] \quad (\text{B7})$$

où la fonction Λ_ℓ est donnée par l'Eq. (78), et le rapport de masse entre les composantes de spins opposés α est égal à un (si bien que $\Delta B_{2,1} = \Delta B_{1,2}$). Ceci donne

$$\Delta b_3 \simeq -0,355103 \quad (\text{B8})$$

en accord avec les études numériques antérieures [26, 27] et les valeurs expérimentales [20].

Pour $n = 4$, le problème reste ouvert. Une tentative numérique [30], avec calcul direct du spectre d'énergie à 4 corps à la limite unitaire dans le piège, a donné la valeur

$$\Delta b_4^{\text{Blume}} = -0,016(4) \quad (\text{B9})$$

Le désaccord avec les résultats expérimentaux (B4) est attribué aux incertitudes dans l'extrapolation à $\omega \rightarrow 0$ des valeurs numériques de $\Delta B_{n_\uparrow, n_\downarrow}(\omega)$, en pratique accessibles seulement pour $\hbar\omega \gtrsim k_B T$. Une théorie diagrammatique approchée [24] (gardant même dans la limite unitaire seulement les diagrammes qui ont une contribution dominante dans le régime perturbatif d'une grande portée effective ou d'une petite longueur de diffusion) donne une estimation plus proche des valeurs expérimentales (B4),

$$\Delta b_4^{\text{Levinson}} \approx 0,06 \quad (\text{B10})$$

L'extension de la méthode analytique de la référence [28] au problème à quatre corps fermionique est techniquement difficile et sort du cadre du présent travail. Au contraire, il est raisonnable ici de proposer et de tester une transposition heuristique directe de l'Eq. (B7) : la fonction transcendante $\Lambda_\ell(s)$ du problème à trois corps est formellement remplacée par $\det M^{(\ell)}(s)$ pour le problème à quatre corps, où \det est le déterminant et l'opérateur $M^{(\ell)}(s)$, agissant sur les fonctions spinorielles $\Phi_{m_z}^{(\ell)}(x, u)$ comme au second membre de l'Eq. (68), a été introduit et discuté spectralement dans la section IV B pour le problème à 2 + 2 fermions, et a une expression correspondante connue pour le problème à 3 + 1 fermions, voir l'Eq. (14) de la référence [13]. En effet, dans les deux cas, les exposants d'échelle s (imaginaires purs dans les voies efimoviennes, réels sinon) autorisés par l'équation de Schrödinger dans le modèle de Wigner-Bethe-Peierls à la limite unitaire sont tels que $\Lambda_\ell(s) = 0$ pour $n = 3$, ou tels que l'Eq. (68) a une solution non nulle $\Phi_{m_z}^{(\ell)}(x, u)$, c'est-à-dire $M^{(\ell)}(s)$ admet une valeur propre nulle. D'où notre conjecture :

$$\Delta B_{n_\uparrow, n_\downarrow}^{\text{conj}}(0^+) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \times \int_0^{+\infty} \frac{dS}{\pi} S \frac{d}{dS} [\ln \det M_{n_\uparrow, n_\downarrow}^{(\ell)}(iS)] \quad (\text{B11})$$

avec $(n_\uparrow, n_\downarrow) \in \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ et $M_{n_\uparrow, n_\downarrow}^{(\ell)}$ est l'opérateur $M^{(\ell)}$ pour le problème à quatre corps avec n_σ particules dans chaque composante de spin σ .

3. Existence de la dérivée logarithmique du déterminant

La conjecture (B11) n'est pas aussi innocente qu'il y paraît à première vue. La difficulté est que $M^{(\ell)}$ est en

fait un opérateur, et non une matrice de taille finie : il admet un spectre continu, constituant un ensemble infini et dense de “valeurs propres” ; même son spectre discret peut présenter des points d’accumulation, conduisant à un nombre infini mais dénombrable de valeurs propres. En d’autres termes, le déterminant de $M^{(\ell)}(iS)$ n’est pas fini. Numériquement, comme nous l’avons déjà fait dans la section V, on tronque bien sûr la variable non bornée x à l’intervalle compact $[-x_{\max}, x_{\max}]$, ce qui revient à imposer les conditions aux limites sur le spineur :

$$\Phi_{m_z}^{(\ell)}(x = \pm x_{\max}, u) = 0 \quad \forall u \in [-1, 1], \forall m_z \in \{-\ell, \dots, \ell\} \quad (\text{B12})$$

Après discrétisation des variables x et u , $M^{(\ell)}(iS)$ est alors remplacé par une matrice, avec un déterminant bien défini ; il reste encore à savoir s’il y a convergence de l’intégrande vers une limite finie dans l’Eq. (B11) lorsque $x_{\max} \rightarrow +\infty$. Comme nous le voyons maintenant, la réponse est positive.

Le point clé est que ce qui apparaît dans l’intégrande de l’Eq. (B11) n’est pas le déterminant lui-même, mais plutôt sa dérivée logarithmique, qui peut être écrite comme

$$\frac{d}{dS} \ln \det M^{(\ell)}(iS) = \text{Tr} \left\{ [M^{(\ell)}(iS)]^{-1} \frac{d}{dS} M^{(\ell)}(iS) \right\} \quad (\text{B13})$$

où Tr est la trace et M^{-1} l’inverse de M .

Parité $(-1)^{\ell+1}$: dans le secteur de parité $(-1)^{\ell+1}$, le spectre de $M^{(\ell)}(iS)$ est à une distance non nulle de 0 pour un rapport de masse $\alpha = 1$, car il n’y a pas d’effet Efimov à 4 corps, voir la Fig. 3. L’inverse de $M^{(\ell)}(iS)$ est donc bien défini. De plus, l’opérateur $M^{(\ell)}(iS)$ est local dans la base des x , au sens où les éléments de matrice hors de la diagonale de l’opérateur $\mathcal{D}^{-1/2} K^{(\ell)} \mathcal{D}^{-1/2}$ sont des fonctions à décroissance rapide de $|x - x'|$, par exemple il existe une constante $A^{(\ell)}$ telle que

$$\frac{|\langle x, u, \ell, m_z | K^{(\ell)}(iS) | x', u', \ell, m'_z \rangle|}{[d(x, u)d(x', u')]^{1/2}} \leq \frac{A^{(\ell)}}{\text{ch}(x - x')} \quad (\text{B14})$$

pour tous les x, x', u, u' et tous les m_z, m'_z de parité opposée à ℓ , et pour tout $S \in \mathbb{R}$. Ici, nous avons utilisé la notation de Dirac et distingué comme dans l’Eq. (68) une partie diagonale et une partie noyau,

$$M^{(\ell)}(iS) = \mathcal{D} + K^{(\ell)}(iS) \quad (\text{B15})$$

où l’opérateur \mathcal{D} est positif et défini par la fonction élément diagonal $d(x, u)$,

$$\mathcal{D}|x, u, \ell, m_z\rangle = d(x, u)|x, u, \ell, m_z\rangle \quad \text{avec}$$

$$d(x, u) = \left[\frac{\alpha}{(1 + \alpha)^2} \left(1 + \frac{u}{\text{ch } x} \right) + \frac{e^{-x} + \alpha e^x}{2(\alpha + 1) \text{ch } x} \right]^{1/2} \quad (\text{B16})$$

Cette localité est apparente pour les deux premières contributions du second membre de l’Eq. (69) : chaque contribution est bornée, et est en accord avec l’Eq. (B14)

aux quatre infinis $(x, x') = (\pm\infty, \pm\infty)$ (voir le raisonnement dans la section IV B). Nous nous attendons alors à ce que l’inverse de $M^{(\ell)}(iS)$, qui peut être écrit comme

$$[M^{(\ell)}(iS)]^{-1} = \mathcal{D}^{-1} + K_{\text{inv}}^{(\ell)}(iS) \quad (\text{B17})$$

soit aussi local, à partir du développement en série géométrique :

$$\begin{aligned} (\mathcal{D} + K)^{-1} &= \mathcal{D}^{-1/2} (\mathbb{1} + \mathcal{D}^{-1/2} K \mathcal{D}^{-1/2})^{-1} \mathcal{D}^{-1/2} \\ &= \mathcal{D}^{-1} + \mathcal{D}^{-1/2} \sum_{n \geq 1} (-1)^n (\mathcal{D}^{-1/2} K \mathcal{D}^{-1/2})^n \mathcal{D}^{-1/2} \end{aligned} \quad (\text{B18})$$

chaque terme de la série étant local (pour simplifier, nous omettons d’écrire l’exposant (ℓ) et l’argument iS). Ceci est bien sûr valable si l’opérateur $\mathcal{D}^{-1/2} K \mathcal{D}^{-1/2}$ est suffisamment petit. Pour $\ell = 1$ dans le problème à 2 + 2 fermions, ceci peut être rendu rigoureux : la meilleure constante dans l’Eq. (B14) est

$$A = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{3\pi} \simeq 0,05686 \quad (\text{B19})$$

Alors [76]

$$\begin{aligned} \frac{|\langle x, u, \ell = 1, m_z = 0 | K_{\text{inv}}^{(\ell=1)}(iS) | x', u', \ell = 1, m'_z = 0 \rangle|}{[d(x, u)d(x', u')]^{-1/2}} &\leq \\ \frac{2A}{\sqrt{1 - (2\pi A)^2}} \frac{\text{sh}\left(\frac{2\delta}{\pi}|x - x'|\right)}{\text{sh}(2|x - x'|)} & \quad (\text{B20}) \end{aligned}$$

avec $\delta = \arccos(-2\pi A) \in]\pi/2, \pi[$.

Cette localité n’est en elle-même pas suffisante pour assurer la convergence de la trace dans l’Eq. (B13). En rendant la trace explicite dans cette équation et en injectant une relation de fermeture, on aboutit à l’écriture

$$\begin{aligned} \frac{d}{dS} \ln \det M^{(\ell)}(iS) &= \int_{\mathbb{R}} dx dx' \int_{-1}^1 du du' \sum_{m_z, m'_z} (-1)^{\ell+1} \\ &\langle x, u, \ell, m_z | [M^{(\ell)}(iS)]^{-1} | x', u', \ell, m'_z \rangle \\ &\times \langle x', u', \ell, m'_z | \frac{d}{dS} M^{(\ell)}(iS) | x, u, \ell, m_z \rangle \end{aligned} \quad (\text{B21})$$

où la somme est restreinte à m_z et m'_z de parité opposée à celle de ℓ comme l’indique l’exposant $(-1)^{\ell+1}$. La localité de $M(iS)^{-1}$, et même de $\frac{d}{dS} M(iS)$, limite exponentiellement l’excursion de $|x - x'|$ dans l’intégrale sur x' , mais il reste encore l’intégrale sur la variable non bornée x . Il faut profiter de la structure de $K(iS)$ et de sa dérivée : en décomposant

$$K(iS) = K_1(iS) + K_2(iS), \quad (\text{B22})$$

où K_1 et K_2 correspondent respectivement au premier terme et au second terme du second membre de l’Eq. (69), on trouve

$$\frac{d}{dS} K(iS) = i[D_1, K_1(iS)] + i[D_2, K_2(iS)] \quad (\text{B23})$$

où $[A, B] = AB - BA$ est le commutateur de deux opérateurs et les opérateurs diagonaux D_j sont définis par les fonctions diagonales suivantes

$$d_1(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{e^{+x}}{2 \operatorname{ch} x} \quad (\text{B24})$$

$$d_2(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{e^{-x}}{2 \operatorname{ch} x} \quad (\text{B25})$$

telles que

$$D_j |x, u, \ell, m_z\rangle = d_j(x) |x, u, \ell, m_z\rangle \quad (\text{B26})$$

Il est clair que le terme diagonal \mathcal{D}^{-1} dans M^{-1} , voir l'Eq. (B17), a une contribution nulle à la trace, puisque $[\mathcal{D}, D_j] = 0$. L'équation (B21) est réécrite en conséquence comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dS} \ln \det M^{(\ell)}(iS) &= \int_{\mathbb{R}} dx dx' \int_{-1}^1 du du' \sum_{m_z, m'_z}^{(-1)^{\ell+1}} \\ &\langle x, u, \ell, m_z | K_{\text{inv}}^{(\ell)}(iS) | x', u', \ell, m'_z \rangle \\ &\times \sum_{j=1}^2 i [d_j(x') - d_j(x)] \langle x', u', \ell, m'_z | K_j^{(\ell)}(iS) | x, u, \ell, m_z \rangle \end{aligned} \quad (\text{B27})$$

Alors $d_1(x)$ tend exponentiellement rapidement vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$, mais diverge linéairement avec x lorsque $x \rightarrow -\infty$; le contraire est vrai pour $d_2(x)$. Une deuxième propriété est qu'il existe une constante B telle que

$$\begin{aligned} |\langle x, u, \ell, m_z | K_1(iS) | x', u', \ell, m'_z \rangle| &\leq \\ &\left(\frac{e^{+x+x'}}{4 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} x'} \right)^{1/4} \frac{B}{\operatorname{ch}(x-x')} \end{aligned} \quad (\text{B28})$$

$$\begin{aligned} |\langle x, u, \ell, m_z | K_2(iS) | x', u', \ell, m'_z \rangle| &\leq \\ &\left(\frac{e^{-x-x'}}{4 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} x'} \right)^{1/4} \frac{B}{\operatorname{ch}(x-x')} \end{aligned} \quad (\text{B29})$$

Ceci est dû au fait, évident sur les équations (59,60), que le dénominateur de l'intégrale sur ϕ dans l'équation (69) est toujours plus grand que $(\mu_{\uparrow\downarrow}/m_{\uparrow}) \operatorname{ch}(x-x')$. Ensuite, pour $|x-x'| = O(1)$, le majorant des éléments de la matrice de K_1 (respectivement K_2) tend exponentiellement vite vers 0 quand $x \rightarrow -\infty$ (respectivement $x \rightarrow +\infty$), à cause du premier facteur dans les Eqs. (B28,B29), ce qui écrase la divergence linéaire de $d_1(x)$ (respectivement $d_2(x)$). Alors l'intégrale sur x et x' dans la trace converge exponentiellement rapidement à l'infini, la dérivée logarithmique du déterminant de $M^{(\ell)}(iS)$ dans le secteur de parité $(-1)^{\ell+1}$ est bien définie [77] et sa valeur peut être calculée avec une erreur décroissant rapidement avec la troncature x_{\max} quand $x_{\max} \rightarrow +\infty$. Les résultats

numériques confirment cette conclusion et indiquent que la valeur étonnamment faible $x_{\max} = 5$ est suffisante.

Parité $(-1)^\ell$. La situation est physiquement très différente dans le secteur de parité $(-1)^\ell$, du moins pour ℓ pair : la troisième contribution dans l'Eq. (69) est non nulle, et elle conduit à une partie continue dans le spectre de $M^{(\ell)}(iS)$ qui atteint zéro pour ℓ pair, voir l'Eq. (84). Alors le spectre de l'inverse $[M^{(\ell)}(iS)]^{-1}$ n'est plus borné, et ses éléments de matrice ne sont pas bornés même si on utilise la représentation optimale (t, ψ) dans laquelle les éléments de matrice de $M^{(\ell)}(iS)$ sont bornés, voir l'Eq. (92), lorsque la troncature inférieure t_{\min} sur la variable t tend vers $-\infty$. Alors, comme nous le verrons, il n'y a pas de localité exponentielle dans la base t , mais la dérivée logarithmique du déterminant de $M^{(\ell)}(iS)$ a une limite finie lorsque $t_{\min} \rightarrow -\infty$, qui est approchée avec une erreur tendant vers zéro linéairement en $1/t_{\min}$.

Pour établir cette propriété, une analyse spectrale ou dans l'“espace de Fourier” est plus appropriée que l'analyse dans l'espace “réel” du cas de parité précédent. Après le changement de jauge et le changement de fonctions effectués dans les Eqs. (86,89,91), la partie asymptotique $t \rightarrow -\infty$ des états propres de $M^{(\ell)}(iS)$ du continuum (84) peut être écrite comme

$$\phi_k(t) = e^{ikt} - e^{i\theta(k,S)} e^{-ikt}, \quad k > 0 \quad (\text{B30})$$

voir Fig. 6. Les ondes planes e^{ikt} et e^{-ikt} sont en effet deux solutions linéairement indépendantes du problème aux valeurs propres (92) avec

$$\Omega = \Omega_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{ch}(k\pi/2)} \right] \quad (\text{B31})$$

[voir l'Eq. (84), ici ℓ est pair]. La bonne solution est une superposition particulière de ces deux solutions dégénérées, avec une amplitude relative déterminée par la physique en $t = O(1)$, c'est-à-dire pour (x, u) pas extrêmement proche de $(0, -1)$. Analytiquement la valeur de cette amplitude relative est une fonction inconnue de k et S , mais nous savons qu'elle doit être de module un, de sorte que nous pouvons l'exprimer comme dans l'Eq. (B30) en termes d'un simple déphasage $\theta(k, S) \in \mathbb{R}$: (i) l'“hamiltonien” $M^{(\ell)}(iS)$ du spineur est hermitien, donc l'opérateur d'évolution correspondant est unitaire et conserve la probabilité, (ii) le troisième continuum (84) n'est pas dégénéré avec les autres continums pour le rapport de masse considéré $\alpha = 1$, donc l'onde e^{ikt} entrante venant de $t = -\infty$ n'a pas de voie pour s'échapper et doit ressortir entièrement par la voie entrante.

La propriété clé que nous utiliserons est que, comme il est courant dans les problèmes de diffusion unidimensionnelle, le déphasage $\theta(k, S)$ tend vers zéro linéairement à faible k :

$$\theta(k, S) \underset{k \rightarrow 0}{=} kb(S) + o(k) \quad (\text{B32})$$

où $b(S)$ est une longueur de diffusion effective dépendant de S . Nous présentons deux arguments plausibles pour

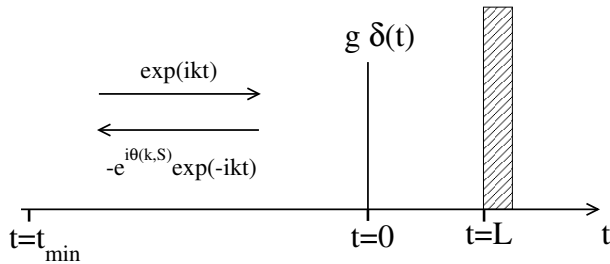


FIGURE 6: Diagramme donnant la structure des états propres du troisième continuum (84), en termes de la variable t de l'Eq. (91) : $k > 0$ est le vecteur d'onde de l'onde entrante, $-k$ celui de l'onde réfléchie avec un déphasage $\theta(k, S)$. La réflexion due à la physique en $t = O(1)$ est, dans un modèle jouet, représentée par un potentiel de diffusion de Dirac en $t = 0$ et un mur infini agissant comme un miroir en $t = L$; le modèle jouet justifie, en le reproduisant, le comportement attendu (B32) de $\theta(k, S)$ à faible k .

l'établir. Le premier argument résulte de l'hypothèse que l'écriture (B30) peut être étendue de manière lisse de $k > 0$ à $k < 0$: ceci implique que si l'on remplace directement k par $-k$ dans l'Eq. (B30), l'onde résultante $t \mapsto e^{-ikt} - e^{i\theta(-k,S)} e^{ikt}$ doit reproduire la solution physique $e^{ikt} - e^{i\theta(k,S)} e^{-ikt}$ à un facteur de phase global près, de sorte que $e^{i\theta(k,S)} = e^{-i\theta(-k,S)}$ et il existe un entier q tel que

$$-\theta(-k, S) = \theta(k, S) + 2q\pi \quad (\text{B33})$$

Le fait que, à une dimension, les ondes d'énergie arbitrairement faible sont génériquement entièrement rétroréfléchies (peu importe à quel point le potentiel de diffusion est faible, pourvu qu'il soit non nul) conduit à $\theta(k, S) \rightarrow 0$ pour $k \rightarrow 0$ et à $q = 0$ dans l'Eq. (B33); alors si $\theta(k, S)$ est une fonction lisse de k , l'équation (B32) s'applique. Le deuxième argument utilise un certain modèle pour le potentiel de diffusion dans la région $t = O(1)$, en introduisant à dessein les potentiels les plus singuliers, voir Fig. 6 : un centre de diffusion ponctuel fixe de constante de couplage $g = \hbar^2/(2m_{\text{eff}}a)$ placé en $t = 0$ à une distance L d'un mur infini (le deuxième élément agit comme un miroir et assure que l'onde est entièrement réfléchie à toutes les énergies). À faible k , la relation de dispersion Ω_k peut être quadratisée, $\Omega_k \approx \hbar^2 k^2/(2m_{\text{eff}})$ avec $m_{\text{eff}} > 0$, conduisant à une équation de Schrödinger effective et à un problème de diffusion, de sorte qu'à S fixé,

$$e^{i\theta(k)} = \frac{(ka)^{-1} + (\tan kL)^{-1} + i}{(ka)^{-1} + (\tan kL)^{-1} - i} \quad (\text{B34})$$

Le déphasage $\theta(k, S)$ est donc effectivement une fonction impaire de k , et à faible k on obtient bien la loi linéaire (B32) avec $2/b(S) = 1/a(S) + 1/L(S)$.

Ensuite, la propriété (B32) permet de conclure que la dérivée logarithmique du déterminant de $M^{(\ell)}(iS)$ a une limite finie lorsque la troncature inférieure t_{\min} tend vers $-\infty$, comme nous le voyons maintenant. De

même que pour l'Eq. (B12), l'existence de cette troncature inférieure correspond à la condition aux limites

$$\phi(t_{\min}) = 0 \quad (\text{B35})$$

ce qui, au vu de l'équation (B30), conduit à la condition de quantification de k [78] :

$$2k|t_{\min}| + \theta(k, S) = 2n\pi, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (\text{B36})$$

Alors la contribution des valeurs propres correspondantes à la dérivée logarithmique du déterminant est

$$\frac{d}{dS} \ln \det M^{(\ell)}(iS)|_{\odot} = \sum_{n>0} \frac{d}{dS} \ln \Omega_k = \sum_{n>0} \Omega_k^{-1} \frac{d\Omega_k}{dk} \frac{dk}{dS} \quad (\text{B37})$$

En prenant la dérivée de l'Eq. (B36) par rapport à S à n fixé, on obtient

$$\frac{dk}{dS} = -\frac{\partial_S \theta(k, S)}{2|t_{\min}| + \partial_k \theta(k, S)} \quad (\text{B38})$$

Dans la limite d'un grand $|t_{\min}|$, on peut négliger $\partial_k \theta(k, S)$ au dénominateur et on peut remplacer dans l'Eq. (B37) la somme sur n par une intégrale $\int dn$. D'après l'Eq. (B36),

$$2 \frac{dk}{dn} |t_{\min}| \xrightarrow{t_{\min} \rightarrow -\infty} 2\pi \quad (\text{B39})$$

donc

$$\frac{d}{dS} \ln \det M^{(\ell)}(iS)|_{\odot} \xrightarrow{t_{\min} \rightarrow -\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\Omega_k} \frac{d\Omega_k}{dk} \partial_S \theta(k, S) \quad (\text{B40})$$

Cette intégrale est finie même si Ω_k s'annule quadratiquement en $k = 0$, c'est-à-dire qu'elle échappe à la divergence logarithmique naïvement attendue, car le déphasage $\theta(k, S)$, et donc sa dérivée par rapport à S , s'annulent linéairement en k .

Ce point central étant établi, il reste un problème pratique, la vitesse de convergence avec $|t_{\min}|$. La réponse est fournie par la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(\lambda n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n/\lambda) \quad (\text{B41})$$

pour tout $\lambda > 0$ et pour une fonction arbitraire $f(k)$, $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} dk \exp(-ikx) f(k)$ étant sa transformée de Fourier. Pour simplifier, nous donnons des détails dans le cas où $\theta(k, S)$ est linéaire en k pour tout k , c'est-à-dire $\theta(k, S) = kb(S)$. D'après la condition de quantification (B36), on a

$$k = \lambda n \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{2\pi}{2|t_{\min}| + b(S)} \quad (\text{B42})$$

de sorte que

$$\frac{dk}{dS} = -\frac{db(S)}{dS} \frac{\lambda}{2\pi} k \quad (\text{B43})$$

Ceci, avec les Eqs. (B37), conduit à une fonction f donnée par

$$f(k) = \frac{k \frac{db(S)}{dS}}{\Omega_k} \frac{d\Omega_k}{dk} \quad (\text{B44})$$

telle que

$$\frac{d}{dS} \ln \det M^{(\ell)}(iS)|_{\odot} = -\frac{\lambda}{2\pi} \sum_{n>0} f(\lambda n) \quad (\text{B45})$$

Puis, en utilisant le fait que la fonction f est paire, on peut exprimer la somme sur \mathbb{N}^* en termes de la somme sur \mathbb{Z} , puis en termes de $f(0)$ et \hat{f} :

$$\begin{aligned} \sum_{n>0} f(\lambda n) &= -\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(\lambda n) \\ &= -\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2\lambda} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n/\lambda) \end{aligned} \quad (\text{B46})$$

La fonction f est une fonction lisse de k , en particulier en $k = 0$, qui décroît rapidement à l'infini, de sorte que sa transformée de Fourier $\hat{f}(q)$ est également à décroissance rapide lorsque $|q| \rightarrow +\infty$. Dans la limite d'un grand $|t_{\min}|$, $1/\lambda$ diverge linéairement en $|t_{\min}|$ et on commet une erreur exponentiellement petite $O[\exp(-C|t_{\min}|)]$ (C est une constante) en négligeant les termes $n \neq 0$ dans la dernière somme sur n dans l'Eq. (B46). Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dS} \ln \det M^{(\ell)}(iS)|_{\odot} \Big|_{t_{\min} \rightarrow -\infty} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} dk \frac{k \frac{db(S)}{dS}}{\Omega_k} \frac{d\Omega_k}{dk} \\ &+ \frac{\frac{db(S)}{dS}}{2|t_{\min}| + b(S)} + O[\exp(-C|t_{\min}|)] \end{aligned} \quad (\text{B47})$$

où nous avons remplacé λ , $f(0)$ et $\hat{f}(0)$ par leurs valeurs explicites. Lorsque $\theta(k, S)$ n'est pas une fonction linéaire de k , on obtient le résultat général

$$\begin{aligned} \frac{d}{dS} \ln \det M^{(\ell)}(iS)|_{\odot} \Big|_{t_{\min} \rightarrow -\infty} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} dk \frac{\partial_S \theta(k, S)}{\Omega_k} \frac{d\Omega_k}{dk} \\ &+ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \frac{d\Omega_k}{dk} \partial_S \theta(k, S)}{\Omega_k [2|t_{\min}| + \partial_k \theta(k, S)]} + O[\exp(-C|t_{\min}|)] \end{aligned} \quad (\text{B48})$$

Dans tous les cas, lorsque $t_{\min} \rightarrow -\infty$, la valeur limite de la dérivée logarithmique du déterminant de $M^{(\ell)}(iS)$ est approchée avec une erreur qui ne tend vers zéro que polynomialement en $1/t_{\min}$ [79].

Au contraire, si la relation de dispersion Ω_k ne tend nulle part vers zéro, comme pour un ℓ impair dans le secteur de parité $(-1)^\ell$, le terme $\lim_{k \rightarrow 0}$ du second membre de l'Eq. (B48) est nul et la convergence de la dérivée logarithmique du déterminant est exponentiellement rapide avec $|t_{\min}|$, comme cela a également été observé numériquement; cette dernière situation est alors similaire à la convergence exponentiellement rapide de $\frac{d}{dS} \ln \det M^{(\ell)}(iS)$ lorsque $x_{\max} \rightarrow +\infty$, qui est toujours réalisée pour les continus (77,81), même lorsque le troisième terme dans l'Eq. (69) est non nul.

4. Autres problèmes de convergence

Pour montrer que les valeurs conjecturées (B11) sont finies, il faut également vérifier que l'intégrale sur S est convergente à l'infini, et que la somme sur les moments cinétiques ℓ est convergente. C'est ce que nous avons d'abord exploré numériquement. Premièrement, à un moment cinétique donné ℓ , nous avons trouvé que la dérivée logarithmique du déterminant de $M^{(\ell)}(iS)$ décroît rapidement lorsque $S \rightarrow +\infty$, vraisemblablement de façon exponentielle, voir Fig. 7(a). Deuxièmement, après intégration sur S , on observe également une convergence rapide de la somme sur ℓ , voir Fig. 7(b), si l'on prend la précaution d'être suffisamment précis dans la discrétisation de l'intégrale sur u [80].

Ces résultats numériques suggèrent que la contribution de moment cinétique ℓ à $\Delta B_{2,2}^{\text{conj}}(0^+)$ et à $\Delta B_{3,1}^{\text{conj}}(0^+)$ peut être obtenue, lorsque ℓ est assez grand, à partir d'un calcul perturbatif dans l'Eq. (B13), limité à l'ordre dominant dans les opérateurs $K_j^{(\ell)}$ définis par les Eq. (B15, B22), au moins pour le problème 2+2 dans le secteur de parité $(-1)^{\ell+1}$ où K_{inv} dans l'Eq. (B17) a une chance d'être borné. Cette idée a été mise en œuvre avec succès au niveau des trois corps dans la référence [28], en traitant le terme intégral dans l'Eq. (78) comme une perturbation du terme constant [81].

Appliquons cette idée au problème 2+2, dans le secteur de parité $(-1)^{\ell+1}$ du sous-espace de moment cinétique ℓ . Nous tronquons l'Eq. (B18) à l'ordre un en l'opérateur K , pour obtenir

$$\frac{d}{dS} \ln \det M \simeq \text{Tr} \left[(\mathcal{D}^{-1} - \mathcal{D}^{-1} K \mathcal{D}^{-1}) \frac{d}{dS} K \right] \quad (\text{B49})$$

Puis nous décomposons K comme dans l'Eq. (B22) et nous utilisons la structure de commutateur (B23). En utilisant l'invariance de la trace dans une permutation circulaire et le fait que les opérateurs diagonaux \mathcal{D} de l'Eq. (B16) et D_j de l'Eq. (B26) commutent, nous trouvons que seules les contributions quadratiques croisées dans K_1 et K_2 survivent, de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dS} \ln \det M &\simeq \text{Tr} \left[-\mathcal{D}^{-1} K_1 \mathcal{D}^{-1} \frac{d}{dS} K_2 - (1 \leftrightarrow 2) \right] \\ &= \frac{d}{dS} \text{Tr} (-\mathcal{D}^{-1} K_1 \mathcal{D}^{-1} K_2) \end{aligned} \quad (\text{B50})$$

En intégrant par parties dans l'Eq. (B11) et en utilisant le fait que l'intégrande est une fonction paire de S , nous obtenons l'approximation

$$\int_0^{+\infty} \frac{dS}{\pi} S \frac{d}{dS} \ln \det M \simeq \int_{\mathbb{R}} \frac{dS}{2\pi} \text{Tr} (\mathcal{D}^{-1} K_1 \mathcal{D}^{-1} K_2) \quad (\text{B51})$$

En calculant la trace dans la base $|x, u, \ell, m_z\rangle$ (avec $\ell + m_z$ impair) et en injectant une relation de fermeture dans cette base comme par exemple dans l'Eq. (B21), nous réalisons que l'intégrande a une dépendance en S très

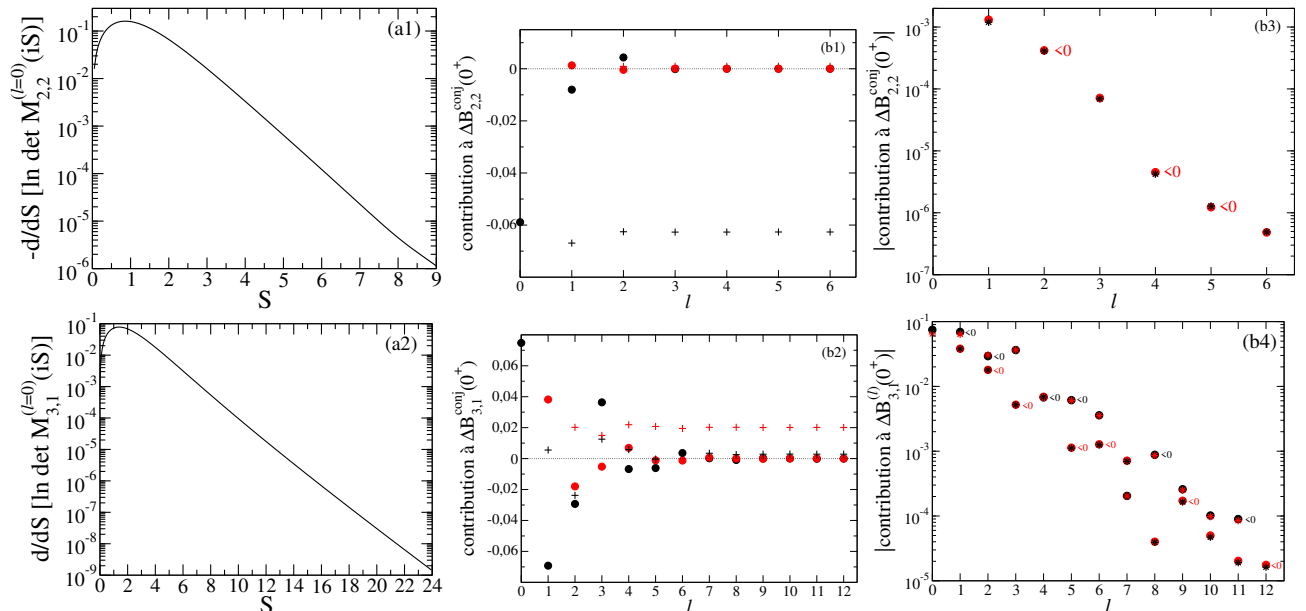


FIGURE 7: Convergence dans l'intégration sur S et la sommation sur ℓ dans l'Eq. (B11) (pour un rapport de masse $\alpha = 1$). (a) La dérivée logarithmique du déterminant de $M^{(\ell)}(iS)$ est une fonction de S à décroissance rapide; la figure prend comme exemple (a1) la voie $\ell = 0$ du problème à 2 + 2 fermions (pour une troncature numérique $t_{\min} = -9$, donc sans extrapolation; noter le signe moins sur l'axe vertical), (a2) la voie $\ell = 0$ du problème à 3 + 1 fermions. (b) La somme sur ℓ semble aussi bien converger, voir la contribution de chaque voie de moment cinétique au résultat (B11) pour (b1) le problème 2 + 2 et (b2) le problème 3 + 1 : disques noirs pour le secteur de parité $(-1)^\ell$, disques rouges pour le secteur de parité $(-1)^{\ell+1}$; les signes plus indiquent la valeur des sommes jusqu'à ℓ correspondantes. Des indications convaincantes sont même montrées en (b3) pour le problème 2 + 2 dans le secteur de parité $(-1)^{\ell+1}$ et en (b4) pour le problème 3 + 1 dans les deux secteurs de parité, où les résultats numériques (disques noirs pour la parité $(-1)^\ell$, disques rouges pour la parité $(-1)^{\ell+1}$) sont comparés aux résultats perturbatifs (B54) et (B60) [astérisques rouges pour la parité $(-1)^\ell$, astérisques noirs pour la parité $(-1)^{\ell+1}$] qui étendent à quatre corps une technique développée pour trois corps dans la référence [28] et sont censés être des équivalents asymptotiques exacts pour $\ell \rightarrow +\infty$ (on représente en fait la valeur absolue des résultats, pour pouvoir passer en échelle logarithmique, mais leur signe est indiqué par l'étiquette " < 0 " de la même couleur que les disques correspondants lorsqu'ils sont négatifs : ainsi, les disques noirs (rouges) négatifs sont indiqués par une étiquette noire (rouge) " < 0 "; on notera que les astérisques noirs (rouges) ont toujours le même signe que les disques rouges (noirs) correspondants).

simple, en raison des simplifications suivantes :

$$\left(\frac{e^x \operatorname{ch} x'}{e^{x'} \operatorname{ch} x}\right)^{s/2} \left(\frac{e^{-x'} \operatorname{ch} x}{e^{-x} \operatorname{ch} x'}\right)^{s/2} = e^{i(x-x')S} \quad (\text{B52})$$

où nous avons écrit le facteur de phase du premier terme de l'Eq. (69) tel qu'il est et le facteur de phase du second terme de l'Eq. (69) avec $x \leftrightarrow x'$, et utilisé $s = iS$ avec S réel. Ainsi, l'intégrale sur x ou x' prend la forme d'une transformée de Fourier par rapport à x ou x' , avec S comme variable conjuguée; c'est la transformée de Fou-

rier d'une fonction lisse de x ou x' à décroissance rapide, donc une fonction de S à décroissance rapide. Ceci explique la décroissance rapide de $\frac{d}{dS} \ln \det M$ observée numériquement pour une grande valeur de S . De plus, l'intégration sur S est simple en raison de l'identité

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dS}{2\pi} e^{i(x-x')S} = \delta(x-x') \quad (\text{B53})$$

Nous obtenons finalement l'approximation d'ordre dominant

$$\begin{aligned} \Delta B_{2,2}^{\text{conj}}(0^+) |_{\text{parité}}^{(\ell)} \simeq & \frac{2\ell+1}{(4\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} \frac{vv'}{d(x,u)d(x,u') \operatorname{ch} x} \\ & \frac{1}{4} \sum_{n=0}^1 \sum_{n'=0}^1 (-1)^{(\ell+1)(n+n')} \mathcal{T}_\ell(\theta + n\pi, \theta' + n'\pi, \phi, \phi') \\ & \times \overbrace{\left\{ 1 + \frac{1}{1+\alpha} [(u + e^{-x})(u' + e^{-x}) + vv' \cos \phi] \right\} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{1+\alpha} [(u + e^x)(u' + e^x) + vv' \cos \phi'] \right\}} \end{aligned} \quad (\text{B54})$$

Dans l'intégrande de l'équation (B54), $d(x, u)$ est donné par l'équation (B16), nous utilisons à nouveau les notations $u = \cos \theta$ et $v = \sin \theta$ et de même pour θ' , et nous avons introduit la fonction

$$\mathcal{T}_\ell(\theta, \theta', \phi, \phi') \equiv \sum_{m_z, m'_z = -\ell}^{\ell} e^{-im_z \theta} \langle \ell, m_z | e^{i\phi L_x / \hbar} | \ell, m'_z \rangle e^{im'_z \theta'} \langle \ell, m'_z | e^{i\phi' L_x / \hbar} | \ell, m_z \rangle \quad (\text{B55})$$

$$= \operatorname{Tr}_\ell \left[e^{-i\theta L_z / \hbar} e^{i\phi L_x / \hbar} e^{i\theta' L_z / \hbar} e^{i\phi' L_x / \hbar} \right] = \frac{\sin[(2\ell+1)\delta/2]}{\sin(\delta/2)} \quad (\text{B56})$$

où la trace est prise sur tout le sous-espace $\{|\ell, m_z\rangle, -\ell \leq m_z \leq \ell\}$ de moment cinétique ℓ sans restriction de parité et l'angle $\delta \in [0, \pi]$ est tel que [82]

$$1 + 2 \cos \delta = uu'(1 + \cos \phi \cos \phi') - (u + u') \sin \phi \sin \phi' + vv'(\cos \phi + \cos \phi') + \cos \phi \cos \phi' \quad (\text{B57})$$

La somme sur n et n' dans le numérateur de l'intégrande de l'Eq. (B54) supprime la contribution à \mathcal{T}_ℓ des états $|\ell, m_z\rangle$ et $|\ell, m'_z\rangle$ de la mauvaise parité, $(-1)^{m_z} = (-1)^{m'_z} = (-1)^\ell$. Nous nous attendons à ce que l'approximation (B54) soit un équivalent asymptotique exact pour $\ell \rightarrow +\infty$, et c'est aussi ce qu'indique la comparaison avec les résultats numériques de la Fig. 7(b3). À notre surprise, elle est déjà assez bonne pour $\ell = 1$, car elle ne s'écarte de la valeur numérique que d'environ 9%.

Ce traitement perturbatif peut également être appliqué au problème 3+1, en utilisant les équations intégrales de la référence [13]. La principale différence est que le spineur $\Phi_{m_z}^{(\ell)}(x, u)$ est maintenant soumis à une condition reflétant la symétrie d'échange fermionique des deux particules \downarrow qui sont les spectateurs de la paire $\uparrow\downarrow$ en interaction [18],

$$\Phi_{-m_z}^{(\ell)}(-x, u) = (-1)^{\ell+1} \Phi_{m_z}^{(\ell)}(x, u) \quad (\text{B58})$$

Cela signifie que le noyau $K^{(\ell)}$ doit être restreint au sous-espace correspondant, d'où l'apparition d'un projecteur $P = (1+U)/2$ sur ce sous-espace, où l'opérateur unitaire U , écrit en notation de Dirac

$$\begin{aligned} U|x, u, \ell, m_z\rangle &= (-1)^{\ell+1} | -x, u, \ell, -m_z \rangle \\ &= -e^{i\pi L_x / \hbar} | -x, u, \ell, m_z \rangle \end{aligned} \quad (\text{B59})$$

est une involution ($U^2 = \mathbf{1}$) [83]. Le point intéressant est maintenant que, même si $\frac{d}{dS} K$ est une somme de commutateurs comme dans l'Eq. (B23), les D_j correspondants ne commutent pas avec le projecteur P . Par conséquent, lorsqu'on développe M^{-1} au premier ordre en K , $\frac{d}{dS} \ln \det M$ contient à la fois une contribution d'ordre un en K et deux contributions d'ordre deux en K . Voici le résultat dans le sous-espace de moment cinétique ℓ et de parité ε [84] :

$$\begin{aligned}
\Delta B_{3,1}^{\text{conj}}(0^+)|_{\text{parité } \varepsilon}^{(\ell)} &\simeq \frac{2\ell+1}{2\pi\sqrt{2}} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{v}{d_{3,1}(0,u)} \frac{\frac{1}{2} \sum_{n=0}^1 \varepsilon^n \mathcal{T}_\ell(\theta+n\pi, 0, \phi+\pi, 0)}{3 + \frac{2\alpha}{1+\alpha}(2u+u^2+v^2\cos\phi)} \\
&+ \frac{2\ell+1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} \frac{vv'}{d_{3,1}(x,u)d_{3,1}(x,u') \text{ch } x} \\
&\quad \frac{1}{4} \sum_{n=0}^1 \sum_{n'=0}^1 \varepsilon^{n+n'} \mathcal{T}_\ell(\theta+n\pi, \theta'+n'\pi, \phi, \phi') \\
&\times \frac{\left\{ 2 + e^{-2x} + \frac{2\alpha}{1+\alpha} [e^{-x}(u+u') + uu' + vv' \cos \phi] \right\} \left\{ 2 + e^{2x} + \frac{2\alpha}{1+\alpha} [e^x(u+u') + uu' + vv' \cos \phi'] \right\}}{\left[2e^{-x'} + e^{x'} + \frac{2\alpha}{1+\alpha} (ue^{-x'} + u' + uu' + vv' \cos \phi) \right] \left[2e^{-x'} + e^{x'} + \frac{2\alpha}{1+\alpha} (ue^{-x'} + u' + uu' + vv' \cos \phi') \right]} \\
&- \frac{2\ell+1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} dx' \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{2\pi} \left(\frac{e^{x'}}{\text{ch } x'} \right)^{1/2} \frac{vv'}{d_{3,1}(0,u)d_{3,1}(x',u')} \\
&\quad \frac{1}{4} \sum_{n=0}^1 \sum_{n'=0}^1 \varepsilon^{n+n'} \mathcal{T}_\ell(\theta+n\pi, n'\pi, \phi, \phi'+\pi)
\end{aligned} \tag{B60}$$

où $d_{3,1}(x, u)$ définit la partie diagonale \mathcal{D} de l'opérateur M pour le problème 3 + 1 (comme $d(x, u)$ l'a fait pour le problème 2 + 2), voir la référence [13] :

$$d_{3,1}(x, u) = \left[\frac{1+2\alpha}{(1+\alpha)^2} + \frac{\alpha u}{(1+\alpha)^2 \text{ch } x} \right]^{1/2} \tag{B61}$$

Comme on peut le vérifier sur la Fig. 7(b4), cette approximation est en bon accord avec les résultats numériques même pour $\ell = 0$, où elle ne s'écarte du résultat exact que de $\simeq 13\%$. Dans la limite d'un grand ℓ , la première contribution au second membre de l'équation (B60) domine rapidement les deux autres ; en faisant la somme des deux secteurs de parité $\varepsilon = \pm 1$ et en se limitant pour simplifier à un rapport de masse $\alpha = 1$, on peut intégrer sur θ et ϕ à $\delta \in [0, \pi]$ fixé, où $1 + 2 \cos \delta = u + \cos \phi + u \cos \phi$, comme le montre l'équation (B57) prise pour $\theta' = \phi' = 0$, pour obtenir l'équivalent à grand ℓ à décroissance rapide [85]

$$\begin{aligned}
\Delta B_{3,1}^{\text{conj}}(0^+)|_{\ell \rightarrow +\infty}^{(\ell)} &\sim \frac{2\ell+1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\delta \sin[(\ell+1/2)\delta] \\
&\quad \frac{\arccos \frac{8 \cos^2 \delta + 5 \cos \delta - 1}{3(3 + \cos \delta)}}{[(5 + 4 \cos \delta)(1 + \cos \delta + \cos^2 \delta)]^{1/2}}
\end{aligned} \tag{B62}$$

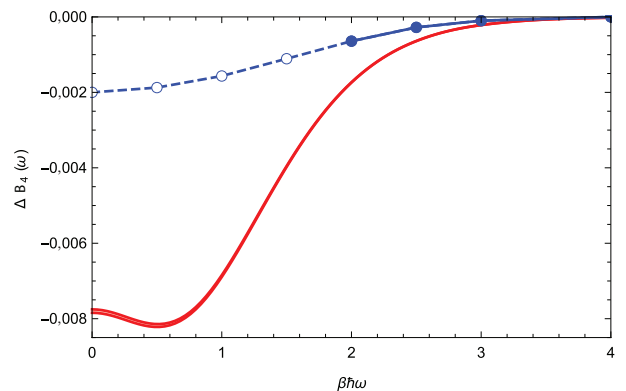


FIGURE 8: Quatrième coefficient d'amas (B67) pour un gaz unitaire de fermions de spin 1/2 non polarisé piégé harmoniquement à la température T , en fonction de $\beta\hbar\omega$, avec $\beta = 1/(k_B T)$, ω la pulsation de piégeage des fermions et $\alpha = m_\uparrow/m_\downarrow = 1$. Ligne bleue avec des symboles : résultats de la référence [30] obtenus par calcul numérique direct des spectres d'énergie jusqu'à quatre corps dans le piège (disques : valeurs effectivement calculées ; cercles : valeurs résultant d'une extrapolation). Lignes rouges : notre conjecture (B66) (les valeurs diffèrent légèrement selon l'extrapolation linéaire ou cubique à la limite d'une troncature numérique $1/t_{\min} \rightarrow 0^-$).

5. Le verdict

Les résultats numériques pour notre conjecture (B11) sont

$$\Delta B_{2,2}^{\text{conj}}(0^+) = -0,0617(2) \quad (\text{B63})$$

$$\Delta B_{3,1}^{\text{conj}}(0^+) = +0,02297(4) \quad (\text{B64})$$

et conduisent, après utilisation de l'Eq. (B6), à

$$\Delta b_4^{\text{conj}} = -0,063(1) \quad (\text{B65})$$

Ceci est clairement en désaccord avec les valeurs expérimentales (B4). De façon remarquable, pour $\Delta B_{3,1}(0^+)$, notre valeur conjecturée est très proche du résultat diagrammatique approché 0,025 de [24], alors que pour $\Delta B_{2,2}(0^+)$, elle diffère largement du résultat (toujours approché) $-0,036$ de [24] (ces valeurs nous ont été communiquées par Jesper Levinsen).

Un test complémentaire utile est de comparer aux résultats théoriques de la référence [30]. Comme mentionné ci-dessus et dans cette référence, ces résultats, obtenus avec la méthode du régulateur harmonique, sont fiables à des valeurs *non nulles* de $\beta\hbar\omega$ sans extrapolation à $\beta\hbar\omega = 0$ (ω est la pulsation d'oscillation dans le piège et $\beta = 1/(k_B T)$). Il est en fait simple d'étendre avec les mêmes notations la conjecture (B11) à une valeur non

nulle de ω , voir l'Eq. (38) de la référence [28] :

$$\Delta B_{n_\uparrow, n_\downarrow}^{\text{conj}}(\omega) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \times \int_0^{+\infty} \frac{dS \sin(S\beta\hbar\omega)}{\pi \operatorname{sh}(\beta\hbar\omega)} \frac{d}{dS} [\ln \det M_{n_\uparrow, n_\downarrow}^{(\ell)}(iS)] \quad (\text{B66})$$

Puisque $|\sin(S\beta\hbar\omega)/\operatorname{sh}(\beta\hbar\omega)| \leq S$, cela ne soulève pas de nouveaux problèmes de convergence et l'évaluation numérique de $\Delta B_{2,2}^{\text{conj}}(\omega)$ et $\Delta B_{3,1}^{\text{conj}}(\omega)$ est simple une fois que les dérivées logarithmiques du déterminant de M sont connues. La valeur du quatrième coefficient d'amas dans le piège qui en résulte

$$\Delta B_4(\omega) \equiv \frac{1}{2} [\Delta B_{3,1}(\omega) + \Delta B_{2,2}(\omega) + \Delta B_{1,3}(\omega)] \quad (\text{B67})$$

(avec $\Delta B_{3,1} = \Delta B_{1,3}$ pour le rapport de masse $\alpha = 1$) est représentée en fonction de $\beta\hbar\omega$ sur la Fig. 8. Elle est clairement en désaccord avec les résultats de la référence [30], non seulement avec ceux résultant de l'extrapolation à $\beta\hbar\omega = 0$ mais aussi avec ceux réellement calculés.

La conjecture est donc invalidée, et un travail théorique supplémentaire est nécessaire pour obtenir l'expression analytique correcte de Δb_4 pour le gaz unitaire de fermions.

-
- [1] S. Inouye, M.R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D.M. Stamper-Kurn, W. Ketterle, *Nature* **392**, 151 (1998); K.M. O'Hara, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, S. R. Granade, J. E. Thomas, *Science* **298**, 2179 (2002); T. Bourdel, J. Cubizolles, L. Khaykovich, K.M.F. Magalhães, S.J.J.M.F. Kokkelmans, G.V. Shlyapnikov, C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 020402 (2003); C.A. Regal, M. Greiner, D.S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040403 (2004); M.W. Zwierlein, C.A. Stan, C.H. Schunck, S.M.F. Raupach, A.J. Kerman, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 120403 (2004).
- [2] E. Wigner, *Zeits. f. Physik* **83**, 253 (1933); H. Bethe, R. Peierls, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **148**, 146 (1935).
- [3] V. Efimov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **12**, 589 (1971); V. Efimov, *Nucl. Phys. A* **210**, 157 (1973); A. Bulgac, V. Efimov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **22**, 296 (1975).
- [4] T. Kraemer, M. Mark, P. Waldburger, J. G. Danzl, C. Chin, B. Engeser, A.D. Lange, K. Pilch, A. Jaakkola, H.-C. Nägerl, R. Grimm, *Nature* **440**, 315 (2006); M. Zaccanti, B. Deissler, C. D'Errico, M. Fattori, M. Jonas-Lasinio, S. Müller, G. Roati, M. Inguscio, G. Modugno, *Nature Physics* **5**, 586 (2009); *Phys. Rev. Lett.* **103**, 163202 (2009); *Phys. Rev. Lett.* **105**, 103203 (2010); N. Gross, Z. Shotan, O. Machtey, S. Kokkelmans, L. Khaykovich, *C. R. Physique* **12**, 4 (2011); T. Lompe, T.B. Ottenstein, F. Serwane, A.N. Wenz, G. Zürn, S. Jochim, *Science* **330**, 940 (2010); B.S. Rem, A.T. Grier, I. Ferrier-Barbut, U. Eismann, T. Langen, N. Navon, L. Khaykovich, F. Werner, D.S. Petrov, F. Chevy, C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 163202 (2013); P. Dyke, S.E. Pollack, R.G. Hulet, *Phys. Rev. A* **88**, 023625 (2013); B. Huang, L.A. Sidorenkov, R. Grimm, J.M. Hutson, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 190401 (2014); R. Pires, J. Umanis, S. Häfner, M. Repp, A. Arias, E.D. Kuhnle, M. Weidemüller, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 250404 (2014); S.-K. Tung, K. Jimenez-García, J. Johansen, C.V. Parker, C. Chin, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 240402 (2014).
- [5] M. Berninger, A. Zenesini, B. Huang, W. Harm, H.-C. Nägerl, F. Ferlaino, R. Grimm, P.S. Julienne, J.M. Hutson, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 120401 (2011); Jia Wang, J.P. D'Incao, B.D. Esry, C.H. Greene, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 263001 (2012); P. Naidon, S. Endo, M. Ueda, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 105301 (2014).
- [6] R. Amado, F. Greenwood, *Phys. Rev. D* **7**, 2517 (1973).
- [7] D. Gridnev, *J. Math. Phys.* **54**, 042105 (2013).
- [8] A. Deltuva, *Phys. Rev. A* **82**, 040701 (2010).
- [9] J. von Stecher, J.P. D'Incao, C.H. Greene, *Nature Physics* **5**, 417 (2009).
- [10] L. Platter, H.-W. Hammer, Ulf-G. Meissner, *Phys. Rev. A* **70**, 052101 (2004); H.-W. Hammer, L. Platter, *Eur. Phys. J. A* **32**, 113 (2007).
- [11] Yusuke Nishida, Shina Tan, *Few-Body Syst.* **51**, 191 (2011).
- [12] Yusuke Nishida, S. Moroz, Dam Thanh Son, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 235301 (2013); S. Moroz, Yusuke Nishida, *Phys. Rev. A* **90**, 063631 (2014); D. Gridnev, *J. Phys. A : Math. Theor.* **47**, 505204 (2014); Chao Gao, Jia Wang, Zhenhua Yu, *Phys. Rev. A* **92**, 020504(R) (2015).

- [13] Y. Castin, C. Mora, L. Pricoupenko, Phys. Rev. Lett. **105**, 223201 (2010).
- [14] D.S. Petrov, Phys. Rev. A **67**, 010703 (2003).
- [15] E. Braaten, H.-W. Hammer, Phys. Rep. **428**, 259 (2006).
- [16] D.S. Petrov, C. Salomon, G.V. Shlyapnikov, J. Phys. B **38**, S645 (2005).
- [17] D. Blume, K.M. Daily, Phys. Rev. Lett. **105**, 170403 (2010).
- [18] C. Mora, Y. Castin, L. Pricoupenko, C. R. Physique **12**, 71 (2011).
- [19] L. Pricoupenko, Phys. Rev. A **83**, 062711 (2011).
- [20] N. Navon, S. Nascimbène, F. Chevy, C. Salomon, Science **328**, 729 (2010).
- [21] Mark J.H. Ku, A.T. Sommer, L.W. Cheuk, M.W. Zwierlein, Science **335**, 563 (2012).
- [22] D.B. Kaplan, Sichun Sun, Phys. Rev. Lett. **107**, 030601 (2011).
- [23] X. Leyronas, Phys. Rev. A **84**, 053633 (2011).
- [24] V. Ngampruetikorn, Meera M. Parish, J. Levinsen, Phys. Rev. A **91**, 013606 (2015).
- [25] A. Comtet, Y. Georgelin, S. Ouvry, J. Phys. A **22**, 3917 (1989); J. McCabe, S. Ouvry, Phys. Lett. B **260**, 113 (1991).
- [26] Xia-Ji Liu, Hui Hu, P.D. Drummond, Phys. Rev. Lett. **102**, 160401 (2009); Phys. Rev. A **82**, 023619 (2010).
- [27] K.M. Daily, D. Blume, Phys. Rev. A **85**, 013609 (2012).
- [28] Y. Castin, F. Werner, Rev. can. phys. **91**, 382 (2013).
- [29] Chao Gao, Shimpei Endo, Y. Castin, EPL **109**, 16003 (2015).
- [30] D. Rakshit, K.M. Daily, D. Blume, Phys. Rev. A **85**, 033634 (2012).
- [31] S. Tan, arXiv :cond-mat/0412764v2 (2005); F. Werner, Y. Castin, arXiv :cond-mat/0507399v1 (2005).
- [32] F. Werner, Y. Castin, Phys. Rev. A **74**, 053604 (2006).
- [33] Y. Castin, C. R. Physique **5**, 407 (2004).
- [34] Y. Castin, F. Werner, chap. 5, *The BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas*, LNIP 836, W. Zwerger éd. (Springer, Berlin, 2011).
- [35] Wu-Ki Tung, *Group Theory in Physics* (World Scientific, Philadelphia, 1985).
- [36] Seth T. Rittenhouse, N.P. Mehta, Chris H. Greene, Phys. Rev. A **82**, 022706 (2010).
- [37] Y. Castin, E. Tignone, Phys. Rev. A **84**, 062704 (2011).
- [38] F. Werner, Y. Castin, Phys. Rev. Lett. **97**, 150401 (2006).
- [39] G. Gasaneo, J.H. Macek, J. Phys. B **35**, 2239 (2002); M. Birse, J. Phys. A **39**, L49 (2006).
- [40] O.I. Kartavtsev, A.V. Malykh, Zh. Eksp. Teor. Phys. **86**, 713 (2007).
- [41] D.S. Petrov, C. Salomon, G.V. Shlyapnikov, Phys. Rev. Lett. **93**, 090404 (2004).
- [42] F. Werner, Y. Castin, Phys. Rev. A **86**, 013626 (2012).
- [43] S. Tölle, H.-W. Hammer, B. Ch. Metsch, C. R. Physique **12**, 59 (2011).
- [44] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *Numerical Recipes* (Cambridge University Press, Cambridge, 1988).
- [45] K. Huang, *Statistical Mechanics* (Wiley, New York, 1963).
- [46] E. Beth, G.E. Uhlenbeck, Physica III **8**, 729 (1936); Physica IV **10**, 915 (1937).
- [47] T.D. Lee, C.N. Yang, Phys. Rev. **116**, 25 (1959); A. Pais, G.E. Uhlenbeck, Phys. Rev. **116**, 250 (1959); P.C. Hemmer, Phys. Lett. **27A**, 377 (1968); B. Jancovi, Phys. Rev. **178**, 295 (1969); B. Jancovi, Phys. Rev. **184**, 119 (1969); S.K. Adhikari, R.D. Amado, Phys. Rev. Lett. **27**, 485 (1971); W.G. Gibson, Phys. Rev. A **6**, 2469 (1972). B. Jancovi, S. Merkuriev, Phys. Rev. A **12**, 2610 (1975).
- [48] L.P. Pitaevskii, A. Rosch, Phys. Rev. A **55**, R853 (1997).
- [49] En principe, $M^{(\ell)}(s)$ est un opérateur, avec un nombre infini de valeurs propres, et son déterminant est infini. La formulation mathématiquement correcte consiste à imposer que l'une des valeurs propres de $M^{(\ell)}(s)$ s'annule. En pratique, dans le calcul numérique, on discrétise et tronque les variables, de sorte que la formulation en termes de déterminant peut être utilisée.
- [50] Ce terme supplémentaire conduit au facteur $(\text{ch } x)^s$ dans l'ansatz (20) et à un facteur supplémentaire $(\text{ch } x'/\text{ch } x)^s$ dans le noyau K de l'Eq. (69). Cela ne change pas le déterminant de l'opérateur $M(s)$. Cela préserve également la nature hermitienne de $M(s)$ pour $s \in i\mathbb{R}$.
- [51] Avec la notation $Y_\ell^{m_z}(\mathbf{n}) = Y_\ell^{m_z}(\theta_{\mathbf{n}}, \phi_{\mathbf{n}})$, où $\theta_{\mathbf{n}}$ et $\phi_{\mathbf{n}}$ sont les angles polaire et azimutal de \mathbf{n} dans les coordonnées sphériques habituelles associées aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) , on fait face à l'intégrale sur la sphère unité $\int \frac{d^2n}{4\pi} Y_\ell^{m_z}(\mathbf{n}) [Y_\ell^{m'_z}(\mathcal{R}^{-1}\mathbf{n})]^*$. Puisque $Y_\ell^{m'_z}(\mathcal{R}^{-1}\mathbf{n}) = \langle \mathbf{n} | R | \ell, m'_z \rangle = \sum_{m''_z} Y_\ell^{m''_z}(\mathbf{n}) \langle \ell, m''_z | R | \ell, m'_z \rangle$ et les harmoniques sphériques forment une base orthonormée, $\int d^2n Y_\ell^{m_z}(\mathbf{n}) [Y_\ell^{m''_z}(\mathbf{n})]^* = \delta_{m_z, m''_z}$, on obtient (28). Ici, \mathcal{R} est une rotation dans l'espace tridimensionnel et l'opérateur R est sa représentation dans l'espace de Hilbert.
- [52] Pour une fonction arbitraire ϕ , on définit $I \equiv \int d^3k_1 d^3k_3 \phi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3)$. Alors on a $I = (4\pi \times 2\pi) \int_{\text{SO}(3)} d\mathcal{R} \int_0^{+\infty} dk_1 dk_3 k_1^2 k_3^2 \int_{-1}^1 du_{13} \phi(\mathcal{R}\mathbf{k}_1^{\text{fix}}, \mathcal{R}\mathbf{k}_3^{\text{fix}})$. Pour le montrer on fait un changement de variable de jacobien unité dans l'intégrale définissant I , à savoir $\mathbf{k}_1 \rightarrow \mathcal{R}\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{k}_3 \rightarrow \mathcal{R}\mathbf{k}_3$, où \mathcal{R} est une rotation quelconque : $I = \int d^3k_1 d^3k_3 \phi(\mathcal{R}\mathbf{k}_1, \mathcal{R}\mathbf{k}_3)$. Comme le résultat ne dépend pas de \mathcal{R} , on peut en faire la moyenne sur $\text{SO}(3)$, avec la mesure invariante normalisée. En changeant l'ordre d'intégration sur \mathcal{R} et sur \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_3 , on obtient $I = \int d^3k_1 d^3k_3 J_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3}$ avec $J_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3} \equiv \int_{\text{SO}(3)} d\mathcal{R} \phi(\mathcal{R}\mathbf{k}_1, \mathcal{R}\mathbf{k}_3)$. Dans $J_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3}$ on effectue alors le changement de variable $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}\rho$, où ρ est une rotation quelconque. Comme la mesure est invariante, $J_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3} = \int_{\text{SO}(3)} d\mathcal{R} \phi(\mathcal{R}\rho\mathbf{k}_1, \mathcal{R}\rho\mathbf{k}_3)$. Puis pour tous \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_3 donnés, on choisit ρ tel que $\rho\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_1^{\text{fix}}$ et $\rho\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_3^{\text{fix}}$, si bien que $J_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3} = \int_{\text{SO}(3)} d\mathcal{R} \phi(\mathcal{R}\mathbf{k}_1^{\text{fix}}, \mathcal{R}\mathbf{k}_3^{\text{fix}})$. En insérant cette expression de $J_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3}$ dans I et en changeant à nouveau l'ordre d'intégration, on obtient $I = \int_{\text{SO}(3)} d\mathcal{R} \int d^3k_1 d^3k_3 \phi(\mathcal{R}\mathbf{k}_1^{\text{fix}}, \mathcal{R}\mathbf{k}_3^{\text{fix}})$. À $\mathbf{k}_1^{\text{fix}}$ fixé, on intègre sur \mathbf{k}_3 en coordonnées sphériques d'axe polaire \mathbf{k}_1 ; comme l'intégrande ne dépend pas de l'angle azimutal, on fait sortir un facteur 2π . L'intégrale résultante sur k_3 et θ_{13} ne dépend pas de la direction de \mathbf{k}_1 , donc, après intégration sur \mathbf{k}_1 en coordonnées sphériques d'axe polaire arbitraire, on sort un facteur supplémentaire 4π et on obtient la relation désirée.
- [53] Une distribution $\delta(\mathbf{k})$ tridimensionnelle est le produit de trois distributions $\delta(\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{k})$ unidimensionnelles où (\mathbf{u}_n) est une base orthonormale. Comme expliqué dans le texte, on peut prendre $\mathbf{k} = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4 + \mathcal{R}_Y(\beta)\mathcal{R}_Z(\gamma)(\mathbf{k}_1^{\text{fix}} + \mathbf{k}_3^{\text{fix}})$. Nous prenons d'abord $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_Y$ pour que $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{k} =$

$(\mathcal{R}_Z(-\gamma)\mathbf{e}_Y) \cdot (\mathbf{k}_1^{\text{fix}} + \mathbf{k}_3^{\text{fix}}) = \sin \gamma \mathbf{e}_X \cdot (\mathbf{k}_1^{\text{fix}} + \mathbf{k}_3^{\text{fix}}) = -\sin \gamma \sin \beta_0 |\mathbf{k}_1^{\text{fix}} + \mathbf{k}_3^{\text{fix}}|$ où nous avons utilisé l'Eq. (50). Cela donne le facteur $\delta(\sin \gamma)$ dans l'Eq. (49). Comme expliqué dans le texte, nous pouvons nous restreindre au cas $\gamma = 0$ (à un changement $\beta \leftrightarrow -\beta$ près) et nous nous retrouvons avec un Dirac bidimensionnel $\delta(\mathbf{k}_\perp)$ dans le plan orthogonal à \mathbf{e}_Y . En principe $\mathbf{k}_\perp = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4 + \mathcal{R}_Y(\beta)(\mathbf{k}_1^{\text{fix}} + \mathbf{k}_3^{\text{fix}})$ mais nous pouvons prendre de manière équivalente $\mathbf{k}_\perp = \mathcal{R}_Y(-\beta)(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4) + \mathbf{k}_1^{\text{fix}} + \mathbf{k}_3^{\text{fix}}$ en raison de l'invariance par rotation de la distribution de Dirac. En utilisant $\mathcal{R}_Y(-\beta)\mathbf{e}_Z = \cos \beta \mathbf{e}_Z - \sin \beta \mathbf{e}_X$ et en prenant $\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{k}_1^{\text{fix}} + \mathbf{k}_3^{\text{fix}}}{|\mathbf{k}_1^{\text{fix}} + \mathbf{k}_3^{\text{fix}}|} = \cos \beta_0 \mathbf{e}_Z - \sin \beta_0 \mathbf{e}_X$ et son dual $\mathbf{u}_3 = \sin \beta_0 \mathbf{e}_Z + \cos \beta_0 \mathbf{e}_X$ dans le plan ZX , nous justifions l'Eq. (49).

- [54] De manière similaire à l'Eq. (53), $|\ell, m_x = 0\rangle = s_+ e^{-i(\pi/2)L_y/\hbar} |\ell, m_z = 0\rangle = s_- e^{-i(-\pi/2)L_y/\hbar} |\ell, m_z = 0\rangle$ où s_\pm ne sont que des signes puisque $|\ell, m_x = 0\rangle$ peut être pris avec des composantes réelles dans la base $|\ell, m_z\rangle$ (L_y a des éléments de matrice imaginaires purs). Alors $s_- s_+ \langle \ell, m_z = 0 | e^{-i\pi L_y/\hbar} | \ell, m_z = 0 \rangle = 1$. L'action de $e^{-i\pi L_y/\hbar}$ en coordonnées cartésiennes est $(x, y, z) \rightarrow (-x, y, -z)$; en coordonnées sphériques d'axe polaire Oz , elle est $(\theta, \phi) \rightarrow (\pi - \theta, \pi - \phi)$. Pour $Y_\ell^{m_z=0}(\theta, \phi)$, qui ne dépend pas de ϕ , c'est équivalent à l'action de la parité $(\theta, \phi) \rightarrow (\pi - \theta, \pi + \phi)$ et cela fait sortir un facteur $(-1)^l$ de sorte que $s_- = (-1)^l s_+$ et $|\ell, m_x = 0\rangle = (s_+/2)(e^{-i(\pi/2)L_y/\hbar} + (-1)^l e^{-i(-\pi/2)L_y/\hbar}) |\ell, m_z = 0\rangle$. En développant en série les exponentielles dans cette dernière expression, et en utilisant le fait que L_y ne couple que des états de m_z de parités différentes, on obtient l'Eq. (54).
- [55] On peut garder $[0, 2\pi]$ comme intervalle d'intégration sur ϕ' puisque l'intégrande est une fonction périodique de ϕ' de période 2π .
- [56] Pour $b_0 > b_1 > 0$, $\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{e^{im_x\phi}}{b_0 + b_1 \cos \phi} = z_0^{|m_x|} / [(b_0 - b_1)(b_0 + b_1)]^{1/2}$ avec $z_0 = -b_1 / \{b_0 + [(b_0 - b_1)(b_0 + b_1)]^{1/2}\}$.
- [57] Si $x \rightarrow -\infty, x' \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow +\infty, x' \rightarrow -\infty$, le noyau matriciel (69) tend entièrement exponentiellement vers zéro, ce qui n'apporte aucune nouvelle information significative.
- [58] Ceci est trivial pour $\ell = 0$. Pour $\ell \geq 1$, cela résulte du fait que, pour $L \geq 1$, on peut prendre $m_x = 1$. Alors $\langle \ell, m_z | \ell, m_x = 1 \rangle \neq 0$, sauf si ℓ est pair et $m_z = 0$ (en accord avec l'Eq. (54), compte tenu de la symétrie $x \leftrightarrow y$), auquel cas on peut revenir au choix $m_x = 0$ et utiliser le fait que $\langle \ell, m_z = 0 | \ell, m_x = 0 \rangle \neq 0$ pour ℓ pair.
- [59] Expliquons plus physiquement pourquoi la fonction Λ_L apparaît dans l'expression du spectre continu. L'idée est de considérer un état physique du système à $2 + 2$ fermions, correspondant à une solution de carré intégrable non nulle $\Phi_{m_z}^{(\ell)}(x, u)$ de l'Eq. (68), et de voir comment la fonction d'onde à quatre corps varie lorsque trois particules, disons 1, 2 et 3, convergent vers le même point, la quatrième particule étant à un autre endroit fixé. Comme nous l'avons vu, un état propre étendu du continuum qui varie pour $x \rightarrow -\infty$ comme $e^{ikx} e^{im_z\theta/2} \langle \ell, m_z | \ell, m_x = 0 \rangle P_L(u)$, $k \in \mathbb{R}$, correspond à la valeur propre $\Omega = \Lambda_L(ik, \alpha)$. Selon le raisonnement par prolongement analytique de la référence [13], ceci implique que l'état propre localisé $\Phi_{m_z}^{(\ell)}(x, u)$ de $\Omega = 0$ tend vers zéro pour $x \rightarrow -\infty$ comme $e^{\kappa x} e^{im_z\theta/2} \langle \ell, m_z | \ell, m_x = 0 \rangle P_L(u)$, où la quantité

réelle κ est la plus petite racine positive de

$$\Lambda_L(\kappa, \alpha) = 0$$

avec L choisie de façon à minimiser κ (minimiser κ revient à sélectionner la fonction exponentielle $e^{\kappa x}$ la plus lentement décroissante, qui est la contribution dominante pour $x \rightarrow -\infty$). Ceci implique que κ est un des exposants d'échelle possibles s_3 du problème à $2 + 1$ fermions, voir l'Eq. (82). Afin de déterminer la limite de l'Eq. (10) lorsque r_{13} et $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_{13}| \rightarrow 0$ tendent vers zéro avec la même loi d'échelle, c'est-à-dire que les deux sont proportionnels à l'hyperrayon R_{123} des particules 1, 2 et 3, nous déterminons la limite à grand \mathbf{k}_2 de l'intégrande de ψ_{24} dans l'Eq. (10) à \mathbf{k}_4 fixé : en n'écrivant pas la partie angulaire pour simplifier, nous trouvons que $D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4)$ varie comme $k_2^{-2-\kappa} k_4^{\kappa-s-3/2}$, de sorte que sa transformée de Fourier, selon l'argument habituel de comptage de puissances, varie comme $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_{13}|^{\kappa-1} |\mathbf{r}_4 - \mathbf{R}_{13}|^{s-\kappa-3/2}$. Le même raisonnement s'applique à ψ_{14} . À $|\mathbf{r}_4 - \mathbf{R}_{13}| > 0$ fixé, la fonction d'onde à quatre corps varie donc comme $R_{123}^{\kappa-2} = R_{123}^{s_3-2}$, exactement comme le prédit l'équation (5.179) de la référence [34]. Toute cette discussion est formelle pour le problème à $2 + 2$ fermions puisque, comme nous le verrons, il n'y a pas d'effet Efimov à quatre corps, mais elle s'applique explicitement au problème à $3 + 1$ fermions et complète bien la référence [13].

- [60] Le spectre continu $\Omega^{\odot(\ell)}$ peut être retrouvé en gardant seulement mais exactement dans l'Eq. (69) la dernière contribution au noyau matriciel $K_{m_z, m_z'}^{(\ell)}$ de l'Eq. (68), c'est-à-dire sans recourir à une approximation locale de cette contribution autour de $(x, u) = (0, -1)$. Le calcul explicite reste simple pour un rapport de masse unité $\alpha = 1$. Les vecteurs propres de l'opérateur qui en résulte sont alors de la forme $\Phi_{m_z}^{(\ell)}(x, u) = e^{im_z\gamma} \langle \ell, m_z | \ell, m_x = 0 \rangle \Phi(x, u)$ avec les ansatz $\Phi(x, u) = (\text{ch } x)^{-(s-1/2)/2} (u + \text{ch } x)^{-(s+7/2)/2} \chi(\sqrt{2}k_{24}/K_{24})$, k_{24} et K_{24} étant les nombres d'onde relatifs et de centre de masse des particules 2 et 4, de sorte que $2k_{24}/K_{24} = (\frac{\text{ch } x - u}{\text{ch } x + u})^{1/2}$. On obtient alors l'équation intégrale sur $\chi(k) : \Omega(2k^2 + 1)^{1/2} \chi(k) = (k^2 + 1)^{1/2} \chi(k) - \frac{2(-1)^\ell}{\pi} \int_0^{+\infty} dk' k'^2 \chi(k') / (1 + k^2 + k'^2)$. En posant $\chi(k) = k^{-3/2} (1 + 2k^2)^{-1/4} \psi(t)$ avec $k = \exp(-t)$, on obtient $\Omega \psi(t) = \left(\frac{1+e^{-2t}}{1+2e^{-2t}} \right)^{1/2} \psi(t) - \frac{2(-1)^\ell}{\pi} \int_{\mathbb{R}} dt' \frac{\psi(t') \exp[-3(t+t')/2]}{(1+e^{-2t}+e^{-2t'})[(1+2e^{-2t})(1+2e^{-2t'})]^{1/4}}$. Le continuum $t \rightarrow -\infty$ de ce problème aux valeurs propres résout $(\sqrt{2}\Omega - 1)\psi_\infty(t) = -\frac{(-1)^\ell}{\pi} \int_{\mathbb{R}} dt' \frac{\psi_\infty(t')}{\text{ch}(t-t')}$, avec des solutions d'ondes planes $\psi_\infty(t') = e^{ikt}$, ce qui redonne (84). L'ansatz pour $\Phi(x, u)$ résulte du fait que $D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4)$ est de la forme $K_{24}^{-(s+7/2)} P_\ell(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{K}_{24}/K_{24}) \chi(\sqrt{2}k_{24}/K_{24})$ (P_ℓ est un polynôme de Legendre), ce qui est évident si l'on revient à l'Eq. (13) et que l'on réalise que sa dernière contribution conserve le vecteur d'onde total \mathbf{K}_{24} (à un signe près).
- [61] En réalité, la solution physique pour le spineur $\Phi_{m_z}^{(\ell)}(x, u)$ doit correspondre à une valeur propre nulle de la matrice $M^{(\ell)}(s)$. A cet égard, $k = 0$ n'est acceptable que pour ℓ pair. De plus, comme nous le verrons dans l'annexe B [voir la note de bas de page appelée avant l'Eq. (B36)], lorsque $\Omega = 0$, $\phi(t)$ varie en fait linéairement en t pour

$t \rightarrow -\infty$, de sorte que $D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4)$ diverge comme $\ln(|\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4/k_{24}|/(|\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4|/k_{24})^{s+3/2})$ lorsque $\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4 \rightarrow \mathbf{0}$. Il en résulterait une divergence en $\ln(r_{24}/|\mathbf{R}_{24} - \mathbf{R}_{13}|)/r_{24}$ de la fonction $\mathcal{A}_{13}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_{13}, \mathbf{r}_4 - \mathbf{R}_{13})$ en $r_{24} = 0$, ce qui est physiquement obscur. Gardons cependant à l'esprit que, selon la section V, il n'y a pas d'effet Efimov à quatre corps dans le problème 2 + 2, de sorte que l'Eq. (68) n'admet en fait aucune solution non identiquement nulle $\Phi^{(\ell)}$ si $s \in i\mathbb{R}$.

[62] Pour $\ell > 0$, on peut utiliser l'identité : $\sum_{m_z=-\ell}^{\ell} [Y_{\ell}^{m_z}(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{4\perp 2} \cdot \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{24} \cdot \mathbf{e}_z)]^* e^{im_z(\gamma_{24} + \theta_{24}/2)} \langle \ell, m_z | \ell, m_x = 0 \rangle = s_+ Y_{\ell}^0(\mathbf{K}_{24})$ où $\mathbf{K}_{24} = (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4)/|\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4|$, on rappelle que $\gamma_{24} = \tau_{24} - \theta_{24}/2$ et τ_{24} est l'angle entre \mathbf{k}_2 et $\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4$, la notation des harmoniques sphériques est celle de la note [51] et le signe s_+ est défini dans la note [54]. Cette identité est également utile pour la note [60].

[63] Si $k_{24} \rightarrow +\infty$, $|x|$ tend nécessairement vers $+\infty$ puisque $|u| \leq 1$, auquel cas K_{24} et k_{24} divergent tous deux comme $e^{|x|}$ et ont un rapport de limite non nulle.

[64] Nous avons utilisé $\int_0^{+\infty} dy \sin(ay) \sin(by)/y^{s+1/2} = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2} - s) \sin[\frac{\pi}{4}(1 - 2s)] [|a - b|^{s-\frac{1}{2}} - |a + b|^{s-\frac{1}{2}}]$, pour $s \in i\mathbb{R}$ et des nombres réels a et b qui diffèrent en valeur absolue.

[65] L'intégrande dans l'Eq. (97) est un $O(1/q^2)$ lorsque $q \rightarrow +\infty$, de sorte que l'intégrale converge lorsque $r_{24} \rightarrow 0$ à $\mathbf{R}_{24} - \mathbf{R}_{13}$ non nul fixé. De plus, elle converge vers une valeur non nulle (par exemple vers π pour $s = 0$).

[66] Si l'on prend une fonction $D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4)$ sans singularité en $\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4 = \mathbf{0}$, par exemple $\Phi_0^{(0)}(x, u) = \exp(-\kappa|x|)$ dans l'ansatz (20) comme dans la note [59] pour $\ell = L = 0$, on trouve par un calcul explicite que $\mathcal{A}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_{13}, \mathbf{r}_4 - \mathbf{R}_{13})$ est de valeur finie en $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_4 = \mathbf{R}_{24}$.

[67] Il y a ici un paradoxe. Comme le montre l'Eq. (3), l'action de l'hamiltonien H sur $\psi_{24}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)$ conduit à une distribution $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)$, et non à une distribution $\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4)$. Cela montre que ψ_{24} est la composante dite 1 - 3 de Faddeev, et qu'elle ne peut avoir aucune singularité en $1/r_{24}$. Comment \mathcal{A}_{13} peut-elle alors avoir une telle singularité? Comme d'habitude, la réponse se trouve dans l'ordre des limites. À une valeur fixée non nulle de r_{13} , il est évident que la fonction $u(r_{13})$ de l'équation (10), par sa dépendance en q_{13} donnée par l'équation (11), fournit une coupure ultraviolette d'ordre $1/r_{13}$ dans l'espace des vecteurs d'onde $(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_4)$, de sorte que ψ_{24} ne peut diverger lorsque $r_{24} \rightarrow 0$. Mais si l'on prend d'abord la limite $r_{13} \rightarrow 0$, la fonction $u(r_{13})$ est remplacée par son équivalent $1/(4\pi r_{13})$ qui ne dépend pas de l'impulsion : la coupure en vecteur d'onde est rejetée à l'infini et $\lim_{r_{13} \rightarrow 0} (r_{13} \psi_{24})$ peut maintenant diverger comme $1/r_{24}$ en $r_{24} = 0$.

[68] Ce raisonnement peut être transposé au cas de quatre bosons identiques, lorsque trois d'entre eux convergent au même point dans la voie du mouvement relatif à trois corps où se produit l'effet Efimov. Comme cette voie a un moment cinétique nul et une parité paire, cela implique que, dans une telle configuration, le moment cinétique interne total ℓ du système à quatre corps est porté par le mouvement relatif du quatrième boson par rapport au centre de masse des trois premiers bosons, ce qui conduit à une parité globale $(-1)^{\ell}$. Ceci montre que, pour $\ell \neq 0$, dans la limite unitaire, le système à quatre bosons dans un piège harmonique isotrope devrait avoir des états en

interaction dans le secteur de parité $(-1)^{\ell+1}$ qui sont immunisés contre l'effet Efimov à trois corps. De tels états "universels" ont en effet été observés numériquement dans la référence [43], mais pour un moment cinétique interne total $\ell = 0$: cette observation ne peut être expliquée par notre raisonnement.

[69] Si, pour simplifier, on omet d'écrire les autres variables, l'intégrale sur θ' , de la forme $\int_0^{\pi} d\theta' \tilde{K}(\theta, \theta') \tilde{\Phi}(\theta')$, est approximée par $\sum_{j=1}^{n_{\theta}} w(\theta_j) \tilde{K}(\theta_i, \theta_j) \tilde{\Phi}(\theta_j)$, où $(\theta_i)_{1 \leq i \leq n_{\theta}}$ est l'ensemble des valeurs discrètes (non équidistantes) de θ proposées par la méthode de Gauss-Legendre à n_{θ} points et $w(\theta_i)$ les poids correspondants. Pour rendre hermitienne la forme discrétisée de $\tilde{M}(s=0)$ qui en résulte, il suffit de prendre comme inconnues $w(\theta_j)^{1/2} \tilde{\Phi}(\theta_j)$ et de multiplier l'équation aux valeurs propres par $w(\theta_i)^{1/2}$, ce qui conduit au noyau $[w(\theta_i)w(\theta_j)]^{1/2} \tilde{K}(\theta_i, \theta_j)$ sans modifier le spectre.

[70] Avec les notations de la note précédente, on prend $[dx w_x(\theta_i)]^{1/2} \tilde{\Phi}_{m_z}^{(\ell)}(x, \theta_i)$ comme inconnues dans la zone $\rho > \rho_0$, et $[dt w(\psi_i)]^{1/2} \rho_0 e^t \tilde{\Phi}_{m_z}^{(\ell)}(x(t, \psi_i), \theta(t, \psi_i))$ comme inconnues dans la zone $\rho < \rho_0$. Ainsi, après multiplication de l'équation aux valeurs propres par $[dx w_x(\theta_i)]^{1/2}$ ou $[dt w(\psi_i)]^{1/2} \rho_0 e^t$, on obtient une matrice hermitienne. La dépendance en x du poids $w_x(\theta_i)$ résulte de la dépendance en x de θ_{\max} .

[71] Le triangle correspond à la zone $1/\sqrt{2} \leq \Omega \leq \Lambda_{L=1}(0, \alpha)$.

[72] La même conclusion doit s'appliquer aux valeurs propres Ω de la Fig. 3 [parité $(-1)^{\ell+1}$] qui sont au-dessus du bord supérieur externe du continuum, ainsi que pour celles qui sont au-dessous du bord inférieur externe du continuum (il en existe pour α proche de un).

[73] Il est explicitement supposé ici qu'une racine potentielle imaginaire pure s_4 de l'Eq. (22) existerait au-dessus d'une certaine valeur seuil $\alpha_c(2; 2)$ du rapport de masse α , avec $s_4 = 0$ au seuil. On peut cependant imaginer un autre scénario, avec s_4 toujours une fonction continue de α : s_4 existerait pour tout rapport de masse $\alpha \in [1, \alpha_c(2; 1)]$, avec $\alpha_c(2, 1) = 13,6069 \dots$ le seuil de l'effet Efimov à trois corps, auquel cas s_4 n'aurait pas besoin de s'annuler pour certaines valeurs de α . Ce scénario est cependant exclu (i) par les résultats expérimentaux pour le gaz unitaire de fermions de spin 1/2, qui a un rapport de masse $\alpha = 1$ (aucune perte significative à quatre corps n'est observée) et (ii) par les calculs numériques dans la conjecture sur le quatrième coefficient d'amas b_4 de ce gaz unitaire de fermions dans l'Appendice B [on trouve pour $\alpha = 1$ que l'opérateur $M(s)$ est positif pour tout s imaginaire pur, ce qui exclut l'existence d'une racine s_4].

[74] Notons que $\Delta B_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}}$ est en fait égal à $B_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}}$ dès que les deux indices sont différents de zéro, puisque le grand potentiel du gaz parfait est la somme du grand potentiel de chaque composante de spin, et qu'aucun terme croisé $\uparrow\downarrow$ ne peut apparaître dans le développement en amas qui en résulte.

[75] Elle peut être déduite de l'Eq. (7) de la référence [29] par intégration par parties.

[76] Pour $\ell = 1$ dans le secteur de parité paire, la valeur minimale de A donnée par l'Eq. (B19) correspond à $x = x' \rightarrow +\infty$, $u = u' = 0$ dans l'Eq. (B14). Utilisons la notation $O = \langle \ell = 1, m_z = 0 | \mathcal{D}^{-1/2} K^{(\ell=1)} \mathcal{D}^{-1/2} | \ell = 1, m'_z = 0 \rangle$ et introduisons l'opérateur T dans l'espace des fonctions de la variable x tel que, dans la notation

de Dirac, $\langle x|T|x' \rangle = A/\text{ch}(x-x')$. Alors l'Eq. (B14) peut être réécrite comme $|\langle x, u|O|x', u' \rangle| \leq \langle x|T|x' \rangle$. Pour tout entier n supérieur strictement à 1, nous injectons $n-1$ relations de fermeture et utilisons l'inégalité triangulaire pour obtenir $|\langle x, u|O^n|x', u' \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}} dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{-1}^1 du_1 \dots du_{n-1} \langle x|T|x_1 \rangle \dots \langle x_{n-1}|T|x' \rangle = 2^{n-1} \langle x|T^n|x' \rangle$. Alors $|\langle x, u|[(\mathbb{1} + O)^{-1} - \mathbb{1}]|x', u' \rangle| \leq \langle x|\frac{T}{\mathbb{1}-2T}|x' \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x')} \frac{t_k}{1-2t_k}$, où nous avons utilisé un développement en série en puissances de O et où $t_k = \int_{\mathbb{R}} dy \frac{A}{\text{ch } y} e^{iky} = \pi A/\text{ch}(k\pi/2)$ est le spectre de T . En calculant l'intégrale sur k et en combinant le résultat avec l'identité $\langle \ell = 1, m_z = 0|K_{\text{inv}}^{(\ell=1)}|\ell = 1, m'_z = 0 \rangle = \mathcal{D}^{-1/2}[(\mathbb{1} + O)^{-1} - \mathbb{1}]\mathcal{D}^{-1/2}$, on obtient l'Eq. (B20).

[77] Pour terminer le calcul, on peut utiliser l'hypothèse faible que les éléments de la matrice de K_{inv} sont uniformément bornés, que $|d_1(x) - d_1(x')| \left(\frac{e^{x+x'}}{4 \text{ch } x \text{ch } x'}\right)^{1/4} \leq |d_1(x)| \left(\frac{e^x}{2 \text{ch } x}\right)^{1/4} + |d_1(x')| \left(\frac{e^{x'}}{2 \text{ch } x'}\right)^{1/4}$, en vertu de $\exp(x') \leq 2 \text{ch } x'$ ou $\exp(x) \leq 2 \text{ch } x$ et de l'inégalité triangulaire $|d_1(x) - d_1(x')| \leq |d_1(x)| + |d_1(x')|$. On peut ensuite intégrer sur x' ou sur x (selon le terme considéré), en utilisant $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx'}{\text{ch}(x-x')} = \pi$, et on est finalement confronté à l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} dx |d_1(x)| \left(\frac{e^x}{2 \text{ch } x}\right)^{1/4} < +\infty$.

[78] La valeur $k = 0$, c'est-à-dire $n = 0$, ne doit pas être incluse. Si on prend directement la limite $k \rightarrow 0$ dans l'Eq. (B30) on obtient le résultat absurde $\phi_{k=0}(t) = 0$. La manière correcte de prendre la limite est de diviser d'abord l'Eq. (B30) par ik . On trouve alors que $\phi_{k=0}(t)$ diverge comme $2t - b(S)$ quand $t \rightarrow -\infty$, donc ne satisfait pas à la condition aux limites (B35).

[79] Dans le numérique, nous extrapolons à $1/t_{\text{min}} = 0$ en utilisant un ajustement cubique en $1/t_{\text{min}}$, avec des résultats disponibles jusqu'aux valeurs minimales $1/|t_{\text{min}}| = 1/200$ pour $\ell = 0$ et $1/|t_{\text{min}}| = 1/30$ pour $\ell > 0$. Pour $\ell = 0$, comme test du formalisme à t_{min} fini, nous avons utilisé l'équation (B48) pour prédire l'erreur numérique dominante sur $\Delta B_{2,2}^{\text{conj}(\ell=0)}(0^+)$ due à la troncature t_{min} , c'est-à-dire $(8\pi|t_{\text{min}}|)^{-1} \int_{\mathbb{R}} dS [b(\infty) - b(S)] = 2,3(1)/(8\pi|t_{\text{min}}|)$, qui est en accord avec le calcul numérique direct. Pour obtenir $b(S)$ à tout S , et donc l'intégrale de $b(\infty) - b(S)$, nous avons calculé numériquement les vecteurs propres correspondant aux premières valeurs propres Ω_n ($n \geq 1$) de $M^{(\ell=0)}(s = iS)$, et nous avons ajusté les fonctions correspondantes $\phi_n(t)$ [définies comme dans l'Eq. (91)] par une fonction sinusoidale à trois paramètres $t \mapsto A_n \sin(k_n t - \theta_n/2)$ comme suggéré par l'Eq. (B30), où A_n est une amplitude complexe, k_n un nombre d'onde effectif et θ_n un déphasage. Les ajustements sont très bons, les valeurs obtenues de k_n s'accordent très bien avec la relation de dispersion (84); en posant $\theta(k_n, S) = \theta_n$, on trouve aussi que la condition de quantification (B36) est bien satisfaite; enfin, en extrapolant θ_n/k_n à $n = 0$ linéairement en k_n^2 , on obtient $b(S)$. Pour être complet, on note que $b(S)$ est proche d'une gaussienne d'amplitude négative sur un fond non nul $b(\infty)$, c'est-à-dire $b(\infty) - b(S) \simeq 1,05 \times \exp(-0,668S^2)$. Comme la variable t dans l'Eq. (91) dépend de ρ_0 , il en va de même pour $b(\infty)$. Dans nos calculs, $\rho_0 = 2/5$ et nous trouvons $b(\infty) = 3,84(1)$. Plus analytiquement, on s'attend à ce qu'à grand S , le déphasage

$\theta(k, S)$ soit imposé par la troisième contribution dans l'Eq. (69), les deux premières devenant rapidement oscillantes et négligeables. On peut alors utiliser les résultats analytiques de la note [60]: en introduisant le déphasage $\theta_\psi(k)$ tel que $\psi(t) = \sin[kt - \theta_\psi(k)/2] + o(1)$ pour $t \rightarrow -\infty$, on s'attend à ce que $\theta(k, S) \rightarrow \theta_\psi(k) - 2k \ln(\rho_0/\sqrt{2})$ pour $S \rightarrow \infty$, donc $b(\infty) = b_\psi - 2 \ln(\rho_0/\sqrt{2})$ avec $b_\psi \simeq 1,33$. Nos résultats numériques répondent à ces attentes, ce qui constitue un bon test.

- [80] En pratique, nous avons utilisé la méthode de Gauss-Legendre avec jusqu'à 59 points, en utilisant θ plutôt que $u = \cos \theta$ comme variable d'intégration, avec le changement de fonction (A3) et l'inclusion du jacobien supplémentaire $(\sin \theta \sin \theta')^{1/2}$ dans le noyau matriciel.
- [81] L'intégration de $\Lambda_\ell(iS)/\cos \nu - 1$ sur $S \in \mathbb{R}$ en utilisant la première ligne de l'Eq. (78) conduit à $\int_{-1}^1 du P_\ell(u)/(1 + u \sin \nu)$. La limite à grand ℓ de cette intégrale reproduit exactement l'Eq. (42) de la référence [28], comme nous l'avons vérifié en utilisant $P_\ell(u) = (2^\ell \ell!)^{-1} \frac{d^\ell}{du^\ell} [(u^2 - 1)^\ell]$, en intégrant ℓ fois par parties puis en utilisant la méthode de Laplace.
- [82] Le produit des quatre opérateurs unitaires sous la trace représente, dans l'espace de Hilbert à une particule, une rotation d'angle δ autour d'un axe quelconque. Il est facile d'évaluer explicitement cette trace en fonction des angles $\theta, \theta', \phi, \phi'$ dans le cas $\ell = 1$, où chaque opérateur peut être remplacé par une matrice de rotation 3×3 bien connue dans l'espace tridimensionnel habituel. Ceci conduit à l'expression (B57).
- [83] De plus, l'espace de Hilbert a été limité en référence [13] aux chets $|x, u, \ell, m_z\rangle$ avec $x > 0$, comme la condition de symétrie (B58) le permet, ce qui revient à ajouter un projecteur supplémentaire $\mathcal{P}_{x>0}$. Cela complique les choses car $\mathcal{P}_{x>0}$ et U ne commutent pas. Heureusement, pour calculer les traces des opérateurs, on peut utiliser les propriétés $UP = PU = P$, $\mathcal{P}_{x<0} = U\mathcal{P}_{x>0}U$ et $\mathcal{P}_{x<0} + \mathcal{P}_{x>0} = \mathbb{1}$, ainsi que l'invariance de la trace par permutation circulaire des opérateurs, de sorte que $\text{Tr}(\mathcal{P}_{x<0}PAP) = \text{Tr}(U\mathcal{P}_{x>0}UPAP) = \text{Tr}(\mathcal{P}_{x>0}PAP) = \frac{1}{2} \text{Tr}(PAP) = \frac{1}{2} \text{Tr}(AP)$ et $\text{Tr}(APP_{x<0}PB) = \text{Tr}(APP_{x>0}PB) = \frac{1}{2} \text{Tr}(APB)$, où A et B sont des opérateurs quelconques
- [84] On écrit l'opérateur M de la référence [13] avant sa restriction au sous-espace de symétrie (B58) sous la forme $\mathcal{D} + K_0 + UK_0U$; après prise en compte de la symétrie et restriction à l'espace de Hilbert des chets $|x, u, \ell, m_z\rangle$ avec $x > 0$, il devient $\mathcal{P}_{x>0}[\mathcal{D} + (1 + U)K_0(1 + U)]\mathcal{P}_{x>0}$. Les première, deuxième et troisième contributions au second membre de l'Eq. (B60) sont respectivement données par $-(\ell + 1/2)/(2\pi)$ fois l'intégrale sur $S \in \mathbb{R}$ de $\text{Tr}_{\ell, \varepsilon}(\tilde{K}_0U)$, de $-\frac{1}{2} \text{Tr}_{\ell, \varepsilon}[\tilde{K}_0(U\tilde{K}_0U)]$ et de $-\text{Tr}_{\ell, \varepsilon}(\tilde{K}_0^2U)$, où nous avons posé $\tilde{K}_0 \equiv \mathcal{D}^{-1}K_0$ et l'indice ℓ, ε signifie que la trace est restreinte aux états $|\ell, m\rangle$ avec $(-1)^m = \varepsilon$. On notera que $U\mathcal{D}U = \mathcal{D}$ et $[\mathcal{P}_{x>0}, \mathcal{D}] = 0$.
- [85] La fonction indépendante de ℓ en facteur du sinus dans l'intégrande de l'Eq. (B62) est une fonction lisse de δ sur $[0, \pi]$, et toutes ses dérivées d'ordre pair (y compris d'ordre zéro) s'annulent en $\delta = 0$ et toutes ses dérivées d'ordre impair s'annulent en $\delta = \pi$. Par intégration par parties répétée (en intégrant toujours la fonction sinus), le terme tout intégré s'annule aux bords et on sort à chaque étape un facteur $(\ell + 1/2)^{-1}$. Donc

l'équation (B62) est un $O[(\ell + 1/2)^{-n}]$ quand $\ell \rightarrow +\infty$,
pour tout entier n .