



HAL
open science

Correspondance de Jacquet-Langlands locale et congruences modulo ℓ

Alberto Mínguez, Vincent Sécherre

► **To cite this version:**

Alberto Mínguez, Vincent Sécherre. Correspondance de Jacquet-Langlands locale et congruences modulo ℓ . 2015. hal-01176189v1

HAL Id: hal-01176189

<https://hal.science/hal-01176189v1>

Preprint submitted on 15 Jul 2015 (v1), last revised 11 Feb 2021 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CORRESPONDANCE DE JACQUET-LANGLANDS LOCALE ET CONGRUENCES MODULO ℓ

par

Alberto Mínguez & Vincent Sécherre

Abstract. — Let F be a non-Archimedean local field of residual characteristic p , and ℓ be a prime number different from p . We consider the local Jacquet-Langlands correspondence between ℓ -adic discrete series of $GL_n(F)$ and an inner form $GL_m(D)$. We show that it respects the relationship of congruence modulo ℓ . More precisely, we show that two integral ℓ -adic discrete series of $GL_n(F)$ are congruent modulo ℓ if and only if the same holds for their Jacquet-Langlands transfers to $GL_m(D)$.

2010 Mathematics Subject Classification: 22E50

Keywords and Phrases: Modular representations of p -adic reductive groups, Jacquet-Langlands correspondence, Speh representations, Congruences mod ℓ

1. Introduction

1.1.

Soit F un corps localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p , soit H le groupe linéaire général $GL_n(F)$, $n \geq 1$, et soit G une forme intérieure de H sur F . Celle-ci est un groupe de la forme $GL_m(D)$, où m est un diviseur de n et D une algèbre à division de centre F , de degré réduit noté d , tels que $md = n$. Notons $\mathcal{D}(G, \mathbb{C})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations lisses complexes irréductibles, essentiellement de carré intégrable, de G . La correspondance de Jacquet-Langlands locale ([20, 11, 2]) est une bijection :

$$\pi : \mathcal{D}(G, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{D}(H, \mathbb{C})$$

caractérisée par une identité de caractères sur les classes de conjugaison elliptiques régulières.

1.2.

Si l'on fixe un nombre premier ℓ différent de p et que l'on passe aux représentations ℓ -adiques, en fixant un isomorphisme de corps entre \mathbb{C} et une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ du corps des nombres ℓ -adiques, on obtient une bijection :

$$\tilde{\pi}_\ell : \mathcal{D}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow \mathcal{D}(H, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

où $\mathcal{D}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est l'ensemble obtenu à partir de $\mathcal{D}(G, \mathbb{C})$ par extension des scalaires de \mathbb{C} à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. On a alors, pour les représentations ℓ -adiques, les notions de représentation entière et de réduction mod ℓ , et l'on peut étudier la compatibilité de $\tilde{\pi}_\ell$ vis-à-vis de la réduction mod ℓ . L'analogue

de ce problème pour la correspondance de Langlands locale a été étudié par Vignéras [26], puis Dat [9] et Bushnell-Henniart [6].

1.3.

Enonçons dès maintenant le principal résultat de cet article. Rappelons que deux représentations ℓ -adiques irréductibles entières de G sont dites *congruentes mod ℓ* si leurs réductions mod ℓ sont identiques.

Théorème 1.1. —

- (1) Une représentation de $\mathcal{D}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est entière si et seulement si son image par $\tilde{\pi}_\ell$ l'est.
- (2) Deux représentations entières de $\mathcal{D}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ sont congruentes mod ℓ si et seulement si leurs images par $\tilde{\pi}_\ell$ le sont.

Passant au dual de Zelevinski, et désignant par $\mathcal{Z}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ l'ensemble des classes de représentations de Speh de G , la correspondance $\tilde{\pi}_\ell$ détermine une bijection :

$$(1.1) \quad \mathcal{Z}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow \mathcal{Z}(H, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

compatible aux congruences mod ℓ . Par restriction à l'ensemble $\mathcal{Z}_1(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ des représentations ℓ -super-Speh, c'est-à-dire dont la réduction modulo ℓ est irréductible et dont le support cuspidal est supercuspidal, on obtient une bijection de $\mathcal{Z}_1(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ sur $\mathcal{Z}_1(H, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, elle-même induisant par réduction mod ℓ une bijection entre représentations super-Speh de G et de H , à coefficients dans le corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ (corollaire 5.9).

Quand G est le groupe multiplicatif A d'une F -algèbre à division de degré réduit n , c'est-à-dire quand $m = 1$, toutes les représentations irréductibles de A sont super-Speh, et on retrouve la correspondance de Jacquet-Langlands locale mod ℓ de Dat [10] entre $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations irréductibles de A et $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations super-Speh de H .

1.4.

La preuve du théorème 1.1 est en partie inspirée de celle de [10, Théorème 1.2.4]. Plutôt que de travailler directement avec les représentations de $\mathcal{D}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, on applique l'involution de Zelevinski de façon à passer à $\mathcal{Z}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ – voir cependant le paragraphe 1.7. Toutefois, des modifications substantielles doivent être apportées pour traiter le cas des représentations de $\mathcal{Z}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ qui ne sont pas ℓ -super-Speh. Pour expliquer la marche suivie, nous devons décrire plus en détail la structure des représentations de Speh ℓ -adiques de G . Etant donnée une représentation entière $\tilde{\pi} \in \mathcal{Z}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, il existe un unique diviseur r de m et une unique représentation irréductible cuspidale $\tilde{\sigma}$ de $\mathrm{GL}_{mr-1}(\mathbb{D})$ tels que $\tilde{\pi}$ soit l'unique sous-représentation irréductible, notée $Z(\tilde{\sigma}, r)$, de l'induite parabolique normalisée :

$$(1.2) \quad \tilde{\sigma} \times \tilde{\sigma}\nu_{\tilde{\sigma}} \times \cdots \times \tilde{\sigma}\nu_{\tilde{\sigma}}^{r-1}$$

où $\nu_{\tilde{\sigma}}$ est un caractère non ramifié associé à $\tilde{\sigma}$ (paragraphe 2.2). La représentation $\tilde{\sigma}$ est entière, et sa réduction mod ℓ prend la forme :

$$\mathbf{r}_\ell(\tilde{\sigma}) = \sigma + \sigma\nu + \cdots + \sigma\nu^{a-1}$$

où $a = a(\tilde{\sigma})$ est un diviseur de d et σ une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_{mr-1}(\mathbb{D})$, et où ν est le caractère valeur absolue de la norme réduite. La représentation σ n'est pas uniquement déterminée par $\tilde{\sigma}$, mais il y a un unique entier $k = k(\sigma)$ divisant $mr-1$ tels que σ apparaisse comme sous-quotient de l'induite parabolique d'une représentation irréductible supercuspidale

de $\mathrm{GL}_s(\mathbb{D}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_s(\mathbb{D})$, où l'entier s vérifie $kr_s = m$. (Autrement dit, $k(\sigma)$ est le nombre de termes du support supercuspidal de σ .) On pose alors :

$$w(\tilde{\pi}) = a(\tilde{\sigma})k(\sigma)$$

qui est un diviseur de n . Les représentations ℓ -super-Speh sont exactement celles pour lesquelles on a $w(\tilde{\pi}) = 1$.

Dans le cas déployé, c'est-à-dire lorsque d vaut 1, l'entier $a(\tilde{\sigma})$ est toujours égal à 1, c'est-à-dire que la réduction modulo ℓ d'une représentation irréductible cuspidale ℓ -adique de H est toujours irréductible. A l'autre extrême, lorsque m vaut 1, l'entier $k(\sigma)$ vaut toujours 1. Pris séparément, ces deux entiers ne peuvent donc pas être invariants par la correspondance de Jacquet-Langlands. Nous verrons qu'en revanche leur produit $w(\tilde{\pi})$ l'est, et que c'est une quantité importante dans la preuve du théorème 1.1. En outre, l'invariant $w(\tilde{\pi})$ apparaît naturellement lorsque l'on compte – à torsion non ramifiée près – le nombre de représentations de Speh entières de G congrues à $\tilde{\pi}$ modulo ℓ . Plus précisément, ce nombre ne dépend que de $w(\tilde{\pi})$ et du nombre $n(\tilde{\pi})$ de caractères non ramifiés de G laissant $\tilde{\pi}$ invariante par torsion.

Proposition 1.2. — *Soit $\tilde{\pi}$ une représentation entière de $\mathcal{Z}(\mathrm{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, et soit $c(\tilde{\pi})$ la plus grande puissance de ℓ divisant $q^{n(\tilde{\pi})} - 1$. L'ensemble des classes de torsion (définition 2.1) de représentations entières de $\mathcal{Z}(\mathrm{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ qui sont congrues à $\tilde{\pi}$ est fini, de cardinal noté $t(\tilde{\pi})$, et on a :*

$$t(\tilde{\pi})w(\tilde{\pi}) = \begin{cases} c(\tilde{\pi}) & \text{si } w(\tilde{\pi}) = 1, \\ c(\tilde{\pi}) - 1 & \text{si } 1 < w(\tilde{\pi}) < \ell, \\ c(\tilde{\pi})(\ell - 1)\ell^{-1} & \text{si } w(\tilde{\pi}) \geq \ell. \end{cases}$$

Cette formule généralise et précise des résultats de Vignéras [26] et de Dat [10] ne fournissant que la majoration $t(\tilde{\pi}) \leq c(\tilde{\pi})$, qui est une égalité si et seulement si $\tilde{\pi}$ est ℓ -super-Speh. La proposition 1.2 a été prouvée dans [21] dans le cas où $\tilde{\pi}$ est cuspidale (voir le théorème 3.3 plus bas). Le passage au cas général, immédiat lorsque G est égal à H (voir [10, Lemme 2.2.4]), nécessite une propriété de congruence des représentations de Speh (voir le paragraphe 1.6).

1.5.

A partir de là, la preuve du théorème 1.1 se fait par récurrence sur $w(\tilde{\pi})$. Comme au paragraphe 1.3, fixons une \mathbb{F} -algèbre à division de degré réduit n et notons A son groupe multiplicatif. Il est préférable, à partir de maintenant, de prendre A plutôt que H comme groupe de référence pour la correspondance de Jacquet-Langlands. Considérons :

$$(1.3) \quad \mathcal{Z}(\mathrm{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow \mathrm{Irr}(\mathrm{A}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

la composée de (1.1) avec la réciproque de la bijection obtenue de (1.1) en choisissant $\mathrm{G} = \mathrm{A}$. La théorie du caractère de Brauer de Dat permet de transporter les relations de congruence mod ℓ de G à A , c'est-à-dire que deux représentations entières de $\mathcal{Z}(\mathrm{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ qui sont congruentes mod ℓ ont des images dans $\mathrm{Irr}(\mathrm{A}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ qui sont congruentes modulo ℓ . Puis, un argument de comptage fondé sur la proposition 1.2 montre que la bijection (1.3) préserve l'invariant w et qu'elle induit par réduction mod ℓ , pour tout entier $w \geq 0$, une application injective :

$$\mathbf{X}_w(\mathrm{G}, \overline{\mathbb{F}}_\ell) \rightarrow \mathbf{X}_w(\mathrm{A}, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$$

où $\mathbf{X}_w(\mathrm{G}, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ est l'ensemble des réductions modulo ℓ de représentations de Speh entières $\tilde{\pi}$ telles que $w(\tilde{\pi}) = w$. La correspondance de Jacquet-Langlands préservant le niveau normalisé, et les éléments de $\mathbf{X}_w(\mathrm{G}, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ de niveau normalisé fixé étant – à torsion non ramifiée près – en nombre

fini, un second argument de comptage (proposition 3.8) implique que toutes ces injections sont bijectives, ce qui met fin à la preuve du théorème principal.

1.6.

L'argument de comptage évoqué ci-dessus consiste à compter, à torsion près par un caractère non ramifié, le nombre de réductions mod ℓ de représentations entières $\tilde{\pi}$ de $\mathcal{Z}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ d'invariant w et de niveau normalisé fixés. Grâce à la théorie des types de Bushnell-Kutzko [17], qui permet de décrire une représentation irréductible cuspidale sous la forme d'une induite compacte, il existe une formule décrivant explicitement la réduction modulo ℓ d'une représentation irréductible cuspidale ℓ -adique entière. Mais pour les représentations de Speh, la théorie des types est moins précise, et nous ne connaissons pas de formule explicite pour la réduction modulo ℓ d'une telle représentation (voir toutefois la conjecture 7.7). Le comptage se fait donc de façon détournée, en se ramenant à un comptage de représentations cuspidales, au moyen du résultat suivant.

Proposition 1.3. — *Soient $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ deux représentations irréductibles cuspidales ℓ -adiques entières, et soit un entier $r \geq 1$. Pour que les représentations $Z(\tilde{\sigma}_1, r)$ et $Z(\tilde{\sigma}_2, r)$ soient congrues mod ℓ , il faut et il suffit que les représentations $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ soient congrues mod ℓ .*

Ce résultat permet aussi de déduire immédiatement la proposition 1.2 à partir du cas cuspidal traité dans [21].

En fait, nous prouvons un résultat plus général, qui est une propriété remarquable de compatibilité de la classification de Zelevinski de [16] à la réduction modulo ℓ . Voir le paragraphe 7.1 pour les termes non définis, et le théorème 7.3.

Théorème 1.4. — *Soient $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ deux représentations irréductibles cuspidales ℓ -adiques entières congruentes mod ℓ , et soit μ un multisegment formel. Alors les représentations $Z(\mu \boxtimes \tilde{\sigma}_1)$ et $Z(\mu \boxtimes \tilde{\sigma}_2)$ sont congruentes mod ℓ .*

1.7.

Terminons cette introduction en remarquant que, dans la preuve du théorème principal (voir le paragraphe 1.4), il n'est pas nécessaire de passer par les représentations de Speh : contrairement à [10], qui utilise le fait que les éléments de $\mathbf{X}_1(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ sont irréductibles, notre argument fonctionne encore si l'on utilise $\mathcal{D}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Dans ce cas, la réduction modulo ℓ de $L(\tilde{\sigma}, r)$ – l'unique quotient irréductible de (1.2) – n'est plus irréductible en général, même si $w(\tilde{\sigma}) = 1$, mais notre second argument de comptage – qui porte de toutes façons sur des ensembles $\mathbf{X}_w(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ de représentations non irréductibles en général, est toujours valable.

Nous avons préféré utiliser les représentations de Speh d'une part pour conserver une certaine continuité avec [10] et en particulier obtenir le corollaire 5.9, qui généralise à une forme intérieure quelconque la correspondance de Jacquet-Langlands locale mod ℓ de Dat, d'autre part parce que le théorème 7.3 s'exprime au moyen de la classification à la Zelevinski plutôt que de $\mathcal{D}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

2. Préliminaires

Fixons un nombre premier p et un corps localement compact non archimédien F de caractéristique résiduelle p . On notera q le cardinal du corps résiduel de F .

Fixons un corps algébriquement clos R de caractéristique différente de p . Toutes les représentations considérées aux paragraphes 2.1 et 2.2 sont des R -représentations lisses de groupes localement profinis [25]. On omettra de préciser R lorsque cela n'entraînera aucune confusion.

2.1. Notations

Fixons une F -algèbre à division centrale D de dimension finie, et de degré réduit noté d . Pour tout $m \geq 1$, on note $M_m(D)$ la F -algèbre des matrices carrées de taille m à coefficients dans D et $GL_m(D)$ le groupe de ses éléments inversibles, noté aussi G_m . Celui-ci est un groupe localement profini. On convient de noter G_0 le groupe trivial.

Pour tout entier $m \geq 0$, notons $\text{Irr}(G_m, R)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de G_m et $\mathcal{R}(G_m, R)$ le groupe de Grothendieck des représentations de longueur finie de G_m , qu'on identifie au groupe abélien libre de base $\text{Irr}(G_m, R)$. On pose :

$$\text{Irr}(R) = \bigcup_{m \geq 0} \text{Irr}(G_m, R), \quad \mathcal{R}(R) = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{R}(G_m, R).$$

Si π est une représentation de longueur finie de G_m , on note $[\pi]$ son image dans $\mathcal{R}(G_m, R)$ et on pose $\deg(\pi) = m$, qu'on appelle la *degré* de π , ce qui fait de $\mathcal{R}(R)$ un \mathbb{Z} -module gradué. Si en outre $\sigma \in \text{Irr}(G_m, R)$, on note $[\pi : \sigma]$ la multiplicité de σ dans π .

Si $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$ est une *composition* de m , c'est-à-dire une famille finie d'entiers positifs de somme m , il lui correspond le sous-groupe de Levi standard M_α de G_m constitué des matrices diagonales par blocs de tailles m_1, \dots, m_r respectivement, identifié à $G_{m_1} \times \dots \times G_{m_r}$. On note P_α le sous-groupe parabolique de G_m engendré par M_α et les matrices triangulaires supérieures.

On fixe une racine carrée de q dans R . On note i_α le foncteur d'induction parabolique (normalisé relativement au choix de cette racine) de M_α à G_m le long de P_α , et on note r_α son adjoint à gauche, c'est-à-dire le foncteur de restriction parabolique lui correspondant. Ces foncteurs sont exacts et préservent le fait d'être de longueur finie.

Si, pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, on a une représentation π_i de G_{m_i} , on note :

$$(2.1) \quad \pi_1 \times \dots \times \pi_r = i_\alpha(\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_r).$$

Si les π_i sont de longueur finie, la semi-simplifiée de cette induite ne dépend que de $[\pi_1], \dots, [\pi_r]$. Ceci fait de $\mathcal{R}(R)$ une \mathbb{Z} -algèbre commutative graduée (voir [16, Proposition 2.6]).

Au moyen des foncteurs de restriction parabolique, on définit également une comultiplication :

$$\pi \mapsto \sum_{k=0}^m r_{(k, m-k)}(\pi) \in \mathcal{R}(R) \otimes \mathcal{R}(R)$$

faisant de $\mathcal{R}(R)$ une \mathbb{Z} -bigèbre commutative.

Si π est une représentation et χ un caractère — c'est-à-dire un morphisme de groupes à valeurs dans R^\times et de noyau ouvert — de G_m , il existe un unique caractère μ de F^\times tel que χ soit égal à $\mu \circ \text{Nrd}$, où $\text{Nrd} : G_m \rightarrow F^\times$ désigne la norme réduite. On note $\pi \cdot \mu$ ou $\pi\chi$ la représentation tordue $g \mapsto \chi(g)\pi(g)$.

2.2. Représentations cuspidales et représentations de Speh

Pour les notions de représentation irréductible cuspidale et supercuspidale de G_m , $m \geq 1$, on renvoie le lecteur à [16].

Soit σ une représentation irréductible cuspidale de degré $m \geq 1$. Il lui correspond deux entiers $n(\sigma), s(\sigma) \geq 1$ (voir [17, 3.4]). Le premier est le nombre de torsion de σ , c'est-à-dire le nombre de

caractères non ramifiés de G_m laissant σ invariant par torsion ; il est caractérisé par la propriété suivante :

$$(2.2.1) \quad \text{Si } \chi \text{ est un caractère non ramifié de } G_m, \text{ on a } \sigma\chi = \sigma \text{ si et seulement si } \chi^{n(\sigma)} = 1.$$

Le second est défini au moyen de la théorie des types. (Dans le cas où R est le corps des nombres complexes, il peut également être défini par le biais de la correspondance de Jacquet-Langlands [24, §2] ; l'équivalence entre les deux définitions se déduit facilement de ce que la correspondance de Jacquet-Langlands laisse invariant le degré paramétrique de Bushnell-Henniart [5].) On note ν la composée de valeur absolue normalisée de F — donnant à une uniformisante de F la valeur q^{-1} — avec la norme réduite Nrd sur G_m . Le caractère non ramifié :

$$(2.2) \quad \nu_\sigma = \nu^{s(\sigma)}$$

possède la propriété importante suivante.

$$(2.2.2) \quad \text{Si } \sigma' \text{ est une représentation irréductible cuspidale de degré } m' \geq 1, \text{ l'induite } \sigma \times \sigma' \text{ est réductible si et seulement si } m' = m \text{ et } \sigma' \text{ est isomorphe à } \sigma\nu_\sigma \text{ ou à } \sigma\nu_\sigma^{-1}.$$

Un *segment* est un couple $[\sigma, n]$ formé d'une classe d'isomorphisme de représentation irréductible cuspidale σ et d'un entier $n \geq 1$. Dans [16, 7.2], nous associons à un tel segment $[\sigma, n]$ une sous-représentation irréductible de l'induite :

$$(2.3) \quad \sigma \times \sigma\nu_\sigma \times \cdots \times \sigma\nu_\sigma^{n-1}$$

notée $Z(\sigma, n)$. Quand R est le corps des nombres complexes, elle est uniquement déterminée par cette propriété ; sa duale de Zelevinski est une représentation essentiellement de carré intégrable qui est l'unique quotient irréductible de (2.3). Pour un corps R général, nous aurons seulement besoin de la propriété suivante de $Z(\sigma, n)$. Notons m le degré de σ .

$$(2.2.3) \quad \text{Pour tout } k \in \{1, \dots, n-1\}, \text{ on a } \mathbf{r}_{(mk, m(n-k))}(Z(\sigma, n)) = Z(\sigma, k) \otimes Z(\sigma\nu_\sigma^k, n-k).$$

Ajoutons-y deux propriétés de l'application $[\sigma, n] \mapsto Z(\sigma, n)$.

$$(2.2.4) \quad \text{Pour tout caractère } \mu \text{ de } F^\times, \text{ on a } Z(\sigma \cdot \mu, n) = Z(\sigma, n) \cdot \mu.$$

$$(2.2.5) \quad \text{Si } \sigma' \text{ est une représentation irréductible cuspidale et } n' \geq 1 \text{ un entier, alors } Z(\sigma', n') \text{ est isomorphe à } Z(\sigma, n) \text{ si et seulement si les segments } [\sigma, n] \text{ et } [\sigma', n'] \text{ sont égaux.}$$

Définition 2.1. — Soit π une représentation de la forme $Z(\sigma, n)$, avec σ irréductible cuspidale de degré m et $n \geq 1$.

(1) On pose $n(\pi) = n(\sigma)$.

(2) On appelle *classe de torsion* de π l'ensemble $\langle \pi \rangle$ des classes de $\pi\chi$ où χ décrit les caractères non ramifiés de G_m .

Remarque 2.2. — D'après les propriétés (2.2.4) et (2.2.5), l'entier $n(\pi)$ est le nombre de caractères non ramifiés χ de G_m tels que $\pi\chi = \pi$, et $\langle \pi \rangle$ est l'ensemble des représentations $Z(\sigma\chi, n)$ où χ décrit les caractères non ramifiés de G_m , c'est-à-dire l'ensemble des représentations $Z(\sigma', n)$ où σ' décrit les représentations de la classe d'inertie de σ .

Dans le cas où π est cuspidale, c'est-à-dire lorsque $n = 1$, l'ensemble $\langle \pi \rangle$ est la classe d'inertie de π .

Définition 2.3. — Etant donné un entier $m \geq 1$, nous noterons :

$$(2.4) \quad \mathcal{L}(G_m, R)$$

l'ensemble des classes de représentations irréductibles de G_m de la forme $Z(\sigma, r)$ où $r \geq 1$ décrit les diviseurs de m et σ les représentations cuspidales de G_{mr-1} . Les représentations irréductibles de cette forme sont appelées les *représentations de Speh* de G_m .

Etant donné un segment $[\sigma, n]$, l'induite (2.3) a un unique sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré au sens de [16, §8]. Il apparaît avec multiplicité 1, et on le note :

$$\text{St}(\sigma, n).$$

Si $n \geq 2$, pour que ce sous-quotient soit cuspidal, il faut et il suffit que R soit de caractéristique $\ell > 0$ et qu'il existe un entier $r \geq 0$ tel que $n = \omega(\sigma)\ell^r$, avec :

$$(2.5) \quad \omega(\sigma) = \text{l'ordre de } q^{n(\sigma)s(\sigma)} \text{ dans } (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$$

(voir [16, Proposition 6.4]). D'après [16, Corollaire 6.12], si la représentation σ n'est pas supercuspidale, on a $\omega(\sigma) = 1$.

Réciproquement, d'après le théorème de classification [16, Théorème 6.14], étant donnée une représentation irréductible cuspidale σ de G_m , il existe un unique entier naturel :

$$k(\sigma) \geq 1$$

tel que σ apparaisse comme sous-quotient de l'induite parabolique d'une représentation irréductible supercuspidale du sous-groupe de Levi standard $\text{GL}_r(\mathbb{D}) \times \cdots \times \text{GL}_r(\mathbb{D})$ avec $rk(\sigma) = m$. En particulier, σ est supercuspidale si et seulement si $k(\sigma) = 1$.

Plus précisément, il y a une représentation irréductible supercuspidale α de $G_{mk(\sigma)-1}$ telle que σ soit isomorphe à $\text{St}(\alpha, k(\sigma))$. En outre, si π est une représentation supercuspidale de $G_{mk(\sigma)-1}$ telle que σ soit isomorphe à $\text{St}(\pi, k(\sigma))$, alors il existe un $i \in \mathbb{Z}$ tel que π soit isomorphe à $\alpha\nu_\alpha^i$.

2.3. Réduction modulo ℓ

Soient ℓ un nombre premier différent de p et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique du corps des nombres ℓ -adiques. On note $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ son anneau d'entiers et $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ son corps résiduel.

Pour la notion de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation entière de G_m , $m \geq 1$, et de réduction mod ℓ , on renvoie le lecteur à [16] (voir aussi [25, 27]). On note \mathbf{r}_ℓ le morphisme de réduction mod ℓ de $\mathcal{R}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)^e$ — le sous- \mathbb{Z} -module de $\mathcal{R}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ engendré par les représentations entières — dans $\mathcal{R}(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$.

Définition 2.4. — Deux $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles entières de G_m sont dites *congruentes* (modulo ℓ) si elles ont la même réduction mod ℓ .

Rappelons le résultat important suivant (voir [17, Théorème 3.15]).

Théorème 2.5. — Soit $\tilde{\sigma}$ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière de degré m . Il y a une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale σ et un entier $a = a(\tilde{\sigma}) \geq 1$ tels que :

$$(2.6) \quad \mathbf{r}_\ell(\tilde{\sigma}) = \sigma + \sigma\nu + \cdots + \sigma\nu^{a-1}.$$

La représentation σ n'est pas uniquement déterminée par (2.6), mais sa classe inertielle $[G_m, \sigma]$ ne dépend que de la classe inertielle $[G_m, \tilde{\sigma}]$ de $\tilde{\sigma}$.

Proposition 2.6. — (1) Il y a un entier $u \geq 0$ tel que a vérifie la relation :

$$(2.7) \quad n(\tilde{\sigma}) = an(\sigma)\ell^u.$$

Plus précisément, $n(\sigma)$ est le plus grand diviseur de $n(\tilde{\sigma})a^{-1}$ premier à ℓ .

(2) Si $a > 1$, alors le plus grand diviseur de a premier à ℓ est égal à :

$$(2.8) \quad \varepsilon(\sigma) = \text{l'ordre de } q^{n(\sigma)} \text{ dans } (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times.$$

(3) On a l'égalité $s(\sigma) = as(\tilde{\sigma})$.

(4) Soit un entier $i \in \mathbb{Z}$. Pour que $\sigma\nu^i = \sigma$, il faut et il suffit que $\varepsilon(\sigma)$ divise i .

Démonstration. — On renvoie à [17, 3.5] pour les assertions 1 à 3 et à [21, Lemme 4.1] pour la dernière. \square

3. L'invariant w

Dans cette section, nous introduisons un invariant important, discuté au paragraphe 1.4.

3.1. Invariant w et comptage de représentations de Speh congruentes

Dans ce paragraphe, comme au paragraphe 2.3, nous fixons une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière $\tilde{\sigma}$ de degré $m \geq 1$, et un facteur irréductible σ de sa réduction mod ℓ . Notons $a(\tilde{\sigma})$ la longueur de cette réduction mod ℓ .

D'après le paragraphe 2.2, il y a un unique entier $k = k(\sigma)$ divisant m et une représentation irréductible supercuspidale α de G_{mk-1} tels que σ soit isomorphe à $\text{St}(\alpha, k)$.

Lemme 3.1. — L'entier $\varepsilon(\sigma)$ est égal au plus grand diviseur commun à $\varepsilon(\alpha)$ et $s(\alpha)$.

Démonstration. — Soit $i \in \mathbb{Z}$. D'après la proposition 2.6(4), l'entier e divise i si et seulement si $\sigma\nu^i = \sigma$, ce qui arrive, compte tenu de l'unicité du sous-quotient résiduellement non dégénéré, si et seulement si σ est un sous-quotient de :

$$\alpha\nu^i \times \alpha\nu_\alpha\nu^i \times \cdots \times \alpha\nu_\alpha^{k-1}\nu^i.$$

D'après la propriété d'unicité de α , l'entier $\varepsilon(\sigma)$ divise i si et seulement s'il y a un $t \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha\nu^i$ soit isomorphe à $\alpha\nu_\alpha^t$, ce qui, d'après la proposition 2.6(4), équivaut à $i \in \varepsilon(\alpha)\mathbb{Z} + s(\alpha)\mathbb{Z}$. \square

Posons :

$$(3.1) \quad w(\tilde{\sigma}) = k(\sigma)a(\tilde{\sigma}).$$

Dans la terminologie de [10], la représentation $\tilde{\sigma}$ est dite ℓ -supercuspidale si $w(\tilde{\sigma}) = 1$.

Lemme 3.2. — Si $w(\tilde{\sigma}) > 1$, alors son plus grand diviseur premier à ℓ est égal à $\varepsilon(\alpha)$.

Démonstration. — Supposons d'abord que $a(\tilde{\sigma}) > 1$, de sorte que son plus grand diviseur premier à ℓ est $\varepsilon(\sigma)$. Si $k(\sigma) = 1$, alors σ est égale à α et le résultat est immédiat. Sinon, le résultat découle du lemme 3.1 et de (2.5).

Supposons que $k(\sigma) > 1$ et que $a(\tilde{\sigma}) = 1$. D'après [21, Théorème 4.3], l'entier $\varepsilon(\sigma)$ est égal à 1, et le résultat découle à nouveau du lemme 3.1 et de (2.5). \square

L'invariant $w(\tilde{\sigma})$ a été introduit dans [21], dont l'un des principaux résultats est le suivant.

Théorème 3.3. — Soit $\tilde{\sigma}$ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière de G_m . On note $c(\tilde{\sigma})$ la plus grande puissance de ℓ divisant $q^{n(\tilde{\sigma})} - 1$.

(1) L'ensemble des classes d'inertie de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles cuspidales entières de G_m qui sont congrues à $\tilde{\sigma}$ est fini, de cardinal noté $t(\tilde{\sigma})$.

(2) On a :

$$t(\tilde{\sigma})w(\tilde{\sigma}) = \begin{cases} c(\tilde{\sigma}) & \text{si } w(\tilde{\sigma}) = 1, \\ c(\tilde{\sigma}) - 1 & \text{si } 1 < w(\tilde{\sigma}) < \ell, \\ c(\tilde{\sigma})(\ell - 1)\ell^{-1} & \text{si } w(\tilde{\sigma}) \geq \ell. \end{cases}$$

Nous aurons besoin d'un analogue du théorème 3.3 pour les représentations de Speh.

Définition 3.4. — Soit r un diviseur de m , et soit $\tilde{\sigma}$ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale de $G_{mr^{-1}}$. Si $\tilde{\pi}$ est la représentation de Speh $Z(\tilde{\sigma}, r)$ de G_m , on pose $w(\tilde{\pi}) = w(\tilde{\sigma})$.

Le résultat suivant, utilisé dans la section 5, sera démontré dans la section 7.

Proposition 3.5. — Soit $\tilde{\pi}$ une représentation entière de $\mathcal{Z}(G_m, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, et soit $c(\tilde{\pi})$ la plus grande puissance de ℓ divisant $q^{n(\tilde{\pi})} - 1$.

(1) L'ensemble des classes de torsion de représentations entières de $\mathcal{Z}(G_m, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ qui sont congrues à $\tilde{\pi}$ est fini, de cardinal noté $t(\tilde{\pi})$.

(2) On a :

$$t(\tilde{\pi})w(\tilde{\pi}) = \begin{cases} c(\tilde{\pi}) & \text{si } w(\tilde{\pi}) = 1, \\ c(\tilde{\pi}) - 1 & \text{si } 1 < w(\tilde{\pi}) < \ell, \\ c(\tilde{\pi})(\ell - 1)\ell^{-1} & \text{si } w(\tilde{\pi}) \geq \ell. \end{cases}$$

On a l'égalité $n(\tilde{\pi}) = n(\tilde{\sigma})$ d'après la définition 2.1, donc $c(\tilde{\pi}) = c(\tilde{\sigma})$. Pour déduire la proposition 3.5 du théorème 3.3, il suffit donc de montrer que $t(\tilde{\pi}) = t(\tilde{\sigma})$, ce qui sera une conséquence immédiate de la proposition 7.6 (voir le paragraphe 7.5).

3.2. Comptage de réductions mod ℓ de représentations de Speh

Comme dans [21], appelons *réduction mod ℓ* d'une classe inertielle $[G_m, \tilde{\sigma}]$ de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles cuspidales de G_m l'ensemble des réductions mod ℓ des représentations inertielllement équivalentes à $\tilde{\sigma}$ qui sont entières. Fixons un entier $w \geq 1$ et un nombre rationnel $j \geq 0$. Notons :

$$\mathcal{A}_\ell(\mathbb{D}, m, w, j)$$

l'ensemble des réductions mod ℓ de classes inertiellles de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles cuspidales $\tilde{\sigma}$ de degré divisant m , de niveau normalisé inférieur ou égal à j , et telles que $w(\tilde{\sigma}) = w$.

Proposition 3.6 ([21]). — Soient un entier $w \geq 1$ et un nombre rationnel $j \geq 0$. L'ensemble $\mathcal{A}_\ell(\mathbb{D}, m, w, j)$ est fini, de cardinal noté $\mathbf{a}_\ell(\mathbb{D}, m, w, j)$, et on a :

$$\mathbf{a}_\ell(\mathbb{D}, m, w, j) = \mathbf{a}_\ell(\mathbb{F}, md, w, j).$$

Plus précisément, on a une formule pour $\mathbf{a}_\ell(\mathbb{D}, m, w, j)$ (voir [21, Corollaire 1.7]).

Définition 3.7. — Soit $\tilde{\pi}$ une représentation de Speh dans $\mathcal{Z}(G_m, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. La *réduction mod ℓ* de la classe de torsion $\langle \tilde{\pi} \rangle$, notée $\mathbf{r}_\ell(\langle \tilde{\pi} \rangle)$, est l'ensemble des $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\pi}\tilde{\chi})$ où $\tilde{\chi}$ décrit les caractères non ramifiés de G_m tels que $\tilde{\pi}\tilde{\chi}$ soit entière.

Notons :

$$\mathcal{E}_\ell(\mathbb{D}, m, w, j)$$

l'ensemble des $\mathbf{r}_\ell(\langle \tilde{\pi} \rangle)$ où $\tilde{\pi}$ décrit les représentations de Speh dans $\mathcal{Z}(G_m, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ tels que $w(\tilde{\pi}) = w$ et dont le niveau normalisé est inférieur ou égal à j . Le résultat suivant, utilisé dans la section 5, sera démontré dans la section 7. Ici encore, ce sera une conséquence immédiate de la proposition 7.6 (voir le paragraphe 7.6).

Proposition 3.8. — *L'ensemble $\mathcal{E}_\ell(\mathbb{D}, m, w, j)$ est fini, de cardinal $\mathbf{a}_\ell(\mathbb{D}, m, w, j)$.*

Il s'ensuit que les ensembles finis $\mathcal{E}_\ell(\mathbb{D}, m, w, j)$ et $\mathcal{E}_\ell(\mathbb{F}, md, w, j)$ ont le même cardinal.

4. La correspondance de Jacquet-Langlands dans le cas complexe

Dans cette section et la suivante, on fixe un entier $n \geq 1$ et une \mathbb{F} -algèbre à division centrale de degré réduit n dont on note A le groupe multiplicatif. On désigne par \mathbb{C} le corps des nombres complexes.

Soit $G = \mathrm{GL}_m(\mathbb{D})$ une forme intérieure de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. Traditionnellement, la correspondance de Jacquet-Langlands locale est une bijection de la série discrète de G vers celle de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. Pour nous, il est préférable de choisir A plutôt que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ comme groupe de référence.

4.1. Correspondance de Jacquet-Langlands

Soit $\mathcal{D}(G, \mathbb{C})$ l'ensemble des classes de représentations lisses complexes, irréductibles et essentiellement de carré intégrable de G . La correspondance de Jacquet-Langlands locale ([**20**, **11**, **2**]) est une bijection :

$$(4.1) \quad \mathbf{j} : \mathcal{D}(G, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Irr}(A, \mathbb{C})$$

caractérisée par une identité de caractères sur les classes de conjugaison elliptiques et régulières. Elle préserve le caractère central, le degré formel [**11**, **20**, **7**] et le niveau normalisé [**1**]. Comme elle est compatible à la torsion par un caractère de \mathbb{F}^\times , elle préserve aussi le nombre de torsion.

Si r est un diviseur de m et σ une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_{mr-1}(\mathbb{D})$, l'induite parabolique :

$$(4.2) \quad \sigma \times \sigma \nu_\sigma \times \cdots \times \sigma \nu_\sigma^{r-1}$$

admet un unique quotient irréductible, noté $L(\sigma, r)$; celui-ci est essentiellement de carré intégrable, et tout élément de $\mathcal{D}(G, \mathbb{C})$ s'obtient de cette façon ([**8**, 2.2]).

Soit $r \geq 1$, soient des entiers $m_1, \dots, m_r \geq 1$ de somme m et, pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, soit π_i une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_{m_i}(\mathbb{D})$. Les induites paraboliques de la forme :

$$(4.3) \quad \pi_1 \times \cdots \times \pi_r \in \mathcal{R}(G, \mathbb{C})$$

forment une base du groupe abélien libre $\mathcal{R}(G, \mathbb{C})$, appelée base *standard*. Il y a donc un unique morphisme surjectif de groupes abéliens :

$$(4.4) \quad \mathbf{J} : \mathcal{R}(G, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{R}(A, \mathbb{C})$$

qui soit nul sur l'ensemble des induites paraboliques de la forme (4.3) avec $r \geq 2$, et qui coïncide avec la bijection \mathbf{j} sur $\mathcal{D}(G, \mathbb{C})$.

4.2. Compatibilité à l'involution de Zelevinski

Etant donnée une représentation irréductible $\pi \in \text{Irr}(G, \mathbb{C})$, on note π^* sa duale de Zelevinski. L'image de $\mathcal{D}(G, \mathbb{C})$ par l'involution de Zelevinski est l'ensemble $\mathcal{Z}(G, \mathbb{C})$ des classes de représentations de Speh de G . Pour le lemme suivant, voir aussi [3, §3.5].

Lemme 4.1. — *Soit une représentation $\pi \in \mathcal{D}(G, \mathbb{C})$, qu'on écrit $L(\sigma, r)$ avec r un diviseur de m et σ une représentation cuspidale de $\text{GL}_{mr-1}(\mathbb{D})$. Alors :*

$$(4.5) \quad \mathbf{J}(\pi^*) = (-1)^{r-1} \cdot \mathbf{j}(\pi).$$

Démonstration. — Dans le groupe de Grothendieck de G , on a :

$$\pi^* = \sum_{\alpha} (-1)^{r-n(\alpha)} \cdot \mathbf{i}_{\alpha} \circ \mathbf{r}_{\alpha}(\pi)$$

où α décrit les familles d'entiers ≥ 1 de somme r et où $n(\alpha)$ est le nombre de termes de α . En appliquant \mathbf{J} , le seul terme de la somme qui contribue est celui correspondant à $\alpha = (r)$. On en déduit le résultat voulu. \square

Pour toute représentation $\pi \in \mathcal{Z}(G, \mathbb{C})$, qu'on écrit $Z(\sigma, r)$ où r est un diviseur de m et σ une représentation cuspidale de $\text{GL}_{mr-1}(\mathbb{D})$, on pose $\epsilon(\pi) = (-1)^{r-1}$. Ainsi, l'application :

$$(4.6) \quad \mathbf{l} : \pi \mapsto \mathbf{j}(\pi^*) = \epsilon(\pi) \cdot \mathbf{J}(\pi)$$

est une bijection de $\mathcal{Z}(G, \mathbb{C})$ dans $\text{Irr}(A, \mathbb{C})$.

5. Le théorème principal

Dans cette section, nous conservons les notations de la section 4.

Fixons un isomorphisme de corps $\iota : \mathbb{C} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$, et notons $\tilde{\mathbf{J}}_{\ell}$ le morphisme :

$$(5.1) \quad \mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}) \rightarrow \mathcal{R}(A, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$$

obtenu à partir de (4.4) par changement du corps des coefficients. On note aussi $\tilde{\mathbf{l}}_{\ell}$ la bijection :

$$(5.2) \quad \mathcal{Z}(G, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}) \rightarrow \text{Irr}(A, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$$

obtenue à partir de (4.6) par changement du corps des coefficients.

Remarque 5.1. — Le morphisme de groupes $\tilde{\mathbf{J}}_{\ell}$ et la bijection $\tilde{\mathbf{l}}_{\ell}$ peuvent également être définis de la même façon que \mathbf{J} et \mathbf{l} l'ont été à partir de \mathbf{j} , au moyen de la correspondance :

$$(5.3) \quad \tilde{\mathbf{J}}_{\ell} : \mathcal{D}(G, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}) \rightarrow \text{Irr}(A, \overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$$

obtenue à partir de (4.1) par changement du corps des coefficients. La correspondance $\tilde{\mathbf{J}}_{\ell}$ ne dépend pas du choix de l'isomorphisme de corps $\iota : \mathbb{C} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ car, pour tout automorphisme de corps α de \mathbb{C} et toute représentation irréductible complexe π de G , le caractère de Harish-Chandra $\theta_{\pi\alpha}$ de la représentation tordue π^{α} est égal à $\alpha \circ \theta_{\pi}$, où θ_{π} est le caractère de Harish-Chandra de π , et le signe $(-1)^{m-1}$ apparaissant dans la correspondance est invariant par α . Par conséquent, ni $\tilde{\mathbf{J}}_{\ell}$ ni $\tilde{\mathbf{l}}_{\ell}$ ne dépendent du choix de l'isomorphisme de corps ι .

5.1. Le morphisme de groupes \mathbf{J}_ℓ

Dans [10] Dat définit le caractère de Brauer $\tilde{\theta}_\pi$ d'une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation lisse irréductible π d'un groupe réductif p -adique. Rappelons-en les principales propriétés pour le groupe G .

Notons G^{cris} le sous-ensemble ouvert de G formé des éléments semi-simples réguliers et compacts modulo le centre de G , et notons $G_{\ell'}^{\text{cris}}$ le sous-ensemble de G^{cris} formé des éléments d'ordre premier à ℓ modulo le centre (voir [10, §2.1] pour les définitions précises).

A toute représentation lisse irréductible $\pi \in \text{Irr}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ on associe une fonction :

$$\tilde{\theta}_\pi \in \mathcal{C}^\infty(G_{\ell'}^{\text{cris}}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)^G$$

appelée son caractère de Brauer, $\mathcal{C}^\infty(G_{\ell'}^{\text{cris}}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)^G$ étant l'espace des fonctions localement constantes sur G^{cris} , à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ et G -invariantes par conjugaison.

L'application $\pi \mapsto \tilde{\theta}_\pi$ induit un morphisme de groupes rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^e & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{C}^\infty(G^{\text{cris}}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)^G \\ \mathbf{r}_\ell \downarrow & & \downarrow |_{G_{\ell'}^{\text{cris}}} \\ \mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell) & \xrightarrow{\tilde{\theta}} & \mathcal{C}^\infty(G_{\ell'}^{\text{cris}}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)^G \end{array}$$

où θ désigne le caractère de Harish-Chandra, et où le morphisme vertical de droite est la restriction à $G_{\ell'}^{\text{cris}}$. Ce diagramme détermine $\tilde{\theta}$ de façon unique, parce que le morphisme \mathbf{r}_ℓ est surjectif (voir [16, Théorème 9.40]).

En particulier, lorsque $G = A$, le morphisme $\tilde{\theta}$ est injectif ([10, Proposition 2.3.1]).

Proposition 5.2. — *Il existe un unique morphisme de groupes :*

$$(5.4) \quad \mathbf{J}_\ell : \mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell) \rightarrow \mathcal{R}(A, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$$

tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^e & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{J}}_\ell} & \mathcal{R}(A, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^e \\ \mathbf{r}_\ell \downarrow & & \downarrow \mathbf{r}_\ell \\ \mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell) & \xrightarrow{\mathbf{J}_\ell} & \mathcal{R}(A, \overline{\mathbb{F}}_\ell) \end{array}$$

soit commutatif.

Démonstration. — La preuve de Dat (voir [10, (3.1.2)]) est encore valable ici. \square

Remarque 5.3. — (1) Lorsque G est égal à $\text{GL}_n(\mathbb{F})$, le morphisme \mathbf{J}_ℓ est le morphisme noté $\text{LJ}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ dans [10].

(2) Soit A' le groupe multiplicatif d'une \mathbb{F} -algèbre à division de degré réduit n . Notons :

$$\mathbf{J}'_\ell : \mathcal{R}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell) \rightarrow \mathcal{R}(A', \overline{\mathbb{F}}_\ell)$$

le morphisme obtenu en remplaçant A par A' dans (5.4), et notons :

$$\mathbf{B} : \mathcal{R}(A', \overline{\mathbb{F}}_\ell) \rightarrow \mathcal{R}(A, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$$

le morphisme obtenu en remplaçant G par A' dans (5.4). Alors \mathbf{B} est bijectif et $\mathbf{J}_\ell = \mathbf{B} \circ \mathbf{J}'_\ell$. En effet, c'est vrai sur \mathbb{C} , donc sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, et le résultat suit par compatibilité à la réduction mod ℓ .

5.2. Preuve du théorème principal

Rappelons que l'invariant $w(\tilde{\pi})$ a été introduit dans la section 3. Pour tout entier $w \geq 0$, on pose :

$$(5.5) \quad \mathcal{Z}_w(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \{\tilde{\pi} \in \mathcal{Z}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \mid \tilde{\pi} \text{ est entière et } w(\tilde{\pi}) = w\}.$$

Lorsque $w = 1$, c'est l'ensemble des représentations irréductibles ℓ -adiques entières ℓ -super-Speh de G au sens de [10]. On note :

$$\mathbf{X}_w(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$$

l'image par \mathbf{r}_ℓ de l'ensemble $\mathcal{Z}_w(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

En général, $\mathbf{X}_w(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ n'est pas formé de représentations irréductibles. Toutefois, pour $w = 1$, l'ensemble $\mathbf{X}_1(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ est le sous-ensemble de $\mathcal{Z}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ formé des représentations super-Speh de G , c'est-à-dire celles dont le support cuspidal est supercuspidal.

Remarquons également que, dans le cas où G est le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, l'ensemble $\mathbf{X}_w(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}), \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ est inclus dans $\mathcal{Z}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}), \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ pour tout $w \geq 0$.

Théorème 5.4. — Soit un entier $w \geq 0$.

(1) Pour toute représentation $\pi \in \mathbf{X}_w(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$, il y a un signe $\epsilon(\pi) \in \{-1, +1\}$ tel que :

$$(5.6) \quad \epsilon(\pi) \cdot \mathbf{J}_\ell(\pi)$$

appartienne à $\mathbf{X}_w(A, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$; on note $\mathbf{l}_\ell(\pi)$ la quantité (5.6).

(2) L'application $\pi \mapsto \mathbf{l}_\ell(\pi)$ de $\mathbf{X}_w(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ dans $\mathbf{X}_w(A, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ est bijective.

(3) La bijection $\tilde{\mathbf{l}}_\ell$ induit une bijection de $\mathcal{Z}_w(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ dans $\mathcal{Z}_w(A, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_w(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{l}}_\ell} & \mathcal{Z}_w(A, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ \mathbf{r}_\ell \downarrow & & \downarrow \mathbf{r}_\ell \\ \mathbf{X}_w(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell) & \xrightarrow{\mathbf{l}_\ell} & \mathbf{X}_w(A, \overline{\mathbb{F}}_\ell) \end{array}$$

est commutatif.

Remarque 5.5. — Si $\pi \in \mathbf{X}_w(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ est la réduction modulo ℓ de $\tilde{\pi} \in \mathcal{Z}_w(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, alors le signe $\epsilon(\pi)$ apparaissant dans (5.6) est égal à $\epsilon(\tilde{\pi})$.

Démonstration. — La preuve se fait par récurrence sur w . Le théorème est vrai lorsque $w = 0$, puisque dans ce cas tous les ensembles concernés sont vides. Fixons un entier $w \geq 1$ et supposons que le théorème est vrai pour tout $w' \leq w - 1$.

Supposons d'abord que l'ensemble $\mathcal{Z}_w(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est non vide. Dans ce cas, le lemme 3.2 montre que le plus grand diviseur de w premier à ℓ divise $\ell - 1$.

Pour alléger les notations dans cette démonstration, notons $\tilde{\mathbf{l}}$ plutôt que $\tilde{\mathbf{l}}_\ell$. Soit $\tilde{\pi} \in \mathcal{Z}_w(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ entière, et notons $\tilde{\rho}$ son image par $\tilde{\mathbf{l}}$. Par hypothèse de récurrence, la bijection $\tilde{\mathbf{l}}$ envoie bijectivement la réunion des $\mathcal{Z}_{w'}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ pour $w' < w$ sur la réunion des $\mathcal{Z}_{w'}(A, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ pour $w' < w$. On en déduit que :

$$(5.7) \quad w \leq w(\tilde{\rho}).$$

La bijection $\tilde{\mathbf{l}}$ étant compatible à la torsion par un caractère, on a l'égalité $n(\tilde{\pi}) = n(\tilde{\rho})$, donc :

$$(5.8) \quad c(\tilde{\pi}) = c(\tilde{\rho}).$$

On note c cette valeur commune donnée par (5.8).

Lemme 5.6. — *On a $t(\tilde{\pi}) \leq t(\tilde{\rho})$.*

Démonstration. — La bijection $\tilde{\mathbf{l}}$ étant compatible à la torsion par un caractère, elle induit une bijection entre classes de torsion de $\mathcal{L}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ et classes inertielles de $\text{Irr}(A, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, encore notée $\tilde{\mathbf{l}}$. Soit $\mathcal{O}(\tilde{\pi})$ l'ensemble des classes de torsion des éléments de $\mathcal{L}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ qui sont entiers et congrus à la classe de torsion de $\tilde{\pi}$.

Si la classe de torsion $\langle \tilde{\pi}_1 \rangle$ est dans $\mathcal{O}(\tilde{\pi})$, le diagramme commutatif de la proposition 5.2 et la compatibilité de $\tilde{\mathbf{l}}$ à la torsion montrent que l'image $\tilde{\rho}_1$ de $\tilde{\pi}_1$ a sa classe inertielle dans $\mathcal{O}(\tilde{\rho})$. La bijection $\tilde{\mathbf{l}}$ induit donc une injection de $\mathcal{O}(\tilde{\pi})$ dans $\mathcal{O}(\tilde{\rho})$, ce dont on déduit que $t(\tilde{\pi}) \leq t(\tilde{\rho})$. \square

Lemme 5.7. — *On a $t(\tilde{\rho}) = t(\tilde{\pi})$ et $w(\tilde{\rho}) = w$.*

Démonstration. — Partons des inégalités :

$$t(\tilde{\pi}) \leq t(\tilde{\rho}) \leq c$$

données par le lemme 5.7 et la proposition 3.5.

Si $w = 1$, alors $t(\tilde{\pi}) = c$ d'après la proposition 3.5, ce dont on déduit l'égalité $t(\tilde{\rho}) = t(\tilde{\pi})$. On en déduit aussi que $t(\tilde{\rho}) = c$, ce qui implique que $w(\tilde{\rho}) = 1$ d'après la proposition 3.5.

Si $1 < w < \ell$, alors d'après la proposition 3.5 on a :

$$\frac{c-1}{w} = t(\tilde{\pi}) \leq t(\tilde{\rho}) \leq \frac{c-1}{w(\tilde{\rho})}.$$

On en déduit que $w(\tilde{\rho}) \leq w$, ce qui, avec (5.7), entraîne $w(\tilde{\rho}) = w$, puis $t(\tilde{\rho}) = t(\tilde{\pi})$.

Enfin, si $w \geq \ell$, alors on a aussi $w(\tilde{\rho}) \geq \ell$ d'après (5.7). Par conséquent, d'après le lemme 3.2, les entiers w et $w(\tilde{\rho})$ sont divisibles par ℓ . D'après la proposition 3.5, on a :

$$\frac{c(\ell-1)}{w\ell} = t(\tilde{\pi}) \leq t(\tilde{\rho}) = \frac{c(\ell-1)}{w(\tilde{\rho})\ell}.$$

On en déduit que $w(\tilde{\rho}) \leq w$, ce qui, avec (5.7), entraîne $w(\tilde{\rho}) = w$, puis $t(\tilde{\rho}) = t(\tilde{\pi})$. \square

L'égalité $t(\tilde{\rho}) = t(\tilde{\pi})$ entraîne le corollaire suivant.

Corollaire 5.8. — *L'image de $\mathcal{O}(\tilde{\pi})$ par $\tilde{\mathbf{l}}$ est égale à $\mathcal{O}(\tilde{\rho})$.*

L'égalité $w(\tilde{\rho}) = w$ implique que $\tilde{\mathbf{l}}$ induit une injection :

$$\mathcal{L}_w(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow \mathcal{L}_w(A, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

Le corollaire 5.8 implique l'existence d'une application injective \mathbf{l} de $\mathbf{X}_w(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ dans $\mathbf{X}_w(A, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ telle qu'on ait l'égalité :

$$\mathbf{r}_\ell \circ \tilde{\mathbf{l}} = \mathbf{l} \circ \mathbf{r}_\ell$$

sur $\mathcal{L}_w(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. (L'existence de \mathbf{l} provient du fait que l'image de $\mathcal{O}(\tilde{\pi})$ par $\tilde{\mathbf{l}}$ est incluse dans $\mathcal{O}(\tilde{\rho})$, et son injectivité de ce que cette image est exactement $\mathcal{O}(\tilde{\rho})$.) Le morphisme \mathbf{r}_ℓ étant surjectif, \mathbf{l} est unique. Pour prouver que \mathbf{l} est bijective, nous allons utiliser un argument de comptage.

Fixons un nombre rationnel $j \geq 0$ et notons :

$$\mathcal{E}_\ell(G, w, j)$$

l'ensemble des $\mathbf{r}_\ell(\langle\tilde{\pi}\rangle)$, où $\tilde{\pi}$ décrit les éléments de $\mathcal{Z}_w(\mathbf{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ de niveau normalisé inférieur ou égal à j (paragraphe 3.2). Par compatibilité à la torsion, et comme $\tilde{\mathbf{l}}$ préserve le niveau normalisé, l'application \mathbf{l} induit une application injective :

$$(5.9) \quad \mathcal{E}_\ell(\mathbf{G}, w, j) \rightarrow \mathcal{E}_\ell(\mathbf{A}, w, j).$$

D'après la proposition 3.8, ces ensembles sont finis et de même cardinal ; l'application (5.9) est donc bijective.

Considérons maintenant un élément de $\mathbf{X}_w(\mathbf{A}, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$, que l'on écrit $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho})$. Si l'on note j le niveau normalisé de $\tilde{\rho}$, alors $\mathbf{r}_\ell(\langle\tilde{\pi}\rangle)$ a un antécédent par (5.9), qu'on écrit $\mathbf{r}_\ell(\langle\tilde{\pi}\rangle)$, et on vérifie que $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\pi})$ est un antécédent de $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho})$ par \mathbf{l} . Ainsi \mathbf{l} est bijective, ce qui prouve l'assertion 2 du théorème.

Pour toute représentation $\pi \in \mathcal{Z}(\mathbf{G}, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$, il existe donc un signe $\epsilon(\pi)$ tel que $\mathbf{J}_\ell(\pi) = \epsilon(\pi) \cdot \mathbf{l}(\pi)$, ce qui prouve l'assertion 1 du théorème.

Soit maintenant $\tilde{\rho}$ dans $\mathcal{Z}_w(\mathbf{A}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Par surjectivité de \mathbf{l} et de \mathbf{r}_ℓ , la représentation $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho})$ a un antécédent $\tilde{\pi}$ dans $\mathcal{Z}_w(\mathbf{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, ce qui prouve l'assertion 3.

Pour terminer la démonstration du théorème 5.4, supposons enfin que l'ensemble $\mathcal{Z}_w(\mathbf{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est vide. Dans ce cas, $\mathcal{E}_\ell(\mathbf{G}, w, j)$ est vide pour tout nombre rationnel $j \geq 0$. D'après la proposition 3.8, l'ensemble $\mathbf{X}_w(\mathbf{A}, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ est vide lui aussi. L'ensemble $\mathcal{Z}_w(\mathbf{A}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est donc vide, ce dont on déduit que le théorème est vrai dans ce cas. \square

Le corollaire suivant, qui généralise [10, Théorème 1.2.4], s'obtient en appliquant le théorème 5.4 avec $w = 1$.

Corollaire 5.9. — *La bijection \mathbf{l}_ℓ induit une bijection entre l'ensemble $\mathbf{X}_1(\mathbf{G}, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ des représentations super-Speh de \mathbf{G} et $\text{Irr}(\mathbf{A}, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$.*

5.3. Retour au théorème 1.1

Après avoir fait un détour par les représentations de Speh, nous montrons comment déduire le théorème 1.1 du théorème 5.4.

Soit $\tilde{\pi}$ une représentation de $\mathcal{D}(\mathbf{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, qu'on écrit $\mathbf{L}(\tilde{\sigma}, r)$ où r est un diviseur de m et $\tilde{\sigma}$ une représentation irréductible cuspidale de $\text{GL}_{mr-1}(\mathbf{D})$. Notant ω le caractère central de $\tilde{\sigma}$, celui de $\tilde{\pi}$ est égal à :

$$\omega^r \cdot (\nu_{\tilde{\sigma}})^{r(r-1)/2}.$$

La représentation $\tilde{\pi}$ est entière si et seulement si $\tilde{\sigma}$ l'est, et $\tilde{\sigma}$ est entière si et seulement si ω l'est. Par conséquent, $\tilde{\pi}$ est entière si et seulement si son caractère central l'est. La correspondance :

$$\tilde{\mathbf{j}}_\ell : \mathcal{D}(\mathbf{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow \text{Irr}(\mathbf{A}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

obtenue à partir de (4.1) par changement du corps des coefficients préserve le caractère central. On en déduit que $\tilde{\pi}$ est entière si et seulement si son image par $\tilde{\mathbf{j}}_\ell$ l'est, ce qui entraîne la première assertion du théorème 1.1.

Soient maintenant deux représentations entières $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$ de $\mathcal{D}(\mathbf{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Appliquant l'involution de Zelevinski, on obtient deux représentations $\tilde{\pi}_1^*, \tilde{\pi}_2^* \in \mathcal{Z}(\mathbf{G}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, qui sont entières car de même caractère central que $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$. D'après le théorème 5.4, les représentations $\tilde{\pi}_1^*, \tilde{\pi}_2^*$ sont congruentes mod ℓ si et seulement si leurs images :

$$\tilde{\mathbf{l}}_\ell(\tilde{\pi}_i^*) = \tilde{\mathbf{j}}_\ell(\tilde{\pi}_i), \quad i = 1, 2,$$

le sont. Pour mettre fin à la preuve du théorème 1.1, il reste à vérifier que $\tilde{\pi}_1^*, \tilde{\pi}_2^*$ sont congruentes mod ℓ si et seulement si $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$ le sont, ce qui suit de [15, Proposition A.3].

6. Un intermède : le foncteur \mathbf{K}

Il nous reste maintenant à prouver les propositions 3.5 et 3.8. Nous commençons par prouver un résultat préliminaire, la proposition 6.5, qui fait l'objet de la présente section.

Nous allons avoir besoin du foncteur \mathbf{K} étudié dans [17] et [23]. On suppose connu le langage des strates et des caractères simples [22, 4]. On fixe un entier $m \geq 1$ et on pose $G = G_m$.

6.1. Rappels sur le foncteur \mathbf{K}

Soit $[\Lambda, n_\Lambda, 0, \beta]$ une strate simple de $M_m(D)$, que l'on suppose maximale au sens de la définition 2.2 de [23], c'est-à-dire que l'intersection de $U(\Lambda)$ avec le centralisateur de $E = F[\beta]$ dans G en est un sous-groupe compact maximal. Fixons un R -caractère simple θ attaché à cette strate.

Soit (J, κ) une β -extension de θ . Le groupe J est un sous-groupe ouvert et compact de G ; il possède un pro- p -sous-groupe ouvert et distingué J^1 tel qu'on ait un isomorphisme de groupes :

$$(6.1) \quad J/J^1 \simeq \mathrm{GL}_{m'}(k)$$

pour un entier m' et une extension finie k du corps résiduel de F convenablement choisis. (Précisément, le centralisateur de E dans $M_m(D)$ est isomorphe, en tant que E -algèbre centrale simple, à une algèbre de matrices $M_{m'}(D')$ où D' une E -algèbre à division centrale ; alors k est le corps résiduel de D' .) Notons Γ le groupe de droite de (6.1).

On note \mathbf{K} le foncteur $\pi \mapsto \mathrm{Hom}_{J^1}(\kappa, \pi)$ de la catégorie des R -représentations lisses de G dans celle des R -représentations de J/J^1 en faisant agir J sur $\mathbf{K}(\pi)$ par la formule :

$$x \cdot f = \pi(x) \circ f \circ \kappa(x)^{-1}$$

pour $x \in J$ et $f \in \mathbf{K}(\pi)$. On identifie une fois pour toutes les groupes J/J^1 et Γ par l'intermédiaire de (6.1). Ce foncteur est exact et envoie représentations de longueur finie sur représentations de longueur finie. Il induit donc un morphisme de groupes :

$$\mathcal{R}(G, R) \rightarrow \mathcal{R}(\Gamma, R)$$

que l'on note encore \mathbf{K} , et qui satisfait aux conditions suivantes :

$$(6.1.1) \quad \text{Pour tout } \pi \in \mathrm{Irr}(G, R) \text{ et tout } \sigma \in \mathrm{Irr}(\Gamma, R), \text{ on a } [\mathbf{K}(\pi) : \sigma] \geq 0.$$

$$(6.1.2) \quad \text{Pour tout } \pi \in \mathrm{Irr}(G, R) \text{ et tout caractère non ramifié } \chi \text{ de } G, \text{ on a } \mathbf{K}(\pi\chi) = \mathbf{K}(\pi).$$

Notons Θ l'endo-classe définie par la paire $([\Lambda, n_\Lambda, 0, \beta], \theta)$ (voir [4] pour une définition précise). On renvoie à [17, §5.2] pour les deux propriétés suivantes.

$$(6.1.3) \quad \text{Pour tout } \pi \in \mathrm{Irr}(G, R), \text{ son image } \mathbf{K}(\pi) \text{ est non nulle si et seulement si le support cuspidal de } \pi \text{ est formé de représentations cuspidales d'endo-classe } \Theta.$$

$$(6.1.4) \quad \text{Si } \pi \in \mathrm{Irr}(G, R) \text{ est cuspidale et d'endo-classe } \Theta, \text{ alors } \mathbf{K}(\pi) \text{ est cuspidale et chacun de ses facteurs irréductibles apparaît avec multiplicité } 1.$$

Précisément (voir [17, Lemme 5.3]), il y a un sous-corps k_0 de k et une R -représentation irréductible cuspidale $\sigma \in \mathrm{Irr}(\Gamma, R)$ tels que $\mathbf{K}(\pi)$ soit la somme des $\mathrm{Gal}(k/k_0)$ -conjugués de σ ; l'extension k/k_0 ne dépend que de l'endo-classe Θ et le nombre $b(\pi)$ de $\mathrm{Gal}(k/k_0)$ -conjugués de σ vérifie :

$$(6.2) \quad b(\pi)s(\pi) = [k : k_0],$$

où $s(\pi)$ est l'entier introduit au paragraphe 2.2. Avec les notations introduites plus haut, k_0 est le corps résiduel de E et l'entier (6.2) est le degré réduit de D' sur E .

Enfin, on a la réciproque suivante lorsque R est de caractéristique 0.

(6.1.5) *Supposons que \mathbf{R} est de caractéristique 0, et soit $\pi \in \text{Irr}(G, \mathbf{R})$ tel que $\mathbf{K}(\pi)$ contienne un facteur irréductible cuspidal. Alors π est cuspidale.*

En effet, si $\mathbf{K}(\pi)$ contient un facteur irréductible cuspidal τ , et \mathbf{R} étant de caractéristique nulle, ce facteur est un facteur direct de $\mathbf{K}(\pi)$. Par adjonction, π est un quotient de l'induite compacte :

$$\text{ind}_J^G(\kappa \otimes \tau).$$

Mais celle-ci est cuspidale d'après [17, §3.1].

Remarque 6.1. — Si \mathbf{R} est de caractéristique > 0 , cet argument ne fonctionne pas car τ peut être un sous-quotient irréductible sans apparaître comme une sous-représentation de $\mathbf{K}(\pi)$. Par exemple, supposons que G est égal à $\text{GL}_2(\mathbf{F})$ et que ℓ divise $q + 1$, et choisissons pour définir \mathbf{K} le caractère trivial κ du sous-groupe compact maximal standard de G . Alors l'induite parabolique :

$$\pi = 1 \times 1$$

est une représentation irréductible non cuspidale de G et $\mathbf{K}(\pi)$ est l'espace de ses vecteurs invariants sous le pro- p -sous-groupe des matrices à coefficients entiers et congrues à l'identité modulo l'idéal maximal de l'anneau des entiers de \mathbf{F} . Celui-ci est de longueur 3, il contient le caractère trivial de Γ avec multiplicité 2 et un facteur cuspidal (non supercuspidal) avec multiplicité 1. (Le groupe Γ est ici égal à $\text{GL}_2(k)$ où k est le corps résiduel de \mathbf{F} .)

6.2. Un lemme en caractéristique nulle

En procédant comme dans [17, Remarque 5.7], on définit pour tout entier $n \geq 1$ un foncteur \mathbf{K}_n de la catégorie des \mathbf{R} -représentations lisses de G_{mn} dans la catégorie des \mathbf{R} -représentations de $\text{GL}_{m'n}(k)$. Prenant la somme directe des morphismes qu'ils définissent, on forme un morphisme de bigèbres :

$$\mathcal{R}(\mathbf{R}) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{R}(\text{GL}_{mn}(\mathbf{D}), \mathbf{R}) \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{R}(\text{GL}_{m'n}(k), \mathbf{R}) = \mathcal{R}^{\text{fin}}(\mathbf{R})$$

que l'on note encore \mathbf{K} , les structures de bigèbre étant définies au moyen des foncteurs d'induction et de restriction paraboliques.

Étant donné une représentation irréductible cuspidale $\tau \in \text{Irr}(\Gamma, \mathbf{R})$ et un entier $n \geq 1$, l'algèbre des endomorphismes de l'induite parabolique $\tau^{\times n} = \tau \times \cdots \times \tau$ (n fois) est une algèbre de Hecke de type A, et cette induite possède une unique sous-représentation irréductible correspondant au caractère trivial de cette algèbre (voir James [14] — et aussi [16, 3.3] et [18, 4.2]) ; on la note $z(\tau, n)$. On a la propriété suivante (voir [16, Proposition 7.21]).

Proposition 6.2. — *Soit $\sigma \in \text{Irr}(G, \mathbf{R})$ cuspidale d'endo-classe Θ et soit τ un facteur irréductible de $\mathbf{K}(\sigma)$. Alors $\mathbf{K}(Z(\sigma, n))$ contient $z(\tau, n)$ pour tout entier $n \geq 1$.*

La seule autre propriété de $z(\tau, n)$ dont nous aurons besoin par la suite est la suivante.

Proposition 6.3 ([18], Lemme 5.9). — *Supposons que $\tilde{\tau} \in \text{Irr}(\Gamma, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est cuspidale, et notons τ sa réduction modulo ℓ . Alors la réduction modulo ℓ de $z(\tilde{\tau}, n)$ est égale à $z(\tau, n)$.*

Dans le cas où \mathbf{R} est de caractéristique nulle, on va préciser la proposition 6.2.

Lemme 6.4. — *Supposons que \mathbf{R} est de caractéristique 0. Soit σ une \mathbf{R} -représentation irréductible cuspidale de \mathbf{G} , et soient τ_1, \dots, τ_b les facteurs irréductibles de $\mathbf{K}(\sigma)$, qui sont cuspidaux et non isomorphes deux à deux. Pour tout entier $n \geq 1$, on a :*

$$\mathbf{K}(Z(\sigma, n)) = \sum_{\alpha} z(\tau_1, n_1) \times z(\tau_2, n_2) \times \cdots \times z(\tau_b, n_b)$$

où α décrit l'ensemble des familles (n_1, n_2, \dots, n_b) d'entiers naturels de somme n .

Démonstration. — On procède par récurrence sur $n \geq 1$, le cas où $n = 1$ étant immédiat. Fixons un entier $n \geq 2$, et notons $\Sigma = \Sigma(\sigma, n)$ l'image de $Z(\sigma, n)$ par \mathbf{K} . Si $\alpha = (n_1, \dots, n_b)$ est une famille de b entiers positifs ou nuls de somme n , on a :

$$\mathbf{r}_{m' \cdot \alpha}^{\text{fin}}(\Sigma(\sigma, n)) = \mathbf{K}(Z(\sigma, n_1)) \otimes \mathbf{K}(Z(\sigma \nu_{\sigma}^{n_1}, n_2)) \otimes \cdots \otimes \mathbf{K}(Z(\sigma \nu_{\sigma}^{n_1 + \cdots + n_{b-1}}, n_b))$$

où $\mathbf{r}_{m' \cdot \alpha}^{\text{fin}}$ désigne le foncteur de restriction parabolique sur la catégorie des \mathbf{R} -représentations de $\text{GL}_{m'n}(k)$ qui correspond à la famille $m' \cdot \alpha = (m'n_1, m'n_2, \dots, m'n_b)$. Compte tenu de (6.1.2) et de (2.2.4), cette représentation est égale à $\Sigma(\sigma, n_1) \otimes \Sigma(\sigma, n_2) \otimes \cdots \otimes \Sigma(\sigma, n_b)$.

D'après la proposition 6.2, pour chaque $i \in \{1, \dots, b\}$, la représentation $z(\tau_i, n_i)$ apparaît dans $\Sigma(\sigma, n_i)$. Par adjonction, on en déduit que l'induite :

$$z(\alpha) = z(\tau_1, n_1) \times z(\tau_2, n_2) \times \cdots \times z(\tau_b, n_b)$$

qui est irréductible d'après [18, Proposition 4.3], apparaît dans $\Sigma(\sigma, n)$, et ce pour toute composition α . En d'autres termes, la représentation :

$$\Lambda = \sum_{\alpha} z(\tau_1, n_1) \times z(\tau_2, n_2) \times \cdots \times z(\tau_b, n_b) = \sum_{\alpha} z(\alpha)$$

est une sous-représentation de Σ .

Etant donné $k \in \{1, \dots, n-1\}$, appliquons le foncteur $\mathbf{r}_k^{\text{fin}} = \mathbf{r}_{(m'k, m'(n-k))}^{\text{fin}}$. Par hypothèse de récurrence, on trouve :

$$\mathbf{r}_k^{\text{fin}}(\Sigma) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} z(\alpha) \otimes z(\beta)$$

où α décrit les compositions de k et β celles de $n-k$. Par ailleurs, d'après la formule de Mackey, on a :

$$\mathbf{r}_k^{\text{fin}}(\Lambda) = \sum_{\gamma} \mathbf{r}_k^{\text{fin}}(z(\gamma)) = \sum_{\gamma} \sum_{\delta} z(\delta) \otimes z(\gamma - \delta)$$

où γ décrit les compositions (g_1, \dots, g_b) de n et δ les compositions (d_1, \dots, d_b) de k telles qu'on ait $d_i \leq g_i$ pour tout i , et où l'on note $\gamma - \delta$ la composition de $n-k$ formée des entiers $g_i - d_i$. En réarrangeant l'ordre des termes, on trouve $\mathbf{r}_k^{\text{fin}}(\Sigma)$. Par conséquent, la différence $\Sigma - \Lambda$ est une représentation cuspidale dans $\mathcal{R}^{\text{fin}}(\mathbf{R})$.

Supposons que cette différence n'est pas nulle et soit τ un terme cuspidal irréductible apparaissant dans Σ . D'après (6.1.5), on en déduit que $Z(\sigma, n)$ est cuspidale, ce qui n'est pas possible si $n \geq 2$. \square

6.3. Congruences et foncteur \mathbf{K}

On suppose maintenant que \mathbf{R} est égal à $\overline{\mathbb{F}}_{\ell}$. Etant donnée une $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ -représentation irréductible cuspidale entière $\tilde{\sigma}$ de \mathbf{G} , on note $\Delta(\tilde{\sigma}, n)$ la réduction mod ℓ de $Z(\tilde{\sigma}, n)$.

Proposition 6.5. — Soient $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ deux $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles cuspidales de G congruentes mod ℓ et d'endo-classe Θ . Alors, pour tout $n \geq 1$, les représentations $\Delta(\tilde{\sigma}_1, n)$, $\Delta(\tilde{\sigma}_2, n)$ ont la même image par \mathbf{K} .

Démonstration. — Soit $\tilde{\theta}$ l'unique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -caractère simple attaché à $[\Lambda, n_\Lambda, 0, \beta]$ dont la réduction mod ℓ soit θ . D'après [17, Proposition 2.37], ce caractère simple possède une β -extension $\tilde{\kappa}$ dont la réduction mod ℓ est κ . Notons $\tilde{\mathbf{K}}$ le morphisme associé à $\tilde{\kappa}$; il est lié à \mathbf{K} par l'égalité :

$$\mathbf{r}_\ell \circ \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \circ \mathbf{r}_\ell$$

entre morphismes d'algèbres de $\mathcal{R}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ vers $\mathcal{R}^{\text{fin}}(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$.

Soit $\tilde{\sigma}$ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale de G d'endo-classe Θ . Compte tenu de la propriété (6.1.4), l'image de $\tilde{\sigma}$ par $\tilde{\mathbf{K}}$ est égale à $\tilde{\tau}_1 + \tilde{\tau}_2 + \cdots + \tilde{\tau}_b$ où $b = b(\tilde{\sigma})$ et où $\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_b$ sont des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles cuspidales de Γ deux à deux non isomorphes. D'après le lemme 6.4, on a :

$$\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{Z}(\tilde{\sigma}, n)) = \sum_{\alpha} z(\tilde{\tau}_1, n_1) \times z(\tilde{\tau}_2, n_2) \times \cdots \times z(\tilde{\tau}_b, n_b)$$

où α décrit les familles (n_1, \dots, n_b) d'entiers ≥ 0 de somme n .

Notant τ_i la réduction modulo ℓ de $\tilde{\tau}_i$, la réduction mod ℓ de $z(\tilde{\tau}_i, n)$ est, d'après la proposition 6.3, égale à $z(\tau_i, n)$. Il s'ensuit que :

$$\mathbf{K}(\Delta(\tilde{\sigma}, n)) = \mathbf{r}_\ell \circ \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{Z}(\tilde{\sigma}, n)) = \sum_{\alpha} z(\tau_1, n_1) \times z(\tau_2, n_2) \times \cdots \times z(\tau_b, n_b).$$

L'entier $n \geq 1$ étant fixé, cette quantité ne dépend donc que de :

$$\mathbf{K} \circ \mathbf{r}_\ell(\tilde{\sigma}) = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_b.$$

On remarquera que les τ_i , $i \in \{1, \dots, b\}$ ne sont pas nécessairement non isomorphes deux à deux. Ceci met fin à la preuve de la proposition 6.5. \square

7. Compatibilité de la classification de Zelevinski aux congruences

7.1. Classification de Zelevinski

Comme dans le paragraphe 2.2, R est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p , et σ est une R -représentation irréductible cuspidale de degré $m \geq 1$.

Notons \mathcal{D}_σ l'ensemble des segments de la forme $[\sigma\chi, n]$ où $n \geq 1$ est un entier et χ un caractère non ramifié de G_m , et notons Irr_σ l'ensemble des classes de représentations irréductibles qui sont des sous-quotients d'induites de la forme $\sigma\chi_1 \times \cdots \times \sigma\chi_n$ où $n \geq 0$ est un entier et χ_1, \dots, χ_n des caractères non ramifiés de G_m . Pour tout ensemble X , notons $\mathbb{N}(X)$ l'ensemble des applications de X dans \mathbb{N} à support fini. Nous construisons dans [16] une application surjective :

$$(7.1) \quad \mathbb{N}(\mathcal{D}_\sigma) \xrightarrow{\mathbb{Z}} \text{Irr}_\sigma$$

qui est bijective lorsque σ est supercuspidale, et coïncide avec la classification de Zelevinski [28] lorsque R est le corps des nombres complexes.

Il sera commode d'employer un formalisme légèrement différent de celui de [16]. Un *segment formel* est une paire $[a, n]$ formée de deux entiers $a \in \mathbb{Z}$ et $n \geq 1$. L'entier $n \geq 1$ est la *longueur*

du segment formel. Si $[a, n]$ est un segment formel et si σ est une représentation irréductible cuspidale de degré $m \geq 1$, on pose :

$$[a, n] \boxtimes \sigma = [\sigma \nu_\sigma^a, n]$$

qui est un segment au sens donné plus haut. On note \mathcal{D} l'ensemble des segments formels, et on appelle *multisegment formel* un élément de $\mathbb{N}(\mathcal{D})$. On a par linéarité une application $\mu \mapsto \mu \boxtimes \sigma$ de $\mathbb{N}(\mathcal{D})$ dans $\mathbb{N}(\mathcal{D}_\sigma)$. Par linéarité également, on définit la longueur d'un multisegment formel.

Soient $\mu = [a_1, n_1] + \dots + [a_r, n_r]$ et $\nu = [c_1, m_1] + \dots + [c_s, m_s]$ deux multisegments formels de même longueur, dont les segments formels sont supposés être rangés par longueur décroissante. On écrit $\mu \leq \nu$ si :

$$(7.2) \quad \sum_{i \leq k} n_i \leq \sum_{i \leq k} m_i$$

pour tout $k \in \{1, \dots, \min(r, s)\}$. Ceci définit une relation d'ordre \leq entre multisegments formels de même longueur.

Pour $\mu, \nu \in \mathbb{N}(\mathcal{D})$ comme ci-dessus, notons :

$$m(\mu, \nu, \sigma)$$

la multiplicité de $Z(\nu \boxtimes \sigma)$ dans la représentation $Z([a_1, n_1] \boxtimes \sigma) \times \dots \times Z([a_r, n_r] \boxtimes \sigma)$. Lorsque μ, ν varient, ces multiplicités vérifient la condition suivante.

Proposition 7.1. — *On a $m(\mu, \mu, \sigma) = 1$ et, si $m(\mu, \nu, \sigma) \neq 0$ alors $\mu \leq \nu$.*

Ceci caractérise les représentations $Z(\mu \boxtimes \sigma)$, $\mu \in \mathbb{N}(\mathcal{D})$, à isomorphisme près.

Remarque 7.2. — Au sujet de la dépendance de ces multiplicité en σ , voir la proposition 4.15 et la remarque 4.18 de [19].

On suppose maintenant que \mathbb{R} est le corps $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, et on fixe un multisegment formel μ de longueur $n \geq 1$. On a une application :

$$(7.3) \quad \tilde{\sigma} \mapsto Z(\mu \boxtimes \tilde{\sigma})$$

qui à toute $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale $\tilde{\sigma}$ de degré $m \geq 1$ associe une représentation irréductible de degré mn . Si $\tilde{\sigma}$ est entière, son image par (7.3) l'est aussi.

Dans cette section, nous allons démontrer le résultat suivant. Nous en déduisons les propositions 3.5 et 3.8 aux paragraphes 7.5 et 7.6 respectivement.

Théorème 7.3. — *Si $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ sont des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles cuspidales entières congruentes de G_m , $m \geq 1$, alors les représentations $Z(\mu \boxtimes \tilde{\sigma}_1)$ et $Z(\mu \boxtimes \tilde{\sigma}_2)$ sont congruentes.*

Nous procédons en trois étapes, la première étant le cas où μ est un segment formel et $\tilde{\sigma}_2$ est inertiuellement équivalente à $\tilde{\sigma}_1$.

7.2. Le cas d'une congruence dans une même classe inertielle

Fixons un entier $m \geq 1$, et posons $G = G_m$.

Lemme 7.4. — *Soient $\tilde{\sigma}$ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière et $\tilde{\chi}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -caractère non ramifié entier de G . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Les représentations $\tilde{\sigma}\tilde{\chi}$ et $\tilde{\sigma}$ sont congruentes modulo ℓ .*
- (2) *L'ordre de la réduction de $\tilde{\chi}$ mod ℓ divise l'entier $n(\tilde{\sigma})$ (paragraphe 2.2)*

(3) Il existe un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -caractère non ramifié entier $\tilde{\chi}_\ell$ de G tel que $\tilde{\sigma}\tilde{\chi} = \tilde{\sigma}\tilde{\chi}_\ell$ et dont la réduction mod ℓ est triviale.

Démonstration. — Supposons que $\tilde{\chi}$ vérifie la condition 2. Notons χ sa réduction mod ℓ et $\tilde{\chi}_0$ le relèvement de Teichmüller de χ . Par hypothèse, l'ordre de $\tilde{\chi}_0$ divise $n(\tilde{\sigma})$, ce qui implique que $\tilde{\sigma}\tilde{\chi}_0 = \tilde{\sigma}$. Le caractère $\tilde{\chi}_\ell = \tilde{\chi}(\tilde{\chi}_0)^{-1}$ a une réduction mod ℓ triviale, et on a :

$$\tilde{\sigma}\tilde{\chi} = \tilde{\sigma}\tilde{\chi}_0\tilde{\chi}_\ell = \tilde{\sigma}\tilde{\chi}_\ell,$$

c'est-à-dire que la condition 2 implique la condition 3, elle-même impliquant aussitôt la condition 1.

Supposons maintenant que les représentations $\tilde{\sigma}\tilde{\chi}$ et $\tilde{\sigma}$ sont congruentes modulo ℓ . Soit σ un facteur irréductible de la réduction mod ℓ de $\tilde{\sigma}$, et soit a sa longueur (voir le paragraphe 2.3). Il y a donc un entier $i \in \{0, \dots, a-1\}$ tel que $\sigma\chi = \sigma\nu^i$.

Supposons d'abord que $a = 1$. Dans ce cas, $\tilde{\sigma}\tilde{\chi}$ est congrue à $\tilde{\sigma}$ si et seulement si on a $\sigma\chi = \sigma$, c'est-à-dire si et seulement si $\chi^{n(\sigma)} = 1$. Grâce à (2.7), ceci est équivalent à $\chi^{n(\tilde{\sigma})} = 1$.

Supposons maintenant que $a > 1$. Il y a donc un entier $i \in \mathbb{Z}$ et un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère non ramifié ξ de G tel que $\chi = \xi\nu^i$ et $\sigma\xi = \sigma$, cette dernière condition étant équivalente à $\xi^{n(\sigma)} = 1$. L'ordre de ν étant égal à α , l'ordre de q dans $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$, celui de χ divise le plus grand multiple commun à α et $n(\sigma)$, qui vaut $\varepsilon(\sigma)n(\sigma)$ d'après (2.8). D'après (2.7), il existe un entier $v \geq 0$ tel que $n(\tilde{\sigma})$ soit égal à $\varepsilon(\sigma)n(\sigma)\ell^v$, ce dont on déduit que $\chi^{n(\tilde{\sigma})} = 1$. \square

Corollaire 7.5. — Soit $\tilde{\sigma}$ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière de G , et soit $\tilde{\chi}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -caractère non ramifié entier de G . Si la représentation $\tilde{\sigma}\tilde{\chi}$ est congrue à $\tilde{\sigma}$ modulo ℓ , alors $Z(\tilde{\sigma}\tilde{\chi}, n)$ est congrue à $Z(\tilde{\sigma}, n)$ modulo ℓ pour tout $n \geq 1$.

Démonstration. — D'après le lemme 7.4, nous pouvons supposer que la réduction mod ℓ de $\tilde{\chi}$ est triviale. Soit $\tilde{\mu}$ le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -caractère non ramifié de F^\times tel que $\tilde{\chi} = \tilde{\mu} \circ \text{Nrd}$. On a :

$$(7.4) \quad Z(\tilde{\sigma}\tilde{\chi}, n) = Z(\tilde{\sigma} \cdot \tilde{\mu}, n) = Z(\tilde{\sigma}, n) \cdot \tilde{\mu}$$

qui est bien congrue à $Z(\tilde{\sigma}, n)$ modulo ℓ . \square

7.3. Preuve du théorème 7.3 dans le cas d'un segment

Dans ce paragraphe, nous prouvons le résultat suivant.

Proposition 7.6. — Soient $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ deux $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles cuspidales entières de G , et soit un entier $n \geq 1$. Les représentations irréductibles $Z(\tilde{\sigma}_1, n)$ et $Z(\tilde{\sigma}_2, n)$ sont congruentes si et seulement si $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ sont congruentes.

La preuve, qui occupe la totalité du paragraphe 7.3, est découpée en trois étapes. Avant de commencer la preuve, signalons que la conjecture suivante implique immédiatement le résultat voulu.

Conjecture 7.7. — Soit $\tilde{\sigma}$ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière de G , soit σ un facteur irréductible de sa réduction mod ℓ , et soit $a = a(\tilde{\sigma})$. Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$r_\ell(Z(\tilde{\sigma}, n)) = \sum_{\alpha} Z(\sigma, n_0) \times Z(\sigma\nu, n_1) \times \cdots \times Z(\sigma\nu^{a-1}, n_{a-1})$$

où α décrit les familles (n_0, \dots, n_{a-1}) d'entiers ≥ 0 de somme n .

7.3.1. Pour l'implication directe, il suffit d'appliquer le foncteur de Jacquet \mathbf{r}_α avec la famille $\alpha = (m, \dots, m)$ et d'utiliser la formule :

$$\mathbf{r}_\alpha(\mathbf{Z}(\tilde{\sigma}, n)) = \tilde{\sigma} \otimes \tilde{\sigma}\nu_{\tilde{\sigma}} \otimes \cdots \otimes \tilde{\sigma}\nu_{\tilde{\sigma}}^{n-1}$$

et le fait que la réduction mod ℓ commute aux foncteurs de Jacquet (voir [16, §1.2.4]).

7.3.2. Pour la réciproque, nous procédons par récurrence sur n , le cas $n = 1$ étant immédiat. Commençons par prouver le lemme suivant.

Lemme 7.8. — *Soient $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ deux $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles cuspidales entières congruentes de G . Alors on a :*

$$a(\tilde{\sigma}_1) = a(\tilde{\sigma}_2)$$

et les caractères $\nu_{\tilde{\sigma}_1}$ et $\nu_{\tilde{\sigma}_2}$ sont égaux.

Démonstration. — Comme $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ sont congruentes, on a $a(\tilde{\sigma}_1) = a(\tilde{\sigma}_2)$, que l'on note a , et il y a une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale σ telle que :

$$\mathbf{r}_\ell(\tilde{\sigma}_1) = \mathbf{r}_\ell(\tilde{\sigma}_2) = \sigma + \sigma\nu + \cdots + \sigma\nu^{a-1}.$$

On déduit de la proposition 2.6 que $s(\tilde{\sigma}_1) = s(\tilde{\sigma}_2)$. Les caractères $\nu_{\tilde{\sigma}_1}$ et $\nu_{\tilde{\sigma}_2}$ sont donc égaux. \square

Fixons une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière $\tilde{\sigma}$ de G et un entier $n \geq 2$. Posons $a = a(\tilde{\sigma})$, et fixons un facteur irréductible σ de la réduction mod ℓ de $\tilde{\sigma}$. Posons :

$$\Delta = \Delta(\tilde{\sigma}, n) = \mathbf{r}_\ell(\mathbf{Z}(\tilde{\sigma}, n)).$$

Avec les notations du paragraphe 2.3, on commence par remarquer que, si $a = 1$, alors le résultat est immédiat car, dans ce cas, Δ est égal à $\mathbf{Z}(\sigma, n)$ d'après [16, Théorème 9.39]. Supposons donc dorénavant que $a > 1$. Dans ce cas, selon la proposition 2.6, le plus grand diviseur de a premier à ℓ est égal à l'entier $\varepsilon(\sigma)$ défini par (2.8). Pour alléger les notations, cet entier sera noté e dans la suite de la démonstration. Comme $\mathbf{Z}(\tilde{\sigma}, n)$ est l'unique sous-représentation irréductible de :

$$\tilde{\sigma} \times \tilde{\sigma}\nu_{\tilde{\sigma}} \times \cdots \times \tilde{\sigma}\nu_{\tilde{\sigma}}^{n-1}$$

et comme la réduction mod ℓ commute à l'induction parabolique ([16, §1.2.3]), les sous-quotients irréductibles de Δ sont, d'après (2.6), des sous-quotients d'induites paraboliques de la forme :

$$\sigma\nu^{i_1} \times \cdots \times \sigma\nu^{i_n}, \quad i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}.$$

D'après la proposition 2.6(4), si π est un sous-quotient irréductible de Δ , il y a donc une famille d'entiers naturels $\alpha = (n_0, \dots, n_{e-1})$, de somme n , telle que π soit un sous-quotient de l'induite :

$$(7.5) \quad \mathbf{I}(\sigma, \alpha) = \sigma^{\times n_0} \times (\sigma\nu)^{\times n_1} \times \cdots \times (\sigma\nu^{e-1})^{\times n_{e-1}}$$

(où $\sigma^{\times n}$ désigne le produit de n copies de σ , pour tout entier $n \geq 0$ et toute représentation σ). La première chose à faire est de prouver qu'une telle famille est unique.

Lemme 7.9. — *Soit γ une famille d'entiers ≥ 0 de somme n telle que π soit un sous-quotient de $\mathbf{I}(\sigma, \gamma)$. Alors γ est égale à α .*

Démonstration. — Si σ est supercuspidale, alors le résultat est une conséquence de l'unicité du support supercuspidal (voir [16, Théorème 8.16]).

Supposons que σ n'est pas supercuspidale. D'après la paragraphe 2.2, il y a un unique diviseur $k = k(\sigma)$ de m et une représentation irréductible supercuspidale τ de G_r telles que $kr = m$ et σ soit isomorphe à $\text{St}(\tau, k)$. Ecrivons π comme un sous-quotient de :

$$(\tau \times \tau\nu_\tau \times \dots \times \tau\nu_\tau^{k-1})^{\times n_0} \times \dots \times (\tau\nu^{e-1} \times \tau\nu_\tau\nu^{e-1} \times \dots \times \tau\nu_\tau^{k-1}\nu^{e-1})^{\times n_{e-1}}.$$

Réarrangeant l'ordre des termes et posant $e' = \varepsilon(\tau)$, on voit que cette induite est égale à $I(\tau, \alpha')$ avec $\alpha' = (m_0, \dots, m_{e'-1})$ où pour tout $i' \in \{0, \dots, e' - 1\}$ on note :

$$m_{i'} = \sum_{(i,t)} n_i,$$

la somme portant sur l'ensemble $Y(i')$ des couples $(i, t) \in \{0, \dots, e - 1\} \times \{0, \dots, k - 1\}$ tels que les représentations $\tau\nu_\tau^t\nu^i$ et $\tau\nu^{i'}$ soient isomorphes.

Nous posons $s' = s(\tau)$ pour alléger les notations. D'après la proposition 2.6(4) appliquée à τ , un couple (i, t) appartient à $Y(i')$ si et seulement si e' divise $i - i' + ts'$, auquel cas $i - i'$ est un multiple du plus grand diviseur commun à e' et s' , égal à e d'après le lemme 3.1.

Par conséquent, si (i, t) appartient à $Y(i')$, alors i est le reste de $i' \bmod e$. Inversement, notons i le reste de $i' \bmod e$ et soit $t \in \{0, \dots, k - 1\}$. Compte tenu du lemme 3.1, on a :

$$(7.6) \quad (i, t) \in Y(i') \iff \frac{i' - i}{e} \text{ est le reste de } \frac{ts'}{e} \bmod \frac{e'}{e}.$$

D'après le lemme 3.1 et (2.5), le quotient $e'e^{-1}$ est le plus grand diviseur de k premier à ℓ . Par conséquent (7.6) admet $k' = kee'^{-1}$ solutions $t \in \{0, \dots, k - 1\}$. Pour $i' \in \{0, \dots, e' - 1\}$, on a :

$$(7.7) \quad m_{i'} = k'n_i$$

où $i \in \{0, \dots, e - 1\}$ est le reste de i' modulo e .

Remarque 7.10. — L'entier $e'e^{-1}$, qui est noté $\omega(\tau)$ au paragraphe 2.2, est le plus petit entier $t \geq 1$ tel que $\tau\nu_\tau^t$ soit isomorphe à τ , et k' est une puissance de ℓ .

Le cas supercuspidal permet de conclure que les familles α' et γ' sont égales, ce dont on déduit grâce à (7.7) que les familles α et γ sont égales. \square

Nous avons prouvé que, pour tout sous-quotient irréductible π de Δ , il y a une unique famille :

$$\alpha = \alpha(\pi) = (n_0, \dots, n_{e-1})$$

d'entiers ≥ 0 de somme n telle que π soit un sous-quotient de $I(\sigma, \alpha)$ (voir (7.5)). La représentation π s'écrit de façon unique sous la forme d'une induite :

$$i_{m \cdot \alpha}(\pi_\alpha), \quad \pi_\alpha = \pi_0 \otimes \dots \otimes \pi_{e-1} \in \text{Irr}(M_{m \cdot \alpha}, \mathbb{R}),$$

où $m \cdot \alpha$ est la famille (mn_1, \dots, mn_{e-1}) et où π_i est, pour chaque entier $i \in \{0, \dots, e - 1\}$, un sous-quotient irréductible de l'induite $(\sigma\nu^i)^{\times n_i}$.

Lemme 7.11. — Soit π un sous-quotient irréductible de Δ , et soit $\alpha = \alpha(\pi)$. La multiplicité de π dans Δ est égale à la multiplicité de π_α dans $\mathbf{r}_{m \cdot \alpha}(\Delta)$.

Démonstration. — En effet, si l'on écrit :

$$\Delta = \sum_{\tau} k(\tau) \cdot \tau \in \mathcal{R}(G_{mn}, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$$

où τ décrit les classes de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations irréductibles de G_{mn} et où $k(\tau) \in \mathbb{Z}$, alors :

$$\mathbf{r}_{m \cdot \alpha}(\Delta) = \sum_{\tau} k(\tau) \cdot \mathbf{r}_{m \cdot \alpha}(\tau).$$

D'abord, d'après le lemme géométrique ([16]), π_α apparaît avec multiplicité 1 dans $\mathbf{r}_{m \cdot \alpha}(\pi)$.

Soit τ telle que π_α apparaisse dans $\mathbf{r}_{m \cdot \alpha}(\tau)$. Appliquant à nouveau le lemme géométrique, pour que la représentation $\mathbf{r}_{m \cdot \alpha}(\tau)$ contienne un terme homogène, c'est-à-dire un terme irréductible de la forme $\kappa_0 \otimes \cdots \otimes \kappa_{e-1}$ où κ_i est pour chaque i un sous-quotient irréductible de $\sigma^{\times n_i}$, il faut et il suffit que $\alpha(\tau)$ soit égal à $\alpha(\pi)$. Ce terme homogène est alors unique, égal à π_α . On a donc $\tau_\alpha = \pi_\alpha$ ce qui, en induisant, donne $\tau = \pi$. \square

Grâce à la propriété d'unicité du lemme 7.9, on peut décomposer Δ sous la forme :

$$(7.8) \quad \Delta(\tilde{\sigma}, n) = \sum_{i=0}^{e-1} \Delta_i(\tilde{\sigma}, n) + \Delta_{\text{mixte}}(\tilde{\sigma}, n)$$

où $\Delta_i(\tilde{\sigma}, n)$ contient, pour chaque i , les termes de $\Delta(\tilde{\sigma}, n)$ qui sont des sous-quotients irréductibles de $(\sigma\nu^i)^{\times n}$ et où $\Delta_{\text{mixte}}(\tilde{\sigma}, n)$ contient les termes π de $\Delta(\tilde{\sigma}, n)$ pour lesquels $\alpha(\pi)$ contient au moins deux valeurs non nulles (elles sont donc alors toutes strictement inférieures à n).

Lemme 7.12. — *Soient $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ deux $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles cuspidales entières congruentes de G telles que $a(\tilde{\sigma}_1) = a(\tilde{\sigma}_2) > 1$. Alors on a :*

$$\Delta_{\text{mixte}}(\tilde{\sigma}_1, n) = \Delta_{\text{mixte}}(\tilde{\sigma}_2, n).$$

Démonstration. — Soit $\alpha = (n_0, \dots, n_{e-1})$ une famille de e entiers ≥ 0 de somme n . Pour toute $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale $\tilde{\sigma}$ de G , le module de Jacquet $\mathbf{r}_{m \cdot \alpha}(\Delta(\tilde{\sigma}))$ est égal à :

$$\mathbf{r}_\ell(\mathbf{r}_{m \cdot \alpha}(\mathbf{Z}(\tilde{\sigma}, n))) = \mathbf{r}_\ell(\mathbf{Z}(\tilde{\sigma}, n_0)) \otimes \mathbf{r}_\ell(\mathbf{Z}(\tilde{\sigma}\nu_{\tilde{\sigma}}^{n_0}, n_1)) \otimes \cdots \otimes \mathbf{r}_\ell(\mathbf{Z}(\tilde{\sigma}\nu_{\tilde{\sigma}}^{n_0+\cdots+n_{e-2}}, n_{e-1})).$$

D'après le lemme 7.8, les représentations $\tilde{\sigma}_1\nu_{\tilde{\sigma}_1}^k$ et $\tilde{\sigma}_2\nu_{\tilde{\sigma}_2}^k$ sont congruentes pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$. Si α contient au moins deux valeurs non nulles, c'est-à-dire si $n_i < n$ pour tout i , l'hypothèse de récurrence faite au début du paragraphe 7.3.2 implique que :

$$\mathbf{r}_{m \cdot \alpha}(\Delta(\tilde{\sigma}_1, n)) = \mathbf{r}_{m \cdot \alpha}(\Delta(\tilde{\sigma}_2, n)).$$

Soit π un sous-quotient irréductible de $\Delta_{\text{mixte}}(\tilde{\sigma}_1, n)$. D'après le lemme 7.11, on a :

$$[\Delta(\tilde{\sigma}_1, n) : \pi] = [\mathbf{r}_{m \cdot \alpha}(\Delta(\tilde{\sigma}_1, n)) : \pi_\alpha] = [\mathbf{r}_{m \cdot \alpha}(\Delta(\tilde{\sigma}_2, n)) : \pi_\alpha] = [\Delta(\tilde{\sigma}_2, n) : \pi]$$

et par symétrie on a la même chose pour tout sous-quotient irréductible de $\Delta_{\text{mixte}}(\tilde{\sigma}_2, n)$, ce qui met fin à la preuve du lemme 7.12. \square

7.3.3. Pour traiter les autres termes irréductibles de Δ , c'est-à-dire les π pour lesquels $\alpha(\pi)$ n'a qu'une valeur non nulle (donc égale à n), on commence par le lemme suivant.

Lemme 7.13. — *Pour toute $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible π de G_{mn} et tout $i \in \mathbb{Z}$, les représentations π et $\pi\nu^i$ ont la même multiplicité dans Δ .*

Démonstration. — Fixant un caractère non ramifié $\tilde{\omega}$ de G_m relevant ν et notant $|\cdot|_{\mathbb{F}}$ la valeur absolue sur \mathbb{F}^\times , on a :

$$(7.9) \quad [\Delta : \pi\nu^i] = [\Delta : \pi \cdot |\cdot|_{\mathbb{F}}^i] = [\Delta(\tilde{\sigma}, n) \cdot |\cdot|_{\mathbb{F}}^i : \pi] = [\Delta(\tilde{\sigma}\tilde{\omega}^{-i}, n) : \pi].$$

Calculant la réduction mod ℓ de $\tilde{\sigma}\tilde{\omega}^{-i}$ au moyen du théorème 2.5, on trouve :

$$\mathbf{r}_\ell(\tilde{\sigma}\tilde{\omega}^{-i}) = (\sigma + \sigma\nu + \dots + \sigma\nu^{a-1}) \cdot \nu^{-i}.$$

Ayant supposé que $a > 1$, la proposition 2.6 implique que les représentations tordues $\sigma\nu^k$, $k \in \mathbb{Z}$, apparaissent toutes, à isomorphisme près, parmi $\sigma, \sigma\nu, \dots, \sigma\nu^{a-1}$. Ainsi $\tilde{\sigma}\tilde{\omega}^{-i}$ est congrue à $\tilde{\sigma}$ modulo ℓ , et le corollaire 7.5 implique que (7.9) est égal à $[\Delta : \pi]$. \square

On en déduit que :

$$(7.10) \quad \Delta_i(\tilde{\sigma}, n) = \Delta_0(\tilde{\sigma}, n)\nu^i, \quad i \in \{0, \dots, e-1\}.$$

Il nous reste donc à analyser la quantité $\Delta_0(\tilde{\sigma}, n)$ pour $n \geq 1$.

D'après le paragraphe 7.1, la quantité $\Delta_0(\tilde{\sigma}, n)$ s'écrit comme combinaison \mathbb{Z} -linéaire de représentations irréductibles $Z(\mathbf{v} \boxtimes \sigma)$ où les \mathbf{v} sont des multisegments formels de longueur n . Ayant supposé que $a > 1$, les représentations $\sigma\nu_\sigma$ et σ sont isomorphes ([17, Corollaire 3.24]) et donc :

$$[a, k] \boxtimes \sigma = [0, k] \boxtimes \sigma$$

pour tout segment formel $[a, k]$. Ainsi le multisegment $\mathbf{v} \boxtimes \sigma$ ne dépend que de σ et des longueurs des segments composant \mathbf{v} . On peut donc supposer que \mathbf{v} décrit les partitions de n , en identifiant une partition (n_1, \dots, n_r) de n avec le multisegment formel $[0, n_1] + \dots + [0, n_r]$. Nous écrivons donc :

$$\Delta_0(\tilde{\sigma}, n) = \sum_{\mathbf{v}} \mathbf{d}(\tilde{\sigma}, \mathbf{v}) \cdot Z(\mathbf{v} \boxtimes \sigma)$$

où \mathbf{v} décrit les partitions de n et où les $\mathbf{d}(\tilde{\sigma}, \mathbf{v})$ sont des entiers relatifs.

Nous renvoyons à [16] pour la notion de représentation irréductible résiduellement non dégénérée. Soit μ une partition de n . Notons μ^\vee sa partition conjuguée. Par [16, Proposition 9.19], si le module de Jacquet :

$$\mathbf{r}_{m \cdot \mu^\vee}(Z(\mu \boxtimes \sigma))$$

contient un sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré, alors $\mathbf{v} \trianglelefteq \mu$ et ce sous-quotient irréductible résiduellement non dégénéré est unique et apparaît avec multiplicité 1 : on le note $\text{St}(\sigma, \mu^\vee)$. Dans le cas particulier où $\mu^\vee = (n)$, on retrouve la représentation résiduellement non dégénérée $\text{St}(\sigma, n)$ du paragraphe 2.2. Etant données deux partitions \mathbf{v}, μ de n , on note :

$$\mathbf{e}(\mu, \mathbf{v})$$

la multiplicité de $\text{St}(\sigma, \mu^\vee)$ dans le module de Jacquet $\mathbf{r}_{m \cdot \mu^\vee}(Z(\mathbf{v} \boxtimes \sigma))$, entier ≥ 0 ne dépendant que de μ, \mathbf{v} et σ . On a donc $\mathbf{e}(\mu, \mu) = 1$ et, si $\mathbf{e}(\mu, \mathbf{v}) \neq 0$ alors $\mathbf{v} \trianglelefteq \mu$. Par conséquent, on a :

$$(7.11) \quad [\mathbf{r}_{m \cdot \mu^\vee}(\Delta_0(\tilde{\sigma}, n)) : \text{St}(\sigma, \mu^\vee)] = \sum_{\mathbf{v} \trianglelefteq \mu} \mathbf{e}(\mu, \mathbf{v}) \mathbf{d}(\tilde{\sigma}, \mathbf{v}).$$

Nous faisons maintenant appel aux résultats de la section 6. Il y a un morphisme de groupes :

$$\mathbf{K} : \mathcal{R}(\mathbf{G}_{mn}, \overline{\mathbb{F}}_\ell) \rightarrow \mathcal{R}(\text{GL}_{m'n}(k), \overline{\mathbb{F}}_\ell)$$

pour un entier $m' \geq 1$ et une extension k du corps résiduel de F convenablement choisis relativement à (l'endo-classe de) la représentation σ .

Soit τ un facteur irréductible de $\mathbf{K}(\sigma)$; d'après la propriété (6.1.4), c'est une représentation cuspidale de $\text{GL}_{m'}(k)$. Pour toute partition $\mu = (n_1, \dots, n_r)$ de n , notons $\text{st}(\tau, \mu)$ le seul sous-quotient irréductible non dégénéré de $\tau^{\times n_1} \otimes \dots \otimes \tau^{\times n_r}$.

Proposition 7.14 ([16], §8.1). — *La représentation $\text{St}(\sigma, \mu)$ est l'unique sous-quotient irréductible de $\sigma^{\times n_1} \otimes \cdots \otimes \sigma^{\times n_r}$ dont l'image par \mathbf{K} contient la représentation $\text{st}(\tau, \mu)$, et celle-ci apparaît avec multiplicité 1.*

Notons $\mathcal{R}(\mathbf{G}_{mn}, \sigma)$ le sous-groupe de $\mathcal{R}(\mathbf{G}_{mn}, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ engendré par les sous-quotients irréductibles de $\sigma^{\times n}$.

Lemme 7.15. — *Pour tout $\Pi \in \mathcal{R}(\mathbf{G}_{mn}, \sigma)$, on a :*

$$[\mathbf{r}_{m \cdot \mu^\vee}(\Pi) : \text{St}(\sigma, \mu^\vee)] = [\mathbf{r}_{m \cdot \mu^\vee}(\mathbf{K}(\Pi)) : \text{st}(\tau, \mu^\vee)].$$

Démonstration. — Ecrivons :

$$\Pi = \sum_{\pi} k(\pi) \cdot \pi$$

où π décrit l'ensemble $\text{Irr}(\mathbf{G}_{mn}, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$, et :

$$\mathbf{r}_{m \cdot \mu^\vee}(\pi) = m(\pi) \cdot \text{St}(\sigma, \mu^\vee) + \delta$$

avec $m(\pi) \in \mathbb{Z}$ et où δ ne contient aucun facteur irréductible résiduellement non dégénéré. Alors, d'après la proposition 7.14, la représentation $\mathbf{K}(\text{St}(\sigma, \mu^\vee))$ contient $\text{st}(\tau, \mu^\vee)$ avec multiplicité 1, et $\mathbf{K}(\delta)$ ne contient pas $\text{st}(\tau, \mu^\vee)$. \square

Soient maintenant $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$ deux $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles cuspidales entières congruentes de \mathbf{G} telles que $a(\tilde{\sigma}_1) = a(\tilde{\sigma}_2) > 1$. Il s'agit de montrer que $d(\tilde{\sigma}_1, \nu) = d(\tilde{\sigma}_2, \nu)$ pour toute partition ν . Supposons que σ est un facteur commun aux réductions mod ℓ de $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\sigma}_2$. D'après la proposition 6.5, les représentations $\Delta(\tilde{\sigma}_1, n)$ et $\Delta(\tilde{\sigma}_2, n)$ ont la même image par \mathbf{K} . L'identité (7.10) jointe à la propriété (6.1.2) implique que, l'entier $j = 1, 2$ étant fixé, les quantités $\Delta_i(\tilde{\sigma}_j, n)$, $i \in \{0, \dots, e-1\}$, ont la même image par \mathbf{K} .

Remarque 7.16. — Les quantités $\Delta_i(\tilde{\sigma}_j, n)$, $i \in \{0, \dots, e-1\}$, $j = 1, 2$, sont définies relativement au choix de σ .

Puis, grâce au lemme 7.12, on en déduit l'égalité :

$$(7.12) \quad \mathbf{K}(\Delta_0(\tilde{\sigma}_1, n)) = \mathbf{K}(\Delta_0(\tilde{\sigma}_2, n)).$$

Appliquant le lemme 7.15 à $\Delta_0(\tilde{\sigma}_1, n)$ et $\Delta_0(\tilde{\sigma}_2, n)$, qui appartiennent à $\mathcal{R}(\mathbf{G}_{mn}, \sigma)$ par définition, on déduit de (7.12) que, pour toute partition μ de n , on a :

$$[\mathbf{r}_{m \cdot \mu^\vee}(\Delta_0(\tilde{\sigma}_1, n)) : \text{St}(\sigma, \mu^\vee)] = [\mathbf{r}_{m \cdot \mu^\vee}(\Delta_0(\tilde{\sigma}_2, n)) : \text{St}(\sigma, \mu^\vee)].$$

Puis, appliquant (7.11), on en déduit que :

$$\sum_{\nu \preceq \mu} e(\mu, \nu) d(\tilde{\sigma}_1, \nu) = \sum_{\nu \preceq \mu} e(\mu, \nu) d(\tilde{\sigma}_2, \nu).$$

Posons $x(\nu) = d(\tilde{\sigma}_1, \nu) - d(\tilde{\sigma}_2, \nu)$ pour toute partition ν de n . Supposons qu'il y ait une partition μ telle que $x(\mu) \neq 0$ et choisissons μ minimale pour cette propriété (pour l'ordre de dominance \preceq). Ecrivons :

$$e(\mu, \mu)x(\mu) + \sum_{\nu \triangleleft \mu} e(\mu, \nu)x(\nu) = 0.$$

Comme $e(\mu, \mu) = 1$ et comme les $x(\nu)$ sont tous nuls pour $\nu \triangleleft \mu$ par minimalité de μ , on trouve $x(\mu) = 0$.

Ceci prouve que $\Delta_0(\tilde{\sigma}_1, n) = \Delta_0(\tilde{\sigma}_2, n)$ pour tout entier $n \geq 2$, ce qui met fin à la preuve de la proposition 7.6.

7.4. Preuve du théorème 7.3 dans le cas général

Nous revenons maintenant au début de la section 7. Soit $\tilde{\sigma}$ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière. Etant donné un multisegment formel μ , écrivons :

$$Z(\mu \boxtimes \tilde{\sigma}) = \sum_{\mathbf{v}} n(\mu, \mathbf{v}, \tilde{\sigma}) \cdot I(\mathbf{v} \boxtimes \tilde{\sigma})$$

où l'on note :

$$I(\mathbf{v} \boxtimes \tilde{\sigma}) = Z([a_1, n_1] \boxtimes \tilde{\sigma}) \times \cdots \times Z([a_r, n_r] \boxtimes \tilde{\sigma})$$

pour tout multisegment formel $\mathbf{v} = [a_1, n_1] + \cdots + [a_r, n_r]$ et où les $n(\mu, \mathbf{v}, \tilde{\sigma})$ sont dans \mathbb{Z} . Avec les notations du paragraphe 2.2, on a donc :

$$\sum_{\lambda} m(\mu, \lambda, \tilde{\sigma}) n(\lambda, \mathbf{v}, \tilde{\sigma}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \mathbf{v}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

λ décrivant les multisegments formels. Réduisant modulo ℓ , on obtient :

$$\mathbf{r}_\ell(Z(\mu \boxtimes \tilde{\sigma})) = \sum_{\mathbf{v}} n(\mu, \mathbf{v}, \tilde{\sigma}) \cdot \mathbf{r}_\ell(I(\mathbf{v} \boxtimes \tilde{\sigma})).$$

Soient $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles cuspidales entières congruentes. D'après la proposition 7.6, et comme \mathbf{r}_ℓ commute à l'induction parabolique, on a :

$$\mathbf{r}_\ell(I(\mathbf{v} \boxtimes \tilde{\sigma}_1)) = \mathbf{r}_\ell(I(\mathbf{v} \boxtimes \tilde{\sigma}_2)).$$

Par ailleurs, d'après [19, Proposition 4.15], on a l'égalité $n(\mu, \mathbf{v}, \tilde{\sigma}_1) = n(\mu, \mathbf{v}, \tilde{\sigma}_2)$. Ceci met fin à la preuve du théorème 7.3.

7.5. Preuve de la proposition 3.5

Soit $\tilde{\pi}$ une représentation de Speh entière de G_m , qu'on écrit $Z(\tilde{\sigma}, r)$ avec r un diviseur de m et $\tilde{\sigma}$ une représentation irréductible cuspidale entière de G_{mr-1} . D'après la définition 2.1, on a $c(\tilde{\pi}) = c(\tilde{\sigma})$. D'après (7.4) et la proposition 7.6, on a $t(\tilde{\pi}) = t(\tilde{\sigma})$. Enfin, on a $w(\tilde{\pi}) = w(\tilde{\sigma})$ par définition. Le résultat se déduit alors du théorème 3.3.

7.6. Preuve de la proposition 3.8

D'après le paragraphe 2.2, l'application :

$$(7.13) \quad (\tilde{\sigma}, r) \mapsto Z(\tilde{\sigma}, r)$$

est une bijection entre l'ensemble des paires formées d'un diviseur r de m et d'une classe d'isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale $\tilde{\sigma}$ de G_{mr-1} , et l'ensemble $\mathcal{Z}(G_m, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Fixant un entier $w \geq 1$ et un nombre rationnel $j \geq 0$, l'application (7.13) induit une bijection entre :

- (1) classes d'isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles cuspidales $\tilde{\sigma}$ de degré divisant m , de niveau normalisé inférieur ou égal à j , et telles que $w(\tilde{\sigma}) = w$;
- (2) et l'ensemble des $\tilde{\pi} \in \mathcal{Z}(G_m, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ de niveau normalisé inférieur ou égal à j .

Enfin, la proposition 7.6 et la propriété (2.2.4) impliquent que, en réduisant mod ℓ , on obtient une bijection :

$$\mathbf{r}_\ell(\langle\tilde{\sigma}\rangle) \mapsto \mathbf{r}_\ell(\langle Z(\tilde{\sigma}, r)\rangle)$$

entre les ensembles finis $\mathcal{A}_\ell(D, m, w, j)$ et $\mathcal{E}_\ell(D, m, w, j)$, ce qui prouve la proposition 3.8.

Références

- [1] A.-M. Aubert, P. Baum, R. Plymen et M. Solleveld, *Depth and the local Langlands correspondence*, prépublication (2013).
- [2] A. I. Badulescu, *Correspondance de Jacquet-Langlands en caractéristique non nulle*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. (4) **35** (2002), 695–747.
- [3] ———, *Jacquet-Langlands et unitarisabilité*, J. Inst. Math. Jussieu **6** (2007), n°3, 349–379.
- [4] P. Broussous, V. Sécherre et S. Stevens, *Smooth representations of $GL(m, D)$, V: endo-classes*, Documenta Math. **17** (2012), 23–77.
- [5] C. J. Bushnell et G. Henniart, *The essentially tame Jacquet-Langlands correspondence for inner forms of $GL(n)$* , Pure Appl. Math. Q. **7** (2011), n°3, 469–538.
- [6] ———, *Modular local Langlands correspondence for GL_n* , Int. Math. Res. Not. **15** (2014), 4124–4145.
- [7] C. J. Bushnell, G. Henniart et B. Lemaire, *Caractère et degré formel pour les formes intérieures de $GL(n)$ sur un corps local de caractéristique non nulle*, Manuscripta Math. **131** (2010), n°1-2, 11–24.
- [8] A. I. Badulescu, G. Henniart, B. Lemaire et V. Sécherre, *Sur le dual unitaire de $GL_r(D)$* , Amer. J. Math. **132** (2010), n°5, 1365–1396.
- [9] J.-F. Dat, *Théorie de Lubin-Tate non-abélienne ℓ -entière*, Duke Math. J. **161** (2012), n°6, 951–1010.
- [10] ———, *Un cas simple de correspondance de Jacquet-Langlands modulo ℓ* , Proc. London Math. Soc. **104** (2012), 690–727.
- [11] P. Deligne, D. Kazhdan et M.-F. Vignéras, *Représentations des algèbres centrales simples p -adiques*, Representations of reductive groups over a local field, Hermann, Paris, 1984.
- [12] R. Dipper, *On the decomposition numbers of the finite general linear groups. II*, Trans. Amer. Math. Soc. **292** (1985), n°1, 123–133.
- [13] R. Dipper et G. James, *Identification of the irreducible modular representations of $GL_n(q)$* , J. Algebra **104** (1986), n°2, 266–288.
- [14] G. James, *The irreducible representations of the finite general linear groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **52** (1986), n°2, 236–268.
- [15] A. Mínguez & V. Sécherre, *Représentations banales de $GL(m, D)$* , Compos. Math. **149** (2013), 679–704.
- [16] ———, *Représentations lisses modulo ℓ de $GL_m(D)$* , Duke Math. J. **163** (2014), 795–887.
- [17] ———, *Types modulo ℓ pour les formes intérieures de GL_n sur un corps local non archimédien*. Avec un appendice de V. Sécherre et S. Stevens. A paraître dans Proc. Lond. Math. Soc. (2015).
- [18] ———, *Représentations modulaires de $GL_n(q)$ en caractéristique non naturelle*, à paraître dans Contemporary Math. (2015).
- [19] ———, *L’involution de Zelevinski modulo ℓ* , prépublication (2015).
Disponible à l’adresse <https://tel.archives-ouvertes.fr/UVSQ/hal-01133755v1>
- [20] J. Rogawski, *Representations of $GL(n)$ and division algebras over a p -adic field*, Duke Math. J. **50** (1983), 161–196.
- [21] V. Sécherre, *Comptage de représentations cuspidales congruentes*, prépublication (2015).
Disponible à l’adresse <http://lmv.math.cnrs.fr/annuaire/vincent-secherre/>

- [22] V. Sécherre et S. Stevens, *Représentations lisses de $GL(m, D)$, IV : représentations supercuspidales*, J. Inst. Math. Jussieu **7** (2008), n°3, p. 527–574.
- [23] ———, *Block decomposition of the category of ℓ -modular smooth representations of $GL_n(\mathbb{F})$ and its inner forms*. A paraître dans Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. (2015).
- [24] M. Tadić, *Induced representations of $GL(n, A)$ for p -adic division algebras A* , J. Reine Angew. Math. **405** (1990), 48–77.
- [25] M.-F. Vignéras, *Représentations l -modulaires d'un groupe réductif p -adique avec $l \neq p$* , Progress in Mathematics, vol. 137, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.
- [26] ———, *Correspondance de Langlands semi-simple pour $GL_n(\mathbb{F})$ modulo $\ell \neq p$* , Invent. Math **144** (2001), 177–223.
- [27] ———, *On highest Whittaker models and integral structures*, Contributions to Automorphic forms, Geometry and Number theory: Shalikafest 2002, John Hopkins Univ. Press, 2004, 773–801.
- [28] A. V. Zelevinsky, *Induced representations of reductive p -adic groups. II. On irreducible representations of $GL(n)$* , Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. (4) **13** (1980), n°2, 165–210.

ALBERTO MÍNGUEZ, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 6, 4 place Jussieu, 75005, Paris, France. URL: <http://www.math.jussieu.fr/~minguez/> • E-mail : minguez@math.jussieu.fr

VINCENT SÉCHERRE, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, 45 avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles cedex, France
E-mail : vincent.secherre@math.uvsq.fr