



HAL
open science

Méthodes indiennes de calcul

François Patte

► **To cite this version:**

| François Patte. Méthodes indiennes de calcul. 2015. hal-01176085

HAL Id: hal-01176085

<https://hal.science/hal-01176085>

Submitted on 14 Jul 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthodes indiennes de calcul

François Patte
CNRS–MAP5
15 février 2014

La numération de position, dans laquelle les chiffres ont une valeur en fonction de la place qu'ils occupent dans le nombre, est connue depuis longtemps, au moins depuis l'époque paléo-babylonienne vers 1700 av.J.-C. Mais la numération décimale de position a probablement été inventée en Inde, où elle est premièrement attestée. Cette numération permet de noter tous les nombres de manière succincte, notamment des nombres énormes, et l'Inde jongle avec les nombres énormes, ne serait-ce que le nombre de cycles de vie. Mais la notation ne suffit pas, il faut aussi des méthodes de calcul. Les Indiens les ont fournies avec la numération dans des textes qui ont été fort appréciés des savants arabes, qui les ont transmis à l'Europe.

Quelques mathématiciens indiens

Le problème avec les ouvrages indiens c'est que beaucoup sont peut-être cachés ou perdus, on ne sait pas. Au moins savons-nous qu'Āryabhaṭa (476 – 550 EC) est l'un des premiers mathématiciens-astronomes indiens connus dont nous possédons un traité. Dans son œuvre principale, l'*Āryabhaṭīya*, il utilise la numération décimale de position, avec le zéro, donne une valeur approchée de π : $\frac{20000}{62832} = 3,1416$, une table de sinus ainsi que sa méthode de construction, et résout des équations du premier degré en nombres entiers, dites aujourd'hui diophantiennes linéaires.

Un autre mathématicien très important est Brahmagupta (598 – 670 EC). Son œuvre principale, le *Brahmasphuṭasiddhānta*, n'est toujours pas éditée ni traduite, ou seulement par bribes. On y trouve la première utilisation du zéro comme nombre à part entière. En effet, dans la numération positionnelle, le zéro note une absence, c'est un signe typographique et il faudra très longtemps pour qu'on l'utilise comme nombre. Le *Brahmasphuṭasiddhānta* est le premier ouvrage indien — peut-être pas le premier au monde — où l'auteur va se servir du zéro comme d'un nombre. Cela ne s'impose pas d'emblée puisque, dans des textes du xvi^e siècle, on peut lire des phrases comme : « zéro n'est pas un nombre par lui-même. » Brahmagupta utilise des nombres négatifs, énonce la règle des signes, donne une formule pour générer des solutions d'équations du second degré en nombres entiers ($y^2 - nx^2 = k$), c'est-à-dire des équations diophantiennes quadratiques, à partir d'un couple de solutions connu. Il ne donne pas de méthode pour trouver ce couple de solutions. Il fait aussi

des calculs trigonométriques, importants pour l'astronomie. Tous les mathématiciens indiens sont aussi astronomes. Dans ce domaine, l'Inde semble être aussi à l'origine du sinus tel que nous le connaissons. Au départ, les astronomes, comme Ptolémée (II^e siècle EC) par exemple, tabulaient les cordes en fonction des angles, mais les Indiens y ont substitué la demi-corde, soit le sinus.

Le premier Bhāskara I (600 – 680 EC) est connu par son commentaire sur l'œuvre d'Āryabhaṭa. Il y donne une bonne approximation de la fonction sinus ; en fait des tables de sinus, parce qu'il n'y a pas d'idée de fonction sinus dans les mathématiques indiennes.

Le deuxième Bhāskara, ou Bhāskarācārya, (1114 – 1185 EC) a composé le *Siddhāntaśiromaṇi*, c'est-à-dire « le diadème posé sur le *Siddhānta* ». *Siddhānta* est un nom générique désignant une synthèse sur laquelle on s'accorde de manière générale ; ce mot en vient à désigner des œuvres astronomiques, comme le *Sūrya Siddhānta*, « le *Siddhānta* du soleil », qui est très célèbre dans la culture indienne. On ne sait pas qui l'a composé et les légendes l'attribuent au dieu soleil lui-même. Le *Siddhāntaśiromaṇi* contient quatre parties, dont deux mathématiques (*Līlāvāṭī* et *Bījagaṇita*) et deux astronomiques (*Golādhyāya* — traité des sphères — et *Grahaṅgaṇita* — calcul des planètes). Bhāskara II est très connu en Inde car son œuvre constitue une encyclopédie des connaissances mathématiques et astronomiques au XI^e siècle. Il donne la formule d'addition des sinus et cosinus et, sans démonstration, une méthode de calcul des solutions de l'équation diophantienne quadratique. Lagrange démontrera à la fin du XVIII^e siècle que ces équations ont toujours une solution et il donnera une méthode pour les calculer à l'aide des fractions continues, qui n'est pas celle de Bhāskara.

Au début de leurs œuvres, les mathématiciens indiens nous parlent toujours un peu d'eux-mêmes. Ainsi, Bhāskara II, dans le *Siddhāntaśiromaṇi* :

« Ma naissance eut lieu en l'année mille trente-six des rois Śāka (1114 EC) ; au cours de ma trente-sixième année, j'ai composé le *Siddhāntaśiromaṇi*.

Il y eut à Vijjaḍaviḍa, ville située dans les monts Sahya, (...) le vertueux Maheśvara, achèvement des hommes saints, diadème des astrologues.

Né de ce dernier, l'intelligent poète Bhāskara, dont la clarté du style lui est acquise des deux lotus des pieds de son père, a fait un exposé du *Siddhānta* qui baratte les mauvaises idées, provoquant l'éveil des ignorants ; clair, il procure la joie aux subtils astronomes, riche en formules et arguments évidents et justes, il est aisément intelligible aux savants. »

Au-delà du style — l'achèvement des hommes saints, le diadème des astrologues —, on note la forte préoccupation des mathématiciens indiens pour ce qui est clair, riche en formules évidentes et justes.

Que sait-on de Bhāskara ? Pas grand-chose ! S'il nous donne la date de sa naissance, 1114, celle de sa mort, 1185, est une date supposée : c'est la date de sa dernière œuvre connue. Où vivait-il ? Dans la ville de Vijjāḍaviḍa, située dans les monts Sahya. Cette ville est inconnue actuellement, du moins sous ce nom. Les monts Sahya sont situés au nord-est de Bombay ; c'est dans cette région que l'on a retrouvé au XIX^e siècle les grottes d' Ajanta et leurs fresques bouddhiques. Dans ces monts, se trouve un temple du XIII^e siècle, Pāṭṇadevī temple, qui existe toujours et dans le soubassement duquel on a retrouvé, au XIX^e siècle, une inscription parlant de Bhāskara, ce qui nous permet d'en savoir un peu plus.

Cette inscription commence par : « Gloire au fortuné Bhāskarācārya dont les pieds sont révéérés par les savants, (...) » Plus loin : « Dans la lignée des Śāṅḍilya, il y eut Trivikrama, empereur des poètes. Il eut un fils qui reçut, du roi Bhoja, le titre de maître de la connaissance (...) » Cette partie nous indique toute la généalogie de la famille de Bhāskarācārya, qui s'est probablement installée dans cette région vers l'an 1000, puisque le roi Bhoja gouvernait cette région à cette époque. Plus loin, on parle du père de Bhāskara : « De lui est né le glorieux Maheśvarācārya, prince des poètes. Son fils, dont les pieds sont révéérés par la multitude des poètes, était le sage Bhāskarācārya (...) » Vient ensuite la descendance de Bhāskara : « Le fils de Bhāskara, Lakṣmīdhara, grand érudit (...) De ce dernier est né un fils, éminent astrologue du roi Siṅghaṇa : Caṅgadeva, qui fonde une école pour répandre l'œuvre composée par Bhāskarācārya. » L'inscription se termine par : « Dans mon école, les œuvres composées par Bhāskarācārya, à commencer par le Siddhāntaśiromaṇi, et d'autres, faites par ceux de sa famille, devront nécessairement être expliquées. »

On peut supposer que dans ce temple de Pāṭṇadevī a été installée par la famille régnante — les Yādava de Devagiri — une école de mathématiciens dirigée par le propre petit-fils de Bhāskara, Caṅgadeva, afin de perpétuer l'œuvre de son grand-père et les mathématiques et l'astronomie en général.

Līlāvātī

Līlāvātī, qui est le nom d'une des parties mathématiques du *Siddhāntaśiromaṇi*, est un prénom féminin. Un auteur persan raconte que Bhāskara avait une fille, Līlāvātī, qu'il aimait beaucoup. Le jour de son mariage, Bhāskara, qui était astrologue comme tous les mathématiciens-astronomes, devait faire un horoscope pour déterminer l'instant propice de la cérémonie et, pour mesurer le temps, il utilisait une horloge à eau, une clepsydre. La jeune fille, qui avait mis une robe décorée de perles, très intéressée par cette horloge s'est penchée au-dessus, une perle s'est détachée, est tombée dans l'eau et a bouché l'orifice par où l'eau s'échappe, arrêtant l'horloge. Son

père n'a pas vu que l'horloge était arrêtée et s'est trompé dans son horoscope, fixant le mariage à une heure néfaste. *Līlāvātī* s'est mariée et a perdu son mari ; pour la consoler, Bhāskara a composé cette œuvre et lui a donné son nom. On ne trouve pas cette histoire dans les textes indiens qui donnent une toute autre interprétation pour ce titre comme on le verra plus loin.

La *Līlāvātī* traite de ce qu'on appelle traditionnellement l'arithmétique, c'est-à-dire le calcul élémentaire enseigné aux instituteurs en France jusque dans les années 1930. Le programme du Ministère de l'Éducation Nationale de cette époque contenait exactement les mêmes chapitres que ceux de la *Līlāvātī*.

L'autre partie mathématique du *Siddhāntaśiromaṇi*, le *Bījagaṇita*, traite de l'algèbre. *Bījagaṇita* est le nom générique de l'algèbre en Inde : *gaṇita*, c'est le calcul et *bīja*, ce sont les graines, donc *Bījagaṇita*, c'est le calcul sur les graines, c'est-à-dire sur les inconnues, car elles portent en elles la possibilité de faire de nombreux calculs applicables à différentes situations. Dans la suite de cet exposé, il sera surtout question des calculs faits dans la *Līlāvātī*.

Une œuvre traditionnelle en Inde est écrite en vers et commence toujours par une strophe propiciatoire :

*prītiṃ bhaktajanasya yo janayate vighnaṃ vinighnan smṛtaḥ
taṃ vṛndāarakavṛndavanditapadaṃ natvā mataṅgānanam |
pāṭiṃ sadgaṇitasya vacmi caturaprītipradām prasphuṭām
saṃkṣiptākṣarakomalāmalapadair lālityalīlāvātīm ||*

M'étant incliné devant Mataṅgānana, dont les pieds sont révéérés par des multitudes de dieux — lui qui, appelé à l'esprit, produit la joie de ses fidèles en détruisant les obstacles — je prononce, avec des mots aux syllabes réduites, agréables, sans faute, une méthode de bon calcul qui procure une joie vive, est franche et possède la grâce du jeu.

Mataṅgānana est un des noms du dieu à tête d'éléphant, Ganesh, qui a comme fonction de dissiper les obstacles et, comme tel, est invoqué au moment d'entreprendre quoi que ce soit. Il est de tradition en Inde, dans les œuvres mathématiques écrites en vers, d'avoir des mots « aux syllabes réduites » : il ne doit pas y avoir un mot de trop et, même, il ne doit pas y avoir une syllabe de trop, ce qui donne parfois des textes où il est extrêmement difficile de comprendre de quoi il s'agit. La *Līlāvātī* a deux cent soixante-dix strophes de ce type. C'est vraiment très condensé et il est nécessaire d'avoir recours à des commentaires.

En Inde, le couple œuvre-commentaire — une fois l'œuvre reconnue comme ouvrage de référence¹ est le mode traditionnel de transmission des connaissances. Le

1. On ne développera pas ici comment ces œuvres sont choisies ni pourquoi elles sont choisies

commentateur a pour mission non seulement d'expliquer le texte, le poème, les mots, mais aussi d'expliquer les méthodes mathématiques, de les développer et, d'une certaine manière, de les justifier. Je me suis donc beaucoup servi des commentaires pour vous montrer les techniques des opérations.

Dans le troisième vers, *pāṭim*, accusatif de *pāṭi*, veut dire méthode, mais aussi planchette, sur laquelle on faisait des calculs ; il n'y avait pas de papier. On mettait de la poussière ou du sable sur la planchette, puis on écrivait avec le doigt, ou avec un stylet, les opérations, que l'on effaçait au fur et à mesure. Donc, quand vous faites une opération, par exemple une multiplication, vous multipliez deux chiffres et vous effacez le chiffre qui a été multiplié pour le remplacer par le résultat. C'est assez troublant pour nous qui avons l'habitude d'avoir une succession de calculs tous visibles à la fin.

Līlāvātīm, dernier mot, qualifie *pāṭim*, la méthode, et signifie : « qui possède la grâce du jeu ». C'est sans doute là l'origine du nom de la *Līlāvātī*, c'est en tout cas comme ça que les commentateurs expliquent le nom *Līlāvātī* et non pas avec l'histoire d'une supposée fille de Bhāskara. On sait, par l'inscription sur le temple, que Bhāskara avait des fils mais on ne sait rien quant à l'existence d'une fille.

Que contient la *Līlāvātī* ? Voici un extrait de la table des matières :

Paribhāṣā (conventions) : Différentes mesures de monnaies, longueurs, surfaces, volumes et poids.

Samkhyāsthānanirṇaya : Numération. Description de la numération décimale de position où, dans un nombre, chaque chiffre a dix fois la valeur de celui qui se trouve à sa droite.

Parikarmāṣṭaka : Huit opérations sur les nombres : addition, soustraction, multiplication, division, carré, racine carrée, cube et racine cubique.

Bhinnaparikarmāṣṭaka : Huit opérations sur les fractions.

Śūnyaparikarmāṇi : Opérations avec zéro.

Trairāśika : Règle de trois.

Miśravavyahāra (transaction des mélanges) : Règles permettant de calculer des intérêts, des titres d'alliages de métaux précieux, d'où le nom *miśra* (mélange).

Śreḍhivyavahāra : Problèmes relatifs à des progressions arithmétiques et géométriques.

Kṣetravyavahāra : Problèmes de calculs sur la géométrie des figures planes.

Pour les opérations, c'est exactement ce qui était au programme de l'enseignement primaire dans les années 1930.

Pour les fractions, Bhāskara traite toutes les opérations définies pour les nombres, à l'exception des racines carrées et cubiques. Ce qui implique l'enseignement de la réduction au même dénominateur.

En ce qui concerne les opérations avec zéro, nous l'avons vu plus haut, Brahmagupta est le premier à avoir utilisé zéro comme nombre. Néanmoins, cinq cents ans plus tard, on prévoit quand même un chapitre spécial pour zéro et la justification de l'existence d'un tel chapitre existe toujours dans les œuvres des xv^e et xvi^e siècles.

Nous nous intéresserons ici aux opérations sur les nombres, mais on ne présentera ni l'addition ni soustraction dont la méthode ne diffère pas de la nôtre, alors que la multiplication, par exemple, utilise une autre disposition.

L'ordre dans lequel sont présentées les opérations a de l'importance. Elles sont groupées par couple : après l'addition, la soustraction ; après la multiplication, la division, etc. Les commentaires justifient ainsi la cohérence du système, chaque opération ayant son inverse qui permet de retrouver la quantité initiale : si je multiplie douze par cinq, je trouve soixante et, en divisant ce résultat par cinq, je retrouve le douze que j'avais au départ.

Multiplication

Dans la *Līlāvātī*, il y a plusieurs règles pour effectuer une multiplication ; voici le principal algorithme qui a pour nom *kapāṭasam̐dhi* « jonction des vantaux (de portes coulissantes) » :

*guṇyāntyam aṅkaṃ guṇakena hanyād
utsāritenaivam upāntyam ādīn |*

On multipliera le dernier chiffre du multiplicande par le multiplicateur déplacé aussi pour l'avant-dernier et ceux du début.

C'est tout ! On remarquera la structure « algorithmique » de la règle : une opération simple, « on multipliera le dernier chiffre du multiplicande par le multiplicateur » et une itération, « déplacé aussi pour l'avant-dernier et ceux du début ». C'est là que les commentaires vont montrer leur utilité en nous expliquant ce qu'il faut comprendre par « dernier, avant-dernier, déplacement, début... »

La *Līlāvātī* est organisée en une succession de règles opératoires suivies d'exemples, d'exercices d'application immédiate.

Plutôt que de donner tout de suite l'exemple de la *Līlāvātī*, que nous traiterons plus tard, nous allons prendre un autre traité plus tardif (le *Pāṭīganīta* de Śrīdhara, xv^e siècle) dans lequel la méthode est vraiment très détaillée.

Soit à multiplier 1296 par 21.

On pose le multiplicande 1296 au-dessous du multiplicateur 21.

	2 I	2 1	21	
I	129 6	129 6 6	12926	
			1	
	2 I	2 1	21	21
II	12 9 26	12 9 16	12816	12016
	1	2	12	2
	2 I	2 1	21	
III	1 2 016	1 2 216	16216	
	2	2		
	2 I	2 1	21	
IV	1 6216	1 7216	27216	27 216

La multiplication va être effectuée en déplaçant le multiplicateur pour chaque chiffre du multiplicande. On a détaillé ces étapes sur chaque ligne du tableau numérotée par un chiffre romain, en particulierisant les chiffres sur lesquels porte la multiplication.

I– (a) Le 1 du multiplicateur multiplie le 6 du multiplicande ; le résultat est posé au-dessous du 1. (b) Puis c’est au tour du 2 de multiplier ce même 6. (c) Le résultat, 12, est placé au-dessous du 2 de la manière suivante : 2 remplace le 6 qui a été multiplié et 1 est placé comme retenue au-dessous du 9.

Le 6 de 1296 ayant été multiplié par les deux chiffres de 21, on fait glisser le multiplicateur d’un cran vers la gauche pour le mettre au-dessus du 9.

II– On recommence la multiplication de la même manière : (a) 1 multiplie 9 et le résultat est ajouté au 2 placé au-dessous, on obtient 11 ; donc 1 remplace 2 et la retenue 1 est ajoutée à la retenue de l’étape précédente, on obtient 2 au-dessous de 9. (b) Maintenant 2 multiplie 9, 18 ; (c) 8 remplace 9 et la retenue 1 est placée au-dessous du 2 qui précède le 9. (d) On ajoute la retenue de l’étape précédente, 2, à 8 qui est remplacé par 0 et la retenue 1 est ajoutée à la retenue 1 qui est placée sous le 2.

On a fini pour la multiplication de 9 par 21, le multiplicateur est donc déplacé d’un cran vers la gauche pour être placé au-dessus de 2.

III– (a) Maintenant 1 multiplie 2, le résultat est ajouté au zéro qui est au-dessous, donc 0 est remplacé par 2. (b) 2 multiplie 2 et le résultat 4 est ajouté à la retenue 2 ; (c) 6 remplace donc la 2 du multiplicande.

On fait alors glisser le multiplicateur pour le placer au-dessus de 1.

IV– (a) 1 multiplie 1, le résultat est ajouté à 6 qui est donc remplacé par 7. (b) 2 multiplie 1, (c) le 1 du multiplicande est donc remplacé par 2. (d) Les chiffres du multiplicande étant épuisés, le multiplicateur est effacé, le résultat de la multiplication est donc 27 216.

Voici comment Bhāskara présente les exemples/exercices :

*bāle bālakuraṅgalolanayane līlavatī procyatām
pañcatryekamitā divākaraguṇāṅkāḥ kati syur yadi |
rūpasthānavibhāgakhaṇ.daguṇane kalyāsi kalyāṇini
chinnās tena guṇena te ca guṇitā jātāḥ kati syur vada ||*

Ô mon enfant Līlavatī ! Dont les yeux sont inconstants comme ceux de la jeune gazelle, que soit dit combien sera le nombre mesuré par cinq, trois et un, multiplié par douze, si tu es préparée, ma belle, à la multiplication, par parts suivant une partition selon les rangs ou en entiers ; et ceux qui ont été multipliés, divisés par le multiplicateur, dis combien ils produisent.

« Mon enfant Līlavatī ! » Nomme-t-il ainsi son enfant, ou sa méthode qui est son enfant ? On ne sait pas. À d'autres endroits, Bhāskara dit : « mon cher », il ne s'adresse plus à un personnage féminin.

« Combien sera le nombre mesuré par cinq, trois, et un ? » En sanskrit, on énonce les nombres « à l'envers » par rapport à notre manière de faire en français : on commence par désigner les unités ; on dira : 5 unités et 3 dizaines et 1 centaine pour énoncer le nombre 135. Mais l'ordre de l'écriture est identique au nôtre : on commence par le rang le plus élevé, ici la centaine. La description donnée dans les algorithmes est celle de l'énonciation, on comprendra alors que le premier chiffre est celui écrit à la fin, ici 5, et le dernier celui qui est écrit au début, 1.

Cet exemple nous montre une autre manière de nommer les nombres : douze est désigné par *divākara*, ce qui veut dire le faiseur de lumière, c'est-à-dire le soleil. C'est une méthode habituelle dans les textes indiens de désigner des nombres par des noms ayant un sens dans la vie courante. Douze est désigné par le soleil parce qu'il y a douze mois, ou douze signes du zodiaque, car cette tradition occidentale s'est répandue en Inde et a remplacé le système védique des maisons lunaires, qui étaient au nombre de vingt-sept. Tous les synonymes sont recevables. Par exemple douze peut aussi être désigné par *arka* qui est un synonyme de *divākara*.

Voici quelques exemples : *akṣi*, œil, pour le nombre deux ; *iṣu*, flèche, les flèches du dieu amour, Manmatha, sont au nombre de cinq ; *ṛtu*, saison, les saisons sont au nombre de six en Inde : printemps, saison chaude, saison des pluies, automne, saison fraîche et hiver, chacune durant deux mois ; *danta* : dent, pour trente-deux, bien entendu ; *bha* : maison lunaire, le zodiaque indien védique est divisé en vingt-sept *nakṣatra*, constellations, une par jour lunaire ; *kha* : le ciel ; il est vide, donc c'est zéro ; *hutaśa* : le mangeur d'oblation, c'est-à-dire le feu, soit trois, car le feu sacrificiel est de trois sortes.

Cette méthode porte le nom de *bhūtasāṃkhya*, les nombres-choses. Ce n'est pas toujours évident quand on y est étranger. Quand Bhāskara, tout à coup, se met à parler des saisons, des dents et des maisons lunaires, on se demande de quoi il s'agit. Mais, c'est très efficace pour composer des œuvres en vers. En effet, il est plus court d'utiliser la désignation de vingt-sept en une seule syllabe que d'énoncer sept unités et deux dizaines. C'est trop long et cela risque de détruire la métrique. Or la métrique, dans une œuvre en vers est une contrainte absolue et ne tolère aucune erreur.

Voici comment cet exemple est traité par un commentateur (Gaṅgādhara, xv^e s.) ; la méthode est la même que pour l'exemple précédent — glissements successifs du multiplicateur — mais il opère de gauche à droite, n'additionne les retenues qu'à la fin du calcul et considère le multiplicateur sans effectuer la multiplication chiffre après chiffre, utilisant ce que nous appellerions la « table de douze ».

$$\begin{array}{r}
 \mathbf{12} \quad 12 \\
 \text{I} \quad \mathbf{135} \quad 1235 \\
 \\
 \mathbf{12} \quad 12 \\
 \text{II} \quad 12\mathbf{35} \quad 1265 \\
 \quad \quad 3 \\
 \\
 \mathbf{12} \quad 12 \\
 \text{III} \quad 126\mathbf{5} \quad 1260 \\
 \quad \quad 3 \quad 36 \\
 \\
 \text{IV} \quad 1260 \quad \boxed{1620} \\
 \quad \quad 36
 \end{array}$$

I– (a) 12 multiplie le 1 du multiplicande et (b) ce dernier est remplacé par le résultat.

II– Après glissement du multiplicateur, (a) 12 multiplie 3 et (b) le résultat 36 est placé comme dans l'autre exemple : 6 remplace 3 et la retenue 3 est placée au-dessous du 2 du multiplicande.

III– (a) 12 multiplie 5 et (b) soixante est placé comme à l'étape précédente : 0 remplace 5 et la retenue 6 est mise au-dessous du 6 du multiplicande.

IV– (a) Ayant épuisé les chiffres du multiplicande, le multiplicateur est effacé et (b) les retenues sont additionnées aux chiffres qui se trouvent au-dessus.

Cette capacité à effectuer les opérations indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche — cela ne concerne pas uniquement la multiplication — montre que les mathématiciens indiens avaient une grande maîtrise de la numération (décimale) de position quand ils ont élaboré leurs algorithmes.

La règle énoncée par Bhāskara donne sept méthodes de multiplication. En fait, celle que nous venons de voir est le principe opératoire qui sera utilisée par les autres dont le but est plutôt d'alléger ce principe opératoire. D'un point de vue « moderne » certaines de ces règles peuvent être lues comme des propriétés de la multiplication qui, si elles ne sont pas énoncées comme telles, montrent que ces propriétés étaient connues des mathématiciens indiens.

*guṇyas tv adho 'dho guṇakhaṇḍatulyas
taiḥ khaṇḍakaiḥ saṃguṇito yuto vā ||*

Ou bien, le multiplicande, en nombre égal à celui des parts du multiplicateur est au-dessous de chacune d'elles ; il est multiplié par ces parts et additionné.

Cela signifie que le multiplicateur est coupé en deux par addition. Le texte de la *Līlāvātī* ne propose pas d'exercice particulier pour cette règle mais les commentateurs vont se servir de l'exemple que nous avons vu pour l'illustrer ; ce qui fait d'un commentaire un livre d'exercices corrigés.

Tel commentateur dira par exemple : « Les parts du multiplicateur sont huit et quatre ($12 = 8+4$) » et il disposera les opérations comme précédemment :

$$\begin{array}{r|l} 8 & 4 \\ 135 & 135 \end{array}$$

Puis il appliquera la méthode du *kapāṭasaṃdhi* et additionnera les résultats des deux multiplications. Cette méthode repose sur la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$135 \times (8 + 4) = 135 \times 8 + 135 \times 4 = 1080 + 540 = 1620$$

Elle est exploitée d'une autre manière qui fait référence à la numération décimale de position :

*dvidhā bhaved rūpavibhāga evaṃ
sthānaiḥ pṛthag vā guṇitaḥ sametaḥ |*

Ou bien il y aura une partition en entiers de deux manières, multipliée séparément par les rangs et additionnée.

Les « rangs » sont ceux de la numération décimale : on décompose 12 en $10 + 2$; le procédé revient alors à faire des multiplications uniquement avec des nombres à un seul chiffre, ce qui simplifie l'opération.

On remarquera que la règle indique « de deux manières (*dvidhā*) » et, conformément à la méthode d'exposition qui veut qu'aucun mot ne doit être inutile, les commentateurs appliquent donc aussi la décomposition au multiplicande : $135 = 130 + 5$.

Toujours en exploitant cette propriété de distributivité, il y a une règle dont on peut supposer qu'elle s'applique à la pratique du calcul mental :

*iṣṭonayuktena guṇena nighno
'bhīṣṭaghmaguṇyānvitavarjito vā ||*

Ou bien [le multiplicande], multiplié par le multiplicateur diminué ou augmenté d'un nombre arbitraire, est augmenté ou diminué du multiplicande multiplié par ce nombre arbitraire.

En primaire, on nous enseignait cette méthode : vous voulez multiplier par 18, multipliez d'abord par 20, ensuite par 2, et soustrayez les deux résultats. On notera la précision de la rédaction du texte qui « croise » l'usage des mots « diminué » et « augmenté » : si on a diminué le multiplicateur, il faudra augmenter le résultat et réciproquement.

Division

Les opérations marchent par couple. Ce qu'on a fait avec la multiplication, il faut être capable de le défaire avec une autre opération qui est la division. La manière de présenter la division emprunte d'ailleurs beaucoup à la manière dont est présentée la multiplication.

*bhājyād dharaḥ śudhyati yadguṇaḥ syād
antyāt phalaṃ tat khalu bhāgahāre |
samena kenāpy apavartya hāra-
bhājyau bhajed vā sati sambhave tu ||*

Dans la division, le quotient sera spécifiquement ce par quoi le diviseur multiplié, à partir du dernier [rang], se retire du dividende. Ou bien, après avoir simplifié par un même certain [nombre] le diviseur et le dividende, quand cela est possible, on divisera.

Le quotient, est de nos jours défini de la même manière : c'est le nombre par lequel on multiplie le diviseur pour obtenir le dividende.

« A partir du dernier rang », prépare la manière selon laquelle on va opérer. Ensuite, Bhāskara donne une règle de simplification évidente : avant de se lancer dans une division, il faut vérifier qu'on ne peut pas simplifier la fraction.

Il n'y a pas d'exemple spécifique pour la division, il a été donné dans la dernière phrase de l'exemple de la division ce qui définit bien l'opération de division comme l'inverse de celle de la multiplication :

...chinnās tena guṇena te ca guṇitā jātāḥ kati syur vada ||

...et ceux qui ont été multipliés, une fois divisés par ce multiplicateur, dis combien ils produisent.

I		II		III	
1620	$\frac{420}{1620}$	420	$\frac{60}{420}$	60	$\frac{00}{60}$
12	$1 \times 12 = 12$	12	$3 \times 12 = 36$	12	$5 \times 12 = 60$
Quotients :	1		13		135

I– « Ici, après avoir posé le diviseur au-dessous du dernier chiffre, le diviseur, multiplié par un exactement, est retiré du dividende »

C'est un peu la même disposition que pour la multiplication mais le diviseur est placé au-dessous du dernier chiffre alors que le multiplicateur était placé au-dessus. Chez d'autres commentateurs, il est placé au-dessus, cela n'a pas d'importance, mais on observe ici encore cette manière de lire les nombres (dernier chiffre, etc.).

On applique la définition du quotient, donc on cherche le nombre par lequel il faut multiplier 12 pour pouvoir retirer le résultat de 16, c'est 1. On retire donc 12 de 16, il reste 4.

Dans le tableau nous avons mis le résultat de la soustraction au-dessus, séparé par un trait horizontal ; en fait il faut se rappeler que sur une planchette on efface le nombre sur lequel a porté l'opération et on le remplace par le résultat.

II– Le diviseur est alors placé sous le 4, marquant ainsi le chiffre du dividende sur lequel porte l'opération à cette étape. « Là, il est multiplié par trois et retiré ; trois est donc obtenu, puisque de 42, on peut retirer 36. » Le reste est soixante.

III– Alors le diviseur est glissé. Le diviseur est multiplié par cinq, qui est possible, et retiré donc cinq est obtenu.

Quand on arrive à cette situation-là, il n'y a plus de reste et le dividende est sans reste. De cette manière, le multiplicande de l'exemple précédent est obtenu.

Il faut préciser qu'en sanskrit, on écrit bien de gauche à droite, contrairement à l'arabe, où l'on écrit de droite à gauche. Mais en arabe (littéraire), comme en sanskrit, les nombres sont énoncés en commençant par les unités, et dans ce cas il n'y a pas de contradiction entre sens de l'énonciation et sens de l'écriture : les nombres écrits dans un texte en arabe se présentent alors comme dans nos textes.

Excursion binaire

Il convient d'insister sur le fait que les Indiens sont des calculateurs. Les méthodes développées par les Grecs et qui sont répandues dans l'Europe étaient essentiellement des méthodes géométriques. Il faut attendre Descartes pour que le calcul

soit réintroduit dans la géométrie pour fonder la géométrie analytique. Les Indiens savaient utiliser le calcul en géométrie, mais ils n'ont pas de méthode particulière, géométrique. Tout est basé sur le calcul. Par exemple, on ne trouve pas en Inde de modèle géométrique pour inspirer ou justifier les méthodes de résolution des équations, contrairement au cas grec, mésopotamien, ou encore arabe. On a des méthodes de calcul et les méthodes de calcul, comme celles vues ci-dessus, sont à base d'algorithmes. Ils ont cherché quel était le segment minimum d'opérations à effectuer pour pouvoir les répéter en boucle, afin d'arriver à l'achèvement de la multiplication par exemple. On refait toujours la même chose, on déplace, on recommence... ce sont vraiment des maîtres de l'algorithme. C'est très impressionnant et nous allons voir tout de suite de nouveaux exemples.

Voici un vers :

$\check{\text{d}}\check{\text{v}}\check{\text{i}}\check{\text{d}}\check{\text{h}}\check{\text{a}}\ \check{\text{b}}\check{\text{h}}\check{\text{a}}\check{\text{v}}\check{\text{e}}\check{\text{d}}\ \check{\text{r}}\check{\text{u}}\check{\text{p}}\check{\text{a}}\check{\text{v}}\check{\text{i}}\check{\text{b}}\check{\text{h}}\check{\text{ā}}\check{\text{g}}\check{\text{a}}\ \check{\text{ē}}\check{\text{v}}\check{\text{ā}}\check{\text{m}}$
 I S I S S I I S I S S

Il existe en Inde des traités de prosodie extrêmement développés et la métrique indienne est comparable à la métrique grecque et latine. Ce sont des alternances de syllabes longues et brèves. Nous notons cela à l'aide des $\check{\text{v}}$ et — , placés au-dessus des syllabes. Les indiens ont une notation qui est la suivante : I note la brève et S note la longue (I représente un bâton et S représente un signe d'élision).

Les traités de prosodie décrivent tous les vers, toutes les métriques, comment on les construit et aussi comment les numériser, d'une certaine manière. Ci-dessus, nous avons un vers de onze syllabes, avec des alternances de longues et de brèves. Combien peut-on construire de vers de onze syllabes différents avec de telles alternances ? C'est un problème de combinatoire. Cela a un certain rapport avec le chapitre de la *Līlāvati* qui concerne les progressions arithmétiques et géométriques. Même si l'un de ces mètres n'existe pas — en effet beaucoup de modèles ne sont pas utilisés en poésie — les indiens veulent savoir combien on peut en construire. Ils ont donc construit un algorithme dont voici la description :

« Soit un vers entièrement [formé de syllabes] longues, après avoir posé une brève au-dessous de la première longue, le reste est comme au-dessus, on appliquera cette prescription à plusieurs reprises. »

C'est la séquence de l'algorithme que l'on boucle jusqu'à arriver à une fin.

« Pour une inférieure, on fournira des longues seulement, jusqu'à ce qu'il y ait des brèves en totalité. »

Ceci est l'instruction de fin de l'algorithme.

Au départ, il n'y a que des longues et, à l'arrivée, il n'y a que des brèves. Entre les deux extrêmes, on applique la méthode systématiquement. Ceci est évidemment énoncé en vers, c'est l'œuvre, et il faut lire les commentateurs pour en comprendre le sens. Prenons l'exemple de 4 syllabes pour simplifier :

Soit un vers entièrement formé de syllabes longues :	SSSS
On pose une brève au-dessous de la première longue :	I
Le reste est comme au-dessus :	ISSS
<hr/>	
On pose une brève au-dessous de la première longue :	I
Le reste est comme au-dessus :	ISS
Pour une inférieure, on fournira des longues :	SISS
<hr/>	
On pose une brève au-dessous de la première longue :	I
Le reste est comme au-dessus :	IISS
<hr/>	
On pose une brève au-dessous de la première longue :	I
Le reste est comme au-dessus :	IS
Pour une inférieure, on fournira des longues :	SSIS

On a représenté dans le tableau ci-dessus les première étapes de l'algorithme, chaque « pas » étant séparé du suivant par une ligne horizontale.

1) on pose une ligne de quatre syllabes longues ; on place une brève sous la première syllabe (longue) de cette ligne et on complète à droite en recopiant le reste de la ligne du dessus (« le reste est comme au-dessus »). On a alors une ligne de quatre syllabes, fin du premier pas.

2) On recommence en plaçant une brève au-dessous de la première longue, qui se trouve être alors la deuxième syllabes de la ligne ; on complète à droite en recopiant le reste de la ligne du dessus et, à gauche, en inscrivant une longue puisqu'il manque une syllabe pour obtenir les quatre syllabes du vers (« pour une inférieure on fournira des longues »). Fin du deuxième pas.

On itère le processus autant de fois qu'il le faut pour obtenir une ligne de quatre syllabes brèves et on obtient le tableau ci-contre.

SSSS
ISSS
SISS
IISS
SSIS
ISIS
SIIIS
IIIS
SSSI
ISSI
SISI
IISI
SSII
ISII
SIII
IIII

Cet algorithme est remarquable à plus d'un titre : il donne une méthode itérative très simple pour énoncer de manière exhaustive toutes les alternances de syllabes longues et brèves dans un vers quel que soit le nombre de syllabes du vers, dans notre exemple : quatre.

Si on observe bien ce tableau, on remarque que les lignes sont classées selon un ordre lexicographique inverse (*ie.* en lisant de droite à gauche) décroissant de la

première à la dernière. En notant qu'une brève est inférieure à une longue, $S \succ I$, on a : $SSSS \succ ISSS \succ SISS \succ IISS \succ \dots \succ SIII \succ IIII$

Autre observation : si chaque brève est remplacée par 1 et chaque longue par 0^2 , on obtient la seconde colonne du tableau ci-dessous. En regardant cette colonne dans un miroir, on obtient la colonne III qui est une table d'addition binaire. On commence à 0 et on ajoute systématiquement 1, ligne après ligne, pour obtenir le nombre suivant, exprimé en binaire. Les Indiens n'ont pas inventé le calcul binaire, cependant certaines règles élaborées dans les traités de prosodie montrent que la manipulation d'un système binaire ne leur est pas inconnue.

	I	II	III
1	SSSS	0000	0000
2	ISSS	1000	0001
3	SISS	0100	0010
4	IISS	1100	0011
5	SSIS	0010	0100
6	ISIS	1010	0101
7	SIIS	0110	0110
8	IIIS	1110	0111
9	SSSI	0001	1000
10	ISSI	1001	1001
11	SISI	0101	1010
12	IISI	1101	1011
13	SSII	0011	1100
14	ISII	1011	1101
15	SIII	0111	1110
16	IIII	1111	1111

Une fois le tableau établi, deux questions sont posées : étant donnée une suite de longues et de brèves particulière quel sera son rang dans le tableau et, réciproquement, quelle est la suite qui se trouve à un rang donné ?

Par exemple, pour un vers de quatre syllabes, quel est le rang de la suite : SISI ? Voici la règle :

« On écrira au-dessus les nombres doublés à partir du premier et on aura la réponse avec la somme de ceux qui sont posés sur des brèves, augmentée de un. »

1 2 4 8
S I S I

On a 2 et 8 au-dessus des deux brèves, le rang de cette suite est : $2 + 8 + 1 = 11$.

Les traités indiens ne donnent pas d'explication mais la méthode utilisée — transformation du problème en une addition de puissances de 2 — suggère que le côté

2. La raison de ce choix, peut-être surprenant, est due à l'usage que font les Indiens de ces tableaux — qui existent aussi en « théorie » musicale.

« table d'addition » du tableau n'avait échappé aux créateurs de la méthode. Si on reprend la règle en utilisant les colonnes II et III du tableau ci-dessus, on comprend son fonctionnement :

$$\begin{array}{ccc} 1\ 2\ 4\ 8 & 2^0\ 2^1\ 2^2\ 2^3 & 2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0 \\ S\ I\ S\ I & 0\ 1\ 0\ 1 & 1\ 0\ 1\ 0 \end{array}$$

On voit alors en troisième colonne que l'opération prescrite par la règle est la conversion dans la base 10 du nombre binaire 1010 :

$$1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 10$$

Auquel il faut ajouter 1 puisque les lignes du tableau sont numérotées de 1 à 16 et non de 0 à 15 comme c'est le cas — en base 2 — pour le troisième colonne de notre tableau.

Évidemment, ceci est une traduction moderne de la procédure et malheureusement les textes ne nous renseignent pas sur le raisonnement qui a conduit à une telle construction. Voici la procédure inverse, qui fait encore appel à des manipulations propres au calcul binaire : connaissant le rang d'une suite, quelle est cette suite ?

« Des divisions par deux du rang de la ligne disparue sont faites ; quand c'est pair, une brève est posée, quand c'est impair, une longue et, après avoir ajouté un, on divise par deux. »

C'est tout proche de l'algorithme de transformation d'un nombre écrit dans la base 10 en nombre écrit en base 2. Par exemple, quelle est la suite de la septième ligne ?

7	est impair, donc une longue :	S
	on ajoute 1 : 8 que l'on divise par 2 : 4	
4	est pair, donc une brève :	I
	on divise 4 par 2 : 2	
2	est pair, donc une brève :	I
	on divise 2 par 2 : 1	
1	est impair, donc une longue :	S

La septième ligne est donc la suite : SIIS. Dans cette règle, il n'y a pas d'instruction de fin, quelle que soit la situation, on finira toujours par obtenir 1 et la règle peut alors se répéter à l'infini : puisque 1 est impair, il faut ajouter 1 et diviser par 2, ce qui donne à nouveau 1. La fin intervient implicitement quand on a épuisé le nombre de syllabes pour le vers sur lequel on travaille (ici 4 syllabes).

On n'a jamais trouvé de texte parlant explicitement de calcul binaire, mais d'autres méthodes y font encore penser, par exemple pour calculer une puissance élevée d'un

nombre. Un tel calcul apparaît dans les œuvres sur la prosodie — le nombre d’alternances possibles pour un mètre de n syllabes est égal à 2^n et il y a des mètres de vingt-six syllabes — ou bien en mathématiques pour calculer le nombres de termes d’une suite géométrique. Voici le procédé décrit dans la *Līlāvātī* :

« Une quantité impaire étant diminuée de un, on pose « multiplicateur », paire, étant divisée par deux, on pose « carré ». [On effectuera l’opération] « multiplicateur-carré » à l’envers, à partir du dernier et jusqu’à épuisement de la quantité. »

Voici ce procédé appliqué au nombre 30 : 30 est pair, on le divise par 2 et on pose « carré » sur une ligne ; 15 est impair, on lui soustrait 1 et on pose « multiplicateur » sur la ligne. Le procédé se poursuit « jusqu’à épuisement du nombre », c’est-à-dire jusqu’à obtenir 1. Le tableau suivant montre la succession des opérations pour 30 :

30	15	14	7	6	3	2	1
c	m	c	m	c	m	c	

Pour calculer r^{30} , on applique à r les opérations de multiplication et d’élévation au carré dans l’ordre où elles apparaissent sur la ligne, en commençant par la fin.

Pour faciliter la lecture, nous présentons les calculs verticalement :

$$\begin{array}{l|l}
 c & r^2 \\
 m & r^2 \times r \\
 c & (r^2 \times r)^2 \\
 m & (r^2 \times r)^2 \times r \\
 c & ((r^2 \times r)^2 \times r)^2 \\
 m & (((r^2 \times r)^2 \times r)^2) \times r \\
 c & \left(\left(\left((r^2 \times r)^2 \times r \right)^2 \right) \times r \right)^2 \\
 & = \left(\left((r^2 \times r)^2 \times r \right)^2 \right)^2 \times r^2 \\
 & = \left((r^2 \times r)^2 \times r \right)^4 \times r^2 \\
 & = (r^2 \times r)^8 \times r^4 \times r^2 = r^{16} \times r^8 \times r^4 \times r^2
 \end{array}$$

On voit que les opérations effectuées se limitent à une succession de multiplication par r et par des élévations au carré.

Sur les trois dernières lignes, nous avons développé la dernière opération, ce qui met en valeur le procédé utilisé dans l’algorithme de décomposition du nombre 30 :

$$30 = 16 + 8 + 4 + 2 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2$$

c’est son écriture binaire.

De nos jours, cette manière de calculer les puissances d'un nombre est enseignée dans les cours d'informatique sous le nom d'« exponentiation rapide », le « coût » de l'opération étant bien moindre par cette méthode que par la méthode classique : calculer 7^{30} « coûte » seulement sept multiplications contre vingt-neuf ! Bien entendu, la décomposition binaire de l'exposant est enseigné selon les méthodes du calcul binaire contemporain...

Calcul du carré

Nous allons maintenant revenir en base 10 et analyser une règle d'élévation au carré, malheureusement incompréhensible. Voici cette règle :

« Le produit de deux identiques est appelé carré. Le carré du dernier doit être placé et, également, les autres chiffres multipliés par le dernier doublé, au-dessus l'un de l'autre ; et, de nouveau, après avoir délaissé le dernier et fait sortir le nombre. »

Voilà pourquoi il est indispensable d'avoir recours à des commentaires pour comprendre et traduire une œuvre canonique. De bons sanskritistes admettent que, dans certains cas, ils ne comprennent même pas de quoi il s'agit sans l'aide des commentateurs. Voici l'exemple donné dans la *Līlāvātī* :

« Mon cher, dis le carré de neuf et de quatorze, de trois cents diminué de trois, de dix mille augmenté de cinq, si tu connais la voie de la règle du carré. »

Voyons cela sur 297, que le texte indien rend par trois cents diminué de trois, c'est assez fréquent.

En fait, cette règle obscure va nous montrer encore une fois, dans son application, la grande maîtrise que les mathématiciens indiens avaient de la numération décimale de position car le procédé utilisé n'est autre que le développement de l'identité remarquable :

$$(3 \times 10^2 + 9 \times 10 + 7)^2$$

dans lequel les puissances de dix vont être notées par ce qu'un commentateur, qui traite l'exemple, appelle des « excès de position ».

Nous avons résumé dans le tableau suivant les opérations effectuées par le commentateur ; ce tableau se lit de bas en haut (numérotation des lignes). Dans la colonne I, les opérations prescrites ; dans la colonne II, les résultats de ces opérations avec les décalages successifs ; dans la colonne III nous avons rétabli les puissances dix qui expliquent ces décalages, ainsi sur la première ligne on lira 40 000, sur la deuxième 36 000 etc.

	I	II	III
9		88209	
8	7^2	= 49	7^2
7		8816	
6	$2 \times 29 \times 7$	= 406	$2 \times \underbrace{[(2 \times 10 + 9) \times 10]}_{29} \times 7$ $\frac{(2 \times 2 \times 7 \times 10^2) + (2 \times 9 \times 7 \times 10)}{29}$
5		841	
4	9^2	= 81	$(9 \times 10)^2$
3		76	
2	$2 \times 2 \times 9$	= 36	$2 \times (2 \times 10^2) \times (9 \times 10)$
1	2^2	= 4	$(2 \times 10^2)^2$

Calcul du carré de 297 selon le commentateur Gaṅgādhara.

1– Le carré du dernier, 2, est placé à part : 4. (On se rappelle que le dernier chiffre selon la terminologie indienne est notre premier chiffre.)

2– Le suivant, 9, est multiplié par deux fois le dernier : $2 \times 2 \times 9$, 36 est produit et posé avec un excès de position.

3– En additionnant on a 76. (Dans les manuscrits l'addition est présentée de bas en haut, contrairement à notre usage et il n'y a pas de 0 pour noter les décalages donc 4 doit être lu comme 40.)

4– Le carré du dernier, 9, qui est le terme médian, est 81 (le dernier, maintenant c'est 9, puisque la règle dit « après avoir délaissé le dernier [de l'étape précédente] »). On pose 81 avec un excès de position.

5– Et on additionne : 841 (on additionne donc le résultat précédent, 76, qui du fait du décalage doit être lu comme 760, avec 81).

6– Le suivant, 7, est multiplié par le dernier, 29, doublé : 58 ; (le commentateur précise que le dernier, c'est ce qu'on a « délaissé » avant 7, soit 29) 406 est produit et placé avec un excès de position.

7– Et on additionne : 8816. (406, que l'on vient de calculer et le résultat précédent, 841, lu comme 8410 du fait du décalage).

8– Maintenant, le carré du dernier, 7, est 49.

9– Et on additionne ; la somme, par excès de position, est 88 209. Le carré est obtenu : 88 209

Calcul de la racine carrée

De même que la multiplication est suivie de son opération inverse, la division, au calcul du carré fait suite le calcul de la racine carrée et, comme pour l'exemple de division, l'exemple, ici, sera aussi de calculer la racine carrée des nombres trouvés dans l'élévation au carré. Voici la règle :

« Après avoir ôté un carré du dernier rang impair, on doublera sa racine, le rang pair étant divisé par ce double. Puis après avoir ôté le carré de ce quotient du rang impair précédant ce dernier rang pair, on posera le quotient doublé dans la ligne de la racine. Le rang pair étant divisé par la ligne de la racine, on posera le quotient doublé dans la ligne de la racine après avoir ôté le carré du quotient d'un autre rang impair. On agira ainsi à plusieurs reprises. La moitié de la ligne de la racine sera la racine. »

Le commentaire nous explique ce qu'il faut entendre par rang impair et rang pair : « Par l'observation des mots *impair*, *etc.* dans la strophe de cette formule, on comprend : à partir du premier chiffre de la ligne des chiffres d'un carré, placée sur l'emplacement des opérations, jusqu'au dernier de la ligne, le premier est de rang impair, le second pair, le troisième impair, le quatrième pair, le cinquième impair. Ayant déterminé de cette manière « *le dernier rang impair* », même s'il y a un rang pair devant, il doit alors être seulement considéré comme impair avec le rang impair en plus. »

La dernière phrase est importante car elle nous indique qu'il faut grouper les chiffres du nombre dont on veut extraire la racine carrée par tranche de deux à partir de la droite, le premier pour les Indiens étant le chiffre écrit à la droite du nombre. Et pour calculer la racine de 88 209, on va séparer chaque tranche de deux chiffres par un petit trait vertical placé au-dessus du nombre : 88209.

Voici comment un commentateur applique la règle ; nous commenterons chaque étape entre parenthèses :

« Une fois faite la considération du pair et de l'impair, le dernier huit est de rang impair » (Le dernier selon les Indiens).

« Après avoir retranché de celui-ci un carré, qui apparaît comme quatre, la racine de ce carré, 2, est multipliée par deux : 4 » (On le pose alors sur la ligne du bas, la ligne de la racine).

« Pour le rang pair précédent, qui apparaît comme quarante-huit, une division par ce double est effectuée, le quotient est 9 et le reste 12 » (Il y a une précision qui manque ici : quand 48 est divisé par 4, le quotient est normalement 12 et le reste 0 ! Mais il faut tenir compte de l'étape suivante dans la règle : « Puis après avoir ôté le carré de ce quotient du rang impair précédant ce dernier rang pair... » Si on fait la

division normalement, le rang impair précédent sera réduit à 2 et on ne pourra en soustraire 144, carré de 12 ; il faut donc faire une division en limitant le quotient de façon à pouvoir effectuer cette soustraction. Ceux qui ont appris au cours de leur enseignement primaire comment extraire une racine carrée à la main, se souviendront peut-être d'un test à effectuer pour que la division faite à cette étape soit acceptable.

« Le premier rang impair, après ce qui a été divisé, est deux, on ôtera de ce 122 le carré 81 du quotient 9 ; le reste est 41. »

« Le quotient 9, doublé, 18, est posé sur la ligne de la racine, on obtient 58 » (On retrouve, dans la disposition des calculs, les décalages successifs qui marquent les puissances de 10 — voir le tableau-résumé).

« Le rang pair, qui apparaît comme zéro (410), étant divisé par la ligne de la racine 58, le quotient est sept. »

« Le carré 49 de ce quotient est ôté du premier rang impair 49 qui est alors sans reste. »

« On posera dans la série 58, le quotient 7, doublé, 14 : 594. »

« La moitié de cette série est 297. La racine est produite. »

On a résumé les opérations successives dans le tableau suivant. Dans les colonnes marquées d'un I, on soustrait d'un rang impair le carré du quotient obtenu dans la colonne précédente et on inscrit le double de ce quotient dans la dernière ligne où se construit la racine. Dans les colonnes marquées d'un II, on divise un rang pair par le nombre obtenu sur la ligne de la racine à l'étape précédente. Comme on présente la division sous forme de multiplication, le quotient est encadré pour plus de clarté : par exemple dans la deuxième colonne, on divise 48 (rang pair) par 4 obtenu pour la racine dans la colonne précédente et on écrit : $4 \times \boxed{9} = 36$ que l'on soustrait de 48, ce qui revient à écrire une division de 48 par 4, division non-euclidienne puisque le reste, 12, est supérieur au diviseur !

I	II	I	II	I
88209	48209	12209	4109	49
$2^2 = 4$	$4 \times \boxed{9} = 36$	$9^2 = 81$	$58 \times \boxed{7} = 406$	$7^2 = 49$
<u>48209</u>	<u>12209</u>	<u>4109</u>	<u>49</u>	<u>00</u>
$2 \times 2 = 4$		4		58
		$2 \times \boxed{9} = 18$		$2 \times \boxed{7} = 14$
		<u>58</u>		<u>594</u>

$$\sqrt{88\,209} = 594 \div 2 = 297.$$

Questions – Remarques

L'exposé était suivi de questions posées par l'auditoire.

1. Āryabhata donne déjà une méthode d'extraction de la racine carrée, donc certaines méthodes de calcul existaient bien avant le premier Bhāskara, qui reprend tout ?

En effet, Bhāskara reprend tout et c'est pourquoi je ne sais absolument pas si ce mathématicien était génial. Malgré tout, la méthode de résolution des équations de Pell est assez extraordinaire car on ne la retrouve jamais. Une solution cohérente a été proposée ensuite seulement à la fin du XVIII^e siècle par Lagrange avec des fractions continues. Wallis, suite à une proposition de Fermat, s'y était cassé les dents. Alors que la solution était déjà donnée par Bhāskara II sans fraction continue avec des moyens beaucoup plus simples mais extrêmement efficaces, et sans doute complètement oubliée. On y retrouve tous les résultats de périodicité des solutions.

2. Je reviens sur le 10005, la multiplication par zéro ne leur posait pas de problème ?

C'est exact, la multiplication par zéro ne leur posait pas de problème : un nombre multiplié par zéro, c'est zéro. La division par zéro ne leur pose pas de problème non plus ! Dans la *Līlāvātī*, un nombre divisé par zéro va être appelé « nombre divisé par zéro » sous la forme d'un composé sanskrit. On va le garder sous le coude et, si plus tard il y a une multiplication par zéro, les zéros vont être simplifiés. Aujourd'hui, on met les étudiants en garde à propos des quotients de nombres tendant vers zéro, qui peuvent être des formes indéterminées, mais les Indiens de l'époque n'avaient pas de tels scrupules.

3. Vous avez parlé des nombres négatifs, je suppose que les équations avaient aussi des solutions négatives alors que cela n'a été pris en considération dans nos régions que bien plus tard, sans avoir été utilisé par les savants arabo-musulmans ?

Les Indiens calculent avec des nombres négatifs et expliquent même la règle des signes. Il y a eu des tentatives de « démonstration » de cette règle, dans lesquelles ils font exactement comme nous, ils utilisent la distributivité. Dans l'exemple de la multiplication de $12 = 8 + 4$ par 135, que nous avons vue, il suffisait de remplacer 4 par -4 pour obtenir un exemple permettant d'illustrer la règle. Cela ne donne pas une démonstration au sens où nous l'entendons. Nous les voulons universelles et remplaçons les nombres par des lettres. Les Indiens le font sous forme d'un modèle, avec des nombres arbitraires, mais de manière telle qu'on est convaincu que cela fonctionnera avec tous les autres nombres.

4. Chez les savants arabes, comme Al-Khwārizmī par exemple, les méthodes de résolution des équations sont explicitées et démontrées à l'aide de la géométrie héritée

des Grecs. C'est pourquoi les racines négatives sont exclues. Ma question porte donc sur la place de la démonstration chez les Indiens ?

Dans les textes indiens, il y a une cohérence interne, on vérifie que tout fonctionne et que le résultat est correct. Dans le cas de la règle des signes, la seule chose discutable est qu'on ne l'explique que sur un exemple. Vous remplacerez les nombres choisis par x ou y et il n'y aurait pas de problème, vous auriez une démonstration. Il existe des tentatives de démonstration sur les équations diophantiennes à l'aide du calcul, mais jamais d'inspiration géométrique. Peut-être des démonstrations existent-elles dans l'une ou l'autre œuvre étant donné qu'il y a en Inde des millions de manuscrits, dont énormément de mathématiques, qui sont encore cachés aux chercheurs. Ces démonstrations ne seront pas forcément indiennes, puisque tout cela circulait. Il y avait des interactions entre l'Inde et l'occident, on l'a vu à propos des 12 signes du zodiaque.

5. Les Indiens avaient l'*upapatti*, une sorte de « démonstration » ou, plutôt de rationale, comme disent les anglo-saxons, pour montrer à leurs pairs que ce qu'ils font est correct. C'est à cela aussi que m'a fait penser le panégyrique de Bhāskara au début de la *Līlāvātī*, il justifie son œuvre devant la communauté des mathématiciens.

6. Les Indiens connaissaient-ils le carré du binôme ?

Ils en savaient bien plus, le cube et les autres puissances, ils connaissaient le triangle de Pascal. Comme ils s'occupaient de combinatoire, ils connaissaient très bien les coefficients du binôme.

7. Il y a presque une volonté de ne pas dévoiler ... ?

La rigidification des mathématiques n'est pas si récente chez nous non plus, il me semble que c'est Weierstrass qui a dit c'est carré ou c'est rien. Euler se sert de la série harmonique alors qu'elle ne converge pas vers une valeur finie. Avec Weierstrass, cela ne passe plus. En ce qui concerne « la volonté de cacher », il faut noter que les commentateurs donnaient beaucoup de détails. C'est probablement la versification qui oblige à n'exprimer que l'essentiel. Au xvii^e siècle, les mathématiciens européens lançaient des défis aux autres sans dévoiler leurs méthodes.

8. Y avait-il un certain formalisme ?

Il y a des signes, pas de l'addition, mais il y a une notation des nombres négatifs. En algèbre, on utilise $yā$ (un seul signe), l'abréviation de *yāvat tāvat*, « autant que », pour la première inconnue, et la première syllabe des noms de couleurs pour les autres. Par exemple, $2 yā 3 kā$ (pour *kāla*, bleu-noir) représente notre $2x + 3y$. Dans les manuscrits, on trouve un point pour la multiplication. Dans le manuscrit de Bhakhshali (vii^e siècle ?), on a déjà des exemples de notation formalisée, mais pas chez Āryabhaṭa.

François montre des exemples de notation dans les manuscrits, en particulier le point pour la multiplication et aussi un autre signe pour la division dans un texte de la fin du xvi^e siècle, qui n'utilise pas la barre de fraction. Il explique aussi l'abréviation *va* de *varga*, carré ; *ga* désigne le cube, *vava* le carré du carré, un peu comme Diophante utilise ΔY ($\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\varsigma$) pour le carré, KY ($\kappa\upsilon\beta\omicron\varsigma$) pour le cube, et $\Delta Y\Delta$ ($\delta\nu\nu\alpha\mu\omicron\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\varsigma$) pour le carré du carré. Pour en revenir aux équations quadratiques, le commentateur Kṛṣṇa, dans ce texte, essaye de trouver une explication de la méthode de Bhāskara, qui est infaillible pour calculer les solutions entières de $x^2 - Ny^2 = 1$, ce qui permet d'avoir de bonnes approximations de \sqrt{N} . Mais on ne sait pas comment Bhāskara et ses prédécesseurs ont fait ; ils faisaient d'innombrables calculs, testaient leurs méthodes sur tellement d'exemples que cela devait finir par être correct. Bhāskara donne une méthode pour trouver x , donc on peut trouver y , mais les nombres sont au carré et, dans certains cas, la solution en x est de l'ordre du milliard. Il faut donc extraire la racine carrée d'un nombre à dix-huit chiffres. Ce commentateur-là n'arrive pas à expliquer totalement la méthode de Bhāskara, mais il trouve une formule donnant y sans avoir à passer par le carré, il n'a plus qu'une simple division à faire. C'est de cette façon que cela progresse, mais c'est 400 ans après Bhāskara. Entre eux, il y a peut-être eu d'autres découvertes, mais on n'en sait plus rien.

9. Ils connaissaient la preuve par 9 et avaient même l'idée des congruences en considérant le reste des divisions euclidiennes.

10. Vous travaillez sur des textes sanskrits. N'y a-t-il pas eu des traductions du sanskrit vers des langues plus actuelles ?

Il y a des traités écrits en malayalam, la langue du Kérala, où une célèbre école de mathématiciens-astronomes se réclamant d'Āryabhaṭa a fleuri vers les xiv^e-xvi^e siècles. La *Līlāvātī* et le *Bījagaṇita* ont été traduits en persan au xvi^e-xvii^e siècles. Mais le sanskrit reste la langue de la tradition savante en Inde et, bien que des langues modernes l'aient supplanté dans le domaine profane, on trouve encore des textes peu anciens en sanskrit, comme, par exemple, un commentaire de la *Līlāvātī* composé et imprimé en 1959. En Inde, on peut encore voir des joutes oratoires en sanskrit. En 1997, J.M.Delire, qui cherchait des personnes bien documentées à Pune, est tombé sur une classe de jeunes gens s'exerçant à parler en sanskrit. On peut même s'initier au sanskrit aujourd'hui grâce à la méthode Assimil (édition 2013).

11. A une question concernant l'utilisation de l'alphabet pour noter les chiffres chez les Grecs, il est répondu que c'était bien le cas, à condition d'ajouter trois nouveaux signes à l'alphabet de 24 lettres pour noter les nombres de 1 à 999, puis une apostrophe pour continuer jusqu'à 999 999, avec cependant un nombre intermédiaire, la myriade notée M, valant 10 000. Les textes arabes utilisent aussi largement les lettres de l'alphabet, même quand ils utilisent la numération décimale d'origine indienne.

12. A une question sur l'origine peut-être islamique du zéro, il est répondu que zéro est un sujet de polémique. Qui a inventé le zéro ? Nous avons vu qu'il a d'abord servi de signe typographique pour noter le vide, puis qu'il a ensuite été intégré comme nombre, difficilement. En ce qui concerne la transmission, les méthodes de calcul sont connues sous le nom de *ḥisāb al-Hind*, le calcul indien. Au XIII^e siècle, donc peu de temps après Bhāskara, on a un poème en vieux français dont le premier vers dit « Et maintenant je vais te dire le calcul indien », et suivent toutes les méthodes de calcul de la *Līlāvātī* avec la même bizarrerie : dans l'algorithme de la racine carrée, Bhāskara extrait la racine en inversant le carré du binôme, vu ci-dessus, et trouve, non pas la racine, mais deux fois celle-ci. A la fin de son calcul, il divise donc par deux. C'est exactement la même chose dans ce poème, alors qu'on aurait très bien pu diviser par deux au fur et à mesure. Cela montre que les méthodes circulaient certainement très facilement.

13. Est-ce que *upapatti* signifie démonstration ?

On le traduit ainsi, mais il est préférable de traduire *atra upapatti* par « à ce propos, une explication ». Systématiquement, ce genre d'explication est conclue par *iti upapanna* que l'on peut interpréter comme : « ainsi, cela colle ».