



**HAL**  
open science

## Performance asymptotique d'estimateurs de modèles CP avec facteurs structurés

Mélanie Boizard, José Henrique de M Goulart, Remy Boyer, Gérard Favier,  
Pierre Comon

### ► To cite this version:

Mélanie Boizard, José Henrique de M Goulart, Remy Boyer, Gérard Favier, Pierre Comon. Performance asymptotique d'estimateurs de modèles CP avec facteurs structurés. GRETSI 2015 - XXVème Colloque francophone de traitement du signal et des images, Sep 2015, Lyon, France. 4 p. hal-01169880

**HAL Id: hal-01169880**

<https://hal.science/hal-01169880v1>

Submitted on 30 Jun 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike 4.0 International License

# Performance asymptotique d'estimateurs de modèles CP avec facteurs structurés

Maxime BOIZARD<sup>1,2</sup>, José Henrique de M. GOULART<sup>3</sup>, Rémy BOYER<sup>1</sup>, Gérard FAVIER<sup>3</sup>, Pierre COMON<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire des Signaux et Systèmes - CentraleSupélec - Université Paris Sud

<sup>2</sup>Laboratoire SATIE - ENS Cachan - CNRS - UniverSud

<sup>3</sup>I3S - Université Nice Sophia Antipolis - CNRS

<sup>4</sup>GIPSA-Lab - Université Grenoble Alpes - CNRS

maxime.boizard, remy.boyer@l2s.centralesupelec.fr

goulart, favier@i3s.unice.fr, pierre.comon@grenoble-inp.fr

**Résumé** – La décomposition polyadique canonique d'un tenseur (CPD en anglais), appelée aussi Candecomp/Parafac, est utilisée dans de nombreuses applications. Les CPD structurées, *i.e.* avec des facteurs matriciels de forme Toeplitz, circulante, ou Hankel, sont souvent rencontrées dans des applications de traitement du signal. Des algorithmes spécialisés ont été récemment proposés pour l'estimation des paramètres de ce type de modèle. Une expression analytique de la borne de Cramér-Rao (BCR) est dérivée pour les paramètres estimés d'un modèle CP structuré, quand le tenseur d'observation est corrompu par un bruit additif i.i.d. gaussien circulaire. L'expression proposée pour la BCR est utilisée pour valider à l'aide de résultats de simulation l'efficacité statistique de deux algorithmes d'estimation de paramètres de modèles CP structurés d'ordre trois admettant soit des facteurs circulants, soit un facteur de Hankel.

**Abstract** – The canonical polyadic decomposition (CPD) of a tensor, also known as Candecomp/Parafac, is very useful for numerous applications. Structured CPDs, *i.e.* with Toeplitz, circulant, or Hankel factor matrices, are often encountered in signal processing applications. Specialized algorithms were recently proposed for estimating the parameters of structured CPD. A closed-form expression of the Cramér-Rao bound (CRB) is derived for the estimated CPD parameters, when the observed tensor is corrupted with an additive i.i.d. circular Gaussian noise. The proposed CRB expression is used to assess the statistical efficiency of two estimation algorithms by means of simulation results in the cases of third-order tensors having three circulant factors on one hand, and an Hankel factor on the other hand.

## 1 Introduction

De nombreuses applications de traitement du signal font intervenir des données multidimensionnelles. L'algèbre multilinéaire, basée sur les tenseurs, fournit des outils intéressants pour traiter ce type de données. La décomposition polyadique canonique d'un tenseur (CPD en anglais), appelée aussi Candecomp/Parafac, est une des extensions possibles de la SVD matricielle au cas multilinéaire [1]. Elle permet de décomposer un tenseur en la somme de  $R$  tenseurs de rang un, qui peuvent être écrits à l'aide de facteurs matriciels. De plus, la CPD est unique sous certaines conditions, à une permutation et des facteurs d'échelle près. Cette propriété d'unicité dite essentielle rend la CPD très attractive pour l'analyse de données issues d'observations dépendant de plusieurs indices discrets comme c'est souvent le cas en traitement du signal [2, 3, 4] ; voir [1, 5] pour d'autres exemples. Dans certaines applications, les facteurs matriciels de la CPD possèdent une structure particulière

telle que Toeplitz, circulante, Hankel ou encore Vandermonde [6, 7, 8]. Plusieurs algorithmes spécialisés, itératifs [7] ou non itératifs [9, 10], ont été récemment proposés pour l'estimation des paramètres de CPD structurées.

Il semble donc intéressant d'évaluer ce type d'algorithmes en présence d'un bruit additif blanc gaussien en comparant leur performance à la borne de Cramér-Rao (BCR) [11]. Cette borne a déjà été calculée dans le cas où les facteurs de la CPD ne sont pas structurés [12], ainsi que pour certaines applications en traitement d'antenne [13]. Il est à noter que la présence de structure dans les facteurs diminue non seulement le nombre d'indéterminations mais aussi celui des paramètres à estimer.

Dans cet article, on propose de calculer la BCR pour des tenseurs dont la CPD comporte à la fois des facteurs structurés (Hankel, Toeplitz et Toeplitz circulant) et des facteurs non structurés. Un modèle correspondant à ces configurations est tout d'abord proposé, et les conditions d'identifiabilité sont discutées. Une formule analytique de la BCR est ensuite dérivée, et deux algorithmes permettant d'estimer les paramètres d'une CPD structurée sont proposés. Enfin, cette BCR est validée à l'aide de simulations numériques.

1. M.Boizard est financé par le projet DIGITEO DETMOTS-2A.

3. J. H. de M. Goulart est financé par CNPq-Brazil (bourse 245358/2012-9).

4. P.Comon est financé par le projet ERC "DECODA" no. 320594, dans le cadre du programme européen FP7/2007-2013.

*Notations* : Les scalaires sont représentés par des lettres minuscules, les vecteurs par des minuscules en gras, les matrices par des majuscules grasses, et les tenseurs par des lettres calligraphiques grasses, e.g.  $a_{ij}$ ,  $\mathbf{a}_j$ ,  $\mathbf{A}$ , et  $\mathcal{A}$ , respectivement. Enfin  $\boxtimes$ ,  $\odot$ , et  $\otimes$  désignent les produits de Kronecker et de Khatri-Rao, et le produit extérieur tensoriel, respectivement.

## 2 Modèle CP avec facteurs structurés

Soit un tenseur  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$  d'ordre trois admettant une décomposition CP définie comme suit <sup>1</sup> :

$$\mathcal{X} = \sum_{r=1}^R \mathbf{a}_r^{(1)} \otimes \mathbf{a}_r^{(2)} \otimes \mathbf{a}_r^{(3)} \quad (1)$$

où  $\mathbf{a}_r^{(n)}$  désigne la  $r^{\text{eme}}$  colonne du facteur  $\mathbf{A}^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times R}$ ,  $1 \leq n \leq 3$ . La valeur minimale de  $R$  qui permet d'obtenir la décomposition (1) exactement est appelée le rang de  $\mathcal{X}$ .

Supposons que  $\mathcal{X}$  soit observé avec un bruit additif  $\mathcal{N} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$  dont chaque élément est une variable aléatoire gaussienne de variance  $\sigma^2$ , de telle façon que le tenseur d'observations s'écrit :

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X} + \mathcal{N}. \quad (2)$$

Le modèle CP bruité peut être réécrit sous la forme vectorielle suivante :

$$\mathbf{y} = \text{vec}(\mathcal{Y}) = \text{vec}(\mathcal{X}) + \text{vec}(\mathcal{N}) = \mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{n}, \quad (3)$$

où  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{r=1}^R \mathbf{a}_r^{(1)} \boxtimes \mathbf{a}_r^{(2)} \boxtimes \mathbf{a}_r^{(3)}$ . Le lemme suivant permet de modéliser le cas où certains facteurs sont structurés.

**Lemme 2.1** *Certaines matrices  $\mathbf{A}^{(1)}$ ,  $\mathbf{A}^{(2)}$  et  $\mathbf{A}^{(3)}$  sont supposées structurées (Hankel, Toeplitz ou Toeplitz circulante). Soit  $\boldsymbol{\theta}$  le vecteur contenant les paramètres d'intérêt, noté :*

$$\boldsymbol{\theta}^T = [\boldsymbol{\theta}_1^T, \boldsymbol{\theta}_2^T, \boldsymbol{\theta}_3^T], \quad (4)$$

avec  $\boldsymbol{\theta}_n \in \mathbb{R}^{U_n}$ , où  $U_n$  est le nombre de paramètres permettant de décrire la matrice  $\mathbf{A}^{(n)}$  pour une structure donnée. Chaque colonne  $\mathbf{a}_r^{(n)}$  de  $\mathbf{A}^{(n)}$ , peut être écrite comme :

$$\mathbf{a}_r^{(n)} = \mathbf{S}_r^{(n)} \boldsymbol{\theta}_n, \quad (5)$$

où  $\mathbf{S}_r^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times U_n}$  dépend de la structure de  $\mathbf{A}^{(n)}$  (voir [14] pour les expressions de  $\mathbf{S}_r^{(n)}$  associées à différentes structures). Le vecteur  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta})$  s'écrit :

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}) = \underbrace{\left( \sum_{r=1}^R \mathbf{S}_r^{(1)} \boxtimes \mathbf{S}_r^{(2)} \boxtimes \mathbf{S}_r^{(3)} \right)}_{\boldsymbol{\Phi}} \underbrace{(\boldsymbol{\theta}_1 \boxtimes \boldsymbol{\theta}_2 \boxtimes \boldsymbol{\theta}_3)}_{f(\boldsymbol{\theta})}.$$

Ce lemme permet de réécrire n'importe quel modèle CP structuré comme un modèle linéaire en fonction de  $f(\boldsymbol{\theta})$ , ce qui permet de simplifier considérablement l'expression de la BCR.

1. Dans cet article on se limite au cas réel. Toutefois tous les résultats présentés peuvent facilement être étendus au cas complexe.

## 2.1 Identifiabilité

Même lorsque la décomposition CP est unique, dans le sens où il n'existe qu'un seul  $R$ -uplet de tenseurs de rang 1 tels que (1) soit vérifiée, il existe généralement une infinité de façons d'écrire chaque tenseur de rang 1 en produit extérieur de vecteurs. Plus précisément, il existe  $\sum_{p=1}^N I_p - 1$  facteurs d'échelle indéterminés, représentables par une matrice diagonale  $R \times R$ . Or, comme les structures qui nous intéressent ne sont pas stables par post-multiplication par une matrice inversible, on peut forcer à 1 une composante dans chaque matrice facteur  $\mathbf{A}^{(n)}$ , ce qui fixe les indéterminations précitées [9].

Notons  $P_n$  le nombre de composantes connues dans  $\mathbf{A}^{(n)}$ , et  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^{\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 + \tilde{U}_3}$  le vecteur des paramètres inconnus, où  $\tilde{U}_1 = U_1 - P_1$ ,  $\tilde{U}_2 = U_2 - P_2$  et  $\tilde{U}_3 = U_3 - P_3$ . Ce dernier est relié au vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  qui contient tous les paramètres du modèle à travers une matrice de sélection  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 + \tilde{U}_3) \times (U_1 + U_2 + U_3)}$ , de sorte que  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{B}\boldsymbol{\theta}$ . L'identifiabilité locale du paramètre  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  est garantie si le Jacobien de la vraisemblance est de rang plein, c'est-à-dire si la matrice de Fisher est inversible.

**Remarque.** Puisque l'ordre dans lequel sont additionnés les termes de rang un dans (1) n'a pas d'importance, les colonnes des matrices facteurs  $\mathbf{A}^{(n)}$  peuvent être affectées par une permutation commune. Cette indétermination qui n'intervient pas en terme d'identifiabilité, doit toutefois être prise en compte pour l'évaluation de performance des algorithmes d'estimation à l'aide de simulations numériques.

## 3 Expression analytique de la BCR pour des modèles CP structurés

Dans cette section, on détermine la BCR pour le modèle vectoriel donné par l'équation (3) avec les paramètres d'intérêt définis en (4), en s'inspirant du raisonnement utilisé dans [15]. Soit  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})$  la matrice de la BCR. L'erreur quadratique moyenne (EQM) globale pour un estimateur (localement) non biaisé,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y})$ , admet la borne inférieure suivante [11] :

$$\mathbb{E} \left\| \boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) \right\|^2 \geq \text{Tr}(\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})) = \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{U_n} \text{BCR}(\boldsymbol{\theta}_n(k)) \quad (6)$$

où  $\text{BCR}(\boldsymbol{\theta}_n(k))$  est obtenu à partir des termes diagonaux de la matrice  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})$ . En utilisant les hypothèses sur la densité de probabilité du bruit et le **Lemme 2.1**, il est évident que le vecteur d'observation  $\mathbf{y}$  est également gaussien,  $\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\Phi}f(\boldsymbol{\theta}), \sigma^2 \mathbf{I})$ . En utilisant la formule de Slepian-Bangs (voir [16]), on peut déduire que la matrice de la BCR s'exprime en fonction de la matrice Jacobienne de  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\Phi}f(\boldsymbol{\theta})$  comme suit

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) = \sigma^2 (\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}))^{-1} \quad (7)$$

avec

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{J}_1(\boldsymbol{\theta}) \ \mathbf{J}_2(\boldsymbol{\theta}) \ \mathbf{J}_3(\boldsymbol{\theta})], \quad (8)$$

où  $\mathbf{J}_n(\boldsymbol{\theta})$  représente la dérivée de  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta})$  par rapport à  $\boldsymbol{\theta}_n(k)$ , donnée par

$$\mathbf{J}_1(\boldsymbol{\theta}) = \Phi(\mathbf{I}_{U_1} \boxtimes \boldsymbol{\theta}_2 \boxtimes \boldsymbol{\theta}_3), \quad (9)$$

$$\mathbf{J}_2(\boldsymbol{\theta}) = \Phi(\boldsymbol{\theta}_1 \boxtimes \mathbf{I}_{U_2} \boxtimes \boldsymbol{\theta}_3), \quad (10)$$

$$\mathbf{J}_3(\boldsymbol{\theta}) = \Phi(\boldsymbol{\theta}_1 \boxtimes \boldsymbol{\theta}_2 \boxtimes \mathbf{I}_{U_3}). \quad (11)$$

Afin d'éviter les problèmes liés à une éventuelle singularité de la BCR, on doit prendre en compte les conditions d'identifiabilité décrites dans la Section 2. Dans le lemme et la proposition qui suivent, on explicite les différents Jacobiens en fonction de matrices de sélection et de permutation, et l'expression analytique de la BCR.

**Lemme 3.1** Soit  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = [\tilde{\boldsymbol{\theta}}_1^T \ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2^T \ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_3^T]^T$  le vecteur contenant les paramètres inconnus,  $\mathbf{B}$  la matrice de sélection associée et  $\mathbf{\Pi}_k^{(n)} \in \mathbb{R}^{(\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 + \tilde{U}_3) \times (\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 + \tilde{U}_3)}$  la matrice de permutation qui déplace le  $k^{\text{eme}}$  élément de  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n$  de façon que  $\mathbf{\Pi}_k^{(n)} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_n = [\tilde{\theta}_n(k), \tilde{\theta}_n(1), \dots, \tilde{\theta}_n(k-1), \tilde{\theta}_n(k+1), \dots, \tilde{\theta}_n(\tilde{U}_n)]^T$ . On a :

$$\mathbf{J}(\mathbf{\Pi}_k^{(n)} \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{B}^T \mathbf{\Pi}_k^{(n)T} = \mathbf{J}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{\Pi}_k^{(n)T} \quad (12)$$

**Proposition 3.1** L'expression analytique de la borne inférieure de l'EQM globale est donnée par

$$\mathbb{E} \left\| \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) \right\|^2 \geq \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^{\tilde{U}_n} \text{BCR}(\tilde{\theta}_n(k)) \quad (13)$$

où la BCR du  $k^{\text{eme}}$  élément du vecteur  $\tilde{\theta}_n$  est donnée par

$$\text{BCR}(\tilde{\theta}_n(k)) = \frac{\sigma^2}{\|\mathbf{P}_{\mathbf{G}_{k,n}}^\perp \mathbf{g}_{k,n}\|^2}, \quad (14)$$

où  $\mathbf{P}_{\mathbf{G}_{k,n}}^\perp = \mathbf{I}_{I_1 I_2 I_3} - \mathbf{G}_{k,n} (\mathbf{G}_{k,n}^T \mathbf{G}_{k,n})^{-1} \mathbf{G}_{k,n}^T$  avec

$$\mathbf{J}(\mathbf{\Pi}_k^{(n)} \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{g}_{k,n} \quad \mathbf{G}_{k,n}] \quad (15)$$

qui désigne la matrice Jacobiennne partitionnée.

En raison du manque de place, les démonstrations du lemme 3.1 et de la Proposition 3.1 sont omises. Nous renvoyons à [14] pour des éléments de démonstration.

## 4 Algorithmes d'estimation de modèles CP structurés

### 4.1 Algorithme non itératif

Nous allons maintenant expliquer comment calculer la décomposition CP de manière *non itérative* quand un facteur est structuré, par exemple  $\mathbf{A}^{(3)}$ , et quand  $R$  n'est pas trop grand, c'est-à-dire quand [9] :

$$I_3 R \geq R^2 + U_3 - 1.$$

En dépliant le tenseur  $\mathcal{X}$  dans une matrice  $\mathbf{X}_3$  de dimensions  $I_3 \times I_1 I_2$  de façon appropriée, on a la relation standard  $\mathbf{X}_3 = \mathbf{A}^{(3)} (\mathbf{A}^{(2)} \odot \mathbf{A}^{(1)})^T$ . Par ailleurs on peut relier cette équation

à celle de la SVD  $\mathbf{X}_3 = \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^H$ , ce qui conduit aux équations suivantes où  $\mathbf{N}$  désigne une matrice inversible inconnue :

$$\mathbf{N}^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^H = (\mathbf{A}^{(2)} \odot \mathbf{A}^{(1)})^T \text{ et } \mathbf{U} \mathbf{N} = \mathbf{A}^{(3)}.$$

L'idée clef est que la seconde équation peut être résolue en  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{A}^{(3)}$  si cette dernière suit une structure linéaire du type :  $\mathbf{A}^{(3)} = \mathbf{E}_1 + \sum_{\ell=2}^{U_3} \gamma_\ell \mathbf{E}_\ell$ , où  $\{\mathbf{E}_\ell\}_{\ell=1}^{U_3}$  désigne une base fixée. Il suffit en effet de résoudre le système linéaire suivant de  $I_3 R$  equations en  $R^2 + U_3 - 1$  inconnues :

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \text{vec}(\mathbf{N}) \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = -\text{vec}(\mathbf{E}_1)$$

où  $\mathbf{M} = [-\mathbf{I}_R \boxtimes \mathbf{U}, \text{vec}(\mathbf{E}_2), \dots, \text{vec}(\mathbf{E}_{U_3})]$ , et  $\boldsymbol{\gamma}$  désigne le vecteur de dimension  $U_3 - 1$  de composantes  $\gamma_\ell$ . Une fois que  $\mathbf{N}$  et  $\boldsymbol{\gamma}$  ont été obtenus, la première équation permet de calculer les matrices  $\mathbf{A}^{(1)}$  et  $\mathbf{A}^{(2)}$  via  $R$  approximations matricielles de rang 1 successives. Plus précisément, soit  $\mathbf{F} = (\mathbf{N}^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^H)^T$ . Cette matrice  $\mathbf{F}$  est maintenant connue et  $\mathbf{F} = \mathbf{A}^{(2)} \odot \mathbf{A}^{(1)}$ . Donc si nous déplaçons chaque colonne  $\mathbf{f}_r$  de  $\mathbf{F}$  en une matrice, celle-ci est de rang 1 :

$$\text{Unvec}(\mathbf{f}_r) = \mathbf{a}_r^{(2)} \mathbf{a}_r^{(1)T}$$

L'algorithme se termine donc en un nombre fini d'itérations.

### 4.2 Algorithme itératif CALS

Quand toutes les matrices facteurs sont structurées, l'algorithme précédent ne peut être utilisé. Considérons le cas de matrices circulantes  $\mathbf{A}^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times R}$  définies comme

$$\mathbf{A}^{(n)} = [\boldsymbol{\theta}_n \ \mathbf{\Pi}_n \boldsymbol{\theta}_n \ \dots \ \mathbf{\Pi}_n^{R-1} \boldsymbol{\theta}_n], \quad (16)$$

où  $\boldsymbol{\theta}_n \in \mathbb{R}^{I_n}$  est le vecteur générateur,  $\mathbf{\Pi}_n$  est la matrice de permutation  $I_n \times I_n$  définie comme  $\mathbf{\Pi}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{I}_{I_n-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ ,

et  $\mathbf{S}_r^{(n)} = \mathbf{\Pi}_n^{r-1}$ . Un algorithme d'estimation du type moindres carrés alternés contraint (CALS en anglais) a été récemment proposé dans [10] en considérant une base particulière  $\{\mathbf{E}_m^{(n)}\}_{m=1}^{I_n}$  pour le sous-espace des matrices circulantes  $I_n \times R$ , avec le vecteur de base canonique  $\mathbf{e}_m^{(n)}$  de  $\mathbb{R}^{I_n}$  comme vecteur générateur de  $\mathbf{E}_m^{(n)}$ . Définissant  $\mathbf{E}^{(n)} = [\text{vec}(\mathbf{E}_1^{(n)}) \ \dots \ \text{vec}(\mathbf{E}_{I_n}^{(n)})] \in \mathbb{R}^{R I_n \times I_n}$ , l'algorithme CALS est résumé ci-après.

**Inputs :**  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times I_3}$ , rang  $R$  et valeurs initiales des vecteurs générateurs  $\boldsymbol{\theta}_1^{(0)}, \boldsymbol{\theta}_2^{(0)}, \boldsymbol{\theta}_3^{(0)}$ .

**Outputs :** Facteurs matriciels circulants  $\mathbf{A}^{(n)}, n \in \{1, 2, 3\}$ , de dimensions  $I_n \times R$ .

Itérations jusqu'à convergence :

$$\boldsymbol{\theta}_1^{(i)} = \frac{1}{R} \mathbf{E}^{(1)T} (\mathbf{I}_R \boxtimes \mathbf{X}_1) \text{vec} \left\{ \left[ \left( \mathbf{A}_{i-1}^{(3)} \odot \mathbf{A}_{i-1}^{(2)} \right)^T \right]^\dagger \right\}$$

$$\boldsymbol{\theta}_2^{(i)} = \frac{1}{R} \mathbf{E}^{(2)T} (\mathbf{I}_R \boxtimes \mathbf{X}_2) \text{vec} \left\{ \left[ \left( \mathbf{A}_{i-1}^{(3)} \odot \mathbf{A}_i^{(1)} \right)^T \right]^\dagger \right\}$$

$$\boldsymbol{\theta}_3^{(i)} = \frac{1}{R} \mathbf{E}^{(3)T} (\mathbf{I}_R \boxtimes \mathbf{X}_3) \text{vec} \left\{ \left[ \left( \mathbf{A}_i^{(2)} \odot \mathbf{A}_i^{(1)} \right)^T \right]^\dagger \right\}$$

où  $\mathbf{X}_n, n \in \{1, 2, 3\}$ , désigne le dépliement matriciel mode- $n$  de  $\mathcal{X}$ , et  $\mathbf{A}_i^{(n)}$  représente l'estimée de  $\mathbf{A}^{(n)}$  à l'itération  $i$ , obtenue en remplaçant  $\theta_n$  par  $\theta_n^{(i)}$  dans (16).

## 5 Simulations

Afin d'illustrer nos résultats théoriques, la BCR est calculée dans les deux cas suivants : (i) les trois facteurs sont Toeplitz circulants et (ii) un facteur est structuré Hankel et les deux autres ne sont pas structurés. Dans les deux cas, la BCR est comparée à l'EQM globale obtenue pour les algorithmes présentés dans la Section 4. L'EQM globale est calculée à partir de simulations de Monte-Carlo avec 1000 réalisations de la séquence de bruit pour chaque valeur de  $\sigma^2$ .

Dans le cas (i), les trois matrices  $\mathbf{A}^{(1)}$ ,  $\mathbf{A}^{(2)}$  et  $\mathbf{A}^{(3)}$  sont Toeplitz circulantes, de dimensions  $5 \times 5$ . Afin de garantir l'identifiabilité, les paramètres suivants sont considérés connus et fixés :  $\theta_1(1) = \theta_2(1) = 1$ .

Dans le cas (ii), la matrice  $\mathbf{A}^{(3)}$  a une structure de Hankel et les matrices  $\mathbf{A}^{(1)}$  et  $\mathbf{A}^{(2)}$  n'ont pas de structure particulière. Les dimensions et le rang sont les suivantes :  $I_3 = 10$ ,  $I_2 = 11$ ,  $I_1 = 12$  et  $R = 3$ . Afin de garantir l'identifiabilité, le premier élément de  $\theta_3$  est supposé connu et fixé à un (ce qui implique que l'anti diagonale de la matrice de Hankel est formée de uns), et la première ligne de  $\mathbf{A}^{(1)}$  est supposée connue et composée de uns, sans perte de généralité.

Les résultats de simulation présentés sur la Figure 1 démontrent la validité de notre formule puisque la BCR et l'EQM coïncident pour une variance du bruit suffisamment petite.

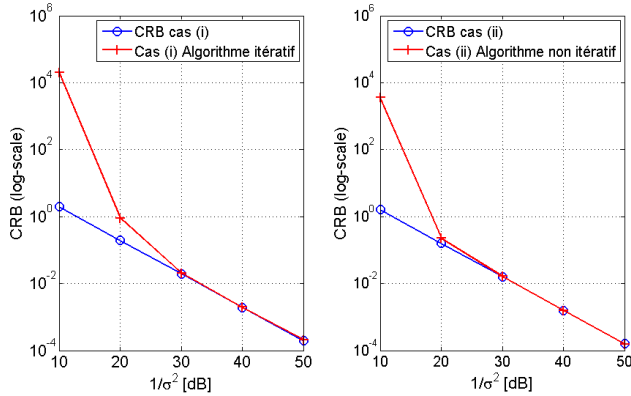


FIGURE 1 – EQM globale et BCR en fonction de  $\frac{1}{\sigma^2}$ .

## 6 Conclusion

Dans cet article, on a proposé une expression analytique de la BCR pour l'estimation de facteurs structurés du type Hankel, Toeplitz ou Toeplitz circulant, d'une décomposition CP. Cette borne permet d'évaluer les performances des algorithmes itératif et non itératif développés pour l'estimation des paramètres de ce type de CPD structurée. Comme perspectives de ce tra-

vail, on envisage la prise en compte du caractère aléatoire de certains paramètres des facteurs CP, ce qui conduit au calcul d'une borne hybride. Cette borne pourrait être utilisée pour des applications telles que l'estimation des paramètres de modèles de Wiener-Hammerstein [10] et l'identification aveugle de canaux basée sur l'utilisation d'un tenseur de cumulants [3].

## Références

- [1] P. Comon, "Tensors : a brief introduction," *IEEE Signal Proc. Mag.*, vol. 31, no. 3, pp. 44–53, May 2014.
- [2] N. D. Sidiropoulos, G. B. Giannakis, and R. Bro, "Blind PARAFAC receivers for DS-CDMA systems," *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 48, no. 3, pp. 810–823, Mar. 2000.
- [3] C. E. R. Fernandes, G. Favier, and J. C. M. Mota, "Blind channel identification algorithms based on the Parafac decomposition of cumulant tensors : the single and multiuser cases," *Signal Proc.*, vol. 88, no. 6, pp. 1382–1401, June 2008.
- [4] G. Favier, A. Y. Kibangou, and T. Bouilloc, "Nonlinear system modeling and identification using Volterra-PARAFAC models," *Int. J. Adapt. Control Signal Proc.*, vol. 26, no. 1, pp. 30–53, Jan. 2012.
- [5] T. Kolda and B. Bader, "Tensor decompositions and applications," *SIAM Review*, vol. 51, pp. 455–500, 2009.
- [6] D. Nion and L. De Lathauwer, "A block component model based blind DS-CDMA receiver," *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 56, no. 11, pp. 5567–5579, 2008.
- [7] A. Y. Kibangou and G. Favier, "Non iterative solution for Parafac with a Toeplitz factor," in *Proc. Eusipco*, Glasgow, UK, Aug. 24–28 2009.
- [8] A. L. F. de Almeida, G. Favier, and J. C. M. Mota, "Parafac-based unified tensor modeling for wireless communication systems with application to blind multiuser equalization," *Signal Proc.*, vol. 87, no. 2, pp. 337–351, Feb. 2007.
- [9] P. Comon, M. Sorensen, and E. Tsigaridas, "Decomposing tensors with structured matrix factors reduces to rank-1 approximations," in *Proc. ICASSP*, Dallas, Mar. 2010, hal-00490248.
- [10] J. H. de M. Goulart and G. Favier, "An algebraic solution for the Candecomp/PARAFAC decomposition with circulant factors," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 35, no. 4, pp. 1543–1562, 2014.
- [11] S. Kay, *Fundamentals Of Statistical Signal Processing : Estimation Theory.*, Prentice Hall PTR, 1993.
- [12] X. Liu and N. Sidiropoulos, "Cramér-Rao lower bounds for low-rank decomposition of multidimensional arrays," *IEEE Trans. Sig. Proc.*, vol. 49, no. 9, pp. 2074–2086, Sept. 2001.
- [13] S. Sahnoun and P. Comon, "Tensor polyadic decomposition for antenna array processing," in *Proc. CompStat*, Geneva, Aug. 19–22 2014, pp. 233–240, hal-00986973.
- [14] M. Boizard, R. Boyer, G. Favier, J. E. Cohen, and P. Comon, "Performance estimation for tensor CP decomposition with structured factors," in *Proc. ICASSP*, 2015.
- [15] L. L. Scharf and L. T. Mac Werther, "Geometry of the Cramér-Rao bound," *Signal Proc.*, vol. 31, no. 3, pp. 301–311, Apr. 1993.
- [16] P. Stoica and R. L. Moses, *Spectral Analysis of Signals*, Prentice Hall, 2005.