HAL
open science

Divergence de Rényi comme mesure de contraste pour la détection d'objets dans des images bruitées

Aymeric Histace, David Rousseau

To cite this version:

Aymeric Histace, David Rousseau. Divergence de Rényi comme mesure de contraste pour la détection d'objets dans des images bruitées. GRETSI 2015, Sep 2015, Lyon, France. 4 p. hal-01169034

HAL Id: hal-01169034

https://hal.science/hal-01169034v1

Submitted on 26 Jun 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Divergence de Rényi comme mesure de contraste pour la détection d'objets dans des images bruitées.

Aymeric HISTACE[1], David ROUSSEAU[2],

[1] ETIS; ENSEA; Université de Cergy Pontoise; CNRS, UMR 8051, 95000, Cergy, France.

[2] Université de Lyon, Laboratoire CREATIS; CNRS, UMR5220; INSERM, U1044; Université Lyon 1; INSA-Lyon, 69621 Villeurbanne, France.

aymeric.histace@u-cergy.fr; david.rousseau@creatis.insa-lyon.fr

Résumé – La détection d'un objet dans des images bruitées est étudiée au moyen d'une mesure de contraste basée sur la divergence de Rényi. L'analyse étend, et contient comme un cas particulier, les travaux antérieurs réalisés sur une comparaison pour cette même tâche de détection de la divergence de Kullback-Leibler avec celle de Bhattacharrya. L'extension porte sur l'étude de l'influence du paramètre de la divergence de Rényi, l'échelle d'observation, et le type de bruits testés en incluant d'autres familles de bruits d'intérêts pratiques en imagerie.

Abstract – A binary detection task on the presence or absence of an object over a background in noisy images is studied based on a contrast metric taken as the Rényi divergence. The analysis extends, and contains as a special case, previous works realized for the same detection task on the comparison of the Kullback-Leibler divergence and the Bhattacharryya divergence. The extension deals with the influence of the Rényi parameter, the observation scale, and the type of noise tested and including new noise families of practical interest for imaging.

1 Introduction

On s'intéresse au domaine du traitement des images bruitées caractérisées par les propriétés statistiques des différentes régions qui les constitutent. C'est le cas par exemple en imagerie cohérente (imagerie laser ou échographie ultrasonore) dans lesquelles opère le bruit de speckle, mais aussi dans les imageries à faibles flux de lumière où l'on trouve du bruit de photon lié à la nature quantique de la lumière, ou encore dans les imageries computationelles qui combinent des bruits thermiques avec des opérations de produits ou de ratio. Un enjeu applicatif, par exemple en télédétection ou en imagerie biomédicale, dans l'études de ce type d'images est celui de la détection d'objets. Pour ce faire, il est important de disposer d'une mesure de contraste adéquat entre les objets d'intérêts et le fond sur lequel ils apparaîssent. Par cela on entend une métrique robuste aux changements de famille de bruit, i.e. même valeur de contraste signifie même performance de détection indépendamment de la famille de bruit dans les images. Une approche générique basée sur ce critère a été proposée dans [1]. Dans cette étude les auteurs montrent la supériorité de la distance de Bhattacharrya sur la divergence de Kullback-Leibler pour une tâche de détection binaire réalisée selon un schéma de maximum de vraisemblance généralisée avec les familles de bruits que l'on rencontre classiquement dans le domaine de l'optique. Ces deux mesures de contrastes sont présentées comme distinctes dans [1] or la divergence de Kullback-Leibler et de façon indirecte la distance de Bhattacharryya sont deux cas particuliers de la divergence paramétrable de Rényi. Nous revisitons l'approche de [1] avec la divergence de Rényi afin d'apprécier l'influence de son paramètre sur les performances de cette divergence en tant que mesure de contraste. L'étude des mesures de divergences en traitement statistique de l'information est une thématique vaste [2, 3]. Nous nous concentrons ici sur un schéma de détection binaire tel qu'introduit dans [1] et nous étendons le type de bruit à d'autres familles de bruits, non considérées dans [1], et ayant des intérêts pratiques en imagerie. Nous étudions également l'influence de l'échelle d'observation sur [4] le comportement de la divergence de Rényi.

2 Schéma de détection et contraste

Nous reprenons le schéma de détection de [1], i.e. la détection dans une image de N_T pixels d'un objet de N_P pixels positionné sur un fond de $N_Q = N_T - N_P$ pixels. Les niveaux de gris dans les régions objet et fond sont aléatoires, spatialement indépendants et distribuées selon des lois de probabilités P_i pour l'objet de même type que Q_i pour le fond mais de paramètres différents. Nous nous plaçons dans le cas particulier de l'observateur idéal, pour lequel P_i et Q_i sont connues. La détection se fait via l'exploration de l'image par une sous-fenêtre de même forme et taille que l'objet recherché. Nous étudions comme mesure de contraste la divergence de Rényi [6] qui prend en entrée deux distributions normalisées $\{P_i\}$ et $\{Q_i\}$, $i = 1$ à N, avec le même alphabet, selon

$$D_\alpha(P_i \| Q_i) = \frac{1}{\alpha - 1} \log \left(\sum_{i=1}^{N} P_i^\alpha Q_i^{1-\alpha} \right) . \qquad (1)$$

Quand $\alpha = 1$, le théorème de L'Hospital mène à la divergence de Kullback-Leibler et pour $\alpha = 0.5$, on retrouve, à un coefficient d'échelle $\frac{1}{2}$ près, la distance de Bhattacharryya. Enfin, pour $\alpha = 2$, on retrouve une expression reliée à la divergence du χ_2. Notons que pour $\alpha > 1$, l'entropie de Rényi n'est ni convexe ni concave mais considérée comme pseudoconcave [5].

Afin de caractériser la performance de la divergence de Rényi d'ordre α comme mesure de contraste, à l'identique de [1] pour une famille de bruit donnée, nous générons dans un premier temps pour chaque couple de paramètres associés aux bruits issus de la famille considéré la courbe ROC construite au moyen du test du maximum de vraisemblance relatif à la tâche de détection. Afin d'obtenir pour chaque couple de paramètre un unique point caractéristique, l'AUC (Area Under Curve) de la courbe ROC est ensuite calculée. Dans une deuxième étape, à chaque valeur d'AUC obtenue est associée la valeur de la divergence de Rényi pour les couples P_i et Q_i correspondants. Ces deux étapes sont répétées autant de fois que de bruits étudiés au sein de la famille considérée afin d'obtenir pour cette famille un nuage de points représentatif. Différemment du travail proposé par Goudail et *al.*, nous proposons alors de quantifier la performance de la divergence de Rényi d'ordre α pour cette famille, en estimant la dispersion du nuage de points obtenus autour de la caractéristique idéale (i.e. pour l'observateur idéal) démontrée pour la distance de Bhattacharrya dans [8] et donnée par

$$AUC \simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} erf\left(2N_P D_\alpha(P_i \| Q_i)\right) \tag{2}$$

avec erf la fonction de taux d'erreur et que nous généralisons ici à la divergence de Rényi. Plus précisément, l'erreur quadratique moyenne (MSE) associée à la régression non linéaire entre le nuage de points générés et l'Éq. (2). La divergence de Rényi d'ordre α est alors une mesure de contraste d'autant plus performante que le nuage de points présente une faible faible MSE au sein d'une même famille de bruits. Nous considérons dans cette étude deux familles distinctes : la famille exponentielle en incluant les bruits optiques (Poisson, Géométrique, Bernoulli, gaussien, ...) considérés dans [1] mais également d'autres d'intérêt pratique comme celle de Nakagami [7], que l'on rencontre en imagerie ultrasonore ; et nous proposons également de tester d'autres bruits distribués selon des lois non exponentielles (Logistic, Hypergéométrique, Stud-ent) ou encore le bruit de Cauchy que l'on rencontre en imagerie computationnelle dès lors que l'on réalise des ratios d'images acquises avec des bruits thermiques de type gaussien. Dans la suite, nous étudions l'influence du paramètre α associées à la divergence de Rényi sur la dispersion de l'AUC de l'Éq. (2) et ce pour les deux familles testées. Pour les bruits issus de la famille exponentielle, la divergence de Rényi entre deux distributions est déterminée de manière analytique au moyen de l'expression sous forme paramétrée de la densité de probabilité dit à paramètres naturels donnée par $P(x|\theta) = b(x)e^{(\eta(\theta).T(x)-A(\eta)))}$ avec $T(x)$ la statistique suffisante, η le paramètre naturel, $A(\eta)$ la fonction de log partition, θ le paramètre de la famille, et $b(x)$ la mesure de base. Il est possible [9] de déduire pour cette forme paramétrée l'expression analytique de la divergence de Rényi telle que

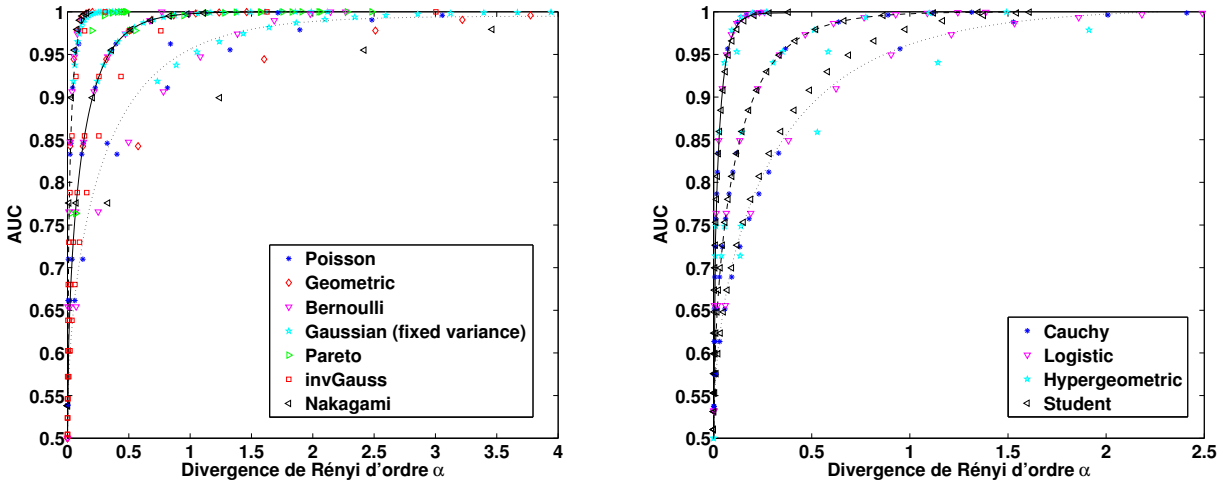
$$(1-\alpha) \times D_\alpha\left(P_i \| Q_i\right) = J_{\alpha,A}(\eta_P, \eta_Q) \tag{3}$$

avec $J_{\alpha,A}(\eta_P, \eta_Q) = \alpha A(\eta_P) + (1-\alpha)A(\eta_Q) - A\left(\alpha\eta_P + (1-\alpha)\eta_Q\right)$. Le tableau 1 récapitule la forme analytique de la divergence de Rényi pour quelques bruits exponentiels considérés dans la partie expérimentale, et calculées à partir de l'Éq. (3). Dans la cas de la famille non exponentielle, les divergences entre densités sont estimées numériquement.

3 Résultats et discussion

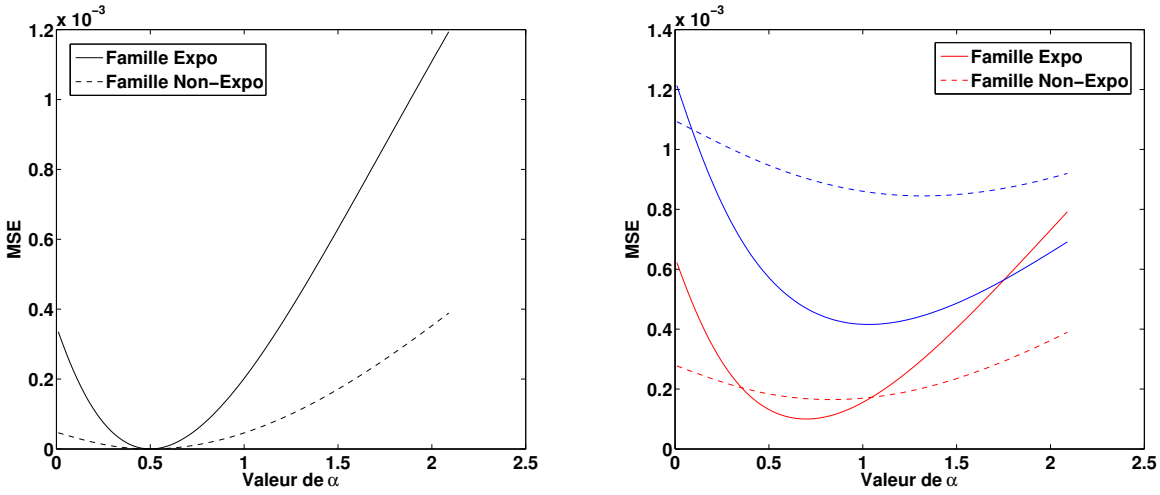
La Fig. 1.(a) montre les caractéristiques d'AUC en fonction de la divergence de Rényi obtenues pour des densités de probabilités de type exponentiel (7 bruits), et la Fig. 1.(b) pour des bruits de type non exponentiel (4 bruits). Pour chaque valeur de α un "nuage de points" et la courbe de régression associée à l'Éq. (2) sont représentés : plus précisément, α est égal à $0,1$ pour la courbe de régression discontinue, à $0,5$ (Bhattacharrya) pour la courbe pleine ; et à $1,5$ pour la courbe en pointillés. Pour ces tests, la taille de l'objet à détecter est $N_P = 4$ pixels (10% de la taille de l'image) comme le propose les auteurs dans [1] et chaque point est un point moyen obtenu sur un ensemble de 1000 tirages du couple de distributions considérées. La Fig. 1 montre que, pour ce set-up expérimental, la valeur de $\alpha = 0,5$ (Bhattacharrya) correspond à la caractéristique la plus intéressante en termes de dispersion des bruits exponentiels considérés. En particulier, pour cette valeur de α, les nuages de points obtenus pour chacun des bruits suivent presque parfaitement l'approximation de Barret [8] de l'Éq. (2) matérialisée par la courbe continue noire. Pour des valeurs inférieures ou supérieures, la dispersion du nuage de points est plus importante et tant à augmenter avec la valeur de α. Il apparaît donc ici que les résultats de [1] peuvent être étendus à l'ensemble de la famille exponentielle. Par ailleurs, on constate également que l'optimalité de la distance de Bhattacharrya pour la tâche de détection considérée s'étend également aux densités de probabilités non exponentielles, ce qui représente un autre apport vis-à-vis du travail de [1] dans lequel de telles distributions n'étaient pas considérées. La dispersion du nuage semble pour cette famille moins sensible aux paramètre α même si là aussi une augmentation de la MSE est visible ; cette caractérisation qualitative du phénomène reste à mettre en perspective du nombre moins élevé de bruits considérés pour cette famille (4 au lieu de 7 pour la famille exponentielle).

Nous étudions à présent notre tâche de détection pour différentes tailles N_P de l'objet afin d'observer l'apport possible du paramètre α vis-à-vis du changement d'échelle de la cible dans l'image de taille fixe. En particulier, la Fig. 2.(b) illustre les résultats quantitatifs obtenus pour l'évolution de la MSE en fonction de la valeur de α pour des tailles de l'objet $N_P = 6$ (15% de la taille de l'image), et 10 (25%). Les mêmes familles de densités de probabilités que précédemment sont considérées.



(a) (b)

FIGURE 1 – Évolution de l'AUC relative à la tâche de détection en fonction de la divergence de Rényi entre la densité de probabilité du fond de l'image et celle de l'objet. Pour la famille exponentielle (a), 7 bruits sont utilisés dont la distribution de Nakagami, et 4 pour la famille non exponentielle (b). Chaque point est obtenu en considérant, pour un bruit donné, différents couples de paramétrisation des densités et correspond à une valeur moyenne de l'AUC obtenue sur 1000 tirages. Pour un même type de bruit, seul le paramètre associé à la distribution (voir Tab. 1) bruitant l'objet à détecter varie, celui associé au fond de l'image reste fixe. Par ailleurs, sur chacune des figures (a) et (b), apparaissent les régressions non-linéaires associées à l'Éq. (2) : la courbe discontinue correspond à une valeur du paramètre α de 0,1 ; la courbe pleine à une valeur de 0,5 (Bhattacharyya) du même paramètre ; et enfin, la courbe en pointillé illustre la régression obtenue pour une valeur de α égale à 1,5.



(a) (b)

FIGURE 2 – Évolution de l'erreur quadratique moyenne (MSE) associée à la régression non-linéaire de l'Éq. (2) en fonction du paramètre α de la divergence de Rényi pour les familles exponentielles (trait plein) et non exponentielles (pointillés). En (a), la taille de l'objet à détecter correspond à 10% de la taille de l'image, comme dans [1] et (b), la taille de l'objet est de 15% de la taille de l'image pour le couple de courbes en rouge, et de 25% pour le couple de courbes en bleu.

Distribution	θ	A	η	$(1-\alpha)\times D_\alpha(P_1\|\|P_2)$
Bernoulli	p et $(q=1-p)$	$Ln\left(1+e^{\eta}\right)$	$Ln\left(\frac{p}{q}\right)$	$\alpha Ln\left(1+\frac{p_1}{q_1}\right)+(1-\alpha)Ln\left(1+\frac{p_2}{q_2}\right)$ $-Ln\left(1+(\frac{p_1}{q_1})^{\alpha}(\frac{p_2}{q_2})^{1-\alpha}\right)$
Poisson	λ	e^{η}	$Ln(\lambda)$	$\alpha\lambda_1+(1-\alpha)\lambda_2-\lambda_1^{\alpha}\lambda_2^{1-\alpha}$
Gaussien (moyenne μ variance fixe σ)	μ	$-\frac{\eta^2}{2}$	$\eta=\frac{\mu}{\sigma}$	$-\alpha\frac{\mu_1^2}{2\sigma^2}-(1-\alpha)\frac{\mu_2^2}{2\sigma^2}$ $+\frac{1}{2}\left(\alpha\frac{\mu_1}{\sigma}+(1-\alpha)\frac{\mu_2}{\sigma}\right)^2$
Nakagami (m variable L fixe)	m	$Ln\Gamma(L)-L\times Ln\left(\frac{2L}{m}\right)$	$\eta=\left[2L-1;-\frac{L}{m}\right]$	$\alpha\left[Ln\Gamma(L)-L\times Ln\left(\frac{2L}{m_1}\right)\right]$ $+(1-\alpha)\left[Ln\Gamma(L)-L\times Ln\left(\frac{2L}{m_2}\right)\right]$ $-Ln\Gamma(L)+L\times Ln\left(2L\left[\frac{\alpha}{m_1}+\frac{1-\alpha}{m_2}\right]\right)$

TABLE 1 – Exemples de formes analytiques de la divergence de Rényi entre deux densités de probabilité de même type au sein de la famille exponentielle, calculées à partir de l'Éq. (3).

.

Nous constatons, pour les deux tailles de l'objet, qu'il existe toujours un minimum de la MSE caractérisant donc un minimum de dispersion du critère, et ce pour les deux familles de bruits exponentielle et non exponentielle ; mais qui cette fois-ci ne correspond pas à la valeur 0,5 du paramètre α de la divergence de Rényi, c'est-à-dire, à la distance de Bhattacharrya. En particulier, pour une taille de l'objet de 15% de la taille de l'image ($N_P=6$), le minimum est atteint pour $\alpha=0,65$ pour les densités de type exponentiel, et $0,80$ pour les non exponentielles. Cet effet de glissement de la valeur α vers la "droite" est majoré pour une taille de l'objet de 25% de la taille de l'image ($N_P=10$). Pour les bruits exponentiels la valeur minimum de la MSE est atteinte pour une valeur de α légèrement supérieure à 1, et proche de 1,2 pour les distributions non exponentielles. On notera également que pour les densités de probabilité exponentielles le minimum de MSE est plus faible que pour les distributions non-exponentielles et tend à augmenter avec la taille de l'objet.

4 Conclusion

Nous nous sommes intéressés ici à la divergence de Rényi comme mesure de contraste pour la détection d'objets au sein d'images bruitées. Partant du schéma expérimental de [1], nous avons étendu les résultats obtenus pour l'observateur idéal au travers des points suivants :

- La divergence de Bhattacharrya (Rényi pour $\alpha=0,5$) comme mesure de contraste reste la divergence optimale à la tâche de détection considérée pour l'ensemble des distributions de la famille exponentielle ;
- Cette même distance conserve ses propriétés de discrimination pour des distributions non-exponentielles de type Cauchy ;
- Ce résultat est confirmé quantitativement par une estimation la MSE associée à la régression non linéaire de l'Éq. (2) pour chacune des familles de bruit ;
- La divergence de Rényi permet de s'adapter à la problématique d'échelle liée à la taille de l'objet à détecter : pour des tailles d'objets différents de celle considérée dans [1], il apparaît que des valeurs de α différentes de 0,5 permettent d'obtenir une dispersion plus faibles des caractéristiques de l'AUC, et ce pour les deux familles de bruits considérées.

Cette étude préliminaire doit être confortée par une approche analytique afin de valider les résultats obtenus en simulation, en particulier sur les aspects de dépendances à l'échelle de l'objet à détecter. Par ailleurs, des tests sur des images bruitées réelles (imagerie médicale par exemple) permettront également de compléter cette étude menées uniquement sur des images synthétiques pour l'instant.

Références

[1] Goudail, F. and Réfrégier, P. and Delyon, G. *Bhattacharyya distance as a contrast parameter for statistical processing of noisy optical images*. JOSA A, 21, 1231–1240, 2004.

[2] Basseville, M. *Divergence measures for statistical data processing : An annotated bibliography*. Signal Processing, 93(4), 621–633, 2013.

[3] Bercher, J.-F. *Entropies et critères entropiques*. Méthodes d'inversion appliquées au traitement du signal et de l'image, HERMÈS/LAVOISIER, 317 pages, 2013.

[4] Delahaies, A. and Rousseau, D. and Chapeau-Blondeau, F. *Joint acquisition-processing approach to optimize observation scales in noisy imaging*. Optics Letters, vol. 36, pp. 972–974, 2011.

[5] Ho, S.-W. and Verdú, S. *Convexity/Concavity of Renyi Entropy and α-Mutual Information*, to appear in 2015 IEEE Int. Symp. on Inform. Theory, Hong Kong, China, 2015

[6] Rényi, A. *On measures of entropy and information*, Fourth Berkeley symp. on mathematical statistics and probability, pp. 547–561, 1961.

[7] Nakagami, N. *The m-Distribution, a general formula of intensity of rapid fading* In William C. Hoffman, editor, Statistical Methods in Radio Wave Propagation : Proc. of a Symp. held June 18-20, 1958, pp 3-36. Permagon Press, 1960.

[8] Barrett, H. and Abbey, C. and Clarkson, E. *Objective assessment of image quality. III. ROC metrics, ideal observers, and likelihood-generating functions*. JOSA A, 15(6), 1520–1535, 1998.

[9] Nielsen, F. and Garcia, V. *Statistical exponential families : A digest with flash cards*. CoRR collection, vol. 09114863, 2011.