



**HAL**  
open science

## Les groupes de petite complexité simpliciale

Guillaume Bulteau

► **To cite this version:**

| Guillaume Bulteau. Les groupes de petite complexité simpliciale. 2015. hal-01168493

**HAL Id: hal-01168493**

**<https://hal.science/hal-01168493>**

Preprint submitted on 25 Jun 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# LES GROUPES DE PETITE COMPLEXITÉ SIMPLICIALE

GUILLAUME BULTEAU

RÉSUMÉ. Le but de ce texte est de déterminer tous les groupes de présentation finie dont la complexité simpliciale est inférieure à 16 et de donner quelques groupes de petite complexité simpliciale.

## SOMMAIRE

1. Introduction	1
2. Quelques propriétés des complexes minimaux	5
3. Démonstration du théorème	7
3.1. A partir d'un sommet dont l'étoile contient 6 triangles	7
3.2. A partir d'un sommet dont l'étoile contient 7 triangles	9
3.3. A partir d'un sommet dont l'étoile contient 8 triangles	18
Références	35

## 1. INTRODUCTION

Les complexes simpliciaux considérés seront tous supposés finis. Soit  $P$  un complexe simplicial. Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on notera  $s_k(P)$  le nombre de simplexes de dimension  $k$  de  $P$ . La notion suivante a été introduite dans [BB10].

**Définition.** Soit  $G$  un groupe de présentation finie. La *complexité simpliciale* de  $G$  est :

$$\kappa(G) = \min_P s_2(P),$$

le minimum étant pris sur tous les complexes simpliciaux de dimension inférieure à 2 tels que  $\pi_1(P) = G$ .

Un complexe simplicial  $P$  de dimension 2 sera dit *minimal* pour  $G$  lorsque  $\pi_1(P) = G$ ,  $s_2(P) = \kappa(G)$  et lorsque tout sommet de  $P$  est incident à au moins deux arêtes.

*Remarque.* (1) Pour  $G$  groupe de présentation finie,  $\kappa(G) = 0$  si et seulement si  $G$  est un groupe libre.

(2) Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux groupes de présentations finies. Le produit libre  $G_1 * G_2$  vérifie :

$$\kappa(G_1 * G_2) \leq \kappa(G_1) + \kappa(G_2) \tag{1}$$

En effet, prenons deux complexes minimaux  $P_1$  et  $P_2$  pour  $G_1$  et  $G_2$  respectivement. On considère le bouquet  $P = P_1 \vee P_2$ . Ce complexe  $P$  vérifie  $\pi_1(P) = G_1 * G_2$ , et on a :

$$\kappa(G_1 * G_2) \leq s_2(P) \leq s_2(P_1) + s_2(P_2) = \kappa(G_1) + \kappa(G_2).$$

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* 53C23, 05A99.

*Key words and phrases.* Minimal triangulations, simplicial complexity of groups.  
Ce travail est financé par l'ANR Finsler.

On peut noter que l'inégalité dans 1 est stricte dès que  $G_1$  et  $G_2$  ne sont pas libres.

Lorsque  $G$  est un groupe de présentation finie, il est immédiat de vérifier que

$$\kappa(G * \mathbb{Z}) \leq \kappa(G) \quad (2)$$

Le fait de savoir s'il y a égalité ou non dans l'inégalité précédente est un problème crucial et ouvert.

**Conjecture.** *Pour tout groupe  $G$  de présentation finie on a  $\kappa(G * \mathbb{Z}) = \kappa(G)$ .*

Pour pouvoir envisager des problèmes de finitude de l'ensemble des classes d'isomorphismes des groupes de présentation finie de complexité simpliciale majorée, d'après (2), on est amené à ne considérer que des groupes sans facteurs libres  $\mathbb{Z}$ . Précisons cette notion. Pour tout groupe  $G$  de présentation finie il existe un unique entier  $n$  et un unique sous-groupe  $H$  (à conjugaison près) tel que  $G$  se décompose selon le produit libre

$$G = H * F_n \quad (3)$$

où  $F_n$  est le groupe libre d'indice  $n$  et  $H$  ne peut se décomposer à son tour comme en (3) (voir [Kur60, §35]). Cet entier  $n$  est appelé *l'indice libre* de  $G$ .

On dispose alors du résultat de finitude suivant (voir [BBB15]). Soit  $T$  un réel positif. On note  $\mathcal{G}_\kappa(T)$  l'ensemble des classes d'isomorphismes des groupes de présentation finie d'indice libre 0 tels que  $\kappa(G) \leq T$ . On note encore  $\mathcal{A}_\kappa(T)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{G}_\kappa(T)$  correspondant aux groupes abéliens finis. On a alors :

$$\left\lfloor 2^{\frac{T-3}{14}} \right\rfloor \leq |\mathcal{A}_\kappa(T)| \leq |\mathcal{G}_\kappa(T)| \leq 2^{6T \log_2 T}, \quad (4)$$

où  $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière de  $x$ .

La notion de complexité simpliciale est intimement liée à une notion géométrique, l'aire systolique d'un groupe, introduite dans [Gro83].

Lorsque  $X$  est un complexe de dimension 2 muni d'une métrique riemannienne  $g$  lisse par morceaux, on peut correctement définir la longueur des courbes dans  $X$  ainsi que son aire. On désigne alors par  $\text{sys}(X, g)$  la longueur du plus petit lacet non contractile dans  $X$ . Lorsque  $\pi_1(X)$  n'est pas trivial, on pose :

$$\sigma(X) = \inf_g \frac{\text{aire}(X, g)}{\text{sys}(X, g)^2},$$

où l'infimum est pris sur toutes les métriques riemanniennes  $g$  lisses par morceaux. L'aire systolique d'un groupe de présentation finie est alors :

$$\sigma(G) = \inf_X \sigma(X),$$

l'infimum étant pris sur tous les complexes de dimension 2 tels que  $\pi_1(X) = G$ .

L'aire systolique d'un groupe libre est nulle. Pour un groupe  $G$  de présentation finie, non libre, on a (voir [RS08]) :

$$\sigma(G) \geq \frac{\pi}{16}.$$

De la même manière que pour la complexité simpliciale, on a :

$$\sigma(G * \mathbb{Z}) \leq \sigma(G).$$

Il est démontré dans [BBB15] que, pour un groupe de présentation finie d'indice libre 0, on a :

$$2\pi\sigma(G) \leq \kappa(G) \leq C\sigma(G)^{1 + \frac{C'}{\sqrt{\log_2(\sigma(G))}}},$$

où  $C$  et  $C'$  sont deux constantes explicites.

Cette relation permet, avec (4), d'obtenir un résultat de finitude sur l'aire systolique des groupes (voir [BBB15]) : si  $\mathcal{G}_\sigma(T)$  est l'ensemble des classes d'isomorphismes des groupes de présentation finie d'indice libre 0 tels que  $\sigma(G) \leq T$ , et si  $\mathcal{A}_\sigma(T)$  est la partie de  $\mathcal{G}_\sigma(T)$  correspondant aux groupes abéliens finis, alors on a

$$\left\lfloor 2^{\frac{\pi}{1+2\sqrt{3}}T} \right\rfloor \leq |\mathcal{A}_\sigma(T)| \leq |\mathcal{G}_\sigma(T)| \leq B^{1+\frac{B'}{\sqrt{\log T}}}, \quad (5)$$

où  $B$  et  $B'$  sont des constantes explicites.

On trouvera dans [BBB15] une étude plus approfondie de la notion de complexité simpliciale, ainsi que ses rapports avec d'autres notions de complexité pour les groupes de présentation finie que sont le  $T$ -invariant de Delzant (voir [Del96]) et la  $c$ -complexité de Matveev et Pervova (voir [PP08]).

On va montrer dans ce texte le résultat suivant.

**Théorème.** *Le tableau suivant, où  $K_2$  désigne le groupe fondamental de la bouteille de Klein, donne la liste de tous les groupes de présentation finie d'indice libre 0 de complexité simpliciale inférieure à 16.*

Groupe	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$K_2$
Complexité	10(*)	14(*)	16

L'unicité d'un complexe minimal est signifié par (\*) dans le tableau.

Le complexe minimal de  $\mathbb{Z}_2$  est donné par la triangulation minimale du plan projectif (voir figure 1), qui n'est autre que celle obtenue à partir d'un icosaèdre quotienté par la symétrie centrale.

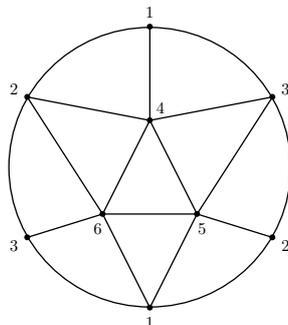
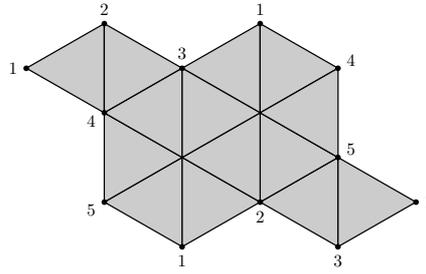


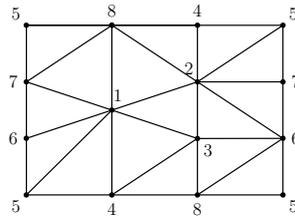
FIGURE 1. Le complexe minimal pour  $\mathbb{Z}_2$ .

Dans cet exemple, et les suivants, les triangulations minimales des surfaces compactes, c'est à dire les triangulations qui comportent le moins de simplexes de dimension 2, jouent un rôle important. Il existe d'autres triangulations remarquables des surfaces telles que les triangulations irréductibles, c'est à dire localement minimales (voir [Bar82] pour le plan projectif et [Sul06] pour la bouteille de Klein)

Le complexe minimal pour  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  est donné par la triangulation minimale du tore (voir figure 2).

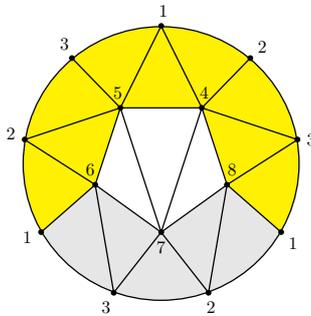
FIGURE 2. Le complexe minimal pour  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

Pour  $K_2$  (le groupe fondamental de la bouteille de Klein), il y a exactement six complexes minimaux (voir [Sul06]), tous issus de triangulations minimales de la bouteilles de Klein, dont l'un est donné par la figure 3.

FIGURE 3. Un complexe minimal pour  $K_2$ .

**Corollaire.** On a  $\kappa(\mathbb{Z}_3) = 17$ .

En effet, le complexe donné par la figure 4 est constituée de 17 triangle et a pour groupe fondamental  $\mathbb{Z}_3$ . On peut noter que des flips sont possibles : il y a d'autres complexes minimaux.

FIGURE 4. Un complexe minimal pour  $\mathbb{Z}_3$ .

Soit  $S_h$  la surface orientable de genre  $h$ . Désignons par  $\pi_h$  son groupe fondamental et par  $\tau(S_h)$  le nombre de simplexes de dimension 2 d'une triangulation minimale de  $S_h$ . D'après [JR80], on a  $\tau(S_2) = 24$  et, pour  $h \neq 2$  :

$$\tau(S_h) = 2 \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(S_h)}}{2} \right\rceil - 2\chi(S_h), \quad (6)$$

où  $\lceil x \rceil$  désigne le plus petit entier supérieur à  $x$ . On a alors :

$$\kappa(\pi_h) \leq \tau(S_h) \quad (7)$$

Le tableau du théorème 1 nous dit qu'il y a égalité dans (7) pour  $\pi_h = \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

Lorsque  $N_h$  est la surface non orientable de genre  $h$ ,  $\tau(N_h)$  est encore donné par (6), excepté pour  $N_2$  (la bouteille de Klein) et  $N_3$  pour lesquelles on a :  $\tau(N_2) = 16$  et  $\tau(N_3) = 20$  (voir [Rin55]). En désignant par  $K_h$  le groupe fondamental de  $N_h$ , on a donc  $\tau(N_2) = \kappa(K_2)$ .

**Conjecture naturelle.**  $\kappa(\pi_h) = \tau(S_h)$  et  $\kappa(K_h) = \tau(N_h)$ .

**Procédure de la démonstration.** On va d'abord s'intéresser aux propriétés des complexes minimaux, puis cataloguer tous les complexes simpliciaux de moins de 16 triangles qui possèdent ces propriétés.

## 2. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES COMPLEXES MINIMAUX

Soit  $G$  un groupe de présentation finie et  $P$  un complexe minimal pour  $G$ . On parlera de *triangle* à la place de simplexe de dimension 2.

**Assertion 1.** *Une arête de  $P$  incidente à un triangle est nécessairement incidente à deux triangles.*

En effet dans le cas contraire, on peut déformer cette arête sur les deux autres côtés du triangle adjacent sans modifier le groupe fondamental, ce qui a pour effet de diminuer le nombre de triangles de  $P$ .

Dans la suite, une arête d'un complexe sera dite *libre* lorsqu'elle est incidente à strictement moins de 2 triangles.

**Assertion 2.** *Un sommet de  $P$  incident à un triangle est incident à 4 triangles au moins : il est donc au moins de valence 4.*

En effet, soit  $p$  un tel sommet. En vertu de l'assertion 1, l'étoile du sommet  $p$  contient au moins trois triangles. Dans le cas où l'étoile du sommet  $p$  contient exactement trois triangles, elle est nécessairement de la forme donnée par la figure 5.

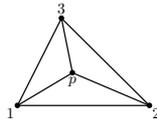


FIGURE 5. L'étoile d'un sommet ne peut avoir cette forme.

En supprimant l'étoile de  $p$  et en rajoutant si nécessaire le triangle 123, on obtient alors un nouveau complexe de même groupe fondamental, qui possède moins de triangles que  $P$ , contredisant ainsi le caractère minimal de  $P$ .

On peut noter que cette assertion est optimale : le groupe fondamental de la bouteille de Klein admet un complexe minimal dont l'étoile d'un sommet contient quatre triangles (voir 6)

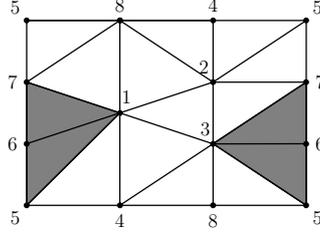


FIGURE 6. Un complexe minimal pour  $K_2$ , avec une étoile à quatre triangles (sommet 6).

*Remarque.* Lorsque  $G$  est d'indice libre 0, tout sommet d'un complexe minimal pour  $G$  est donc incident à quatre triangles au moins.

**Assertion 3.** Soient un complexe  $\mathcal{P}$  et un sommet, noté 1, de  $\mathcal{P}$ . On suppose que l'étoile du sommet 1 contient les triangles 123, 134, 142 et que l'arête 12 n'est incluse dans aucun autre triangle (voir figure 7). Le complexe  $\mathcal{P}$  n'est pas minimal.

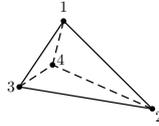


FIGURE 7. Partie de l'étoile du sommet 1.

En effet, on considère le nouveau complexe  $\mathcal{Q}$  obtenu en supprimant les triangles 124 et 134 et en rajoutant si besoin le triangle 234 (voir figure 8). Ce complexe  $\mathcal{Q}$  a même groupe fondamental que  $\mathcal{P}$  et contient strictement moins de triangles.

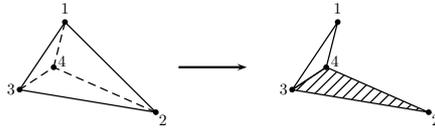


FIGURE 8. Obtenir un complexe avec moins de triangles.

**Corollaire.** Si l'étoile d'un sommet d'un complexe minimal est constituée de 4 ou 5 triangles, alors cette étoile est « planaire » i.e. homéomorphe à une boule de  $\mathbb{R}^2$ .

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

On va donc cataloguer tous les complexes de moins de 16 triangles qui possèdent les propriétés des complexes minimaux de groupes sans facteurs libres  $\mathbb{Z}$ . Le cas des triangulations minimales des surfaces compactes étant connu, on ne va regarder que les complexes minimaux éventuels que l'on peut construire qui contiennent au moins un sommet dont l'étoile n'est pas planaire.

Des considérations combinatoires élémentaires montrent qu'il ne peut y avoir de complexe minimal de moins de 16 triangles dont un sommet possède une étoile constituée de plus de 9 triangles. On va donc partir d'un sommet 1 dont l'étoile comporte  $n = 6, 7, 8$  triangles et regarder comment compléter cette étoile afin d'obtenir un complexe de moins de 16 triangles éventuellement minimal. Selon l'étoile du sommet 1, on regardera alors les configurations possibles pour l'étoile d'un sommet 2 adjacent au sommet 1, en se restreignant à un nombre de triangles  $n_2 \leq n$ , et ainsi de suite.

Je présenterai tous les cas possibles lors de ces constructions, mais afin de limiter la taille du présent texte, je ne traiterai en détail ici que certaines configurations qui illustrent le procédé de démonstration.

**3.1. A partir d'un sommet dont l'étoile contient 6 triangles.** Cataloguons, dans un premier temps les formes possibles pour une étoile du sommet six triangles d'un sommet d'un complexe minimal.

Supposons que l'étoile du sommet 1 est donnée par les triangles 123, 134, 142, 156, 167, 172 : on peut alors se ramener à un complexe de même groupe fondamental et comportant moins de triangles (voir figure 9).

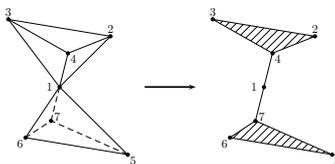


FIGURE 9. Une forme d'étoile écartée.

L'assertion 3 permet d'ailleurs d'éliminer cette configuration.

Notons aussi que si l'étoile du sommet 1 est données par les triangles 123, 134, 145, 152, 124 et 135 (voir figure 10), il est possible d'obtenir une étoile comportant moins de sommets (voir figure 11).

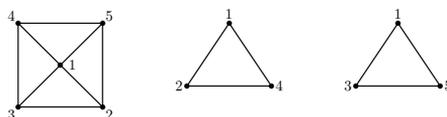


FIGURE 10. Un forme d'étoile impossible.

Il nous reste alors deux configurations acceptables pour une étoile à six triangles d'un complexe minimal.

- **Configuration 6-1.** L'étoile du sommet 1 est planaire (voir figure 12).
- **Configuration 6-2.** L'étoile du sommet 1 est constituée des triangles 123, 134, 145, 152, 126 et 164 (voir figure 13).

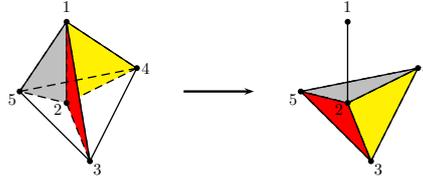


FIGURE 11. Réduction.

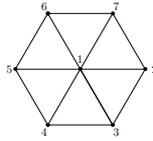


FIGURE 12. Étoile à six triangles, configuration 6-1.

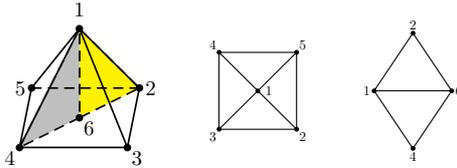


FIGURE 13. Étoile à six triangles, configuration 6-2.

**1.** On part d'un sommet 1 dont l'étoile est constituée des triangles 123, 134, 145, 152, 126 et 146 (c'est la configuration 6-2, voir figure 13). L'étoile du sommet 2 contient trois triangles et trois arêtes libres qui sont 23, 25 et 26. Elle est constituée de donc plus de 5 triangles. Dans le cas où elle est constituée de 5 triangles, si on veut un complexe minimal, cette étoile doit être planaire. Or l'étoile du sommet 2 n'est pas planaire : elle est constituée de donc 6 triangles. Les possibilités sont les suivantes.

**1.1.** On rajoute les triangles 234, 246 et 245. L'étoile du sommet 3 contient alors les triangles 123, 134, 234 et l'arête 13 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3 on n'obtiendra pas un complexe minimal.

**1.2.** On rajoute les triangles 235, 236 et 256. L'étoile du sommet 3 contient déjà 4 triangles et trois arêtes libres. Elle doit contenir 6 triangles et n'est pas planaire. On doit rajouter les triangles 345 et 346. Il reste une arête libre qui est 56. L'étoile du sommet 4 contient déjà 5 triangles. Comme elle n'est pas planaire, elle doit être constituée de 6 triangles. La seule possibilité est d'ajouter le triangle 456. On obtient un complexe de 12 triangles avec le type d'homotopie d'un bouquet de trois sphères.

**1.3.** On rajoute un sommet supplémentaire 7 et les triangles 237, 276 et 257.

**1.3.1.** L'étoile du sommet 3 est constituée de 4 triangles. On doit rajouter le triangle 347. L'étoile du sommet 4 contient alors 4 triangles et trois arêtes libres qui sont les arêtes 45, 46 et 47. L'étoile du sommet 5 est constituée de donc 6 triangles. On doit rajouter les triangles 456 et 457.

1.3.1.1. L'étoile du sommet 6 est constituée de 5 triangles. On doit rajouter le triangle 567. On obtient un complexe de 13 triangle qui a le type d'homotopie d'un bouquet de deux sphères (voir figure 14)

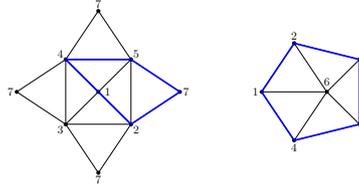


FIGURE 14. Un disque recollé à une sphère.

1.3.1.2. L'étoile du sommet 6 est constituée de 6 triangles. On doit rajouter un sommet 8 et les triangles 678 et 568. Dans ce cas, l'étoile du sommet 7 est constituée de plus de 7 triangles. Ce cas est écarté.

**1.3.2.** L'étoile du sommet 3 est constituée de 5 triangles. Les possibilités sont les suivantes.

1.3.2.1. On rajoute les triangles 345 et 357. L'étoile du sommet 4 ne peut pas être celle d'un complexe minimal.

1.3.2.2. On rajoute les triangles 346 et 367. L'étoile du sommet 4 ne peut pas être celle d'un complexe minimal.

1.3.2.3. On rajoute un sommet 8 et les triangles 348 et 387. L'étoile du sommet 4 contient alors 4 triangles, trois arêtes libres et n'est pas planaire : elle doit est constituée der 6 triangles. On doit rajouter les triangles 456 et 468. L'étoile du sommet 6 contient alors 5 triangles et 3 arêtes libres : ce cas est écarté.

**1.3.3.** L'étoile du sommet 3 est constituée de 6 triangles. On ne peut pas rajouter les triangles 345 ou 346 : l'étoile du sommet 4 ne serait pas celle d'un complexe minimal. Les sommets 1 et 2 étant saturés, cette étoile est planaire.

1.3.3.1. On rajoute un nouveau sommet 8 ainsi que les triangles 348, 358 et 357. L'étoile du sommet 4 doit est constituée der 6 triangles. On doit rajouter les triangles 458 et 468. Mais alors l'étoile du sommet 8 ne peut être celle d'un complexe minimal.

1.3.3.2. On rajoute un nouveau sommet 8 ainsi que les triangles 348, 368 et 367. On doit encore rajouter les triangles 458 et 468 et l'étoile du sommet 8 ne peut toujours pas être celle d'un complexe minimal.

1.3.3.3. On rajoute deux nouveaux sommets 8 et 9, ainsi que les triangles 348, 389 et 397. On doit encore rajouter les triangles 458 et 468. On a alors un total de 14 triangles.

1.3.3.3.1. L'étoile du sommet 5 est constituée de 5 triangles. On doit rajouter le triangle 578. Mais les arêtes 67, 68, 78, 79 et 89 sont libres : on ne pourra pas obtenir un complexe minimal de moins de 16 triangles.

1.3.3.3.2. L'étoile du sommet 5 est constituée de 6 triangles. Il faut alors utiliser toutes les arêtes libres ne contenant pas le sommet 5 (au nombre de 4) dans les trois nouveaux triangles de sommet 5 : ce n'est pas possible.  $\square$

**3.2. A partir d'un sommet dont l'étoile contient 7 triangles.** On va dans cette partie analyser les complexes minimaux que l'on peut construire en partant d'un sommet 1 dont l'étoile est constituée d'exactly 7 triangles, et en complétant avec des sommets dont l'étoile est constituée d'un nombre de triangles inférieur à

7. Les configurations possibles, pour une étoile constituée de sept triangles dans un complexe minimal, sont les suivantes.

- **Configuration 7-1.** L'étoile du sommet 1 est planaire (voir figure 15).

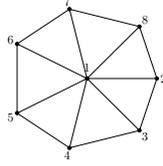


FIGURE 15. Étoile à sept triangles, configuration 7-1.

- **Configuration 7-2.** L'étoile du sommet 1 est constituée des triangles 123, 134, 145, 156, 167, 172 et 125 (voir figure 16).

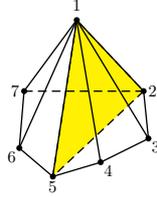


FIGURE 16. Étoile à sept triangles, configuration 7-2.

- **Configuration 7-3.** L'étoile du sommet 1 est constituée des triangles 123, 134, 145, 156, 162, 127 et 147 (voir figure 17).

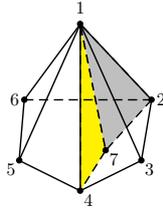


FIGURE 17. Étoile à sept triangles, configuration 7-3.

Les configurations analogues à celles de la figure 9 sont écartées. L'assertion 3 permet aussi d'éliminer de nombreux cas. Par exemple, lorsque l'étoile du sommet 1 est constituée des triangles 123, 124, 126, 134, 135, 146 et 146 (voir figure 18). Cette étoile contient les triangles 126, 146, 124 et l'arête 16 n'est adjacente à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, ce ne peut pas être l'étoile d'un complexe minimal. Notons aussi que l'on peut « réduire » certaines étoiles. Par exemple, lorsque l'étoile du sommet 1 est constituée des triangles 123, 134, 145, 152, 126, 136 et 146, on peut « réduire » cette étoile sans changer le groupe fondamental du complexe (voir figure 19).

2. L'étoile du sommet 1 est dans la configuration 7-2, c'est à dire constituée des triangles 123, 134, 145, 156, 167, 172 et 125 (voir figure 20). L'étoile du sommet 2

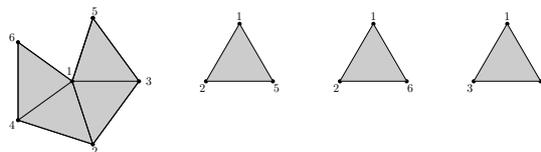


FIGURE 18. Étoile à sept triangles, une configuration écartée.

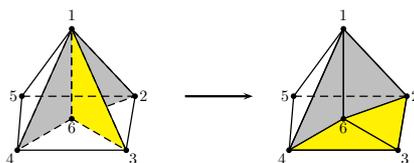


FIGURE 19. Une étoile à sept triangles, réduction.

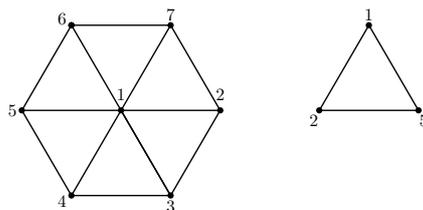


FIGURE 20. Étoile à 7 triangles : configuration 7-2.

n'est pas planaire : elle est constituée de 6 triangles au moins.

**2.1.** L'étoile du sommet 2 est constituée de 6 triangle. Seule la configuration 6-2 est à envisager. Les possibilités sont les suivantes.

**2.1.1.** On rajoute les triangles 234, 245, 247. L'étoile du sommet 3 contient alors les triangles 123, 134, 234 et l'arête 13 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

**2.1.2.** On rajoute les triangles 236, 256, 267. L'étoile du sommet 7 contient alors les triangles 127, 167, 267 et l'arête 17 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

**2.1.3.** On rajoute un sommet supplémentaire 8 ainsi que les triangles 238, 258 et 278. L'étoile du sommet 5 n'est pas planaire : elle est constituée d'au moins 6 triangles.

2.1.3.1. L'étoile du sommet 5 est constituée de 6 triangles. Seule la configuration 6-2 est acceptable. On doit rajouter les triangles 458 et 568. Cela revient à recoller un disque (constitué des triangles 125 et 258) à un complexe comportant moins de triangles. Ce cas est écarté.

2.1.3.2. L'étoile du sommet 5 est constituée de 7 triangles. Ce cas est en fait compris dans celui où l'étoile du sommet 3 est constituée de 7 triangles (en permutant le nom des sommets 2 et 5).

**2.2.** L'étoile du sommet 2 est constituée de 7 triangles. Comme cette étoile n'est pas planaire, il y a deux configurations à envisager : les configurations 7-2 et 7-3.

**2.2.1.** L'étoile du sommet 2 est dans la configuration 7-2. Il y a (en éliminant un cas symétrique) deux cas à traiter.

**2.2.1.1. Cas 1.** L'étoile du sommet 2 est donnée par la configuration de la figure 21. Cela revient à recoller le disque constitué du triangle 125 à une

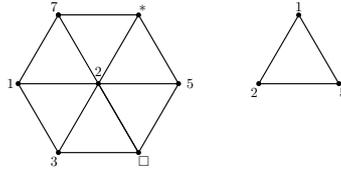


FIGURE 21. Étoile du sommet 2 en configuration 7-2, cas 1.

configuration comportant moins de triangle : ce cas est rejeté.

**2.2.1.2. Cas 2.** L'étoile du sommet 2 est donnée par la configuration de la figure 22. Les possibilités sont les suivantes.

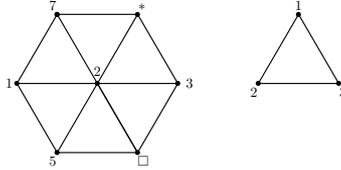


FIGURE 22. Étoile du sommet 2 en configuration 7-2, cas 2.

**2.2.1.2.1.** On rajoute les triangles 245, 234, 236 et 267. L'étoile du sommet 3 contient alors les triangles 123, 124, 234 et l'arête 13 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

**2.2.1.2.2.** On rajoute un sommet supplémentaire 8 ainsi que les triangles 245, 234, 238 et 278. L'étoile du sommet 3 contient alors les triangles 123, 124, 234 et l'arête 13 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

**2.2.1.2.3.** On rajoute les triangles 256, 236, 234 et 247. L'étoile du sommet 3 contient alors les triangles 123, 124, 234 et l'arête 13 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

**2.2.1.2.4.** On rajoute un sommet supplémentaire 8 ainsi que les triangles 256, 236, 238 et 278. L'étoile du sommet 5 contient alors les triangles 125, 156, 256 et l'arête 25 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

**2.2.1.2.5.** On rajoute un sommet supplémentaire 8 ainsi que les triangles 258, 238, 234 et 247. L'étoile du sommet 3 contient alors les triangles

123, 124, 234 et l'arête 13 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

2.2.1.2.6. On rajoute un sommet supplémentaire 8 ainsi que les triangles 258, 238, 236 et 267. L'étoile du sommet 7 contient alors les triangles 127, 167, 267 et l'arête 17 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

2.2.1.2.7. On rajoute deux sommets supplémentaires 8 et 9, ainsi que les triangles 258, 238, 239 et 279. L'étoile du sommet 5 n'est pas planaire : elle est constituée de 6 triangles au moins.

2.2.1.2.7.1. L'étoile du sommet 5 est constituée de 6 triangles. On doit rajouter les triangles 458 et 658. On a alors 13 triangles. L'étoile du sommet 8 n'est pas planaire et contient 4 triangles : elle doit être constituée de 6 triangles au moins. Mais la configuration 6-2 est impossible pour l'étoile du sommet 8 : elle est donc constituée de 7 triangles. Or il y a 4 arêtes libres qui ne contiennent pas le sommet 8 : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre.

2.2.1.2.7.2. L'étoile du sommet 5 est constituée de 7 triangles.

2.2.1.2.7.2.1. Pour la configuration 7-2, les possibilités sont les suivantes.

2.2.1.2.7.2.1.1. On rajoute les triangles 345, 356 et 568. L'étoile du sommet 4 contient alors les triangles 134, 145, 345 et l'arête 14 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

2.2.1.2.7.2.1.2. On rajoute les triangles 457, 567 et 568. L'étoile du sommet 5 contient alors les triangles 156, 167, 567 et l'arête 16 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

2.2.1.2.7.2.1.3. On rajoute les triangles 459, 569 et 568. Il y a alors 14 triangles et 8 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de 16 triangles sans arête libre.

2.2.1.2.7.2.1.4. On rajoute un sommet supplémentaire Q ainsi que les triangles 45Q, 56Q et 568. Il y a alors 14 triangles et 8 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de 16 triangles sans arête libre.

2.2.1.2.7.2.1.5. On rajoute les triangles 356, 345 et 458. L'étoile du sommet 4 contient alors les triangles 134, 145, 345 et l'arête 14 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

2.2.1.2.7.2.1.6. On rajoute les triangles 567, 457 et 458. L'étoile du sommet 5 contient alors les triangles 156, 167, 567 et l'arête 16 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

2.2.1.2.7.2.1.7. On rajoute les triangles 569, 459 et 458. Il y a alors 14 triangles et 8 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de 16 triangles sans arête libre.

2.2.1.2.7.2.1.8. On rajoute un sommet supplémentaire Q ainsi que les triangles 56Q, 45Q et 458. Il y a alors 14 triangles et 8 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de 16 triangles sans arête libre.

2.2.1.2.7.2.2. Pour la configuration 7-3, les possibilités sont les suivantes.

2.2.1.2.7.2.2.1. On rajoute les triangles 458, 358 et 356. L'étoile du sommet 8 contient alors les triangles 238, 258, 358 et l'arête 28 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

2.2.1.2.7.2.2.2. On rajoute les triangles 458, 578 et 567. L'étoile du sommet 5 contient alors les triangles 156, 167, 567 et l'arête 16 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

2.2.1.2.7.2.2.3. On rajoute les triangles 458, 589 et 569. Il y a alors 14 triangles et 8 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de 16 triangles sans arête libre.

2.2.1.2.7.2.2.4. On rajoute un sommet supplémentaire Q ainsi que les triangles 458, 57Q et 67Q. Il y a alors 14 triangles et 8 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de 16 triangles sans arête libre.

2.2.1.2.7.2.2.5. On rajoute les triangles 345, 358 et 356. L'étoile du sommet 4 contient alors les triangles 134, 145, 345 et l'arête 14 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

2.2.1.2.7.2.2.6. On rajoute les triangles 457, 578 et 567. L'étoile du sommet 5 contient alors les triangles 156, 167, 567 et l'arête 16 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

2.2.1.2.7.2.2.7. On rajoute les triangles 459, 589 et 569. Il y a alors 14 triangles et 8 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de 16 triangles sans arête libre.

2.2.1.2.7.2.2.8. On rajoute un sommet supplémentaire Q ainsi que les triangles 45Q, 58Q et 56Q. Il y a alors 14 triangles et 8 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de 16 triangles sans arête libre.

2.2.1.2.7.2.2.9. On rajoute les triangles 568, 358 et 356. L'étoile du sommet 8 contient alors les triangles 238, 258, 358 et l'arête 28 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

2.2.1.2.7.2.2.10. On rajoute les triangles 568, 578 et 567. L'étoile du sommet 5 contient alors les triangles 156, 167, 567 et l'arête 16 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

2.2.1.2.7.2.2.11. On rajoute les triangles 568, 589 et 569. Il y a alors 14 triangles et 8 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de 16 triangles sans arête libre.

2.2.1.2.7.2.2.12. On rajoute un sommet supplémentaire Q ainsi que les triangles 458, 57Q et 67Q. Il y a alors 14 triangles et 8 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de 16 triangles sans arête libre.

**2.2.2.** L'étoile du sommet 2 est dans la configuration 7-3. Il y a (en éliminant un cas symétrique) deux cas à traiter.

2.2.2.1. **Cas 1.** L'étoile du sommet 2 est donnée par la configuration de la figure 23. Les possibilités, en prenant le triangle  $25\Box$ , sont les suivantes (le cas avec le triangle  $25^*$  se traite de manière analogue et ne conduit pas à un complexe minimal de moins de 16 sommets).

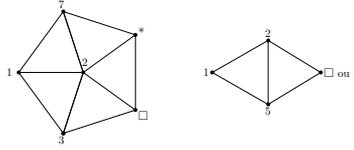


FIGURE 23. Étoile du sommet 2 en configuration 7-3, cas 1.

2.2.2.1.1. On rajoute les triangles 234, 246, 267 et 245. L'étoile du sommet 3 contient les triangles 123, 134, 234 et l'arête 13 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3], on ne pourra pas obtenir un complexe minimal.

2.2.2.1.2. On rajoute un sommet supplémentaire 8 ainsi que les triangles 234, 248, 278 et 245. L'étoile du sommet 3 contient les triangles 123, 134, 234 et l'arête 13 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3], on ne pourra pas obtenir un complexe minimal.

2.2.2.1.3. On rajoute les triangles 236, 246, 247 et 256. Cela revient à coller un disque (constituée des triangles 125 et 256) le long de son bord à une configuration comportant moins de triangle. Ce cas est rejeté.

2.2.2.1.4. On rajoute un sommet supplémentaire 8 ainsi que les triangles 236, 268, 278 et 256. Cela revient à coller un disque (constituée des triangles 125 et 256) le long de son bord à une configuration comportant moins de triangles. Ce cas est rejeté.

2.2.2.1.5. On rajoute un sommet supplémentaire 8 ainsi que les triangles 238, 248, 247 et 258. L'étoile du sommet 5 n'est pas planaire : elle est constituée de 6 triangles au moins.

2.2.2.1.5.1. L'étoile du sommet 5 est constituée de 6 triangles. Seule la configuration 6-2 est possible. On doit rajouter les triangles 458 et 568. Cela revient à coller un disque (constituée des triangles 125 et 258) le long de son bord à une configuration comportant moins de triangles. Ce cas est rejeté.

2.2.2.1.5.2. L'étoile du sommet 5 est constituée de 7 triangles.

2.2.2.1.5.2.1. L'étoile du sommet 5 est en configuration 7-2. Les possibilités sont les suivantes.

2.2.2.1.5.2.1.1. On rajoute les triangles 458, 345 et 356. L'étoile du sommet 4 contient alors les triangles 134, 145, 345 et l'arête 14 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir un complexe minimal.

2.2.2.1.5.2.1.2. On rajoute les triangles 458, 457 et 567. L'étoile du sommet 6 contient alors les triangles 156, 167, 567 et l'arête 16 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir un complexe minimal.

2.2.2.1.5.2.1.3. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 458, 459 et 569. Cela revient à recoller un disque (constitué des triangles 125, 258 et 458) le long de son bord à une configuration comportant moins de triangles. Ce cas est rejeté.

2.2.2.1.5.2.2. L'étoile du sommet 5 est en configuration 7-3. Les possibilités sont les suivantes.

2.2.2.1.5.2.2.1. On rajoute les triangles 458, 358 et 356. Cela revient à coller un disque (constituée des triangles 125 et 258)

le long de son bord à une configuration comportant moins de triangles. Ce cas est rejeté.

2.2.2.1.5.2.2.2. On rajoute les triangles 458, 578 et 567. Cela revient à coller un disque (constituée des triangles 125 et 258) le long de son bord à une configuration comportant moins de triangles. Ce cas est rejeté.

2.2.2.1.5.2.2.3. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 458, 389 et 379. Cela revient à coller un disque (constituée des triangles 125 et 258) le long de son bord à une configuration comportant moins de triangles. Ce cas est rejeté.

2.2.2.1.5.2.2.4. On rajoute les triangles 345, 358 et 568. Cela revient à coller un disque (constituée des triangles 125 et 258) le long de son bord à une configuration comportant moins de triangles. Ce cas est rejeté.

2.2.2.1.5.2.2.5. On rajoute les triangles 457, 578 et 568. Cela revient à coller un disque (constituée des triangles 125 et 258) le long de son bord à une configuration comportant moins de triangles. Ce cas est rejeté.

2.2.2.1.5.2.2.6. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 459, 489 et 568. Cela revient à coller un disque (constituée des triangles 125 et 258) le long de son bord à une configuration comportant moins de triangles. Ce cas est rejeté.

2.2.2.1.6. On rajoute un sommet supplémentaire 8 ainsi que les triangles 234, 268, 267 et 258. L'étoile du sommet 7 contient alors les triangles 127, 167, 267 et l'arête 17 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir un complexe minimal.

2.2.2.1.7. On rajoute deux sommets supplémentaires 8 et Q, ainsi que les triangles 238, 28Q, 27Q et 258. L'étoile du sommet 5 n'est pas planaire : elle est constituée de 6 triangles au moins.

2.2.2.1.7.1. L'étoile du sommet 5 est constituée de 6 triangles. Seule la configuration 6-2 est possible. On doit rajouter les triangles 458 et 568. Cela revient à coller un disque (constituée des triangles 125 et 258) le long de son bord à une configuration comportant moins de triangles. Ce cas est rejeté.

2.2.2.1.7.2. L'étoile du sommet 5 est constituée de 7 triangles.

2.2.2.1.7.2.1. L'étoile du sommet 5 est en configuration 7-2. Les possibilités sont les suivantes.

2.2.2.1.7.2.1.1. On rajoute les triangles 458, 345 et 356. L'étoile du sommet 4 contient alors les triangles 134, 145, 345 et l'arête 14 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir un complexe minimal.

2.2.2.1.7.2.1.2. On rajoute les triangles 458, 457 et 567. L'étoile du sommet 6 contient alors les triangles 156, 167, 567 et l'arête 16 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir un complexe minimal.

2.2.2.1.7.2.1.3. On rajoute les triangles 458, 45Q et 56Q. Cela revient à recoller le disque constitué des triangles 125 et 258 à une configuration comportant moins de triangles. Ce cas est rejeté.

2.2.2.1.7.2.1.4. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 458, 459 et 569. Cela revient à recoller un disque (constitué des triangles 125, 258 et 458) le long de son bord

à une configuration comportant moins de triangles. Ce cas est rejeté.

2.2.2.1.7.2.1.5. On rajoute les triangles 345, 356 et 568. L'étoile du sommet 4 contient alors les triangles 134, 145, 345 et l'arête 14 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir un complexe minimal.

2.2.2.1.7.2.1.6. On rajoute les triangles 457, 567 et 568. L'étoile du sommet 6 contient alors les triangles 156, 167, 567 et l'arête 16 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir un complexe minimal.

2.2.2.1.7.2.1.7. On rajoute les triangles 45Q, 56Q et 568. Il y a alors 14 triangles et 8 arêtes libres : on ne peut pas obtenir un complexe de 16 triangles sans arête libre.

2.2.2.1.7.2.1.8. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 459, 569 et 568. Il y a alors 14 triangles et 8 arêtes libres : on ne peut pas obtenir un complexe de 16 triangles sans arête libre.

2.2.2.1.7.2.2. L'étoile du sommet 5 est en configuration 7-3. Toutes les possibilités conduisent à coller un disque (constituée des triangles 125 et 258) le long de son bord à une configuration comportant moins de triangles. Ce cas est rejeté.

2.2.2.2. **Cas 2.** L'étoile du sommet 2 est donnée par la configuration de la figure 24. Ce cas se traite de la même manière que le précédent et ne

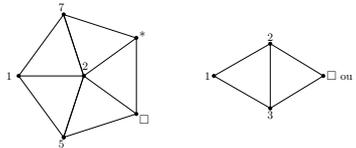


FIGURE 24. Étoile du sommet 2 en configuration 7-3, cas 2.

conduit pas à un complexe minimal.

**3.** L'étoile du sommet 1 est dans la configuration 7-3, c'est à dire est constituée des triangles 123, 134, 145, 156, 162, 127 et 147 (voir figure 25). Ce cas se traite de la

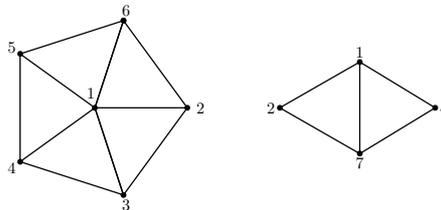


FIGURE 25. Étoile à 7 triangles : configuration 7-3.

même manière que le précédent.

**3.3. A partir d'un sommet dont l'étoile contient 8 triangles.** On part d'un sommet 1 dont l'étoile est constituée de 8 triangles : 123, 134, 145, 156, 167, 178, 189 et 192.

Les configurations possibles pour l'étoile d'un sommet constituée de 8 triangles dans un complexe minimal sont les suivantes.

**Configuration 8-1.** L'étoile du sommet 1 est planaire (voir figure 26)

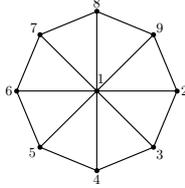


FIGURE 26. Etoile de huit triangles, configuration 8-1.

**Configuration 8-2.** L'étoile du sommet 1 est constituée des triangles 123, 134, 145, 156, 167, 178, 182 et 125 (voir figure 27)

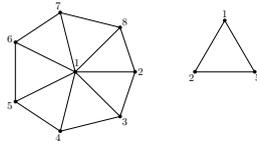


FIGURE 27. Etoile de huit triangles, configuration 8-2.

**Configuration 8-3.** L'étoile du sommet 1 est constituée des triangles 123, 134, 145, 156, 167, 172, 128 et 148 (voir figure 28)

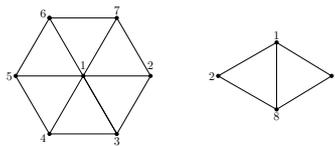


FIGURE 28. Etoile de huit triangles, configuration 8-3.

**Configuration 8-4.** L'étoile du sommet 1 est constituée des triangles 123, 134, 145, 156, 167, 172, 128 et 158 (voir figure 29)

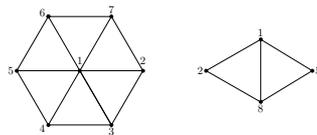


FIGURE 29. Etoile de huit triangles, configuration 8-4.

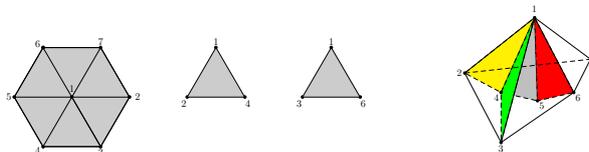


FIGURE 30. Etoile de huit triangles, configuration 8-5.

**Configuration 8-5.** L'étoile du sommet 1 est constituée des triangles 123, 134, 145, 156, 167, 172, 124 et 136 (voir figure 30) Mais on ne retiendra pas cette dernière configuration : en remplaçant le triangle 123 par le triangle 234, on ne change pas le groupe fondamental du complexe (ni le nombre de triangles du complexe), et on se ramène à une étoile du sommet 1 comportant moins de triangles.

Encore une fois, l'assertion 3 permet d'éliminer plusieurs cas. D'autres configurations d'étoile à 8 triangles ne sont pas possibles pour les complexes minimaux. C'est le cas par exemple lorsque l'étoile du sommet 1 est constituée des triangles 123, 134, 145, 156, 167, 172, 124 et 135 (voir figure ??), ou lorsque l'étoile du sommet 1 est constituée des triangles 123, 134, 145, 156, 162, 135, 124 et 146 (voir figure 32).

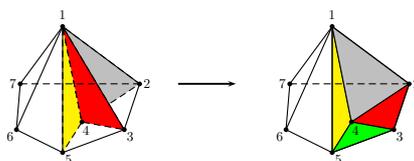


FIGURE 31. Etoile de huit triangles, réduction.

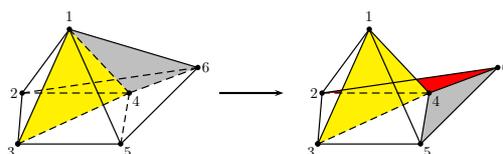


FIGURE 32. Etoile de huit triangles, réduction.

On va maintenant regarder les différents complexes que l'on peut construire qui possèdent les propriétés des complexes minimaux en partant d'une étoile donnée par les configurations 8-1 à 8-4. Comme on ne s'intéresse qu'à des complexes non planaires, il est inutile de considérer la configuration 8-1.

4. L'étoile du sommet 8 est dans la configuration 8-2, c'est à dire constituée des triangles 123, 134, 145, 156, 167, 178 et 125 (voir figure 33). L'étoile du sommet 2 n'est pas planaire : elle comporte au moins 6 triangles.

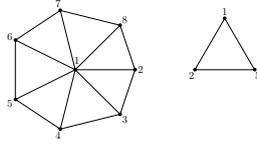


FIGURE 33. L'étoile du sommet 1.

**4.1.** L'étoile du sommet 2 est constituée de 6 triangles. La seule configuration possible est la 6-2 (voir page 8).

**4.1.1.** On rajoute les triangles 234, 245 et 248. Selon l'assertion 3, l'étoile du sommet 3 ne peut être celle d'un complexe minimal.

**4.1.2.** On rajoute les triangles 236, 265 et 268. Selon l'assertion 3, l'étoile du sommet 5 ne peut être celle d'un complexe minimal.

**4.1.3.** On rajoute les triangles 237, 275 et 278. Selon l'assertion 3, l'étoile du sommet 5 ne peut être celle d'un complexe minimal.

**4.1.4.** On rajoute un sommet supplémentaire et les triangles 239, 295 et 298. Selon l'assertion 3, l'étoile du sommet 5 ne peut être celle d'un complexe minimal.

**4.2.** L'étoile du sommet 2 est constituée de 7 triangles. Par symétrie, les cas à analyser sont les suivants.

**4.2.1.** L'étoile du sommet 2 est dans la configuration 7-2. Par symétrie, il y a deux cas à analyser.

**4.2.1.1. Cas 1.** La configuration de l'étoile du sommet 2 est donnée par la figure 34.

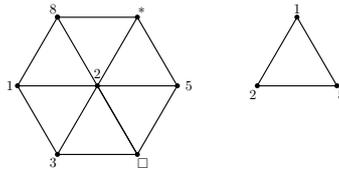


FIGURE 34. Étoile du sommet 2 en configuration 7-2, cas 1.

Cela revient à recoller le disque constituée du triangle 125 à un complexe comportant moins de triangles.

**4.2.1.2. Cas 2.** La configuration de l'étoile du sommet 2 est donnée par la figure 35.

**4.2.2.** L'étoile du sommet 2 est dans la configuration 7-3. Par symétrie, il y a deux cas à analyser.

**4.2.2.1. Cas 1.** La configuration de l'étoile du sommet 2 est donnée par la figure 36. Les possibilités sont les suivantes, en notant que, selon l'assertion 3, on ne peut pas rajouter le triangles 234. De même, rajouter le triangle 278 ne conduira pas à un complexe minimal.

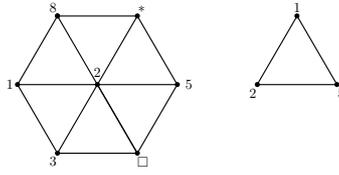


FIGURE 35. Étoile du sommet 2 en configuration 7-2, cas 2.

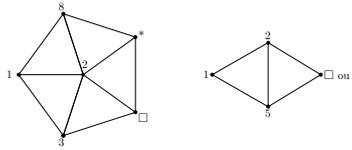


FIGURE 36. Étoile du sommet 2 en configuration 7-3, cas 1.

4.2.2.1.1. On rajoute les triangles 236, 246, 248 et 256. L'étoile du sommet 5 contient alors les triangles 125, 156, 256 et l'arête 25 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal selon l'assertion 3.

4.2.2.1.2. On rajoute les triangles 236, 246, 248 et 245. L'étoile du sommet 5 contient alors les triangles 125, 145, 245 et l'arête 25 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.2.2.1.3. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 236, 269, 289 et 256. L'étoile du sommet 5 contient alors les triangles 125, 145, 245 et l'arête 25 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.2.2.1.4. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 236, 269, 289 et 259. L'étoile du sommet 5 n'est pas planaire : elle est constituée d'au moins 6 triangles.

4.2.2.1.4.1. L'étoile du sommet 5 est constituée de 6 triangles. On doit rajouter les triangles 459 et 569. Il y a alors 17 triangles et 6 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de 16 triangles sans arête libre. On peut noter aussi que l'on recolle le disque constitué des triangles 125 et 259 à un complexe comportant moins de triangles.

4.2.2.1.4.2. L'étoile du sommet 5 est constituée de 7 triangles. Les possibilités sont les suivantes.

4.2.2.1.4.2.1. L'étoile du sommet 5 est dans la configuration 7-2.

4.2.2.1.4.2.1.1. On rajoute les triangles 356, 345 et 459. L'étoile du sommet 4 contient alors les triangles 134, 145, 345 et l'arête 14 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.2.2.1.4.2.1.2. On rajoute les triangles 567, 457 et 459. L'étoile du sommet 6 contient alors les triangles 156, 167, 567 et l'arête 16 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

- 4.2.2.1.4.2.1.3. On rajoute les triangles 568, 458 et 459. Il y a alors 15 triangles et 9 arêtes libres.
- 4.2.2.1.4.2.1.4. On rajoute un sommet supplémentaire  $Q$ , ainsi que les triangles 56 $Q$ , 45 $Q$  et 459. Il y a alors 15 triangles et 9 arêtes libres.
- 4.2.2.1.4.2.1.5. On rajoute les triangles 356, 345 et 569. L'étoile du sommet 4 contient alors les triangles 134, 145, 345 et l'arête 14 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.
- 4.2.2.1.4.2.1.6. On rajoute les triangles 567, 457 et 569. L'étoile du sommet 6 contient alors les triangles 156, 167, 567 et l'arête 16 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.
- 4.2.2.1.4.2.1.7. On rajoute les triangles 568, 458 et 569. Il y a alors 15 triangles et 7 arêtes libres.
- 4.2.2.1.4.2.1.8. On rajoute un sommet supplémentaire  $Q$ , ainsi que les triangles 56 $Q$ , 45 $Q$  et 569. Il y a alors 15 triangles et 7 arêtes libres.
- 4.2.2.1.4.2.2. L'étoile du sommet 5 est dans la configuration 7-3.
- 4.2.2.1.4.2.2.1. On rajoute les triangles 459, 359 et 356. Cela revient à recoller un disque (constitué des triangles 125 et 259) le long de son bord à un complexe qui contient moins de triangles.
- 4.2.2.1.4.2.2.2. On rajoute les triangles 459, 579 et 567. L'étoile du sommet 6 contient alors les triangles 156, 167, 567 et l'arête 16 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.
- 4.2.2.1.4.2.2.3. On rajoute les triangles 459, 589 et 568. Cela revient à recoller un disque (constitué des triangles 125 et 259) le long de son bord à un complexe qui contient moins de triangles.
- 4.2.2.1.4.2.2.4. On rajoute un sommet supplémentaire  $Q$ , ainsi que les triangles 459, 59 $Q$  et 46 $Q$ . Cela revient à recoller un disque (constitué des triangles 125 et 259) le long de son bord à un complexe qui contient moins de triangles.
- 4.2.2.1.4.2.2.5. On rajoute les triangles 569, 345 et 359. L'étoile du sommet 4 contient alors les triangles 134, 145, 345 et l'arête 14 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.
- 4.2.2.1.4.2.2.6. On rajoute les triangles 569, 457 et 579. Cela revient à recoller un disque (constitué des triangles 125 et 259) le long de son bord à un complexe qui contient moins de triangles.
- 4.2.2.1.4.2.2.7. On rajoute les triangles 569, 458 et 589. Cela revient à recoller un disque (constitué des triangles 125 et 259) le long de son bord à un complexe qui contient moins de triangles.
- 4.2.2.1.4.2.2.8. On rajoute un sommet supplémentaire  $Q$ , ainsi que les triangles 569, 45 $Q$  et 59 $Q$ . Cela revient à recoller un disque (constitué des triangles 125 et 259) le long de son bord à un complexe qui contient moins de triangles.

4.2.2.1.4.2.2.9. On rajoute les triangles 345, 356 et 359. L'étoile du sommet 4 contient alors les triangles 134, 145, 345 et l'arête 14 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.2.2.1.4.2.2.10. On rajoute les triangles 457, 567 et 579. L'étoile du sommet 4 contient alors les triangles 134, 145, 345 et l'arête 14 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.2.2.1.4.2.2.11. On rajoute les triangles 458, 568 et 589. Il y a alors 15 triangles et 7 arêtes libres.

4.2.2.1.4.2.2.12. On rajoute un sommet supplémentaire Q, ainsi que les triangles 45Q, 56Q et 59Q. Il y a alors 15 triangles et 9 arêtes libres.

4.2.2.1.4.3. L'étoile du sommet 5 est constituée de 8 triangles. Ce cas est « symétrique » du cas où l'étoile du sommet 1 est dans la configuration 8-2 et l'étoile du sommet 2 est constituée de 8 triangles.

4.2.2.1.5. On rajoute les triangles 237, 247, 248 et 257.

4.2.2.1.6. On rajoute les triangles 237, 247, 248 et 245. L'étoile du sommet 5 contient alors les triangles 125, 145, 245 et l'arête 25 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.2.2.1.7. On rajoute les triangles 237, 267, 268 et 257.

4.2.2.1.7.1. L'étoile du sommet 3 est constituée de 4 triangles. On doit rajouter le triangle 347. L'étoile du sommet 7 contient alors les triangles 237, 247, 347 et l'arête 37 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.2.2.1.7.2. L'étoile du sommet 3 est constituée de 5 triangles.

4.2.2.1.7.2.1. On rajoute les triangles 345 et 357. L'étoile du sommet 4 contient alors les triangles 134, 145, 345 et l'arête 14 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.2.2.1.7.2.2. On rajoute les triangles 346 et 367. Il y a alors 14 triangles et 7 arêtes libre : il est impossible d'obtenir un complexe de moins de 16 triangles sans arête libre.

4.2.2.1.7.2.3. On rajoute les triangles 348 et 378. Il y a alors 14 triangles et 5 arêtes libres (les arêtes 45, 47, 56, 57, 67). On doit rajouter les triangles 567 et 457. On a alors un complexe de 16 triangles sans arête libre, mais l'étoile du sommet 6 contient les triangles 156, 167, 567 et l'arête 16 n'est commune à aucun autre triangle : ce complexe n'est pas minimal.

4.2.2.1.7.2.4. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 349 et 379. Il y a alors 14 triangles et 9 arêtes libres.

4.2.2.1.7.3. L'étoile du sommet 3 est constituée de 6 triangles. Comme les sommets 1 et 2 sont saturés, elle est planaire. Les possibilités sont les suivantes (en excluant de rajouter le triangle 345).

4.2.2.1.7.3.1. On rajoute les triangles 346, 365 et 357. Il y a alors 15 triangles et 6 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.2.2.1.7.3.2. On rajoute les triangles 346, 368 et 378. Il y a alors 15 triangles et 8 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.2.2.1.7.3.3. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 346, 369 et 379. Il y a alors 15 triangles et 10 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.2.2.1.7.3.4. On rajoute les triangles 348, 358 et 357. Il y a alors 15 triangles et 6 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.2.2.1.7.3.5. On rajoute les triangles 348, 368 et 367. Il y a alors 15 triangles et 6 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.2.2.1.7.3.6. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 348, 389 et 379. Il y a alors 15 triangles et 8 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.2.2.1.7.3.7. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 349, 359 et 357. Il y a alors 15 triangles et 8 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.2.2.1.7.3.8. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 349, 389 et 378. Il y a alors 15 triangles et 8 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.2.2.1.7.3.9. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q, ainsi que les triangles 349, 39Q et 37Q. Il y a alors 15 triangles et 10 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.2.2.1.7.4. L'étoile du sommet 3 est constituée de 7 triangles. On doit donc rajouter 4 triangles de sommet 3 en utilisant toutes les arêtes libres qui ne contiennent pas le sommet 3 : c'est impossible car il a 7 telles arêtes libres.

4.2.2.1.8. On rajoute les triangles 237, 267, 268 et 256. L'étoile du sommet 5 contient alors les triangles 125, 156, 256 et l'arête 25 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal selon l'assertion 3.

4.2.2.1.9. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 237, 279, 289 et 257. On procède la même manière qu'en 4.2.2.1.7.. Ce cas ne donne rien.

4.2.2.1.10. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 237, 279, 289 et 259. De la même manière que le cas précédent, ce cas ne donne rien.

4.2.2.1.11. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 239, 249, 248 et 259.

4.2.2.1.12. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 239, 249, 248 et 245. L'étoile du sommet 5 contient alors les triangles 125, 145, 245 et l'arête 25 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.2.2.1.13. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 239, 269, 268 et 259.

4.2.2.1.14. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 239, 269, 268 et 256. L'étoile du sommet 5 contient alors les triangles 125, 156, 256 et l'arête 25 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal selon l'assertion 3.

4.2.2.1.15. On rajoute deux sommets supplémentaire 9 et Q, ainsi que les triangles 239, 29Q, 28Q et 259.

**4.2.3.** On rajoute deux sommets supplémentaire 9 et Q, ainsi que les triangles 239, 29Q, 28Q et 25Q.

4.2.3.1. **Cas 2.** La configuration de l'étoile du sommet 2 est donnée par la figure 37. Comme précédemment, on n'obtient pas de complexe minimal

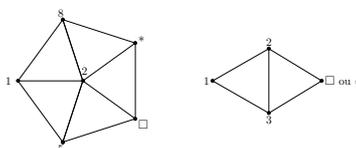


FIGURE 37. Étoile du sommet 2 en configuration 7-3, cas 2.

de moins de 16 triangles.

**4.3.** L'étoile du sommet 2 est constituée de 8 triangles. Comme elle n'est pas planaire, les configurations à envisager sont 8-2, 8-3 et 8-4.

**4.3.1.** L'étoile du sommet 2 est dans la configuration 8-2. Il y a 6 façons d'obtenir la configuration 8-3, qui sont répertoriées dans les figures 38 à 43.

4.3.1.1. **Cas 1.** La configuration de l'étoile du sommet 2 est donnée par la figure 38. Cela revient à recoller le disque constituée du triangle 125 à un

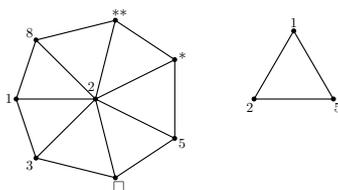


FIGURE 38. Étoile du sommet 2 en configuration 8-2, cas 1.

complexe comportant moins de triangles.

4.3.1.2. **Cas 2.** La configuration de l'étoile du sommet 2 est donnée par la figure 39. Cela revient à recoller le disque constituée du triangle 125 à un complexe comportant moins de triangles.

4.3.1.3. **Cas 3.** La configuration de l'étoile du sommet 2 est donnée par la figure 40. Les possibilités sont les suivantes.

4.3.1.3.1. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 256, 236, 234, 249 et 289. L'étoile du sommet 3 contient alors les triangles

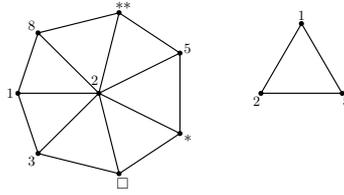


FIGURE 39. Étoile du sommet 2 en configuration 8-2, cas 2.

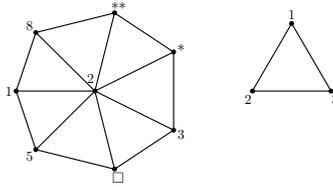


FIGURE 40. Étoile du sommet 2 en configuration 8-2, cas 3.

123, 134 et 234 et l'arête 13 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.3.1.3.2. On rajoute les triangles 256, 236, 237, 247 et 248. L'étoile du sommet 5 contient alors les triangles 125, 156 et 256 et l'arête 25 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.3.1.3.3. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 256, 236, 237, 279 et 289. L'étoile du sommet 5 contient alors les triangles 125, 156 et 256 et l'arête 25 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.3.1.3.4. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 256, 236, 239, 249 et 248. L'étoile du sommet 5 contient alors les triangles 125, 156 et 256 et l'arête 25 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.3.1.3.5. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 256, 236, 239, 279 et 278. L'étoile du sommet 5 contient alors les triangles 125, 156 et 256 et l'arête 25 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.3.1.3.6. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q, ainsi que les triangles 256, 236, 239, 29Q et 28Q. L'étoile du sommet 5 contient alors les triangles 125, 156 et 256 et l'arête 25 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.3.1.3.7. On rajoute les triangles 257, 237, 234, 246 et 268. L'étoile du sommet 3 contient alors les triangles 123, 134 et 234 et l'arête 13 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.3.1.3.8. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 257, 237, 234, 249 et 289. L'étoile du sommet 3 contient alors les triangles 123, 134 et 234 et l'arête 13 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.3.1.3.9. On rajoute les triangles 257, 237, 236, 246, 248. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.3.1.3.10. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 257, 237, 236, 269 et 289. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.3.1.3.11. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 257, 237, 239, 249 et 248. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.3.1.3.12. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q, ainsi que les triangles 257, 237, 239, 29Q et 28Q. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.3.1.3.13. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 259, 239, 234, 246 et 268. L'étoile du sommet 3 contient alors les triangles 123, 134 et 234 et l'arête 13 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.3.1.3.14. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 259, 239, 234, 247 et 278. L'étoile du sommet 3 contient alors les triangles 123, 134 et 234 et l'arête 13 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.3.1.3.15. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q, ainsi que les triangles 259, 239, 234, 24Q et 28Q. L'étoile du sommet 3 contient alors les triangles 123, 134 et 234 et l'arête 13 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.3.1.3.16. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 259, 239, 236, 346 et 248. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.3.1.3.17. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 259, 239, 236, 367 et 278. L'étoile du sommet 8 contient alors les triangles 128, 178, 278 et l'arête 28 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.3.1.3.18. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q, ainsi que les triangles 259, 239, 236, 26Q et 28Q. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.3.1.3.19. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 259, 239, 237, 247 et 248. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.3.1.3.20. On rajoute un sommet supplémentaire 9 et les triangles 259, 239, 237, 267 et 268. L'étoile du sommet 3 n'est pas planaire : elle contient au moins 6 triangles.

4.3.1.3.20.1. L'étoile du sommet 3 est constituée de 6 triangles : on doit rajouter les triangles 234 et 347 : L'étoile du sommet 3 contient alors les triangles 123, 134 et 234 et l'arête 13 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.3.1.3.20.2. L'étoile du sommet 3 est constituée de 7 triangles. Ce cas est impossible : l'étoile du sommet 3 contient déjà 4 triangles et il y a 5 arêtes libres qui ne contiennent pas le sommet 3.

4.3.1.3.21. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q, ainsi que les triangles 259, 239, 237, 27Q et 28Q. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.3.1.3.22. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q, ainsi que les triangles 259, 239, 23Q, 24Q et 248. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.3.1.3.23. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q, ainsi que les triangles 259, 239, 23Q, 27Q et 278. L'étoile du sommet 8 contient alors les triangles 128, 178, 278 et l'arête 28 n'est commune à aucun autre triangle : on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.3.1.3.24. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q, ainsi que les triangles 259, 239, 23Q, 26Q et 268. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.3.1.3.25. On rajoute trois sommets supplémentaires 9, Q et R, ainsi que les triangles 259, 239, 23Q, 2QR et 28R. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.3.1.4. **Cas 4.** La configuration de l'étoile du sommet 2 est donnée par la figure 41. Ce cas se traite de la même manière que le précédent : on

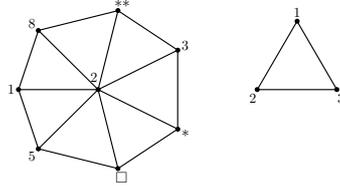


FIGURE 41. Étoile du sommet 2 en configuration 8-2, cas 4.

n'obtiendra pas de complexe minimal de moins de 16 triangles.

4.3.1.5. **Cas 5.** La configuration de l'étoile du sommet 2 est donnée par la figure 42. Ce cas se traite de la même manière que les précédents : on

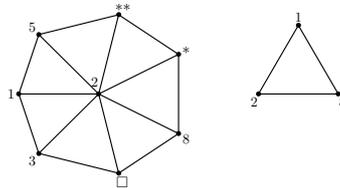


FIGURE 42. Étoile du sommet 2 en configuration 8-2, cas 5.

n'obtiendra pas de complexe minimal de moins de 16 triangles.

4.3.1.6. **Cas 6.** La configuration de l'étoile du sommet 2 est donnée par la figure 43. Ce cas se traite de la même manière que les précédents : on

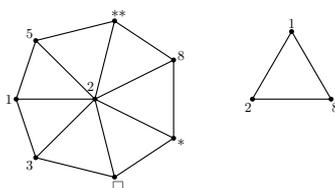


FIGURE 43. Étoile du sommet 2 en configuration 8-2, cas 6.

n'obtiendra pas de complexe minimal de moins de 16 triangles.

**4.3.2.** L'étoile du sommet 2 est dans la configuration 8-3. Il y a trois façons d'obtenir la configuration 8-3.

4.3.2.1. **Cas 1.** La configuration de l'étoile du sommet 2 est donnée par la figure 44. Si on rajoute le triangle 234, l'étoile du sommet 3 comportera

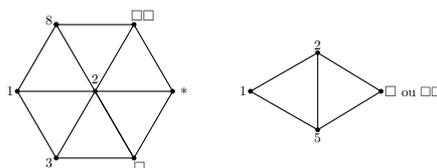


FIGURE 44. Étoile du sommet 2 en configuration 8-3, cas 1.

les triangles 123, 134, 234 et l'arête 13 ne sera commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3 on ne pourra pas obtenir de complexe minimal. De même, rajouter le triangle 278 ne conduira pas à un complexe minimal. Les possibilités, avec le triangle 25□, sont les suivantes.

4.3.2.1.1. On rajoute un sommet supplémentaire 9 ainsi que les triangles 236, 264, 249, 289 et 256. Cela revient à recoller le disque constitué des triangles 125 et 256 à une configuration déjà étudiée.

4.3.2.1.2. On rajoute les triangles 236, 267, 247, 248 et 256. Cela revient à recoller le disque constitué des triangles 125 et 256 à une configuration déjà étudiée.

4.3.2.1.3. On rajoute un sommet supplémentaire 9 ainsi que les triangles 236, 267, 279, 289 et 256. Cela revient à recoller le disque constitué des triangles 125 et 256 à une configuration déjà étudiée.

4.3.2.1.4. On rajoute un sommet supplémentaire 9 ainsi que les triangles 236, 269, 249, 248 et 256. Cela revient à recoller le disque constitué des triangles 125 et 256 à une configuration déjà étudiée.

4.3.2.1.5. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q ainsi que les triangles 236, 269, 29Q, 28Q et 256. Cela revient à recoller le disque constitué des triangles 125 et 256 à une configuration déjà étudiée.

4.3.2.1.6. On rajoute les triangles 237, 247, 246, 268 et 257. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de moins de 16 triangles sans arête libre.

4.3.2.1.7. On rajoute un sommet supplémentaire 9 ainsi que les triangles 237, 247, 249, 289 et 257. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de moins de 16 triangles sans arête libre.

4.3.2.1.8. On rajoute les triangles 237, 267, 246, 248 et 257. L'étoile du sommet 5 n'est pas planaire : elle est constituée d'au moins 6 triangles.

4.3.2.1.8.1. L'étoile du sommet 5 est constituée de 6 triangles. Seule la configuration 6-2 est possible : on doit rajouter les triangles 457 et 567. L'étoile du sommet 6 contient alors les triangles 156, 167, 567 et l'arête 16 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3.

4.3.2.1.8.2. L'étoile du sommet 5 est constituée de 7 triangles. Il y a 5 arêtes libre ne contenant pas le sommet 5 : il est impossible de toutes les utiliser en ne rajoutant que 3 triangles de sommet 5.

4.3.2.1.9. On rajoute un sommet supplémentaire 9 ainsi que les triangles 237, 267, 269, 289 et 257.

4.3.2.1.9.1. L'étoile du sommet 5 est constituée de 6 triangles. Seule la configuration 6-2 est possible : on doit rajouter les triangles 457 et 567. L'étoile du sommet 6 contient alors les triangles 156, 167, 567 et l'arête 16 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3.

4.3.2.1.9.2. L'étoile du sommet 5 est constituée de 7 triangles. Il y a 5 arêtes libre ne contenant pas le sommet 5 : il est impossible de toutes les utiliser en ne rajoutant que 3 triangles de sommet 5.

4.3.2.1.10. On rajoute un sommet supplémentaire 9 ainsi que les triangles 237, 279, 249, 248 et 257. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de moins de 16 triangles sans arête libre.

4.3.2.1.11. On rajoute un sommet supplémentaire 9 ainsi que les triangles 237, 279, 269, 268 et 257. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de moins de 16 triangles sans arête libre.

4.3.2.1.12. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q ainsi que les triangles 237, 279, 29Q, 28Q et 257. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de moins de 16 triangles sans arête libre.

4.3.2.1.13. On rajoute un sommet supplémentaire 9 ainsi que les triangles 239, 249, 246, 268 et 259. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de moins de 16 triangles sans arête libre.

4.3.2.1.14. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q ainsi que les triangles 239, 249, 24Q, 28Q et 259. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de moins de 16 triangles sans arête libre.

4.3.2.1.15. On rajoute un sommet supplémentaire 9 ainsi que les triangles 239, 269, 246, 248 et 259. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de moins de 16 triangles sans arête libre.

4.3.2.1.16. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q ainsi que les triangles 239, 269, 26Q, 28Q et 259. Il y a alors 13 triangles et

10 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de moins de 16 triangles sans arête libre.

4.3.2.1.17. On rajoute un sommet supplémentaire 9 ainsi que les triangles 239, 279, 247, 248 et 259. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de moins de 16 triangles sans arête libre.

4.3.2.1.18. On rajoute un sommet supplémentaire 9 ainsi que les triangles 239, 279, 267, 268 et 259. L'étoile du sommet 5 n'est pas planaire : elle est constituée de 6 triangles au moins.

4.3.2.1.18.1. L'étoile du sommet 5 est constituée de 6 triangles. Seule la configuration 6-2 est possible. La seule possibilité est de rajouter les triangles 459 et 569. Cela revient à recoller un disque (constitué des triangles 125 et 259) à une configuration déjà étudiée.

4.3.2.1.18.2. L'étoile du sommet 5 est constituée de 7 triangles. Il y a 5 arêtes libres ne contenant pas le sommet 5 : il est impossible de toutes les utiliser en ne rajoutant que 3 triangles de sommet 5.

4.3.2.1.19. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q ainsi que les triangles 239, 279, 27Q, 28Q et 259. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de moins de 16 triangles sans arête libre.

4.3.2.1.20. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q ainsi que les triangles 239, 29Q, 24Q, 248 et 259. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de moins de 16 triangles sans arête libre.

4.3.2.1.21. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q ainsi que les triangles 239, 29Q, 26Q, 268 et 259. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de moins de 16 triangles sans arête libre.

4.3.2.1.22. On rajoute trois sommets supplémentaires 9, Q et R ainsi que les triangles 239, 29Q, 2QR, 28R et 259. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : il est impossible d'obtenir un complexe de moins de 16 triangles sans arête libre.

4.3.2.2. **Cas 2.** La configuration de l'étoile du sommet 2 est donnée par la figure 45. Ce cas se traite de la même manière que le précédent : on

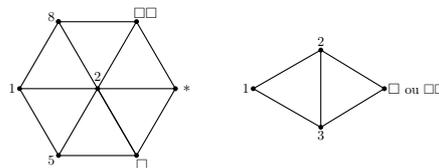


FIGURE 45. Étoile du sommet 2 en configuration 8-3, cas 2.

n'obtiendra pas de complexe minimal de moins de 16 triangles.

4.3.2.3. **Cas 3.** La configuration de l'étoile du sommet 2 est donnée par la figure 46. Ce cas se traite de la même manière que les précédents : on n'obtiendra pas de complexe minimal de moins de 16 triangles.

**4.3.3.** L'étoile du sommet 2 est dans la configuration 8-4. Il y a trois façons d'obtenir la configuration 8-3.

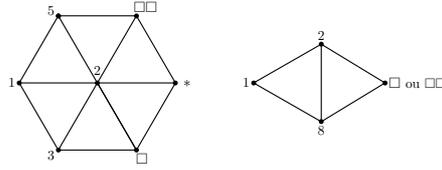


FIGURE 46. Étoile du sommet 2 en configuration 8-3, cas 3.

4.3.3.1. **Cas 1.** La configuration de l'étoile du sommet 2 est donnée par la figure 47. Si on rajoute le triangle 234, l'étoile du sommet 3 comportera

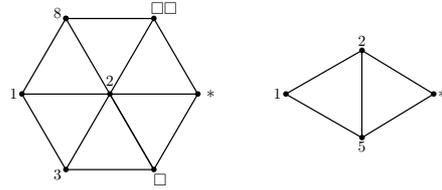


FIGURE 47. Étoile du sommet 2 en configuration 8-4, cas 1.

les triangles 123, 134, 234 et l'arête 13 ne sera commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3 on ne pourra pas obtenir de complexe minimal. De même, rajouter le triangle 278 ne conduira pas à un complexe minimal. Les possibilités sont les suivantes. les possibilités sont les suivantes.

4.3.3.1.1. On rajoute un sommet supplémentaire 9 ainsi que les triangles 236, 264, 249, 289 et 245. Cela revient à recoller le disque constitué des triangles 125 et 245 à une configuration déjà étudiée.

4.3.3.1.2. On rajoute les triangles 236, 267, 247, 248 et 257. L'étoile du sommet 5 n'est pas planaire : elle contient au moins 6 triangles.

4.3.3.1.2.1. L'étoile du sommet 5 est constituée de 6 triangles. Seule la configuration 6-2 est possible. On doit rajouter les triangles 457 et 567. L'étoile du sommet 6 contient alors les triangles 156, 167, 567 et l'arête 61 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.3.3.1.2.2. L'étoile du sommet 5 est constituée de 7 triangles. Il y a 5 arêtes libres ne contenant pas le sommet 5 : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre en rajoutant 3 triangles de sommet 5.

4.3.3.1.3. On rajoute un sommet supplémentaire 9 ainsi que les triangles 236, 267, 279, 289 et 257. L'étoile du sommet 5 n'est pas planaire : elle contient au moins 6 triangles.

4.3.3.1.3.1. L'étoile du sommet 5 est constituée de 6 triangles. Seule la configuration 6-2 est possible. On doit rajouter les triangles 457 et 567. L'étoile du sommet 6 contient alors les triangles 156, 167, 567 et l'arête 61 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.3.3.1.3.2. L'étoile du sommet 5 est constituée de 7 triangles. Il y a 5 arêtes libres ne contenant pas le sommet 5 : on ne pourra pas

obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre en rajoutant 3 triangles de sommet 5.

4.3.3.1.4. On rajoute un sommet supplémentaire 9 ainsi que les triangles 236, 269, 249, 248 et 259. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.3.3.1.5. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q ainsi que les triangles 236, 269, 29Q, 28Q et 259. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.3.3.1.6. On rajoute les triangles 237, 247, 246, 268 et 245. Cela revient à recoller le disque constitué des triangles 125 et 245 à une configuration déjà étudiée.

4.3.3.1.7. On rajoute un sommet supplémentaire 9 ainsi que les triangles 237, 247, 249, 289 et 245. Cela revient à recoller le disque constitué des triangles 125 et 245 à une configuration déjà étudiée.

4.3.3.1.8. On rajoute les triangles 237, 267, 246, 248 et 256. Cela revient à recoller le disque constitué des triangles 125 et 256 à une configuration déjà étudiée.

4.3.3.1.9. On rajoute un sommet supplémentaire 9 ainsi que les triangles 237, 267, 269, 289 et 256. Cela revient à recoller le disque constitué des triangles 125 et 256 à une configuration déjà étudiée.

4.3.3.1.10. On rajoute un sommet supplémentaire 9 ainsi que les triangles 237, 279, 249, 248 et 259. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.3.3.1.11. On rajoute un sommet supplémentaire 9 ainsi que les triangles 237, 279, 269, 268 et 259. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.3.3.1.12. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q ainsi que les triangles 237, 279, 29Q, 28Q et 259. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.3.3.1.13. On rajoute un sommet supplémentaire 9 ainsi que les triangles 239, 249, 246, 268 et 245. Cela revient à recoller le disque constitué des triangles 125 et 245 à une configuration déjà étudiée.

4.3.3.1.14. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q ainsi que les triangles 239, 249, 24Q, 28Q et 245. Cela revient à recoller le disque constitué des triangles 125 et 245 à une configuration déjà étudiée.

4.3.3.1.15. On rajoute un sommet supplémentaire 9 ainsi que les triangles 239, 269, 246, 248 et 256. Cela revient à recoller le disque constitué des triangles 125 et 256 à une configuration déjà étudiée.

4.3.3.1.16. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q ainsi que les triangles 239, 269, 26Q, 28Q et 256. Cela revient à recoller le disque constitué des triangles 125 et 256 à une configuration déjà étudiée.

4.3.3.1.17. On rajoute un sommet supplémentaire 9 ainsi que les triangles 239, 279, 247, 248 et 257. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes

libres : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.3.3.1.18. On rajoute un sommet supplémentaire 9 ainsi que les triangles 239, 279, 267, 268 et 257. L'étoile du sommet 5 n'est pas plane : elle contient au moins 6 triangles.

4.3.3.1.18.1. L'étoile du sommet 5 est constituée de 6 triangles. Seule la configuration 6-2 est possible. On doit rajouter les triangles 457 et 567. L'étoile du sommet 6 contient alors les triangles 156, 167, 567 et l'arête 61 n'est commune à aucun autre triangle : selon l'assertion 3, on ne pourra pas obtenir de complexe minimal.

4.3.3.1.18.2. L'étoile du sommet 6 est constituée de 7 triangles. Il y a 5 arêtes libres ne contenant pas le sommet 5 : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre en rajoutant 3 triangles de sommet 5.

4.3.3.1.19. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q ainsi que les triangles 239, 279, 27Q, 28Q et 257. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.3.3.1.20. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q ainsi que les triangles 239, 29Q, 24Q, 248 et 25Q. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.3.3.1.21. On rajoute deux sommets supplémentaires 9 et Q ainsi que les triangles 239, 29Q, 26Q, 268 et 25Q. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.3.3.1.22. On rajoute trois sommets supplémentaires 9, Q et R ainsi que les triangles 239, 29Q, 2QR, 28R et 25Q. Il y a alors 13 triangles et 10 arêtes libres : on ne pourra pas obtenir de complexe de 16 triangles sans arête libre.

4.3.3.2. **Cas 2.** La configuration de l'étoile du sommet 2 est donnée par la figure 48. Ce cas se traite de la même manière que le précédent : on

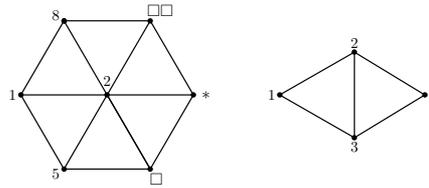


FIGURE 48. Étoile du sommet 2 en configuration 8-4, cas 2.

n'obtiendra pas de complexe minimal de moins de 16 triangles.

4.3.3.3. **Cas 3.** La configuration de l'étoile du sommet 2 est donnée par la figure 49. Ce cas se traite de la même manière que les précédents : on n'obtiendra pas de complexe minimal de moins de 16 triangles.

Les autres configurations pour une étoile à 8 triangles se traitent de la même manière.

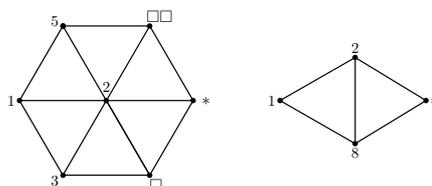


FIGURE 49. Étoile du sommet 2 en configuration 8-4, cas 3.

## RÉFÉRENCES

- [Bar82] D. BARNETTE – « Generating the triangulations of the projective plane. », *J. Comb. Theory, Ser. B* **33** (1982), p. 222–230.
- [BB10] I. K. BABENKO & F. BALACHEFF – « Distribution of the systolic volume of homology classes », *arXiv :1009.2835v1* (2010).
- [BBB15] I. K. BABENKO, F. BALACHEFF & G. BULTEAU – « Systolic geometry and simplicial complexity for groups », *arXiv :1501.01173* (2015).
- [Del96] T. DELZANT – « Décomposition d’un groupe en produit libre ou somme amalgamée. », *J. Reine Angew. Math.* **470** (1996), p. 153–180.
- [Gro83] M. GROMOV – « Filling Riemannian manifolds », *J. Differential Geom.* **18** (1983), no. 1, p. 1–147.
- [JR80] M. JUNGERMAN & G. RINGEL – « Minimal triangulations on orientable surfaces. », *Acta Math.* **145** (1980), p. 121–154.
- [Kur60] A. KUROSH – *The theory of groups*, Chelsea Publ. Co., New-York, 1960.
- [PP08] E. PERVOVA & C. PETRONIO – « Complexity and  $T$ -invariant of Abelian and Milnor groups, and complexity of 3-manifolds. », *Math. Nachr.* **281** (2008), no. 8, p. 1182–1195.
- [Rin55] G. RINGEL – « Wie man die geschlossenen nichtorientierbaren Flächen in möglichst wenig Dreiecke zerlegen kann. », *Math. Ann.* **130** (1955), p. 317–326.
- [RS08] Y. B. RUDYAK & S. SABOURAU – « Systolic invariants of groups and 2-complexes via Grushko decomposition », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **58** (2008), no. 3, p. 777–800.
- [Sul06] T. SULANKE – « Note on the irreducible triangulations of the Klein bottle. », *J. Comb. Theory, Ser. B* **96** (2006), no. 6, p. 964–972.

INSTITUT MONTPELLIÉRAIN ALEXANDER GROTHENDIECK (IMAG), UMR CNRS 5149 - UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2, CASE COURRIER 051, 34095 MONTPELLIER CEDEX 5 - FRANCE  
*E-mail address:* guillaume.bulteau@ac-montpellier.fr