



**HAL**  
open science

# Étude du cisaillement des matériaux granulaires homogènes et hétérogènes par expérimentation et simulation de l'essai triaxial

Kai Wu

► **To cite this version:**

Kai Wu. Étude du cisaillement des matériaux granulaires homogènes et hétérogènes par expérimentation et simulation de l'essai triaxial. Rencontres Universitaires de Génie Civil, May 2015, Bayonne, France. hal-01167681

**HAL Id: hal-01167681**

**<https://hal.science/hal-01167681v1>**

Submitted on 24 Jun 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Étude du cisaillement des matériaux granulaires homogènes et hétérogènes par expérimentation et simulation de l'essai triaxial

WU Kai<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Écoles des Mines de Douai, LGCgE-GCE,F-59508 Douai, France

Kai.wu@mines-douai.fr

Prix Jeunes Chercheurs « René Houpert »

**RÉSUMÉ.** Ce travail de recherche a pour objectif d'étudier le comportement au cisaillement des matériaux granulaires homogènes et hétérogènes par l'essai triaxial de révolution. Les travaux sont réalisés sur des billes de verre et comportent à la fois des essais triaxiaux de laboratoire et des simulations numériques en DEM (Discret Element Method). D'un point de vue expérimental, les essais sont tout d'abord réalisés sur des échantillons homogènes (billes de verre monodisperses). Ensuite, on étudie des mélanges de billes bidisperses pour représenter un cas hétérogène. D'un point de vue numérique, une condition limite cylindrique paroi rigide, basée sur la formule de Lamé, est implémentée et une série de procédures est proposée pour modéliser l'essai triaxial. Les résultats numériques et expérimentaux sont comparés. Le modèle numérique permet de reproduire de manière satisfaisante la courbe déviatorique dans toutes les conditions expérimentales utilisées. De plus, il permet d'étudier l'influence des paramètres micromécaniques sur le comportement global des matériaux.

**ABSTRACT.** This research work aims at studying the shear behavior of homogeneous and heterogeneous granular materials by triaxial test. The work is performed on glass beads both in laboratory tests and by numerical simulations in DEM (Discrete Element Method). From an experimental point of view, tests are first performed on homogeneous samples (monodisperse beads), then they are expanded to heterogeneous cases like bidisperse mixtures. From a numerical point of view, a cylindrical rigid wall boundary condition, based on the Lamé formula is implemented, and a series of procedures is proposed to model the triaxial test in conditions similar to experimental tests. The numerical and experimental results are compared both for monodisperse and heterogeneous systems. The numerical model can reproduce deviatoric curves very satisfactorily in all experimental conditions. The developed numerical tool also makes it possible to study the influence of micromechanical parameters on the overall behavior of materials.

**MOTS-CLÉS :** un maximum de six mots significatifs : Essai triaxial, DEM, Matériau granulaire, Cisaillement, Hétérogène, Homogène.

**KEYWORDS:** a maximum of six significant words: Triaxial test, DEM, Granular material, Shear Behavior, Heterogeneous, Homogeneous.

---

## 1. Introduction

Aujourd'hui, les sous-produits industriels comme les MIDNDs (Mâchefers d'Incinération de Déchets Non Dangereux), les sédiments de dragage, les granulats recyclés, les cendres volantes... sont de plus en plus utilisés dans le domaine du Génie Civil, notamment en techniques routières, pour des raisons à la fois économiques et environnementales[BEC 07][LE 11]. Cependant, ces sous-produits sont souvent plus hétérogènes que les sols ou les autres matériaux naturels traditionnellement utilisés. Évidemment, la présence de ces hétérogénéités change la résistance au cisaillement des matériaux. Par conséquent, la caractérisation des matériaux granulaires hétérogènes est très importante afin de les valoriser correctement dans les applications de génie civil.

Experimentalement, l'essai triaxial est l'un des essais les plus utilisés pour étudier la résistance au cisaillement des matériaux. Il permet en effet d'étudier le comportement mécanique des matériaux sous différents chemins de sollicitation et conditions de drainage[HOL 91].

Cependant, la caractérisation du comportement mécanique des sous produits industriels au laboratoire demande beaucoup d'essais. La mise en œuvre de ces derniers peut rapidement devenir lourde et coûteuse. La modélisation numérique offre un outil très efficace pour compléter les essais expérimentaux. Certainement, la modélisation numérique ne peut pas modéliser exactement l'état des matériaux réels, mais elle donne une vision simplifiée du comportement mécanique des matériaux, notamment lorsqu'on s'intéresse à l'influence de divers paramètres sur le comportement global des matériaux.

Dans la littérature, plusieurs conditions aux limites ont été proposées pour modéliser l'essai triaxial : condition rigide[INC 10][DON 12], condition périodique[CUI 10][SUL 09], condition membrane[CHE 08][HEL 07]. Dans ce travail, pour modéliser en totalité la cellule triaxiale de révolution, une condition limite cylindrique assez simple à implémenter et permettant le contrôle de la pression latérale a été utilisée.

L'objectif principal de ce travail est de réaliser une comparaison systématique entre des résultats expérimentaux obtenus sur des matériaux modèles (billes de verre) et des résultats numériques obtenus par la DEM dans des conditions similaires pour créer un outil numérique afin d'étudier le comportement mécanique des matériaux granulaires. À l'aide de cet outil numérique, nous avons également étudié l'influence des hétérogénéités représentées par un mélange des billes de verre bidisperses sur le comportement mécanique du milieu granulaire.

Cet article commence par la présentation des outils de recherches expérimentaux et numériques en DEM sur l'essai triaxial de révolution. Les études expérimentales sont tout d'abord réalisées sur des billes de verres monodisperses, et ensuite sur des mélanges bidisperses. Les simulations sont menées en utilisant des paramètres similaires à ceux des essais expérimentaux afin de faire une comparaison entre les deux approches.

## 2. Outils de recherche expérimental et numérique

### 2.1. Protocole expérimental

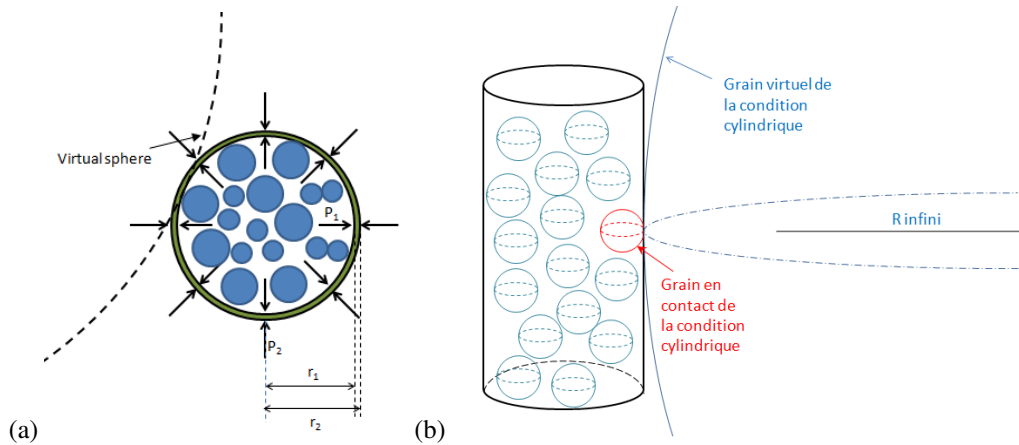
Dans la partie expérimentale, une cellule cylindrique de 50mm de diamètre et 125mm de hauteur est remplie de billes de verre de 4mm de diamètre et de densité 2530kg/m<sup>3</sup>. L'essai triaxial de révolution ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) est effectué en conditions saturées afin de pouvoir suivre la déformation volumique de l'échantillon en fonction de sa déformation axiale. Une campagne expérimentale préliminaire a préalablement permis de démontrer que la présence de fluide interstitiel à saturation ne modifiait pas le comportement mécanique du matériau par rapport au cisaillement du matériau sec[WU 15a]. Ainsi, les résultats expérimentaux sur matériaux saturés pourront être comparés aux résultats numériques dans lesquels la présence d'eau interstitielle n'est pas prise en compte. Chaque essai triaxial expérimental a été répété trois fois.

Les échantillons ont été étudiés dans deux états initiaux de densité différents (échantillons denses ou moyennement denses). Dans cet article, nous présentons uniquement les résultats obtenus avec les échantillons denses. L'opération pour préparer un échantillon dense consiste à utiliser un moule métallique cylindrique avec une membrane en latex mise sur la surface latérale intérieure du moule reconstitué. Les billes de verre sont ensuite déversées par pluviométrie à sec dans le moule par couches successives (hauteur de chute correspondant au bord supérieur du moule) tout en tapotant chaque couche à l'aide d'une tige-marteau. L'objectif est de tasser une quantité maximale de billes afin d'obtenir un échantillon dense. Les pierres poreuses et un capuchon sont ensuite mis en place. Afin d'assurer la tenue de l'échantillon lors de l'enlèvement du moule, une dépression de 20kPa est systématiquement appliquée. L'échantillon dense contient une masse de 388g de billes de verre. L'eau désaérée est utilisée dans

la phase de saturation. L'échantillon est consolidé et cisailé sous différentes pressions de confinement ( $50kPa$ ,  $100kPa$  et  $200kPa$ ).

## 2.2. Procédure de simulation de l'essai triaxial

La simulation de l'essai triaxial est réalisée au moyen d'un code maison développé au département GCE de l'école des Mines de Douai[REM 10]. Ce code est basé sur la méthode des éléments discrets qui fut initialement proposée par Cundall et Strack en 1978[CUN 78]. Les forces de contact sont calculées à partir du modèle de Hertz et Mindlin[POS 05]. Une résistance au roulement est également prise en compte pour modéliser les moments de blocage qui peuvent être exercés entre des particules de forme non sphérique dans les matériaux réels[PIZ 14].



**Figure 1.** (a) Application de la formule de Lamé dans la condition limite cylindrique (b) Contact entre la particule et la condition limite cylindrique

Différentes conditions aux limites présentées dans la section précédente peuvent être utilisées pour modéliser l'essai triaxial[INC 10][DON 12][CUI 10][SUL 09][CHE 08][HEL 07]. Dans notre cas, on souhaite reproduire les conditions expérimentales utilisées en laboratoire, nous avons donc exclu l'utilisation d'une condition périodique. Différentes méthodes peuvent également être utilisées pour modéliser la membrane, mais elles sont complexes à implémenter et coûteuses en temps de calcul. Nous avons finalement opté pour la condition limite cylindrique décrite ci-dessous[WU 15b].

Comme l'échantillon, dans l'essai triaxial de révolution, est de forme cylindrique, la condition limite cylindrique paroi rigide basée sur la formule de Lamé est très adaptée pour contrôler la pression latérale, Figure 1(a). La formule de Lamé est utilisée pour calculer la variation du rayon du cylindre sous l'action d'une différence de pression interne et externe[ELL 10].

$$\Delta r = \frac{1}{E} \times \frac{(1 - \nu)(r_1^2 P_1 - r_2^2 P_2)}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{(1 + \nu)r_1^2 r_2^2 (P_1 - P_2)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r} \quad [1]$$

où  $\Delta r$  est la variation de rayon ;  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson de la condition limite,  $P_1$  et  $P_2$  sont respectivement la pression latérale actuelle et la pression de confinement cible,  $r_1$  et  $r_2$  sont respectivement les rayons interne et externe du cylindre. Lorsqu'une particule contacte la condition limite cylindrique, on traite cette particule comme si elle était en contact avec un grain virtuel de rayon quasi infini, tangent au cylindre au niveau du point de contact, Figure 1(b).

Plusieurs étapes sont nécessaires pour modéliser l'essai triaxial. Tout d'abord, un gaz de particules est généré à l'aide d'un algorithme RSA (Random Sequential Adsorption[WID 66]). Ensuite, les particules sédimentent sous l'effet de la gravité jusqu'à atteindre un état d'équilibre. Puis, la densification de l'empilement est obtenue par une succession de compressions/relâchements du plateau supérieur, de manière similaire à la compaction réalisée avec la tige-marteau dans l'essai expérimental. Après avoir préparé l'empilement dense, la condition limite cylindrique est utilisée dans la phase de consolidation isotrope et de cisaillement pour contrôler la pression latérale et cisailier l'échantillon. Les paramètres de simulation sont rassemblés dans le Tableau 1.

**Tableau 1.** Paramètres de simulations de l'essai triaxial

Paramètre micromécanique	Par défaut	Plage de valeurs
Module de Young $G(GPa)$	65	
Coefficient de Poisson	0,25	
Coefficient de frottement inter-particules $\mu_{gg}$	0,15	0,1-0,5
Coefficient de frottement particules-paroi $\mu_{gw}$	0,05	0,0-0,2
Coefficient de frottement particules-pierre poreuse $\mu_{gp}$	0,25	0,0-0,7
Coefficient de roulement inter-particules $\mu_{r gg}$	0,01	0,0-1,0
Pression de confinement $\sigma_3(kPa)$	50,100,200	
Pas de temps $\Delta t$	5e-8	
Vitesse de cisaillement $v(m/s)$	0,04	

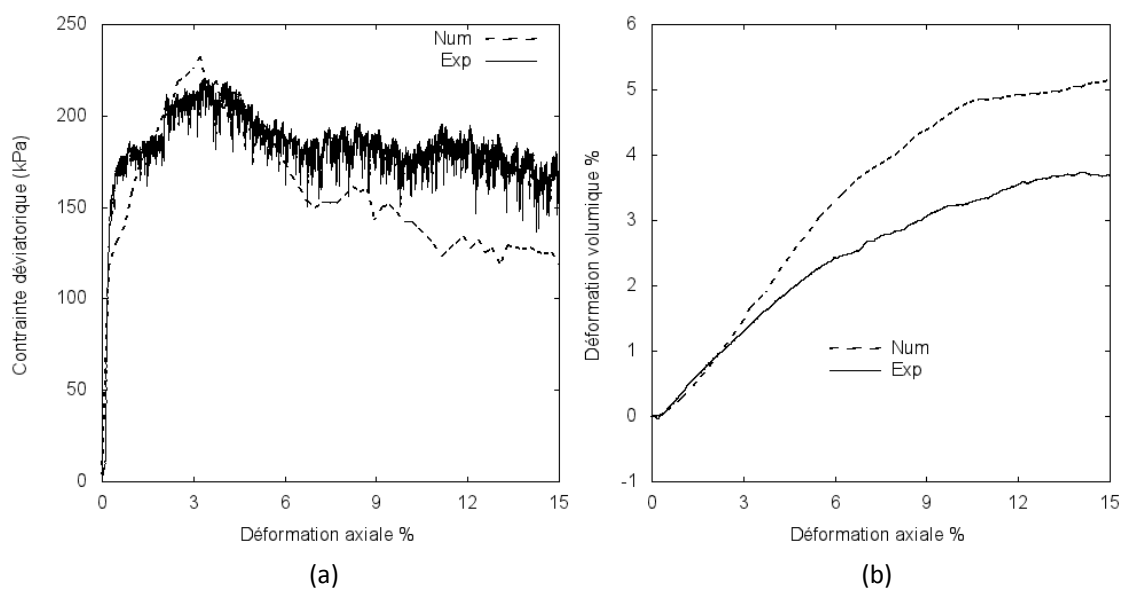
**Tableau 2.** Comparaisons des indices des vides dans chaque étape pour les échantillons expérimentaux et numériques

$\sigma_3(kPa)$	$e_1^{exp}$	$e_1^{num}$	$e_2^{exp}$	$e_2^{num}$	$e_3^{exp}$	$e_3^{num}$
50	0,554	0,559	0,539	0,547	0,637	0,658
100	0,554	0,559	0,527	0,542	0,628	0,656
200	0,554	0,559	0,526	0,537	0,617	0,662

### 3. Analyse des résultats

#### 3.1. Comparaisons des résultats expérimentaux et numériques

Le Tableau 2 montre une comparaison des indices des vides dans chaque étape des essais expérimentaux et des simulations numériques. Dans ce tableau,  $e_1, e_2, e_3$  sont respectivement les indices des vides après les phases de préparation, consolidation et cisaillement des échantillons. Dans ce tableau, les indices des vides expérimentaux et numériques suivent la même tendance, ça signifie que les échantillons sont tout d'abord en contractance dans la phase de consolidation ( $e \downarrow$ ), puis en dilatance dans la phase de cisaillement ( $e \uparrow$ ).



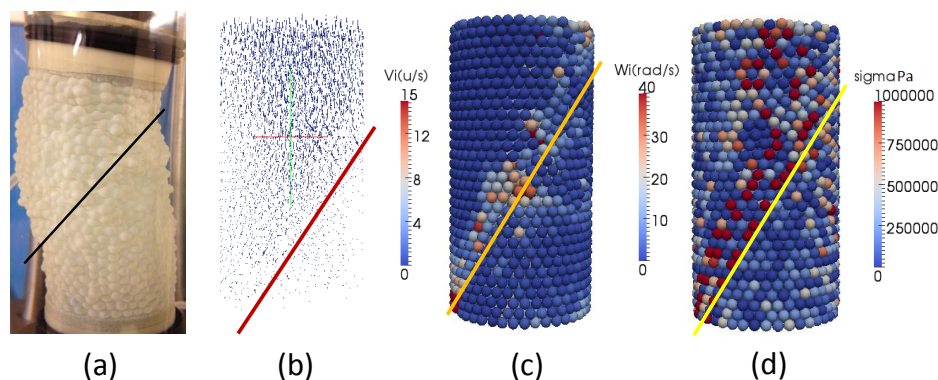
**Figure 2.** Confrontation des courbes obtenues par simulation numérique avec les résultats expérimentaux sous une pression de confinement 100kPa : (a) Évolution de la contrainte déviatorique ; (b) Évolution de la déformation volumique.

La Figure 2(a) montre les confrontations des résultats de nos simulations numériques avec les essais expérimentaux correspondants. Sur la courbe déviatorique numérique, on observe que les valeurs de contraintes déviatoriques numériques et expérimentales sont tout à fait comparables. Le phénomène des stick-slips est une variation du réseau de forces sous la force de cisaillement particulièrement dans les milieux granulaires, cette variation est due à l'atteinte de la limite de frottement entre les grains [HOA 11][ADJ 03]. Ce comportement est observable sur la Figure 2(a) où la contrainte déviatorique varie rapidement tout en suivant une courbe de tendance de l'essai triaxial. Les amplitudes des stick-slips sur la courbe de la simulation sont plus faibles que dans les essais expérimentaux. Expérimentalement, l'amplitude des stick-slips augmente en fonction de l'augmentation de la pression de confinement.

Les courbes numériques de déformation volumique ne suivent pas exactement les courbes expérimentales (Figure 2(b)). Les déformations volumiques numériques sont supérieures aux déformations expérimentales au delà d'environ 3% de déformation axiale. Ceci pourrait être dû au fait que notre simulation utilise une condition rigide cylindrique. L'échantillon expérimental se déforme irrégulièrement en début d'essais, mais au delà du pic, il ne peut plus être considéré comme un cylindre.

La comparaison des résultats numériques et expérimentaux montre que notre modèle peut reproduire de manière satisfaisante le comportement jusqu'au pic (à l'état caractéristique). Malgré la condition cylindrique, le comportement à l'état critique peut être approché. De ce fait, le modèle avec sa condition limite paroi rigide cylindrique peut être utilisé pour simuler le comportement au cisaillement des matériaux granulaires dans un essai triaxial.

### 3.2. Études des bandes de cisaillement



**Figure 3.** Bandes de rupture observées dans les échantillons expérimentaux et numériques à 15% de déformation axiale sous pression de confinement de 200kPa : (a) Échantillon expérimental ;(b) Échantillon numérique par distribution des vitesses des particules ; (c) Échantillon numérique par distribution des vitesses angulaires des particules ; (d) Échantillon numérique par distribution des tenseurs locaux de contraintes sur les particules.

Au cours d'un chargement intense d'un sol, de fortes déformations apparaissent en surface et à l'intérieur du sol. Ces déformations se localisent alors en bandes, appelées bandes de cisaillement, Figure 3(a). Dans notre simulation de l'essai triaxial, les bandes de cisaillement sont également visualisées à l'aide du logiciel de post-traitement (paraview) en étudiant différents paramètres. La Figure 3(b) montre la distribution des vitesses sur toutes les particules, on observe que les vitesses sont plutôt élevées dans la partie supérieure de l'empilement, les vitesses sur les particules en bas à droite de l'empilement sont presque nulles. On peut considérer que la frontière entre les vitesses quasi nulles et non nulles correspond à une bande de rupture.

La Figure 3(c) montre la distribution de la vitesse angulaire sur toutes les particules, on constate une zone de couleurs de particules plus vives correspondant à la bande de cisaillement où la rotation des particules est donc plus importante.

La Figure 3(d) montre la distribution du tenseur de contraintes (normé) sur toutes les particules. Ici, on considère que chaque particule est un volume élémentaire. Le tenseur de contraintes de chaque particule est calculé par l'ensemble des forces  $x_i$  exercées dans la position  $t_i$  sur la surface d'une particule. Il s'écrit selon la formule suivante[SUL 11] :

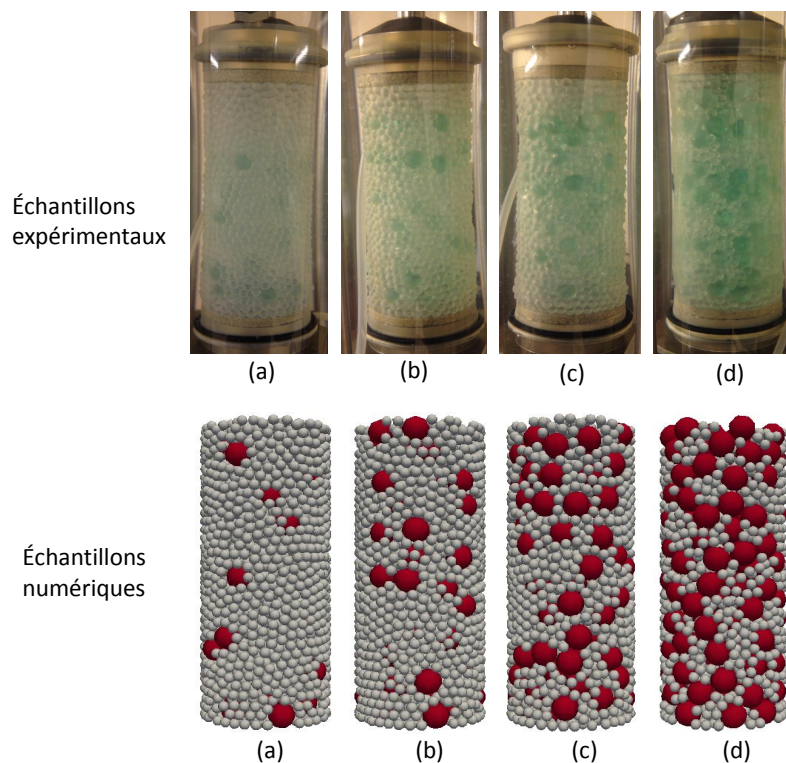
$$\sigma_{ij}^p = \frac{1}{V_p} \oint_{S^p} x_i t_j dS \quad [2]$$

A partir de la distribution du tenseur de contraintes sur chaque particule, on voit que les contraintes élevées se concentrent plutôt sur la bande de rupture à la fin du cisaillement.

### 3.3. Exemple de milieu granulaire hétérogène : mélanges de particules bidisperses

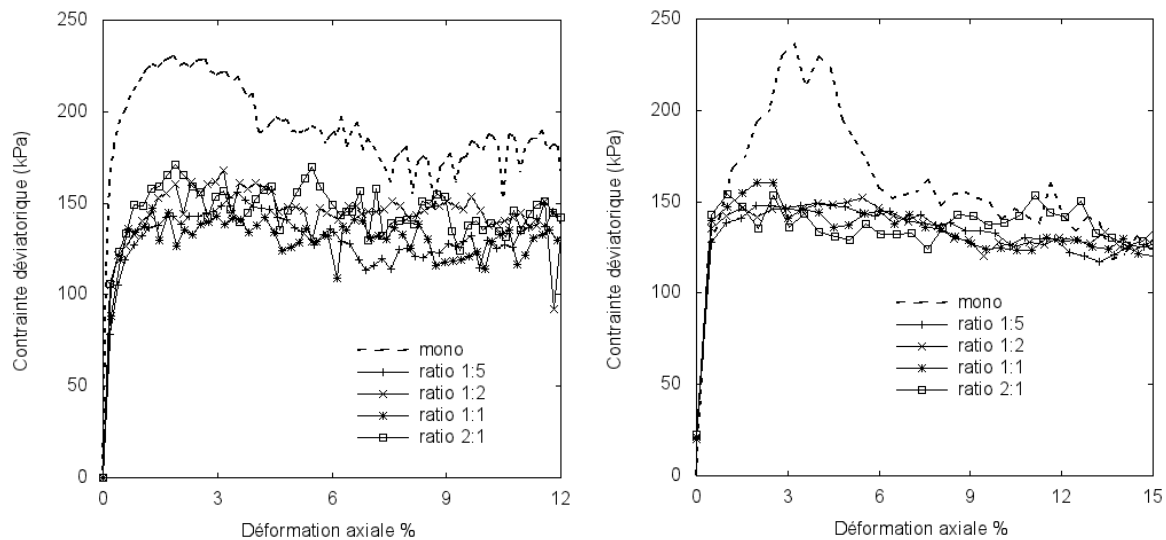
Dans les matériaux granulaires naturels ou industriels, les particules ont toujours différentes tailles. Cette caractéristique joue un rôle important dans le comportement mécanique des matériaux au sens où l'étendue granulaire des particules change radicalement leur arrangement. Dans cette section, nous nous intéressons au comportement au cisaillement d'échantillons constitués de mélanges de particules bidisperses. L'étude dans cette partie est toujours réalisée à la fois expérimentalement et numériquement.

Les billes de verre de 1cm et 4mm sont mélangées dans différentes proportions 1 :5 ; 1 :2 ; 1 :1 ; 2 :1. Tous les échantillons contiennent la même masse totale de particules bidisperses (388g). Dans le mode opératoire expérimental permettant de fabriquer les échantillons denses monodisperses, les échantillons doivent être beaucoup tassés avec la tige-marteau pour atteindre la compacité initiale voulue. Par contre, les mélanges sont beaucoup plus faciles à mettre en place dans le moule et ne nécessitent pas de tassement. Cette constatation vaut également pour les simulations numériques. Ainsi, tous les échantillons bidisperses possèdent sensiblement le même indice des vides que l'échantillon monodisperse, en revanche, ils ne sont pas mis en place avec la même intensité de compactage. La Figure 4 montrent respectivement les différents mélanges expérimentaux et numériques après la phase



**Figure 4.** Images des mélanges bidisperses numériques et expérimentaux de différentes proportions : 1 :5 ; 1 :2 ; 1 :1 ; 2 :1.

de consolidation et avant la phase de cisaillement. La Figure 5 présente les courbes déviatoriques de différents mélanges expérimentaux et numériques, les phénomènes de stick-slips sont négligés dans les diagrammes expérimentaux car un point sur 200 est représenté. Dans ces deux courbes, on constate que le pic déviatorique change peu en fonction de la composition des mélanges. Ensuite on voit que les contraintes déviatoriques au pic des quatre



**Figure 5.** Courbes déviatoriques pour différentes proportions de mélanges des billes sous pression de confinement de 100kPa (a) Essais expérimentaux ; (b) Simulations numériques

mélanges sont beaucoup plus faibles que pour l'échantillon monodisperse dense. En revanche, la proportion du mélange influence très peu la contrainte déviatorique, pour les mélanges étudiés.

#### 4. Conclusions et perspectives

Ce travail de recherche concerne une étude du comportement au cisaillement des matériaux granulaires homogènes et hétérogènes. Les travaux sont réalisés sur des billes de verre et comportent à la fois des essais triaxiaux de laboratoire et des simulations numériques de l'essai triaxial en DEM. D'un point de vue expérimental, les essais sont tout d'abord réalisés sur des échantillons homogènes denses. Ensuite, nous avons étudié certains cas hétérogènes notamment des mélanges bidisperses de différentes proportions. D'un point de vue numérique, une condition cylindrique paroi rigide basée sur la formule de Lamé et une série de procédures pour modéliser l'essai triaxial de révolution ont été proposées. La comparaison des résultats expérimentaux et numériques pour des échantillons denses et pour les mélanges bidisperses montrent que les résultats numériques concordent bien avec les résultats expérimentaux obtenus. Notre étude montre que la condition limite cylindrique paroi rigide appliquée dans cette étude, beaucoup plus simple à implémenter qu'une condition membrane, permet déjà une représentation satisfaisante du comportement global des matériaux. De plus, l'outil numérique développé a permis d'étudier différentes influences des paramètres microscopiques sur le comportement macroscopique globale des matériaux [WU 15a].

Une première approche des empilements hétérogènes est représentée par des mélanges de particules bidisperses. Les résultats montrent que la présence de billes de tailles différentes tend à augmenter la densité de l'empilement à l'issue de la phase de sédimentation, ce qui rend inutile la compaction de l'échantillon pour obtenir l'indice des vides visé. La résistance au cisaillement des échantillons diminue ainsi par rapport à celle des échantillons homogènes. Du coup, le comportement des échantillons homogènes denses ressemble plutôt à celui des échantillons hétérogènes moyennement denses. L'étude de l'influence de l'intensité de la compaction (et pas seulement de l'indice des vides initial) dans la prochaine étape permettra de préciser les notions d'empilement dense ou moyennement dense, et de relier le comportement obtenu à l'état de compacité maximale de l'empilement. Par la suite, l'influence de la présence d'hétérogénéités de propriétés mécaniques ou de forme des particules sur le comportement au cisaillement seront également explorées.

#### 5. Bibliographie

- [ADJ 03] ADJEMIAN F., Stick-slip et transition de broutage dans les essais triaxiaux sur billes de verre, Thesis, 2003.  
 [BEC 07] BECQUART F., Première approche du comportement mécanique d'un milieu granulaire issu d'un machefer d'incinération d'ordre menageres : valorisation en technique routiere, Thesis, 2007.



- [CHE 08] CHEUNG G., SULLIVANT C. O., « Effective simulation of flexible lateral boundaries in two- and three-dimensional DEM simulations », *Particuology*, vol. 6, n° 6, p. 483-500, 2008, 388TP Times Cited :16 Cited References Count :32.
- [CUI 10] CUI L., O'SULLIVANT C., O'NEILL, « An analysis of the triaxial apparatus using a mixed boundary three-dimensional discrete element model », *Geotechnique*, 2010.
- [CUN 78] CUNDALL. P., O.STRACK, « The distinct element method as a tool for research in granular media », *Report to NSF*, vol. Part I, 1978.
- [DON 12] DONDI G., SIMONE A., VIGNALI V., G.MANGANELLI, « Numerical and experimental study of granular mixes for asphalts », *Powder Technology*, vol. 232, p. 31-40, 2012, 023OM Times Cited :4 Cited References Count :26.
- [ELL 10] ELLENBERGER J. P., *Piping and Pipeline Calculations Manual*, 2010.
- [HEL 07] HELLO B. L., Renforcement par geosynthetiques des remblais sur inclusions rigides, etude experimentale en vraie grandeur et analyse numerique, Thesis, 2007.
- [HOA 11] HOANG M. T., Frottement saccade dans les materiaux granulaires modeles, Thesis, 2011.
- [HOL 91] HOLTZ R., KOVACS W., *Introduction a la geotehcinque*, 1991.
- [INC 10] INC I. C. G., PFC3D : Particle Flow Code in 3Dimensions, Version 3.0, Report, 2010.
- [LE 11] LE N. H., Contribution a la modelisation du comportement mecanique d'un materiau heterophase rematerialise issu d'un machefer d'incineration d'ordures menageres : valorisation en Genie civil, PhD thesis, Ecole des mines de douai et universite d'artois, 2011.
- [PIZ 14] PIZETTE P., REMOND S., « Experimental and numerical studies of the effect rolling friction for sandpile formation », *WCCM XI-ECCM V*, 2014.
- [POS 05] POSCHEL T., SCHWAGER T., *Computational Granular Dynamics*, Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [REM 10] REMOND S., « Dem simulation of small particles clogging in the packing of large beads », *Physica A*, vol. 389, p. 4485-4496, 2010.
- [SUL 09] SULLIVANT C. O., CUI L., « Micromechanics of granular material response during load reversals : Combined DEM and experimental study », *Powder Technology*, vol. 193, n° 3, p. 289-302, 2009, 459HT Times Cited :16 Cited References Count :15.
- [SUL 11] SULLIVANT C. O., *Particulate Discrete Element Modelling*, CRC Press, 2011.
- [WID 66] WIDOM B., « Random Sequential Addition of Hard Spheres to a Volume », *The Journal of Chemical Physics*, vol. 44, n° 10, p. 3888-3894, 1966.
- [WU 15a] WU K., Etude du cisaillemenmateri materiaux granulaires homogenes et heterogenes par experimentation et simulation de l'essai triaxial, PhD thesis, Universite Lille 1 et Ecole des mines de douai, 2015.
- [WU 15b] WU K., PIZETTE P., BECQUART F., « Experimental and numerical study of the shear behavior of mono-sized glass beads by triaxial test », 2015.