



HAL
open science

Analyse de la variabilité des propriétés macroscopiques à la rupture d'un matériau quasi-fragile au moyen d'une modélisation microscopique discrète

Maxime Vassaux

► To cite this version:

Maxime Vassaux. Analyse de la variabilité des propriétés macroscopiques à la rupture d'un matériau quasi-fragile au moyen d'une modélisation microscopique discrète. Rencontres Universitaires de Génie Civil, May 2015, Bayonne, France. hal-01167577

HAL Id: hal-01167577

<https://hal.science/hal-01167577>

Submitted on 24 Jun 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse de la variabilité des propriétés macroscopiques à la rupture d'un matériau quasi-fragile au moyen d'une modélisation microscopique discrète

Maxime Vassaux¹

¹ LMT-Cachan, ENS-Cachan/CNRS/UPMC, 61 avenue du Président Wilson, 94230 Cachan (vassaux@lmt.ens-cachan.fr)

Prix Jeunes Chercheurs « René Houpert »

RÉSUMÉ. L'homogénéisation du comportement à la rupture des matériaux quasi-fragiles pour la formulation de modèles macroscopiques est un passage nécessaire vers la simulation de structures du génie civil à des temps raisonnables. Néanmoins, la formulation de tels modèles implique l'introduction de nombreux paramètres, dont l'identification s'avère coûteuse. Il est proposé dans ce travail, de s'affranchir d'une part importante de l'expérimentation en laboratoire en exploitant une modélisation microscopique du matériau, notamment capable de reproduire les effets d'échelles, dont l'identification est par conséquent moins coûteuse. Le papier illustre la démarche d'identification des propriétés macroscopiques d'un volume donné de matériau quasi-fragile à la rupture. En s'appuyant sur le faible coût de ces simulations, une analyse de la variabilité de ces propriétés est aussi menée, et met notamment en avant l'origine structurelle de leur aspect aléatoire.

ABSTRACT. Homogenization of the failure behaviour of quasi-brittle materials to formulate macroscopic models is mandatory step towards the simulation of complete, massive, civil engineering structures within a reasonable time. Nevertheless, formulation of such models implies introducing numerous parameters, which calibration is highly demanding. The present work proposes to get rid from a significant part of the laboratory experimentation taking advantage of a microscopic model the material able to reproduce scale effects, which calibration is consequently less expensive. This paper illustrates the calibration procedure of failure macroscopic properties of a homogenized volume of quasi-fragile material. Drawing on the reduced cost and high repeatability of such simulations, a variability analysis of these macroscopic properties is also realized leading to a structural justification to their random nature.

MOTS-CLÉS: réseau de poutres, éléments discrets, quasi-fragile, variabilité, rupture.

KEYWORDS: lattice, discrete elements, quasi-brittle, variability, failure.

1. Introduction

Les modèles macroscopiques homogénéisant le comportement d'un matériau à une échelle suffisamment grande pour éviter toute distinction des différentes phases en présence sont d'un intérêt important dans l'objectif de mener à bien des calculs à l'échelle de la structure. Cet intérêt est d'autant plus significatif dans le domaine du génie civil, où les structures sont de grandes dimensions et le matériau le plus utilisé, le béton, est hautement hétérogène. En conséquence de cette hétérogénéité, les modèles macroscopiques de béton, et plus largement de matériaux quasi-fragiles, se doivent d'intégrer de nombreux phénomènes mécaniques, le plus souvent induits par l'apparition de fissures.

Chaque phénomène à reproduire introduit dans le modèle macroscopique un certain nombre de paramètres matériaux, dont l'identification s'avère rapidement coûteuse en termes d'essais à réaliser. En effet, le comportement à rupture du matériau introduit des paramètres fortement variables, d'ores et déjà d'une formulation de béton à une autre, mais aussi au sein d'une même formulation, d'un volume de matériau homogénéisé à un autre. À cette première source de variabilité s'ajoute une variabilité induite par les effets d'échelles. Les modèles macroscopiques reproduisent encore difficilement cette caractéristique des matériaux quasi-fragiles, l'identification des paramètres est donc aussi dépendante des dimensions du volume de matériau homogénéisé.

Sur la base d'un modèle microscopique [VAS 15] fondé sur un modèle particulaire accompagné d'un réseau de poutres d'Euler-Bernoulli aux propriétés à la rupture aléatoires, il est proposé de réduire le coût expérimental de la mise en œuvre de modèles macroscopiques. Le modèle microscopique exploité, présente la capacité de reproduire les effets d'échelles caractéristiques des matériaux quasi-fragiles, en introduisant des aspects aléatoires locaux à la fois dans le maillage des particules discrètes rigides, réalisé à partir d'un diagramme de Voronoi et dans le tirage des propriétés à la rupture du réseau de poutres réalisé sans corrélation spatiale. Ainsi le modèle microscopique est identifié simplement à partir des réponses macroscopiques d'un essai de flexion trois-points et d'un essai de fendage, à une unique dimension d'éprouvette. Le modèle microscopique a été validé, pour une multitude de cas de charge locaux, incluant, traction, compression, cisaillement ainsi que des cas de charge quasi-structurels [VAS 14].

La démarche d'identification des propriétés macroscopiques à la rupture – limite élastique et énergie de fissuration volumique – d'un béton à partir du modèle microscopique est ici illustrée. Le modèle microscopique a préalablement été calibré sur la campagne d'essais de [GRE 13] pour une taille de particules, donc de poutres, moyenne de 2 mm. Le faible coût des simulations menées avec le modèle microscopique est ensuite mis à profit pour étudier la variabilité des propriétés macroscopiques. Dans l'ensemble de ce travail, les simulations réalisées à l'aide d'un modèle discret sont effectuées en 2D.

2. Identification des propriétés macroscopiques à la rupture

L'identification est entièrement réalisée sur un essai de traction uni-axiale en comparant les comportements d'un élément fini cubique de 0.1 m de côté simulés avec chaque formulation du modèle continu, et le comportement moyen sur 200 réalisations d'un carré de 0.1 m de côté simulé avec le modèle discret.

Après avoir identifié les paramètres élastiques macroscopiques du modèle continu ($E = 37$ GPa, $\nu = 0.21$) par analyse inverse, les paramètres contrôlant le comportement à la rupture sont identifiés en réalisant une équivalence en énergie entre les deux modèles.

Dans le modèle discret, l'énergie totale E_{tot} introduite dans l'éprouvette à un instant donné se décompose en une énergie élastique E_E , une énergie dissipée par fissuration E_F^d et une énergie dissipée par friction E_μ^d , l'énergie cinétique reste nulle puisque la vitesse de déformation est négligeable:

$$E_{tot} = E_E + E_F^d + E_\mu^d \quad (1)$$

Puisque l'identification est réalisée sur un essai de traction, l'énergie dissipée par friction reste négligeable tout au long de l'essai.

À la rupture, l'énergie totale est donc égale à l'énergie dissipée par fissuration.

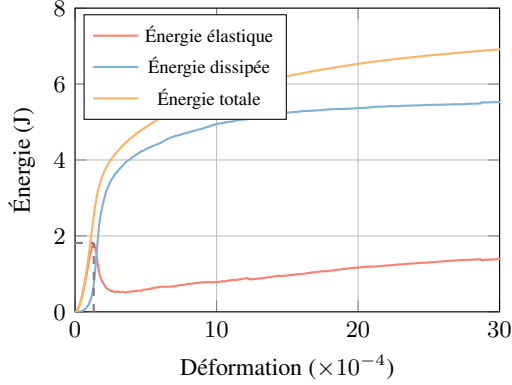
L'énergie totale E_{tot} est obtenue à partir de l'aire sous la courbe de la contrainte en fonction de la déformation de l'éprouvette issue de simulations discrètes (fig .2).

L'énergie dissipée par fissuration E_F^d est calculée incrémentalement selon [RIN07], comme suit:

$$E_F^{d,t+1} = E_F^{d,t} + \frac{1}{2} \left(T_{\underline{u}^{t+1}} \cdot \underline{K}_{coh}^t \cdot \underline{u}^t - T_{\underline{u}^t} \cdot \underline{K}_{coh}^{t+1} \cdot \underline{u}^{t+1} \right) \quad (2)$$

Cette expression est la somme de l'énergie élastique contenue dans chaque poutre du lattice ayant rompu, à laquelle est soustraite l'énergie redistribuée dans le *lattice*, au moment de la rupture de chaque poutre.

L'énergie élastique est calculée comme la différence entre l'énergie totale et l'énergie dissipée par fissuration.



(a) évolution moyenne des énergies lors d'un essai de traction



(b) faciès de fissuration en traction pour $\epsilon = 3.0 \times 10^{-3}$

Figure 1 – Comportement à la rupture issu de la modélisation microscopique discrète.

L'évolution de l'énergie élastique E_E^d (fig.1a) et la réponse en traction (fig.2) mettent en évidence des ponts de fissures (crack face bridging) [SCH 92]. Ce phénomène consiste en une superposition de plusieurs fissures macroscopiques dans la partie dégradée de l'éprouvette. Ici en figure 1b, deux fissures se sont propagées, ces fissures ne coïncidant pas, l'éprouvette continue de se déformer sans rompre. Bien que la déformation atteigne 3.0×10^{-3} , la rupture complète de l'éprouvette n'est toujours pas observée (fig. 2). Un regain d'énergie élastique est observé, puisque l'éprouvette continue d'accumuler de l'énergie, sans que le ligament de matériau à la jonction entre les deux fissures ne cède (fig. 1a). Ce regain d'énergie élastique semble quelque peu exagéré. Bien que l'apparition de ponts de fissures soit avérée expérimentalement, il est raisonnable de penser que ce ligament de matériau aurait dû rompre pour des déformations plus faibles. Pour la suite de l'identification, afin de contourner cette limite du modèle discret, il sera fait abstraction de l'écart final entre l'énergie totale et l'énergie dissipée. L'énergie en théorie dissipée par fissuration à la rupture $E_{F,0}^d$ sera prise comme l'énergie dissipée par fissuration à la fin de l'essai : $E_F^d (\epsilon = 3.0 \times 10^{-3})$, bien que la rupture complète n'ait pas encore eu lieu.

2.1. Identification de la limite élastique

Une équivalence en énergie élastique volumique (3) est effectuée pour déterminer ϵ_0 . Ce paramètre décrit la limite de déformation élastique, qui est associée au pic d'énergie élastique $E_{E,0}$ atteint avant la propagation de la fissuration (en trait pointillé sur la figure 1a), estimé ici à : $E_{E,0} = 2.023 \text{ J}$.

$$\frac{E_{E,0}}{V^d} = Y_0 = \frac{1}{2} E \epsilon_0^2 \quad (3)$$

avec V^d le volume de l'éprouvette discrète, ici, $0.1 \times 0.1 \times 1.0 \text{ m}^3$.

Soit :

$$\epsilon_0 = \sqrt{\frac{2E_{E,0}}{V^d E}} \quad (4)$$

La limite de déformation élastique vaut alors : $\epsilon_0 = 1.042 \times 10^{-4}$.

2.2. Identification de l'énergie de fissuration

Dans un calcul par la méthode des éléments finis, le comportement du matériau est introduit sous la forme d'une réponse en contraintes et en déformation, on ne peut donc que contrôler l'énergie de fissuration volumique $g_{F,0}^c$ (aire sous la réponse). Une équivalence en énergie surfacique (5) est effectuée pour déterminer $g_{F,0}^c$ à partir de l'énergie dissipée par fissuration à la rupture, estimée ici à : $E_{F,0}^d = 5.683 \text{ J}$.

$$\frac{E_{F,0}^d}{S^d} = g_{F,0}^c \times h^c \tag{5}$$

avec S^d la section de l'éprouvette discrète dans le plan de la fissure, ici, $0.1 \times 1.0 \text{ m}^2$, h^c la dimension de l'élément fini dans la direction orthogonale au plan de fissure, ici 0.1 m .

L'énergie $g_{F,0}^c$ vaut alors : 568.3 J.m^{-3} .

La réponse obtenue avec le modèle continu identifié sur le modèle discret par équivalences en énergies est comparée à la réponse obtenue avec le modèle discret en figure 2.

Compte tenu de cette identification du comportement à la rupture du modèle continu uniquement basée sur une équivalence énergétique, la similarité des réponses obtenues permet de conclure que les modèles discrets et continus ne sont pas si distincts énergétiquement parlant. Cependant, plusieurs disparités de comportement peuvent être notées :

- Le pic de résistance et le début de l'initiation de la dégradation coïncident pour le modèle d'endommagement, contrairement au modèle discret, ce qui explique la surestimation de la limite de déformation élastique.

- La fissuration se propage d'abord rapidement, puis ralentit lorsque des ponts de fissures apparaissent, pour le modèle discret ; inversement, pour le modèle d'endommagement, la propagation de la dégradation semble plus régulière, ainsi à énergie dissipée équivalente, la déformation à la rupture est plus faible. Une évolution de la fonction de consolidation asymptotique comme proposée par [MAZ 89] pourrait permettre de résoudre ce problème.

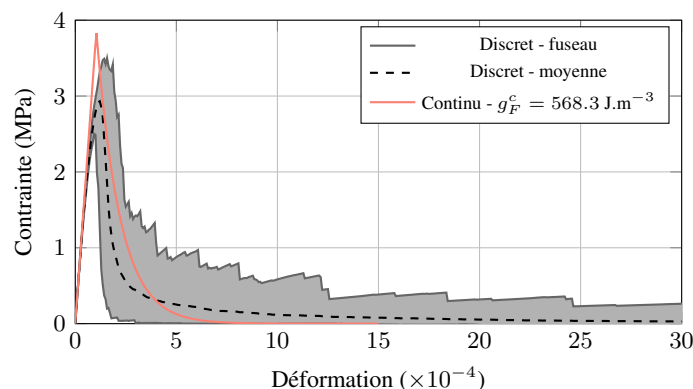


Figure 2 – Réponses en traction des modèles continus et discret.

3. Variabilité des paramètres

Bien qu'en théorie un VER est défini tel que les propriétés mécaniques, et donc la répartition des défauts, soient identiques d'un volume à un autre, en pratique, il est fréquent de considérer qu'une incertitude persiste. Ainsi un aléa des paramètres du modèle de comportement est introduit. Ce choix de description présente aussi l'avantage de provoquer la localisation de la fissuration, dans une ou plusieurs zones de résistance faible.

En admettant que l'aléa sur la valeur des paramètres soit introduit simplement au moyen d'une distribution normale, il convient de déterminer les propriétés de ces distributions. Une étude statistique est donc menée sur les 200 réalisations de l'essai de traction.

3.1. Observations

Les histogrammes des énergies $E_{E,0}^d$ et $E_{F,0}^d$ (fig. 3) permettent de déduire les moyennes et les coefficients de variation de chaque paramètre (1).

$E_{E,0}^d$		$E_{F,0}^d$		ϵ_0		$g_{F,0}^c$	
\bar{x} (J)	c_v	\bar{x} (J)	c_v	\bar{x}	c_v	\bar{x} (J.m ⁻³)	c_v
2.023	0.151	5.683	0.278	1.042×10^{-4}	0.076	568.3	0.455

Tableau 1 – Moyenne et coefficient de variation des résultats de l’essai de traction.

La variabilité du pic d’énergie élastique est faible comparativement à la variabilité de l’énergie dissipée à la rupture. En conséquence, la variabilité du paramètre ϵ_0 est aussi limitée, par contre, la variabilité de $g_{F,0}^c$, fonction à la fois de $E_{E,0}^d$ et de $E_{F,0}^d$, est importante. La variabilité de $g_{F,0}^c$ est d’ailleurs plus élevée que celle de $E_{F,0}^d$, ce qui laisse présumer que les variabilités de $E_{E,0}^d$ et de $E_{F,0}^d$ ne sont pas corrélées. Puisque $g_{F,0}^c$ est fonction de ces deux énergies, la variabilité de $g_{F,0}^c$ est fortement dépendante de leur covariance. Effectivement, la mesure de la covariance des deux énergies est faible $cov(E_{E,0}^d, E_{F,0}^d) = 0.047$, soit un coefficient de corrélation $\rho = 0.103$. Il n’y a donc pas lieu de considérer qu’une résistance élastique élevée implique une dissipation à la rupture importante.

À noter que la variabilité du module de Young macroscopique E est nulle d’une réalisation discrète à une autre. Les réalisations sont effectivement simulées pour une densité de particules à laquelle les propriétés élastiques de l’éprouvette discrète sont convergées, et aucune variabilité du module d’Young des poutres du lattice n’est introduite.

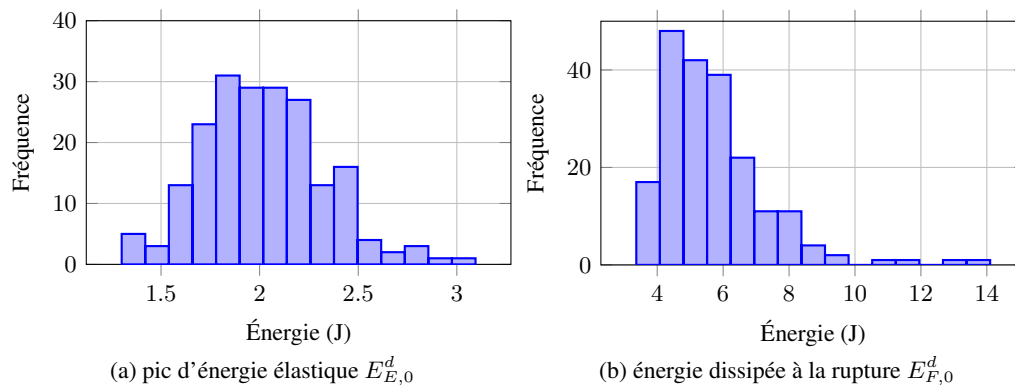


Figure 3 – Histogrammes des énergies élastiques et dissipées des 200 réalisations de l’essai de traction.

Les histogrammes des énergies $E_{E,0}^d$ et $E_{F,0}^d$ (fig. 3) ont été obtenus pour 200 réalisations de l’essai de traction pour lesquels le maillage (diagramme de Voronoi avec aléa de la position des nœuds) ainsi que les seuils de rupture des poutres du lattice (distributions de weibull) présentent une certaine variabilité. Il est intéressant de constater que, pour un tel échantillon de réalisations, la distribution de $E_{E,0}^d$ semble tendre vers une loi normale centrée, et s’éloigne donc de l’aspect statistique introduit localement; alors que la distribution de $E_{F,0}^d$ tend vers une distribution non-centrée dont le maximum de probabilité est inférieur à la médiane de la distribution, ce qui pourrait être considéré comme une distribution log-normale ou de Weibull. Il est à noter que des observations similaires, concernant la limite élastique, ont été effectuées par [WAN 15] en simulant explicitement la morphologie mésoscopique du matériau.

De manière générale, il pourrait être recommandé, dans la mesure où des distributions probabilistes des paramètres du modèle continu contrôlant l’énergie élastique et l’énergie de fissuration à la rupture sont employées, d’utiliser respectivement une distribution normale et une distribution de Weibull (ou log-normale).

Par ailleurs, les types des distributions probabilistes associées aux énergies macroscopiques peuvent être interprétées de la manière suivante :

- il est aussi probable de rencontrer un VER à haute limite qu’un VER à basse limite élastique. L’énergie élastique serait donc caractérisée par la résistance moyenne des poutres locales ;

- il est plus probable de rencontrer un VER à basse énergie à la rupture qu’un VER à haute énergie à la rupture. L’énergie à la rupture serait donc davantage influencée par la probabilité de rencontrer des poutres faibles, autrement dit la théorie du “maillon le plus faible” retranscrite macroscopiquement par la loi de Weibull. Conclusion somme toute cohérente, puisque le trajet de fissuration, et notamment la tortuosité, correspondent au trajet nécessitant un minimum d’énergie.

3.2. Influence de l'incertitude microscopique

Il est intéressant de regarder si ces différents constats sont influencés, d'une part par la variabilité du maillage, et d'autre part par la forme de la distribution des seuils de rupture locaux. Les histogrammes des énergies $E_{E,0}^d$ et $E_{F,0}^d$ sont donc à nouveau construits à partir des résultats de plusieurs réalisations de l'essai de traction, mais cette fois-ci sur 1000 réalisations à maillage strictement identique, pour des distributions des seuils uniforme, normale (tronquée de ses valeurs négatives) et de Weibull. Les premier et second moments des distributions normales et uniformes des seuils sont calibrés de manière à obtenir une réponse en traction identique pour chaque distribution, avec un pic de résistance choisi à 3 MPa, et un comportement post-pic quasi-

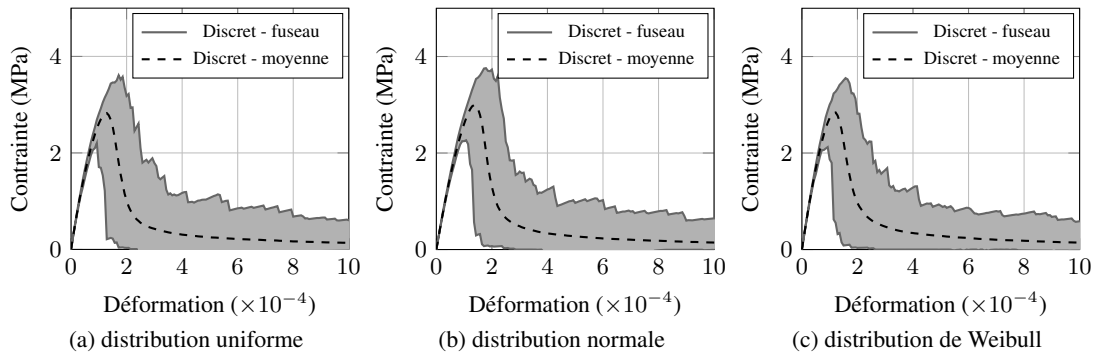
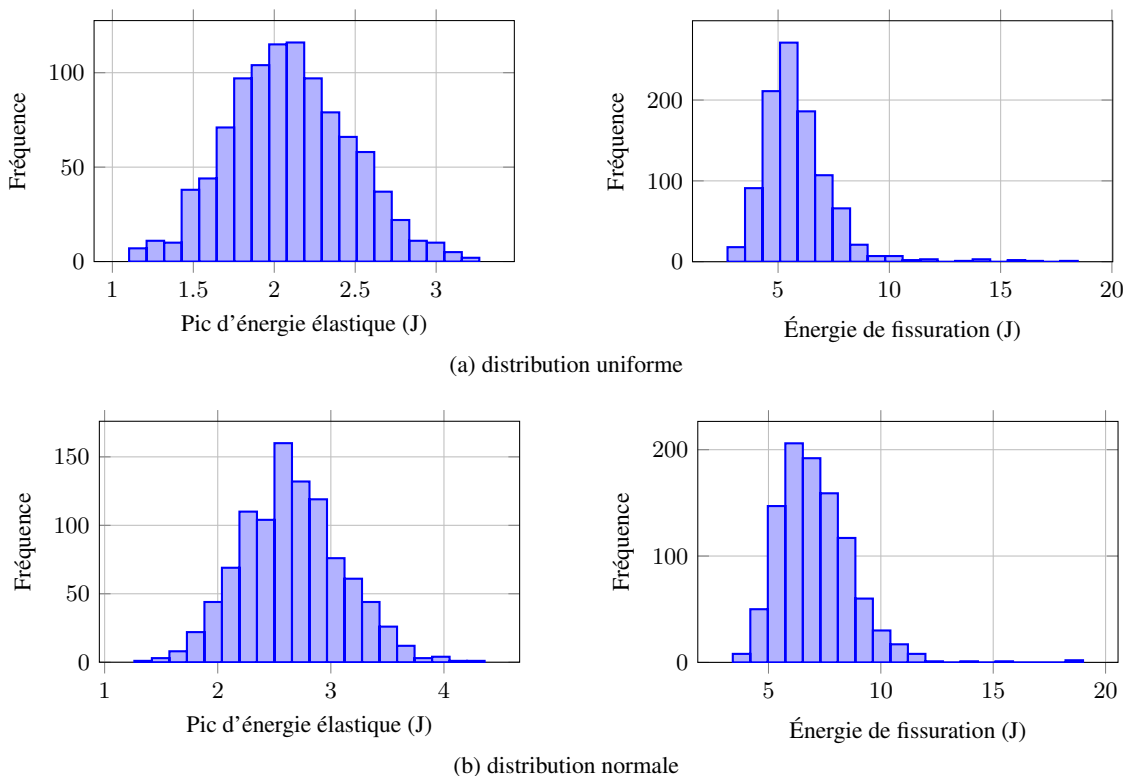


Figure 4 – Influence de la forme de la distribution des seuils de rupture sur la réponse moyenne de traction.

fragile, ici affichant une dissipation de 60 J.m^{-2} . Les premier et second moments des distributions de Weibull des seuils, sont conservés tels qu'identifiés auparavant. Les réponses obtenues sont présentées en figure 4.

Les histogrammes des énergies $E_{E,0}^d$ et $E_{F,0}^d$ pour chaque forme de distribution sont présentés en figure 5. La réalisation des essais de traction sur un maillage identique et la modification de la distribution des seuils de rupture locaux ne semble pas influencer les histogrammes. Il apparaît que les observations effectuées sur la forme de la distribution du pic d'énergie élastique et de l'énergie de fissuration à la rupture sont valables indépendamment de ces deux aspects contrôlant la variabilité de la structure de l'éprouvette. La forme de la distribution des seuils locaux et les formes des distributions des énergies macroscopiques ne semblent pas liées. Il n'y aurait donc pas transfert de la distribution des incertitudes de l'échelle fine à l'échelle macroscopique.



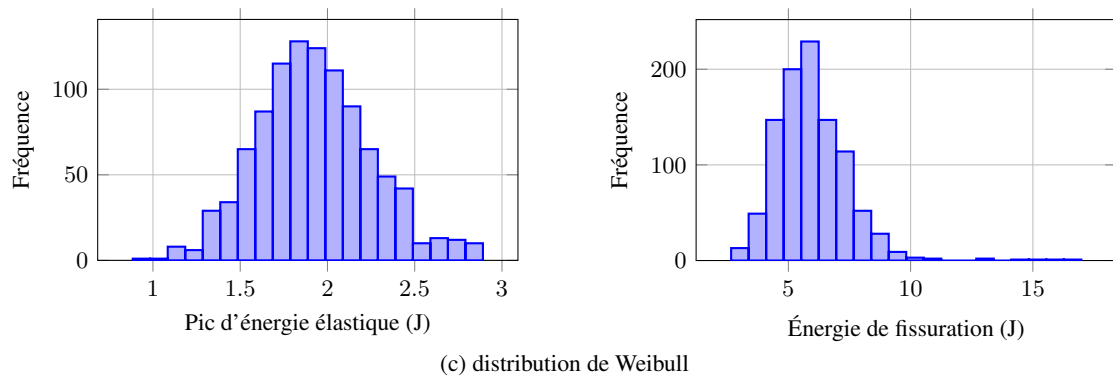


Figure 5 – Influence de la forme de la distribution des seuils de rupture sur la variabilité du pic d'énergie élastique et de l'énergie de fissuration en traction.

La question de la nécessité de l'emploi d'une loi de Weibull localement pour la distribution des seuils de rupture peut alors se poser. L'emploi d'une loi normale ou de Weibull semble plus justifiée qu'une loi uniforme. En effet, l'incertitude sur la valeur des seuils de rupture locaux n'est pas suffisante pour qu'il ne soit pas possible de dégager une valeur dominante. En comparaison à la loi normale, la loi de Weibull présente l'avantage d'être par définition positive. Cependant elle implique des hypothèses supplémentaires sur la répartition de l'incertitude par rapport à une loi normale tronquée, qui finalement ne s'avèrent pas nécessaires, au regard des résultats obtenus sur l'essai de traction.

Les conclusions précédentes sur la forme et la signification des distributions de $E_{E,0}^d$ et $E_{F,0}^d$ peuvent donc être tirées indépendamment de la distribution locale choisie et de l'aléa introduit par la discrétisation de l'éprouvette.

4. Discussion du choix de l'essai d'identification

Toujours dans l'objectif de réaliser des calcul de structures, la question peut se poser de savoir si l'énergie de fissuration en traction, et plus largement l'essai de traction, est la plus adaptée pour quantifier la dissipation énergétique du volume de matériau décrit par un élément fini.

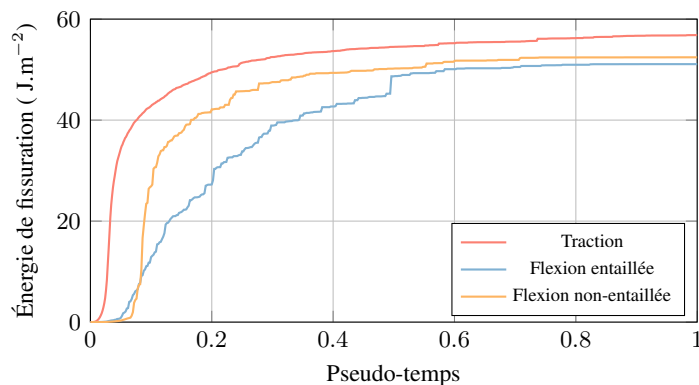


Figure 6 – Évolution moyenne des énergies de fissuration obtenues avec le modèle discret selon l'essai.

D'une part, il n'est pas certain qu'une seule fissure se propage dans l'élément, une identification du comportement par rapport à l'énergie nécessaire pour ouvrir une unique fissure est donc contestable. Néanmoins, il n'est pas plus certain qu'une unique fissure se propage lors d'un essai de traction, comme l'illustre l'apparition de ponts de fissures. Sur ce point, le choix de l'énergie que doit avoir dissipé un élément fini à la rupture, ne peut être effectué qu'en connaissance des dimensions du volume qu'il décrit, du chargement appliqué sur la structure, et des modes de dégradation qui en découlent.

D'autre part, il faut dissocier l'énergie nécessaire à la propagation, et l'énergie nécessaire à l'initiation puis à la propagation d'une fissure. Selon la manière dont l'élément fini est situé dans le maillage de la structure, il se peut qu'il ne soit que simplement traversé par une fissure initiée auparavant, dans un autre élément. Ainsi tenir compte de l'énergie dissipée pour initier la fissure n'est peut-être pas nécessaire.

Des essais de flexion trois-points sur une poutre entaillée à mi-hauteur ou non, peuvent être envisagés, pour isoler respectivement, la propagation seule, ou l'initiation et la propagation d'une unique fissure.

Une comparaison de l'énergie de fissuration obtenue pour chacun de ces essais est effectuée en figure (6). Les énergies de fissuration pour chaque essai sont données en fonction du pseudo-temps, la rupture complète dans chaque configuration étant survenue à l'instant précédent ($t=1$). Les nuances entre chaque essai ne sont pas significatives, et notamment entre les essais de flexion trois-points sur poutres entaillée et non-entaillée. Le coût énergétique supplémentaire nécessaire à l'initiation d'une fissure serait donc faible, ici : $\delta E_{F,0} = 1.35 \text{ J.m}^{-2}$ (écart final entre les courbes jaune et bleue), autrement dit négligeable. Comme attendu, l'énergie de fissuration mesurée lors de l'essai de traction est plus élevée, du fait de la multi-fissuration de l'éprouvette.

5. Conclusions

L'utilisation d'un modèle microscopique comme un outil d'expérimentation numérique a permis d'identifier la limite élastique ainsi que l'énergie dissipée d'un volume homogénéisé de matériau quasi-fragile. Grâce à la capacité du modèle microscopique à reproduire les effets d'échelles, il est ainsi possible d'extrapoler la valeur de ces propriétés à la rupture, quelque soit le volume homogénéisé de matériau, et ce sans nécessiter la recalibration du modèle. Une économie substantielle d'essais en laboratoire peut ainsi être réalisée.

Le modèle microscopique a ensuite été mis à profit pour étudier la variabilité des propriétés macroscopiques à rupture sur un grand nombre de réalisation de l'essai de traction à faible coût. Deux observations ont pu être effectuées, d'une part la variabilité de la limite élastique et de l'énergie de fissuration d'un volume homogénéisé à un autre semblent suivre des distributions aléatoires spécifiques, qui se rapprochent, respectivement d'une distribution normale et d'une distribution de Weibull. D'autre part, cette première observation ne semble pas découler des aspects probabilistes introduits localement dans le modèle microscopique. En effet, cette observation a été réalisée avec ou sans variabilité du maillage, et pour différentes distributions des propriétés locales à la rupture. Il semblerait donc que la variabilité des propriétés macroscopiques à la rupture soit avant tout un effet structurel.

Enfin, une courte discussion a été proposée sur l'essai à retenir pour identifier l'énergie de fissuration du volume homogénéisé, en observant notamment l'influence du coût énergétique de l'initiation de la fissuration. Une faible dépendance au dispositif employé ainsi qu'à la présence d'entaille a finalement été observée.

6. Bibliographie

- [DEL08] DELAPLACE A., DESMORAT R., « Discrete 3D model as complimentary numerical testing for anisotropic damage », *International Journal of Fracture*, vol. 148, p. 115-128, 2008.
- [VAS15] VASSAUX M., RICHARD B., RAGUENEAU F., MILLARD A., DELAPLACE A., « Lattice models applied to cyclic behavior description of quasi-brittle materials: advantages of implicit integration », *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 39, no 7, p. 775-798, 2015.
- [VAS14] VASSAUX M., RICHARD B., RAGUENEAU F., MILLARD A., « Compressive behavior of a lattice discrete element model for quasi-brittle materials », *Computational Modelling of Concrete Structures*, vol. 1, p. 335-344, 2014.
- [MAZ89] MAZARS J., PIJAUDIER-CABOT G., « Continuum damage theory-application to concrete », *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 115, no 2, p. 345-365, American Society of Civil Engineers, 1989.
- [RIN07] RINALDI A., LAI Y.C., « Statistical damage theory of 2D lattices: Energetics and physical foundations of damage parameter », *International Journal of Plasticity*, vol. 23, p. 1796-1825, 2007.
- [SCH92] SCHLANGEN E., VAN MIER J. G. M., « Experimental and numerical analysis of micromechanisms of fracture of cement-based composites », *Cement and Concrete Composites*, vol. 14, p. 105-118, 1992.
- [WAN15] WANG X. F., YANG Z. J., YATES J. R., JIVKOV A. P., ZHANG C., « Monte Carlo simulations of mesoscale fracture modelling of concrete with random aggregates and pores », *Construction and Building Materials*, vol. 75, p. 35- 45, Elsevier, 2015.