



HAL
open science

MODÉLISATION ET SIMULATION DU TRAFIC ROUTIER PAR RÉSEAUX DE PETRI LOTS TRIANGULAIRES

Radhia Gaddouri, Leonardo Brenner, Isabel Demongodin

► **To cite this version:**

Radhia Gaddouri, Leonardo Brenner, Isabel Demongodin. MODÉLISATION ET SIMULATION DU TRAFIC ROUTIER PAR RÉSEAUX DE PETRI LOTS TRIANGULAIRES . MOSIM 2014, 10ème Conférence Francophone de Modélisation, Optimisation et Simulation, Nov 2014, Nancy, France. hal-01166684

HAL Id: hal-01166684

<https://hal.science/hal-01166684>

Submitted on 23 Jun 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation et simulation du trafic routier par Réseaux de Petri Lots Triangulaires

R. GADDOURI, L. BRENNER, I. DEMONGODIN

Aix Marseille Université, CNRS, ENSAM, Université de Toulon, LSIS UMR 7296, 13397, Marseille, France
radhia.gaddouri@lsis.org, leonardo.brenner@lsis.org, isabel.demongodin@lsis.org

RÉSUMÉ : Cet article décrit comment l'évolution dynamique du trafic routier peut être prédite au niveau mésoscopique par Réseaux de Petri Lots Triangulaires (RdPLots Triangulaires). Dans ce contexte, nous comparons la modélisation et l'analyse du trafic routier par RdPLots Triangulaires avec le Modèle Cellulaire de Transmission (CTM). Les résultats de simulation de deux formalismes sur un exemple d'autoroute montrent l'efficacité, la facilité et la précision du formalisme événementiel RdPLots Triangulaire par rapport au CTM; au regard de la réduction du nombre de pas de simulation et de la variation de la longueur de congestion.

MOTS-CLÉS : Réseaux de Petri Lots, Modélisation, Simulation, Congestion, CTM, Trafic routier

1 INTRODUCTION

De nombreuses recherches sont menées pour contrôler et prédire la congestion dans les systèmes de transport routier par des techniques récentes telles que la limitation variable de la vitesse, les systèmes de régulation des rampes d'accès (Ng *et al.* 2013) (Canudas, 2011). Cela a abouti à un large éventail de modèles (Hoogendoorn *et al.* 2001) décrivant les différents aspects du trafic routier: l'approche microscopique repose sur une description du comportement individuel des véhicules; l'approche macroscopique, basée sur l'analogie avec la théorie hydrodynamiques, étudie la circulation collective des véhicules; l'approche mésoscopique se situe au niveau intermédiaire de détails entre l'approche microscopique et macroscopique. Les véhicules et le comportement des conducteurs ne sont pas étudiés d'une manière individuelle mais plutôt par agrégation. Au niveau mésoscopique, il existe très peu de modèles événementiels pour la modélisation et la simulation de l'évolution dynamique du trafic routier (Ng *et al.* 2013). Nous citons le Modèle Cellulaire de Transmission (CTM) (Daganzo, 1994), l'un parmi les modèles les plus connus pour la modélisation et la simulation du trafic routier. La revue de la littérature révèle que le CTM présente plusieurs avantages notables. Le modèle est relativement simple et suffisamment précis pour planifier des d'analyse fines. En outre, son caractère macroscopique/mésoscopique conduit à une efficacité de calcul (Dong *et al.* 2012).

Toutefois, parmi la classe qui se compose de formalismes de dynamique événementielle et des modèles hybrides, on trouve les réseaux de Petri continus et hybrides, bien adaptés à la modélisation et l'analyse

des systèmes fluidiques. Plusieurs auteurs utilisent et étendent ces formalismes hybrides pour la modélisation et l'analyse des systèmes de trafic routier. Les réseaux de Petri hybrides sont utilisés par (Febbraro *et al.* 2009) d'un point de vu macroscopique pour la représentation et le contrôle des zones urbaines à feux. Les réseaux de Petri fluides sont aussi bien adaptés pour le contrôle et la modélisation des systèmes de trafic (Bobbio *et al.* 2006). Pour représenter les goulots d'étranglement de véhicules et contrôler la vitesse, (Demongodin, 2009) a défini les réseaux de Petri avec lot contrôlable comme modèle mésoscopique. (Gaddouri *et al.* 2014b) ont étendu ce formalisme, pour réduire la congestion et optimiser le flux des véhicules dans le trafic routier, par l'association de nouvelles caractéristiques liées à la place lot. Cette nouvelle place, appelée *place lot Biparties* intègre une relation flux-densité triangulaire, la vitesse de propagation de la congestion et la densité critique, deux concepts utilisés dans les systèmes de trafic routier.

Dans ce papier, une comparaison entre les résultats de simulation de deux formalismes mésoscopiques RdPLots Triangulaire et CTM, est présentée.

La section 2 rappelle les définitions et les concepts de base du RdPLots Triangulaire. La section 3 présente le modèle CTM. Un exemple de modélisation et simulation d'une autoroute par les deux formalismes et l'analyse des résultats obtenus, font l'objet de la section 4.

2 Réseaux de Petri Lots Triangulaires

Un réseau de Petri Lots Triangulaire (RdPLots Triangulaire) est une extension du réseau de Petri Lots

Généralisé (Demongodin, 2001) et du RdPLots avec lot contrôlable (Demongodin, 2009) par l'association des nouvelles caractéristiques à la place lot, appelée *place lot Bi-parties*, intégrant une relation flux-densité triangulaire, une vitesse de propagation de la congestion et une densité critique, concepts observés dans les systèmes de transport routier.

2.1 Définitions et notations

Tout d'abord, nous étendons la définition du RdPLots Généralisé (Demongodin, 2001) en enrichissant la fonction caractéristique γ de la place lot p_i par un nouveau paramètre correspondant au flux maximal Φ_i^{max} (Gaddouri et al, 2014b). Les noeuds du RdPLots Triangulaire sont représentés dans la figure 1

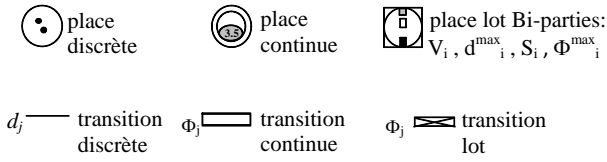


Figure 1: Noeuds du RdPLots Triangulaire

Definition: Un réseau de Petri Lots Triangulaire est un 6-tuple $R = (P, T, Pre, Post, \gamma, Tempo)$ tels que:

- $P = P^D \cup P^C \cup P^{BB}$ est un ensemble fini de places divisé en trois types de classes: places discrètes, places continues et places lot Bi-parties.
- $T = T^D \cup T^C \cup T^B$ est un ensemble fini de transitions divisé en trois types de classes: transitions discrètes, transitions continues et transitions lots.
- $Pre, Post : (P^D \times T \rightarrow N) \cup ((P^C \cup P^{BB}) \times T \rightarrow R_{\geq 0})$ sont, respectivement, les matrices de pré-incidence et post-incidence, désignant le poids sur les arcs de place vers les transitions et de transitions vers les places.
- $\gamma : P^{BB} \rightarrow R_{>0}^4$ associe à chaque place lot Bi-parties $p_i \in P^{BB}$ le quadruplet $\gamma(p_i) = (V_i, d_i^{max}, S_i, \Phi_i^{max})$ qui représente, respectivement, la vitesse, la densité maximale, la longueur et le flux maximum de p_i .
- $Tempo : T \rightarrow R_{\geq 0}$ associe un nombre non négatif pour chaque transition:
 - Si $t_j \in T^D$, alors $Tempo(t_j) = d_j$ durée associée à la transition discrète;
 - Si $t_j \in T^C \cup T^B$, alors $Tempo(t_j) = \Phi_j$ flux maximum associé à la transition continue ou lot.

La *matrice d'incidence* de RdPLots Triangulaire est définie par $C = Post - Pre$.

Definition: Le marquage de RdPLots Triangulaire à un instant τ est défini par $m(\tau) = [m_1(\tau) \dots m_i(\tau) \dots m_n(\tau)]^T$ tels que: si $p_i \in P^D$ alors $m_i \in N$, i.e, le marquage d'une place discrète est un entier non négatif; si $p_i \in P^C$ alors $m_i \in R_{\geq 0}$, i.e, le marquage d'une place continue est un réel non négatif; si $p_i \in P^{BB}$ alors $m_i = \{\beta_h, \dots, \beta_r\}$, i.e, le marquage d'une place lot Bi-parties est un ensemble ordonné de lots.

Nous définissons une *densité critique* de la place lot Bi-parties qui correspond au flux maximal de cette place lot Bi-parties. A noter que dans le réseau de Petri lots Généralisé, le flux maximal est lié à la densité maximale. Pour une place lot Bi-parties, la densité maximale correspond à un flux nul.

Definition Pour une place lot Bi-parties, avec $\gamma(p_i) = (V_i, d_i^{max}, S_i, \Phi_i^{max})$, la densité critique d_i^{cri} est définie par:

$$d_i^{cri} = \frac{\Phi_i^{max}}{V_i} \quad (1)$$

Nous étendons également pour la place lot Bi-parties, l'état accumulé dans le réseau de Petri Lots Généralisé. Cet état est maintenant formalisé par une équation linéaire entre le flux et la densité des lots, qui ont une densité supérieure à la densité critique. Cette équation a une pente négative appelée *vitesse de propagation de la congestion*.

Definition Pour une place lot Bi-parties p_i , avec $\gamma(p_i) = (V_i, d_i^{max}, S_i, \Phi_i^{max})$, la *vitesse de propagation de congestion* est associée à p_i , notée W_i est définie par:

$$W_i = \frac{\Phi_i^{max} \cdot V_i}{d_i^{max} \cdot V_i - \Phi_i^{max}} \quad (2)$$

A partir de ces définitions, la relation flux-densité de la place lot Bi-parties peut être établie maintenant:

Definition La *relation flux-densité* qui régit la dynamique des lots contrôlables à l'intérieur de la place lot Bi-parties p_i avec $\gamma(p_i) = (V_i, d_i^{max}, S_i, \Phi_i^{max})$ est définie comme suit:

$$\varphi_r = \begin{cases} d_r \cdot V_i & \text{if } 0 \leq d_r \leq d_i^{cri} \\ W_i \cdot (d_i^{max} - d_r) & \text{if } d_i^{cri} < d_r \leq d_i^{max} \end{cases} \quad (3)$$

2.2 Dynamiques des lots contrôlables

La dynamique d'un RdPLots Triangulaire est basée sur un comportement à temps continu et à événements discrets. Afin d'intégrer les phénomènes de congestion/décongestion qui introduisent des retards variables des unités sur un composant de flux continu. Une relation flux-densité (équation.3) est associée à une place lot Bi-parties p_i . Ainsi les lots contrôlables composant la place p_i doivent respecter cette relation

flux-densité (Gaddouri *et al.* 2014 a)). Un lot contrôlable est défini comme suit:

Definition Un lot contrôlable $C\beta_r(\tau)$ à un instant τ , est défini par un quadruplet, $C\beta_r(\tau) = (l_r(\tau), d_r(\tau), x_r(\tau), v_r(\tau))$ où $l_r(\tau) \in R_{\geq 0}$ est sa longueur, $d_r(\tau) \in R_{\geq 0}$ sa densité, $x_r(\tau) \in R_{\geq 0}$ sa position et $v_r(\tau) \in R_{\geq 0}$ est la vitesse de ce lot. Le flux instantané de $C\beta_r(\tau)$ est défini par: $\varphi_r(\tau) = v_r(\tau) \cdot d_r(\tau)$.

Quelques contraintes sur les caractéristiques des lots doivent être respectées: $0 \leq l_r(\tau) \leq x_r(\tau) \leq S_i$ (contraintes sur la position et la longueur), $0 \leq d_r(\tau) \leq d_i^{\max}$ (contrainte sur la densité) et $0 \leq v_r(\tau) \leq V_i$ (contrainte sur la vitesse). Un lot contrôlable $C\beta_r$, qui a sa position égale à la longueur de la place, c'est-à-dire $x_r(\tau) = S_i$, est dit un lot contrôlable de sortie.

l'évolution des lots contrôlables à l'intérieur de la place lot Bi-parties permute entre trois comportements linéaires possibles (comportement libre, de congestion et de décongestion). Toutes ces places introduisent une dynamique hybride caractérisée par deux états qui peuvent se résumer comme suit :

Definition États des lots. Soit $C\beta_r(\tau) = (l_r(\tau), d_r(\tau), x_r(\tau), v_r(\tau))$ un lot contrôlable de la place p_i .

- $C\beta_r$ est dit *en état libre* si sa densité est inférieure à la densité critique de p_i : $d_r(\tau) \leq d_i^{cri}(\tau)$;
- $C\beta_r$ est dit *en état de congestion* si sa densité est supérieure à la densité critique de p_i : $d_r(\tau) > d_i^{cri}(\tau)$.

Pour la compréhension de l'évolution de lots contrôlables, rappelons tout d'abord quelques notions dédiées à la place lot qui peuvent également être appliquées à une place lot Bi-parties (Demongodin, 2001, 2009) et (Demongodin and Guia, 2010). Les définitions des flux d'entrée et de sortie des places lots Bi-parties sont identiques à ceux définis pour les places lots dans les réseaux de Petri Lots Généralisé (Demongodin, 2001).

Definition Le flux d'entrée resp. de sortie d'une place continue ou lot p_i à un instant τ est la somme de tout flux entrant (resp., sortant) de la place et peut être écrit, respectivement, comme suit: $\phi_i^{\text{in}}(\tau) = \sum_{t_j \in \bullet p_i} \text{Post}(p_i, t_j) \cdot \varphi_j(\tau) = \text{Post}(p_i, \cdot) \cdot \varphi(\tau)$ et $\phi_i^{\text{out}}(\tau) = \sum_{t_j \in p_i} \text{Pre}(p_i, t_j) \cdot \varphi_j(\tau) = \text{Pre}(p_i, \cdot) \cdot \varphi(\tau)$.

Definition A un instant donné τ , diverses fonctions statiques peuvent être appliquées sur les lots composant le marquage de la place p_i : *Création*. Si le flux d'entrée de p_i est non nul, c'est-à-dire, $\phi_i^{\text{in}}(\tau) \neq 0$, un lot contrôlable $C\beta_r(\tau) = (0, d_r(\tau), 0, v_r(\tau))$ avec $d_r(\tau) = \phi_i^{\text{in}}(\tau)/V_i$ et $v_r(\tau) = V_i$, est créé et ajouté

au marquage de p_i . *Destruction*. Si la longueur du lot, $C\beta_r(\tau)$, est nulle, $l_r(\tau) = 0$, et si ce n'est pas un lot créé, $x_r(\tau) \neq 0$, le lot $C\beta_r(\tau)$ est détruit, noté $C\beta_r(\tau) = \mathbf{0}$, et retiré du marquage de p_i . *Fusionnement*. Si deux lots avec la même densité et la même vitesse sont en contact, ils peuvent être fusionnés. Soient deux lots $C\beta_r(\tau) = (l_r(\tau), d_r(\tau), x_r(\tau), v_r(\tau))$ et $C\beta_h(\tau) = (l_h(\tau), d_h(\tau), x_h(\tau), v_h(\tau))$, telle que $x_r(\tau) = x_h(\tau) + l_r(\tau)$, $d_r(\tau) = d_h(\tau)$ et $v_r(\tau) = v_h(\tau)$. Dans ce cas, le lot $C\beta_r(\tau)$ devient $C\beta_r(\tau) = (l_r(\tau) + l_h(\tau), d_r(\tau), x_r(\tau), v_r(\tau))$, le lot $\beta_h(\tau)$ est détruit. *Éclatement*. Il est toujours possible d'éclater un lot en deux lots en contact avec la même densité et la même vitesse.

Remarque: La densité et la vitesse des lots ne peuvent pas être variées dans le temps, tandis que leur valeur peut changer lorsqu'un événement se produit. En d'autres termes, ces deux caractéristiques sont des constantes tandis que la longueur et la position sont linéaires dans le temps. Par conséquence, pour tout lot $C\beta_r(\tau) = (l_r(\tau), d_r(\tau), x_r(\tau), v_r(\tau))$, on déduit: $\dot{d}_r = \dot{v}_r = 0$.

A l'intérieur d'une place lot Bi-parties (BB-place), diverses équations régissent la dynamique des lots: l'entrée, le déplacement et la sortie. Entre deux événements, un lot peut se déplacer dans trois différents comportements: le comportement libre, le comportement de congestion et le comportement de décongestion (Gaddouri *et al.* 2014 a)).

2.2.1 Comportement libre.

Un lot contrôlable $C\beta_r(\tau) = (l_r(\tau), d_r(\tau), x_r(\tau), v_r(\tau))$ de p_i est dans un *comportement libre*, s'il se déplace librement à sa vitesse de transfert $v_r(\tau)$. Trois différentes dynamiques peuvent se produire: *i) Entrée*. un lot contrôlable créé, $C\beta_r(\tau) = (0, d_r(\tau), 0, v_r(\tau))$, sans contact avec un autre lot, entre librement dans la place p_i conformément à: $\dot{x}_r = \dot{l}_r = v_r(\tau)$; *ii) Déplacement*. un lot contrôlable, $C\beta_r(\tau) = (l_r(\tau), d_r(\tau), x_r(\tau), v_r(\tau))$, qui est un lot libre, se déplace librement à l'intérieur de la place p_i conformément à: $\dot{x}_r = v_r(\tau)$; $\dot{l}_r = 0$. *iii) Sortie*. un lot contrôlable de sortie $C\beta_r(\tau) = (l_r(\tau), d_r(\tau), S_i, v_r(\tau))$, qui a son flux égal ou inférieur au flux de sortie de p_i , sort librement de la place p_i conformément à: $\dot{x}_r = 0$; $\dot{l}_r = -v_r(\tau)$.

2.2.2 Comportement de congestion.

Un lot contrôlable $C\beta_r(\tau) = (l_r(\tau), d_r(\tau), x_r(\tau), v_r(\tau))$ de la place lot Bi-parties p_i est en *comportement de congestion*, s'il ne peut pas se déplacer avec sa propre vitesse, c'est-à-dire, il commence la congestion. Par exemple, à un instant τ soit un lot contrôlable de sortie $OC\beta_r(\tau)$ de p_i , où le flux de sortie de p_i est inférieur au flux de lot de sortie ($\phi_i^{\text{out}}(\tau) < \varphi_r(\tau)$). Dans ce cas, $OC\beta_r(\tau)$ sort en comportement de congestion. Il est éclaté en deux

lot en contact: $C\beta_r(\tau) = (l_r(\tau), d_r(\tau), S_i, v_r(\tau))$ et $OC\beta_{r'}(\tau) = (0, d_{r'}(\tau), x_{r'}(\tau), v_{r'}(\tau))$ avec: $d_{r'}(\tau) = d_i^{max} - \phi_i^{out}/W_i$; $v_{r'}(\tau) = \phi_i^{out}/d_{r'}(\tau)$ et $x_{r'}(\tau) = S_i$. A partir l'instant τ , l'évolution de deux lots $C\beta_r$ et $OC\beta_{r'}$ est régie par (Eq.21) et (Eq.22) dans (Gaddouri et al, 2013)

2.2.3 Comportement de décongestion.

Un lot contrôlable de sortie congestionné $OC\beta_r(\tau) = (l_r(\tau), d_r(\tau), x_r(\tau), v_r(\tau))$ de p_i est en *comportement de décongestion*, s'il peut se déplacer avec une vitesse plus élevée. Par exemple, soit à un instant τ , un lot de sortie congestionné $OC\beta_r(\tau)$ de p_i qui a un flux supérieur au flux de lot de sortie ($\phi_i^{out}(\tau) > \varphi_r(\tau)$). Dans ce cas, $OC\beta_r(\tau)$ suit un comportement de décongestion. Il est éclaté en deux lots en contact : $C\beta_r(\tau) = (l_r(\tau), d_r(\tau), S_i, v_r(\tau))$ et $OC\beta_{r'}(\tau) = (0, d_{r'}(\tau), x_{r'}(\tau), v_{r'}(\tau))$ avec: $d_r(\tau) = d_i^{max} - \phi_i^{out}/W_i$, $v_r(\tau) = \phi_i^{out}/d_r(\tau)$ et $x_r(\tau) = S_i$ et $v_{r'}(\tau) = V_i$, $d_{r'}(\tau) = \phi_i^{out}/V_i$ et $x_{r'}(\tau) = S_i$.

2.3 Dynamique du RdPLots Triangulaire

La dynamique de RdPLots Triangulaire est basée sur une approche à événements discrets avec des évolutions continues linéaires ou constantes entre deux événements temporisés.

Definition L'état invariant du RdPLots Triangulaire correspond à une période de temps telle que: le marquage des places discrètes est constant; le flux de franchissement instantané des transitions continues et lots est constant; le marquage réservé des places discrètes et continues est constant.

L'état invariant change si et seulement si un de ces événements suivants se produit:

- Événements internes: *i.1*) un lot devient lot de sortie $C\beta_r = OC\beta_r$; *i.2*) deux lots se rencontrent; *i.3*) un lot de sortie est détruit $OC\beta_r = \mathbf{0}$.
- Événements externes: *e.1*) une transition discrète est franchie: t_j ; *e.2*) une place continue devient vide $m_i^n = 0$; *e.3*) une transition discrète devient valide $m_i^n = a$; *e.4*) un lot devient lot de sortie (i.e. événement *i.1*) au dessus); *e.5*) un lot de sortie est détruit (i.e. événement *i.3*) au dessus);
- Événements contrôlés: *c.1*) le flux des transitions lots est modifié: $\Phi_j(\tau) = \phi_j(\tau)$; *c.2*) la vitesse de la place lot Bi-parties est modifié: $V_i = v_i(\tau)$.

La dynamique de Réseaux de Petri Lots Triangulaire est basée sur une approche à événements discrets avec évolutions continues linéaires ou constantes entre deux événements temporisés. L'état du système est calculé seulement quand il subit une discontinuité. Cette dynamique teste l'existence des événements contrôlés à la date courante, détermine l'état des lots et des transitions (valides ou non valides) pour calculer le flux de franchissement instantané des transitions lots et continues. Ensuite, tous les événements

temporisés qui changent l'état global du système sont calculés, et la date de l'événement le plus proche dans le temps est retenue. Finalement le nouveau marquage est calculé. Cette dynamique s'arrête quand la liste des événements est vide ou quand un état invariant qui existe déjà est retrouvé. La figure 2) montre l'algorithme de simulation de RdPLots Triangulaire.

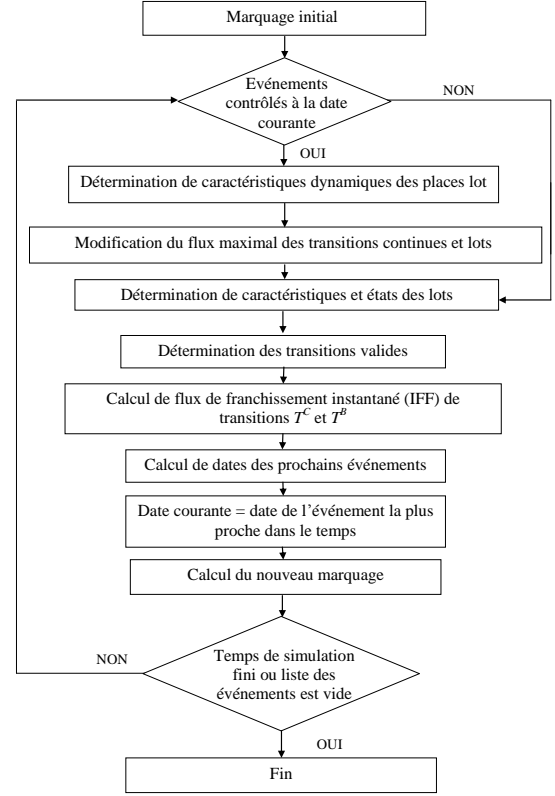


Figure 2: Algorithme de simulation de RdPLots Triangulaire

3 Modèle Cellulaire de Transmission

Le modèle cellulaire de transmission a été développé par (Daganzo, 1994) pour la prédiction de l'évolution dans le trafic routier, basé sur une discrétisation spatio-temporelle. (Daganzo, 1994) a démontré que si la relation entre le flux de la circulation des véhicules (Q) et la densité (k) est de la forme triangulaire représentée dans la figure 3, alors pour une densité k tel que $0 \leq k \leq k_j$ (avec k_j est la densité maximale d'une route) le flux est exprimé par la formule suivante:

$$Q = \min \{v, k, Q^{max}, w.(k_j - k)\} \quad (4)$$

Dans cette expression, v , Q^{max} , w et k_j sont des constantes désignent respectivement, la vitesse libre, le flux maximum (ou capacité), la vitesse de propagation (lorsque le trafic est congestionné) et la densité maximale.

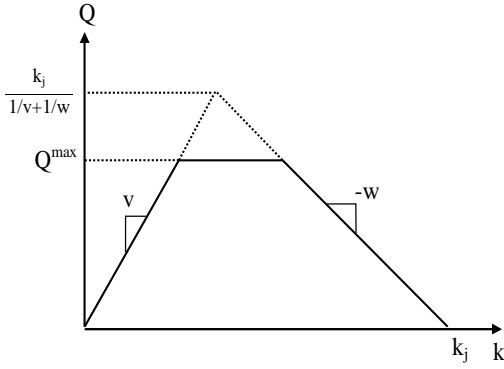


Figure 3: Diagramme triangulaire de CTM

En CTM, un tronçon de route est représenté par une section qui est divisée en *cellules*, numérotées de $i = 1$ à I . Les longueurs des cellules sont fixées égales à la distance parcourue en circulation fluide par un véhicule type en un coup d'horloge. Dans des conditions de trafic fluides, tous les véhicules dans une cellule peuvent être passés à la cellule suivante à chaque coup d'horloge, c'est-à-dire :

$$n_{i+1}(\tau) = n_i(\tau) \quad (5)$$

Où $n_i(\tau)$ est le nombre de véhicules dans la cellule i à l'instant τ . Les paramètres suivants sont définis pour chaque cellule :

- $N_i(\tau)$: c'est le nombre maximum des véhicules qui peut être présent dans une cellule i à un instant τ , c'est le produit de la longueur de cellule Δx (avec $\Delta x = v \cdot \Delta \tau$) et sa densité maximale.
- $Q_i(\tau)$: c'est le nombre maximum de véhicules pouvant circuler dans la cellule i lorsque l'horloge avance de τ à $\tau+1$. C'est le produit de l'intervalle d'horloge et la capacité de la cellule.

Si les cellules sont numérotées de façon consécutive en commençant par l'extrémité amont de la section routière à partir de $i = 1$ à I , la loi de transmission est donnée par une suite récurrente de cellules :

$$n_i(\tau + 1) = n_i(\tau) + y_i(\tau) - y_{i+1}(\tau) \quad (6)$$

Où $n_i(\tau + 1)$ est l'occupation de la cellule à l'instant $\tau + 1$, $n_i(\tau)$ est l'occupation de la cellule à l'instant τ , $y_i(\tau)$ est le flux d'entrée à τ , $y_{i+1}(\tau)$ est le flux de sortie à τ . Les flux sont liés à l'instant τ comme indiqué ci-dessous :

$$y_i(\tau) = \min \{n_{i-1}(\tau), Q_i(\tau), N_i(\tau) - n_i(\tau)\} \quad (7)$$

Dans la section suivante, nous allons présenter un exemple de modélisation et simulation d'une autoroute. Nous comparons les résultats de deux formalismes mésoscopiques RdPLots Triangulaire et CTM afin de montrer les avantages et la fiabilité du modèle hybride événementiel RdPLots Triangulaire pour la modélisation et la simulation de l'évolution dynamique du trafic routier.

4 Modélisation et simulation du trafic routier

On propose dans cette section la modélisation et simulation d'une autoroute à trois voies d'une longueur de 2 km. Cette autoroute n'a pas des rampes d'entrées ni de sorties. On considère dans notre exemple, une zone des travaux de longueur égale à 1 km où le nombre de voies est réduit à deux. On peut alors, considérer que cette autoroute a deux sections distinctes ($S1$ et $S2$). Les paramètres de chaque section sont présentés dans le tableau 1.

Tableau 1: paramètres de l'autoroute

Section	S1 (3 voies)	S2 (2 voies)
$L_i(km)$	1	1
$v_i(km/h)$	120	90
$k_i^j(veh/km)$	300	200
$Q_i^{max}(veh/h)$	6000	3275

De façon à montrer l'évolution des véhicules au moment de la simulation, on considère que la section 1 contient 40 véhicules tandis que la section 2 est vide. On considère également un flux d'entrée nul.

4.1 Étude par Réseaux de Petri Lots Triangulaire

Le modèle RdPLots Triangulaire, présenté dans la figure 4, représente l'autoroute décrite ci-avant. Les sections S_1 et S_2 de l'autoroute sont représentées par les places lot Bi-parties p_4 et p_5 respectivement. Les places continues p_1 et p_2 limitent la capacité en termes de nombre de véhicules de chaque place lot Bi-parties p_4 et p_5 . Le flux d'entrée de cette autoroute est supposé nul, c'est à dire $\phi_4^{in} = \Phi_1 = 0$, tandis que les autres sont : $\phi_4^{out} = \phi_5^{in} = \Phi_2 = 3275$ et $\phi_5^{out} = \Phi_3 = 3275 veh/h$. Le flux maximal des places lot Bi-parties sont : $\Phi_4^{max} = 6000 veh/h$ et $\Phi_5^{max} = 3275 veh/h$. À partir des paramètres de chaque section et à partir de deux équations 2 et 1, on peut déduire la vitesse de propagation de la congestion et la densité critique de deux places lot Bi-parties p_4 et p_5 respectivement. Pour la place p_4 , on a $W_4 = 24 km/h$ et $d_4^{cri} = 50 veh/km$, et pour la place p_5 , on a $W_5 = 20 km/h$ et $d_5^{cri} = 36.4 veh/km$.

L'état initial du modèle RdPLots Triangulaire contient un lot contrôlable $C\beta_1(\tau_0) = (0.89, 45, 0.89, 10)$ dans place lot Bi-parties p_4 . Ce lot représente les 40 véhicules présents dans la section $S1$ de l'autoroute. Le marquage initial est $m(\tau_0) = (260, 200, 0, C\beta_1(\tau_0), \emptyset)$.

A partir de l'état initial, cinq états invariants ont été atteints. Les cinq événements temporisés sont :

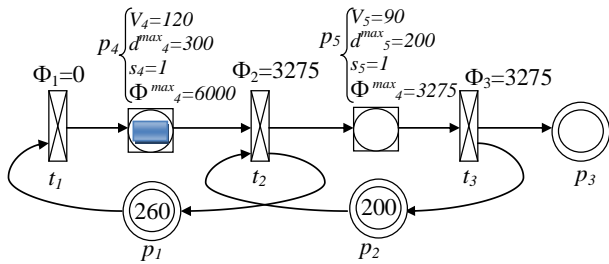


Figure 4: Modèle RdPLots Triangulaire de l'autoroute

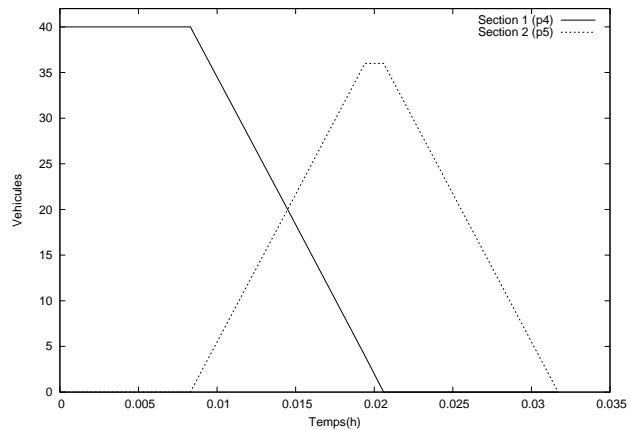
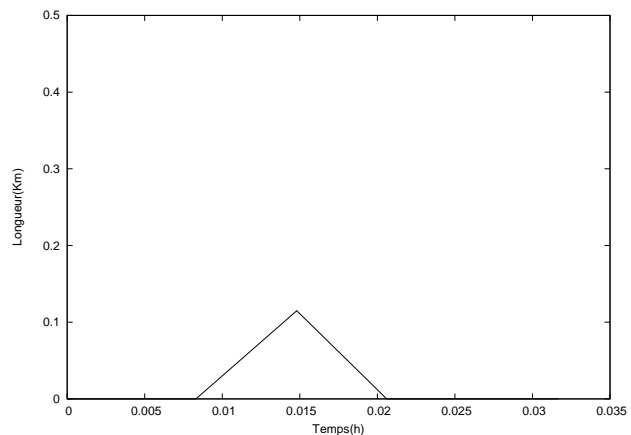
- (Ev1, délai: 0.008 h) le lot contrôlable de p_4 devient lot de sortie, $C\beta_1 = OC\beta_1$;
- (Ev2, délai: 0.006 h) le lot de sortie devient congestionné $d_1 = d_3^{max} - \frac{\phi_4^{out}}{W_4}$;
- (Ev3, délai: 0.006 h) le lot contrôlable de p_5 devient lot de sortie, $C\beta_2 = OC\beta_2$;
- (Ev4, délai: 0.001 h) le lot de sortie $OC\beta_1$ de p_4 est détruit, $OC\beta_1 = \mathbf{0}$;
- (Ev5, délai: 0.01 h) le lot de sortie $OC\beta_2$ de p_5 est détruit, $OC\beta_2 = \mathbf{0}$.

L'objectif initial est de simuler le modèle RdPLots Triangulaire pour une durée de 15 minutes ($T = 1/4$ h). Cependant, on a pu constater que à la date $\tau = 0.035$ h car il n'existe plus d'événements à simuler. Le caractère événementiel du formalisme RDPLots Triangulaire nous a permis d'arrêter la simulation à cette date.

Les données obtenues de la simulation peuvent être étudiées de différentes formes. Nous sommes intéressés dans ce article aux données relatives au nombre d'entités (véhicules) dans les places lots Bi-parties (p_4 et p_5) et surtout à la longueur de congestion à la sortie d'une place lot p_4 . Ces données sont présentées dans les figures 5 et 6.

La figure 5 montre la variation du nombre de véhicules dans chaque place lot Bi-parties. Pour p_4 le nombre est égal à 40 véhicules jusqu'à la date de sortie (à $\tau = 0,008$ h), et à partir de ce moment-là le nombre commence à diminuer jusqu'à la date de la destruction totale de lot de sortie. Pour la place p_5 , un lot est créé au moment de la sortie du premier lot de p_4 (à 0,008 h) et à partir de cette date, le nombre augmente jusqu'à ce que le lot atteigne la sortie et ensuite il commence à diminuer jusqu'à ce que le lot de sortie se détruit.

La figure 6 montre la variation de la longueur de la congestion dans la place lot Bi-parties p_4 . Connaissant la longueur de la congestion en temps réel nous


 Figure 5: Nombre de véhicules dans section S_1 et S_2 (p_4 et p_5)

 Figure 6: Longueur de congestion dans la section S_1 (place p_4)

permet de déduire le temps restant pour dissiper cette congestion.

Nous faisons par la suite la modélisation et simulation de la même autoroute pour le formalisme CTM. Les données obtenues nous permettront de comparer les deux formalismes.

4.2 Étude par le modèle cellulaire de transmission

Dans cette section on modélise l'autoroute à deux sections présentée précédemment. On simule par la suite le modèle obtenu pour la période de 15 minutes ($T = 1/4$ h) avec deux coups d'horloge différents (10 e 1 seconde).

Dans les sections suivantes on présente, pour chaque coup d'horloge, les 4 étapes de simulations décrites par (Daganzo, 1994) et on estime la longueur de congestions, basée sur l'occupation de cellules.

4.2.1 Premier cas: coup d'horloge de 10 sec (1/360 h)

A) Détermination de la longueur des cellules et du nombre des cellules dans chaque section:

- i) Première section: Étant donné un coup d'horloge $\tau = 1/360$ h, la longueur des cellules: $\Delta x = v_1 \cdot \tau = 120 \cdot 1/360 = 1/3$ km. La longueur de la section est égale à 1 km, par conséquent, le nombre de cellules est égal à: $L_1/\Delta x = 1/(1/3) = 3$ cellules.
- ii) Seconde section: Pour le même coup d'horloge, nous avons la longueur des cellules: $\Delta x = v_2 \cdot \tau = 90 \cdot 1/360 = 1/4$ km. La longueur du deuxième section est égale aussi à 1 km, par conséquent, le nombre de cellules est égal à: $L_2/\Delta x = 1/(1/4) = 4$ cellules.

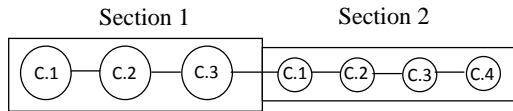


Figure 7: Nombre des cellules dans chaque section

B) Détermination des constantes (N et Q):

- i) Première section: Le nombre maximum de véhicules qui peuvent être à l'instant τ dans la cellule i est donné par: $N = \Delta x \cdot k_1^j = 1/3 \cdot 300 = 100$ véh. Le nombre maximum de véhicules pouvant circuler dans la cellule i de l'instant τ à $\tau+1$ est donné par: $Q = Q_1^{max} \cdot \tau = 6000 \cdot 1/360 = 17$ véh.
- ii) Seconde section: $N = \Delta x \cdot k_2^j = 1/4 \cdot 200 = 50$ véh et $Q = Q_2^{max} \cdot \tau = 3275 \cdot 1/360 = 9$ véh.

C) Détermination de la capacité de congestion:

À l'état initial, ils sont 40 véhicules dans les cellules ($n_i(\tau) = 40$ véh), après un rétrécissement de voies, le flux de sortie est réduit à 3275 veh/h, donc la capacité à la congestion $Q_i = 3275 \cdot (1/360) = 9$ véh.

D) Calcul des occupations: On considère la troisième cellule de la première section au deuxième coup d'horloge. Conformément à la loi de conservation de flux dans l'équation 6 : Occupation = stockage + flux d'entrée - flux de sortie. Également le flux de sortie d'une cellule est égale au flux d'entrée de la cellule suivante seulement. Par exemple ici : Stockage = 0, Flux d'entrée = $\min\{17, 17, (100 - 0)\} = 17$ (selon l'équation 7), le flux de sortie = $\min\{0, 9, (100 - 0)\} = 0$ (selon l'équation 7), on déduit l'occupation = $0 + 17 - 0 = 17$ veh.

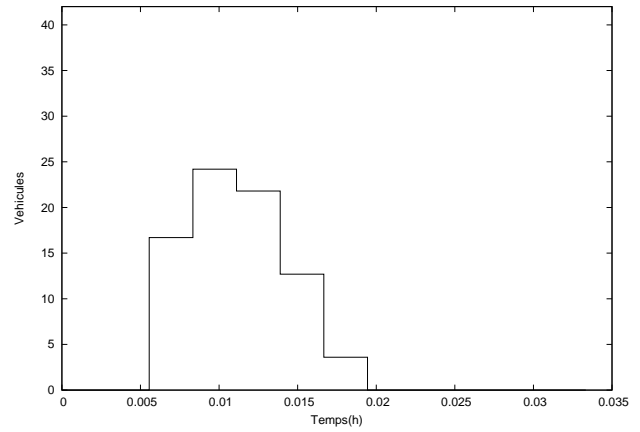


Figure 8: Nombre de véhicules de la cellule 3 (première section)

La figure 8 montre la variation du nombre de véhicules dans la cellule 3 (dernière cellule) dans la première section. Les 40 véhicules dans la première cellule prennent deux coups d'horloge pour atteindre la troisième cellule de la première section. Comme nous pouvons le voir, le flux d'entrée (17 véh) est plus grand que le flux de sortie (9 véh) et à partir du troisième coup d'horloge, le nombre de véhicules dans cette cellule commence à augmenter conformément à l'équation itérative 6, jusqu'à ce que la troisième cellule devienne complètement congestionnée.

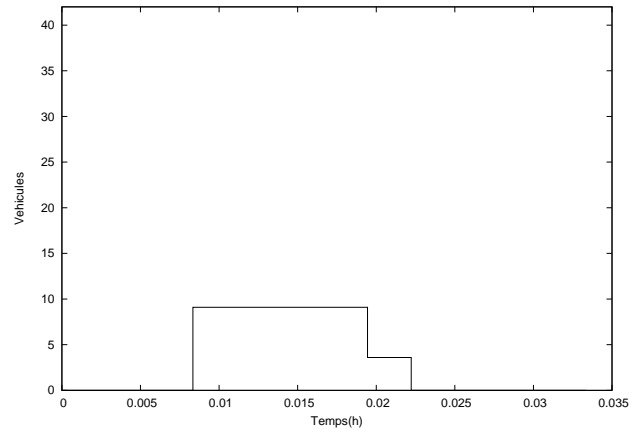


Figure 9: Nombre de véhicules de la cellule 1 (deuxième section)

La figure 9 montre la variation du nombre de véhicules dans la première cellule sur la seconde section. Ainsi, pour le premier coup d'horloge, le nombre de véhicules de cette cellule égale à 0 véhicule. Les véhicules atteindront cette cellule que dans le troisième coup d'horloge. L'occupation reste stable à 9 véh pendant 7 coups d'horloge, puis diminue lorsque les 40 véhicules ont été sorties.

Le formalisme CTM ne nous donne pas directement

la longueur de la congestion dans les sections. Pour cela nous allons proposer une estimation.

Estimation de la longueur de congestion dans CTM: Pour notre étude, nous voulons comparer la longueur de la congestion de deux formalismes CTM et RdPLots Triangulaire. Alors nous avons opté pour estimer la valeur de la longueur de la congestion dans CTM, avec la formule suivante: Pour chaque cas de la modélisation, il est estimé que la longueur de la congestion est égale à la somme des longueurs des cellules qui ont une occupation supérieure à l'occupation précédente (stockage) et supérieure à leur flux maximal (Q). Cette formule nous permet de suivre l'occupation des cellules et de voir quelles cellules ont un flux d'entrée supérieur au flux de sortie. Nous considérons également qu'une fois que la cellule est congestionnée, son occupation est égale à zéro. Ainsi, en appliquant la formule d'estimation de la longueur de la congestion ci-dessus, on obtient la longueur de la congestion qui est égale à 0,333 km.

Tableau 2: Extrait de nombre de véhicules de trois cellules dans la première section avec $\tau = 1/360 h$

Temps (h)	Cellule 1	Cellule 2	Cellule 3
0	40	0	0
0.002	23	17	0
0.005	6	17	17
0.008	0	6	24
0.011	0	0	21
0.013	0	0	12
0.016	0	0	3
0.019	0	0	0

En se basant sur le tablea 2, la figure 10 montre la variation de la longueur de congestion de la troisième cellule qui occupe 1/3 de la longueur de la section (0,333 km) au cours d'une période comprise entre le troisième et le septième coup d'horloge, car le nombre de véhicules dans la troisième cellule est supérieur à celui de la cellule précédente et aussi supérieur à 17 véhicules.

Pour plus de précision sur le calcul de la longueur de la congestion avec le formalisme CTM, nous allons présenter un deuxième cas de modélisation et simulation du même exemple mais avec un coup d'horloge plus petit égal à 1 seconde ($1/3600 h$).

4.2.2 Deuxième cas: coup d'horloge $1/3600 h$.

Le nombre total de coups d'horloge est égal à 900 coups. Comme dans le premier cas, ici nous serons limités à 120 coups d'horloge ($0.035 h$).

Dans ce cas, pour la première section, la longueur des cellules: $\Delta x = 1/30$ km. Le nombre de cellules = 30 cellules. $N = 10$ véh, $Q = 2$ véh.

Pour la deuxième section, la longueur des cellules: $\Delta x = 1/40$ km. Le nombre de cellules = 40 cellules.

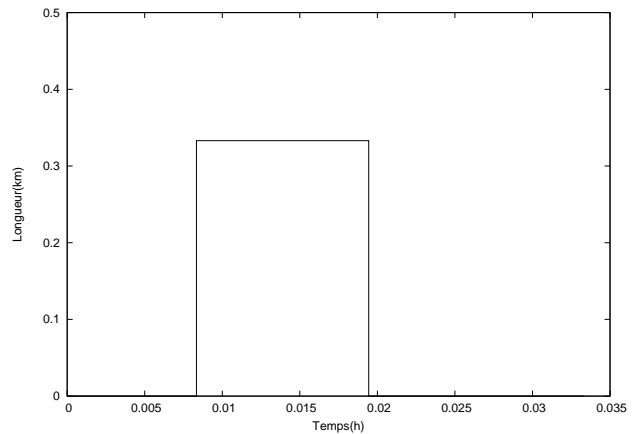


Figure 10: Longueur de la congestion ($\tau = 10$ sec)

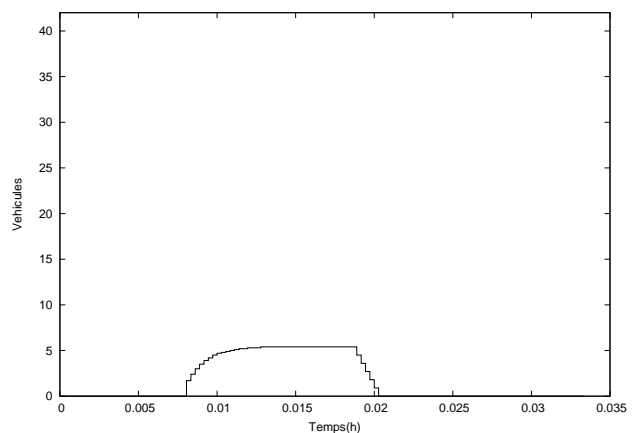


Figure 11: Nombre de véhicules dans la 30ème cellule (première section)

$$N = 5 \text{ véh}, Q = 1 \text{ véh.}$$

Dans ce second cas, avec un coup d'horloge plus petit, les résultats (figure 11 et figure 12) sont plus précis car un coup d'horloge inférieur implique une longueur de la cellule plus petite.

La figure 13 montre la variation de la longueur de la congestion dans la première section dans le cas d'un coup d'horloge égal à 1 seconde. Et nous constatons que c'est pour une demande de 40 véhicules et au cours d'une période comprise entre le 30^{ème} et 73^{ème} coup d'horloge, la longueur est égale à 0,231 km. Nous constatons que même pour ce petit modèle, le fichier de sortie des occupations des cellules est important pour un petit coup d'horloge et la détection de cellules congestionnées pourrait être très difficile à estimer pour des grands modèles. Pour notre cas de modélisation et pour $1/3600 h$ comme coup d'horloge, le fichier des occupations des cellules a 1MB. Ainsi, nous constatons que plus le coup d'horloge est faible, plus l'estimation se rapproche de la valeur correcte.

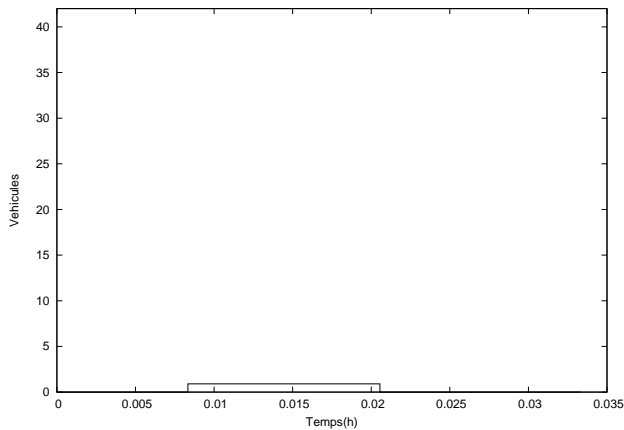


Figure 12: Nombre de véhicules dans la cellule 1 (deuxième section)

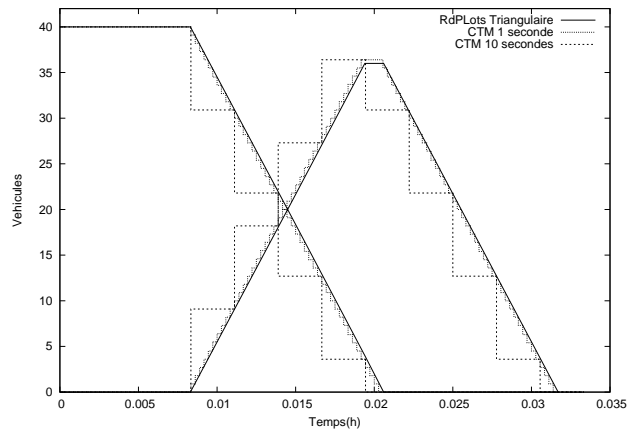


Figure 14: Variation du nombre de véhicules dans chaque section donnée par CTM et RdPLots Triangulaire

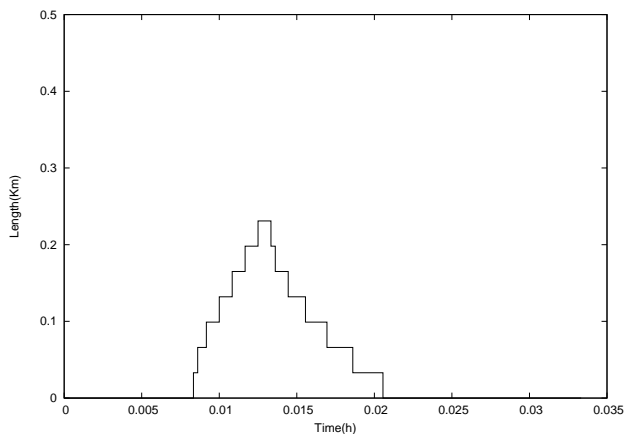


Figure 13: Longueur de la congestion ($\tau = 1$ sec)

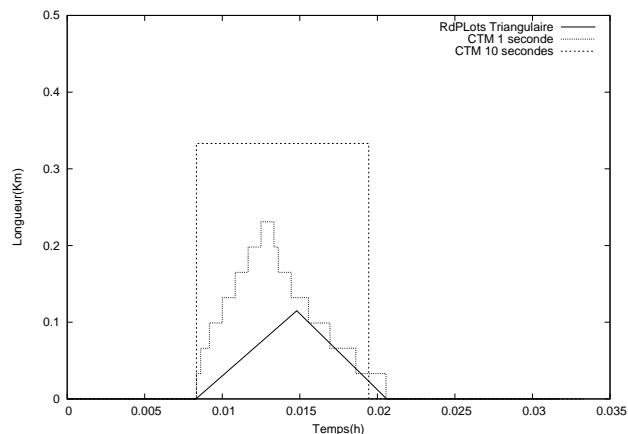


Figure 15: Variation de la longueur de congestion dans la section S_1 donnée par CTM et RdPLots Triangulaire

Par exemple, pour ces deux cas d'études ($1/3600 h$ et $1/360 h$), nous avons observé que, à $\tau = 1/360 h$ la longueur de la congestion est estimée égal à $0,333 km$ et pour $\tau = 1/3600 h$ la longueur de la congestion est égal à $0,231 km$, il y a donc un réduction d'environ 100 mètres.

4.3 Comparaison des résultats

Nous avons effectué cette analyse pour comparer la modélisation et la simulation de la circulation routière par les deux formalismes mésoscopiques CTM (Daganzo, 1994) et le RdPLots Triangulaire proposé par (Gaddouri et al, 2014 a) b)). En ce qui concerne la comparaison du nombre de véhicules dans les sections modélisées par les deux formalismes, nous avons remarqué que les courbes de variation du nombre de véhicules dans les cellules ou les places lots Bi-parties ont la même forme (Figure 14).

En ce qui concerne la comparaison de la longueur de congestion dans les sections congestionnées, nous avons remarqué que la longueur de congestion en CTM est sur-estimée, car même avec un coup

d'horloge très petit ($\tau = 1/3600 h$), la méthode d'estimation de la longueur de la congestion n'a pas donné une bonne précision. Par contre le formalisme RdPLots Triangulaire donne beaucoup plus de précision sur le calcul de la longueur de congestion dans les sections congestionnées qui est égale à la longueur du lot de sortie congestionné (Figure 15).

Pour la simulation de l'exemple présenté dans la Section.4 avec une période de temps $T = 1/4 h$, nous avons remarqué que le formalisme RdPLots Triangulaire a besoin juste de 5 événements pour décrire l'évolution des 40 véhicules et la variation du nombre de véhicules dans chaque section ainsi le calcul de la longueur de la congestion dans les sections congestionnées; par contre pour le formalisme CTM, dans sa forme d'origine nécessite que l'autoroute étudiée soit décomposée en cellules ayant une longueur correspondante au coup d'horloge (incrémantation) de la simulation. Cette limitation peut ne pas être appro-

priée pour les réseaux à grande échelle en raison de restrictions possibles géométriques ou des incohérences au moment de division des sections du réseau en des cellules, et aussi les exigences de mémoire supplémentaires en divisant le réseau en un très grand nombre de petites cellules. Regardons pour la simulation de l'exemple et avec un coup d'horloge égal à $1/360 h$ le nombre total de calcul est de 90 coups et quand nous avons réduit le coup d'horloge à $1/3600 h$ alors le nombre total de coup est multiplié par 10. Cette constatation nous permet d'affirmer que pour le formalisme CTM, plus le temps par coup d'horloge est moins élevé, la taille des cellules est plus petite, dans ce cas des résultats plus précis peuvent être obtenus. Mais un compromis est nécessaire entre la précision et le temps de calcul. Et également une limitation majeure dans le CTM ce qu'il n'est pas en mesure de représenter la variation de la longueur de congestion, ce qui est dû à la longueur de la cellule qui ne peut pas être modifiée. D'autre part, le RdPLots Triangulaire est capable de représenter la longueur de congestion dans les sections congestionnées, ainsi que les positions des véhicules en temps réel, des choses qui ne peuvent pas être représentées par le CTM. L'analyse de ces simulations permet d'affirmer que la vitesse d'exécution des modèles cellulaires augmente considérablement lorsque la section simulée représente plus précisément le nombre de cellules, c'est-à-dire un coup d'horloge plus petit. Cependant, pour le modèle hybride à événement discrets RdPLots Triangulaire a besoin d'un minimum d'informations et de temps de simulation.

5 CONCLUSION

Dans cet article, nous avons présenté deux formalismes mésoscopiques pour l'étude de l'évolution dynamique du trafic routier. Nous avons également, modélisé et simulé une partie d'autoroute en utilisant le modèle Réseau de Petri Lots Triangulaire (RdPLots Triangulaire) et le Modèle Cellulaire de Transmission (CTM). Nous observons à travers une comparaison faite entre les résultats de simulation de deux formalismes, que le modèle hybride événementiel RdPLots Triangulaire offre plus de clarté, précision et de facilité dans la manière de modéliser, d'analyser et de prédire l'évolution des systèmes de trafic routier. Ce formalisme RdPLots Triangulaire ayant été validé par rapport à la modélisation et simulation du trafic routier, une prochaine étude consiste à intégrer les lois de contrôle tels que la régulation des rampes d'accès (RMS) et la technique de limitation variable de vitesse (VSL).

REFERENCES

- Bobbio A. and M. Gribaudo and A. Horvath: Modelling a car safety controller in road tunnels using hybrid Petri nets: 9th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems, pp. 1436 - 1441., Toronto, Canada(2006)
- Canudas-De-Wit C.: Best-effort Highway Traffic Congestion Control via Variable Speed Limits: 50th Int IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference: pp. 5959–5964., (2011)
- Daganzo C.F.: The cell transmission model: A simple dynamic representation of highway traffic: Transportation Research Part B: 4, 269–287 (1994)
- Demongodin I.: Generalised Batches Petri Net: hybrid model for high speed systems with variable delays: Discrete Event Dynamic Systems: 11, 137–162 (2001)
- Demongodin I.: Modeling and analysis of transportation networks using Batches Petri Nets with controllable batch speed: 30th International Conference on Applications and Theory of Petri Nets (Lecture Notes in Computer Science): 5606, springer, pp. 204–222., Berlin(2009)
- Dong H. and Ma, S. Ma and M. Guo and D. Liu: Research on Analysis Method of Traffic Congestion Mechanism Based on Improved Cell Transmission Model: Discrete Dynamics in Nature and Society: 38 (5), 1–11, (2012)
- Febbraro A. D. and N. Sacco, and D. Giglio: On using Petri nets for representing and controlling signalized urban areas: New model and results: 12th International Conference on Intelligent Transportation Systems: pp. 1–8, USA (2009)
- Gaddouri R. and L. Brenner and I. Demongodin: Mesoscopic event model of highway traffic by Batches Petri Nets: 6th International Conference on Management and Control of Production and Logistics, pp. 317–324., Fortaleza, Brazil (2013)
- Gaddouri R. and L. Brenner and I. Demongodin: Controllable batch dynamics of batch places under variable speed limit control: research report: LSIS (2014 a))
- Gaddouri R. and L. Brenner and I. Demongodin: Extension of Batches Petri Nets by Bi-parts batch places: International Workshop on Petri Nets for Adaptive Discrete-Event Control Systems, pp. 83–102., Tunisie(2014 b))
- Hoogendoorn S.P. and H. L. Piet: State-of-the-art of Vehicular Traffic Flow Modelling: Journal of Systems and Control Engineering: 215 (4), 283–303, (2001)
- Ng K.M. and M.B.I. Reaz and M.A. Mohd Alaudin: A Review on the Applications of Petri Nets in Modeling, Analysis, and Control of Urban Traffic: IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems: 14, 858–870 (2013)