



**HAL**  
open science

# ETUDE D'UNE MAINTENANCE PRÉVENTIVE DE TYPE BLOC DANS LE CADRE D'UNE POLITIQUE POINT DE SÉPARATION

Laura Maria Ramirez Restrepo, Aicha Aguezzoul, Sophie Hennequin

► **To cite this version:**

Laura Maria Ramirez Restrepo, Aicha Aguezzoul, Sophie Hennequin. ETUDE D'UNE MAINTENANCE PRÉVENTIVE DE TYPE BLOC DANS LE CADRE D'UNE POLITIQUE POINT DE SÉPARATION . MOSIM 2014, 10ème Conférence Francophone de Modélisation, Optimisation et Simulation, Nov 2014, Nancy, France. hal-01166649

**HAL Id: hal-01166649**

**<https://hal.science/hal-01166649>**

Submitted on 23 Jun 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## ETUDE D'UNE MAINTENANCE PREVENTIVE DE TYPE BLOC DANS LE CADRE D'UNE POLITIQUE POINT DE SEPARATION

**Laura M. RAMIREZ RESTREPO, Aicha AGUEZZOUL**

Université de Lorraine - LGIPM, Île du Saulcy, 57045  
Metz Cedex 01  
laura-maria.ramirez-restrpo@univ-lorraine.fr,  
aicha.aguezzoul@univ-lorraine.fr

**Sophie HENNEQUIN**

ENIM - LGIPM, 1 route d'Ars Laquenexy, 57078 Metz  
Cedex 3  
hennequin@enim.fr

**RESUME :** Dans cet article, nous considérons un système de production mono produit, composé d'une machine, d'un stock de produits finis et d'un client. Les délais de transfert des matières entre la machine et le stock ainsi qu'entre le stock et le client, sont considérés explicitement et supposés constants. De plus, la demande arrive avec un taux également constant. Le système est modélisé par un modèle à flux continu. La politique de pilotage est de type point de séparation. La machine est sujette à des pannes dépendantes du temps et une stratégie de maintenance préventive est mise en œuvre pour réduire les coûts. Celle-ci est basée sur des actions de maintenance réalisées à intervalles de temps fixes prédéterminés. L'étude de la période de la maintenance préventive est menée en fonction de la valeur que pourrait prendre le point de séparation et une optimisation basée sur la simulation est proposée.

**MOTS-CLES :** système de production mono produit, délais de transfert, maintenance préventive de type bloc, modèle à flux continu.

### NOTATIONS :

$M$  : Machine du système de production  
 $S$  : Stock de sécurité du système de production  
 $C$  : Client  
 $\theta(t)$  : Etat de la machine  
 $D(t)$  : Demande du client à l'instant  $t$   
 $\xi_1$  : Délai de transfert entre la machine et le stock  
 $\xi_2$  : Délai de transport entre le stock et le client  
 $X_{ts}(t)$  : Quantité de matières transportées entre  $M$  et  $S$   
 $X_{tc}(t)$  : Quantité de matières transportées entre  $S$  et  $C$   
 $N(t)$  : Niveau de stock au moment  $t$   
 $P(t)$  : Position du stock au moment  $t$   
 $r(t)$  : Taux de production de la machine  
 $h$  : Point de séparation  
 $CM(t)$  : Coût de maintenance  
 $mc$  : Coût de l'action de maintenance corrective  
 $mp$  : Coût de l'action de maintenance préventive  
 $F_c(t)$  : Nombre moyen de pannes  
 $F_p(t)$  : Nombre moyen de maintenances préventives  
 $T_p$  : Période de maintenance préventive  
 $DMP$  : Durée de l'action de maintenance préventive  
 $g(N(t))$  : Coût de stockage à l'instant  $t$   
 $c^+$  : Coût de possession d'une pièce  
 $c^-$  : Coût de pénurie par pièce  
 $ct_1$  : Coût unitaire des matières transportées de la machine vers le stock  
 $ct_2$  : Coût unitaire de transport des pièces du stock vers le client  
 $CT(t)$  : Coût total  
 $L_T(h)$  : Coût total moyen sur un horizon fini

### 1 INTRODUCTION

Ce papier présente le modèle à flux continu (MFC) d'un système de production soumis à des pannes. Ce modèle est très utile lorsque le flux de matières transitant dans le système est important. MFC a été employé par de nombreux auteurs pour l'évaluation des performances ou pour le pilotage de systèmes manufacturiers. Plambeck et al. (1996) ont étudié une ligne de production dans laquelle, les machines sont disposées en série. Chacune travaille avec un taux de fabrication différent et entre chaque paire de machines, il y a un stock de capacité limitée. Wardi et Melamed (2001) ont considéré un système à flux continu composé d'un seul flux. Leurs résultats ont été étendus à un modèle à flux continu composé de deux flux différents qui sont traités par un seul serveur. Dans Tan et Gershwin (2009) un système à flux continu a été étudié avec deux échelons, séparés par un stock de sécurité de capacité finie et des taux de production différents associés à chaque état de la machine.

Nous étudions un système de production composé d'une machine qui fabrique un seul type de produit, un stock de produits finis et un client. Ce système est modélisé par un modèle à flux continu. La politique de pilotage adoptée est du type point de séparation. Nous considérons des délais de transfert constants entre la machine et le stock ainsi qu'entre le stock et le client. La machine est sujette à des pannes dépendantes du temps. Les temps de bon fonctionnement (TBF) et les temps de réparation (TTR) suivent une distribution avec un taux de défaillance croissant. Nous prenons en compte

également, une politique de maintenance préventive de type bloc, afin de réduire le coût global. La dépendance entre la période de la maintenance préventive et le point de séparation est considérée. L'intérêt est de déterminer le point de séparation et la période de la maintenance préventive qui minimisent le coût total moyen. Celui-ci est composé d'un coût de stockage, d'un coût de pénurie, d'un coût de transport et d'un coût de maintenance.

L'impact des délais de production et de livraison a été souvent négligé ou considéré implicitement dans la plupart des modèles, MFC ou autres. A notre connaissance, très peu de travaux ont considéré explicitement les délais, tels quels les délais de transport ou les délais de transfert. Van Ryzin (1987) et Van Ryzin *et al.* (1991) ont examiné les effets des délais d'un système composé de deux machines, séparées par un stock de sécurité, dans lequel le délai est considéré seulement dans la première machine. En raison de la difficulté du calcul de la valeur optimale de la fonction de coût, ils ont proposé une stratégie basée sur l'approximation quadratique.

D'autres travaux plus récents, tels quels Mourani *et al.* (2006) et Xie *et al.* (2013). Les auteurs ont considéré une ligne de transfert composée de  $k$  machines et de  $k$  stocks intermédiaires. La matière sortant de chacune des machines, doit attendre une période de temps avant d'arriver au stock en aval. La politique de pilotage utilisée dans leur modèle est du type "Echelon Base Stock". Ils ont proposé un algorithme de simulation basé sur l'analyse des perturbations infinitésimales afin de déterminer le niveau de stock optimal qui minimise le coût total moyen. Dans ce papier, nous intégrons également explicitement la notion de délai dans le MFC proposé.

Le problème d'optimalité du pilotage d'un système manufacturier soumis à des pannes a été étudié initialement par Kimenia et Gershwin (1983). Les auteurs ont établi la stratégie connue sous le nom de point de séparation qui minimise le coût, tout en satisfaisant la demande. Akella et Kumar (1986) ont considéré un système de production mono produit qui est sujet à des pannes. Le système peut être sous deux états : fonctionnel ou en panne. L'objectif de leur modèle, est de piloter le taux de production. Pour cela, ils ont obtenu un nombre critique, dénommé niveau optimal du stock, lequel détermine le taux de production.

Il existe des travaux, qui ont pris en compte l'interaction entre la gestion de stocks et la fiabilité des machines. Nous citons à titre d'exemple Bielecki et Kumar (1988). Leur travail considère un système de production mono produit, soumis à des pannes. Il a été prouvé que sous certaines conditions, une politique de zéro stock peut être optimale. Dans Boukas (1998) un système manufacturier composé d'une machine qui produit une seule pièce a été étudié. Son modèle prend en compte la maintenance corrective. Ultérieurement, le modèle a été étendu à un système composé de  $M$  machines et  $P$  parties différentes. Ce modèle est plus efficace que celui proposé par Akella

et Kumar (1986), car il permet d'augmenter la disponibilité du système et d'améliorer la productivité. Perkins et Srikant (1998) ont considéré un système de production qui fabrique plusieurs types de produits, avec une seule machine qui est sujette à des pannes. Ils ont établi les conditions d'optimalité des politiques de juste à temps et ils ont proposé des bornes supérieures pour le niveau du stock de sécurité et les bornes supérieures et inférieures du point de séparation optimal.

Notre étude est une extension des travaux présentés dans Gomez Urrutia *et al.* (2011), avec la prise en compte des délais de transfert. Notre intérêt porte sur l'évaluation des performances et l'optimisation de la période de maintenance préventive ainsi que du niveau de stock. Cet article est organisé comme suit : la section 2 présente le système considéré, la politique de pilotage et la politique de maintenance préventive. La section 3 expose la relation existant entre la période de maintenance préventive et le niveau de stock. Dans la section 4, nous présentons l'expression du coût en fonction du niveau de stock. La section 5, correspond aux résultats obtenus par simulation. Nous finissons avec une conclusion et des perspectives dans la section 6.

## 2 SYSTEME ETUDIE

Le système considéré est composé d'une machine  $M$ , d'un stock de sécurité  $S$  avec une capacité finie  $h$  et d'un client  $C$  (Figure 1). Les produits sont stockés jusqu'à ce que la demande  $D$  arrive. Le flux de matières est modélisé par un modèle à flux continu. Ce système comporte des délais de transfert (convoyage) entre la machine et le stock ainsi qu'entre le stock et le client, respectivement notés par  $\xi_1$  et  $\xi_2$  et qui sont supposés être constants et positifs. Le nombre de matières transportées entre  $M$  et  $S$ , et entre  $S$  et  $C$  à l'instant  $t$  est noté par  $X_{ts}(t)$  et  $X_{tc}(t)$  respectivement. La machine est sujette à des pannes aléatoires dépendantes du temps qui suivent une distribution avec un taux de défaillance croissant. Les pannes dépendantes du temps sont dues à des agressions extérieures de la machine et non due à son utilisation, notamment l'humidité, des poussières ou la température.

Une action de maintenance préventive est réalisée à chaque période prédéterminée et si  $M$  tombe en panne, une action de maintenance corrective est réalisée (maintenance préventive de type bloc). Cette politique a été initialement proposée dans Barlow et Hunter (1960).

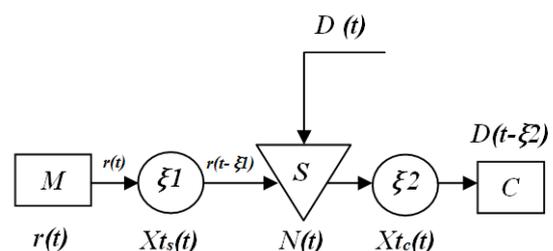


Figure 1 : Système de production considéré.

Soit  $\theta(t)$  la variable qui représente l'état de la machine à l'instant  $t$ . L'état de la machine à l'instant  $t$  est donné par l'équation (1):

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } M \text{ est en panne ou en réparation} \\ 1, & \text{si } M \text{ est en fonctionnement} \\ 2, & \text{si } M \text{ est en maintenance préventive} \end{cases} \quad (1)$$

La politique de pilotage choisie possède une structure de type point de séparation. Elle est définie comme suit : si le niveau de stock  $N(t)$  est inférieur au point de séparation  $h^*$ , la machine produit avec un taux de production maximal  $R$ . Si  $N(t)$  est supérieur à  $h^*$  ou la machine est en panne ou en maintenance préventive, la machine ne produit pas, mais si  $N(t)$  est égal à  $h^*$ , la machine produit à une cadence égale à la demande  $D$ .

De manière analytique, le taux de production peut se présenter comme suit :

$$r(t) = \begin{cases} D, & \text{si } \theta(t) = 1 \text{ et } N(t) = h^* \\ R, & \text{si } \theta(t) = 1 \text{ et } N(t) < h^* \\ 0, & \text{si } \theta(t) = 0 \text{ ou } \theta(t) = 2 \text{ ou } N(t) > h^* \end{cases} \quad (2)$$

Avec  $h^* < h$  (capacité maximale de la machine).

**Hypothèse 1 :** Le taux maximal de production  $R$  est supérieur à la demande  $D$  afin de pouvoir satisfaire la demande ( $R \geq D$ ).

Soit  $P(t)$  la position du stock au moment  $t$ . Elle correspond à la somme du niveau de stock  $N(t)$  et des pièces transportées  $Xt_1(t)$  et  $Xt_2(t)$  à l'instant  $t$ . Elle est donnée par l'équation (3) :

$$P(t) = Xt_1(t) + Xt_2(t) + N(t) \quad (3)$$

La dynamique du système est donnée par les équations (4) et (5) :

$$\frac{dN(t)}{dt} = r(t - \xi_1) - D(t) \quad (4)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = r(t) - D(t - \xi_2), \text{ avec } D(t - \xi_2) = D \quad (5)$$

La quantité totale de produits transférés entre la machine et le stock est donnée par l'équation (6) :

$$Xt_s(t) = \int_{t-\xi_1}^t r(s) \cdot ds \quad (6)$$

L'équation (7) correspond à la quantité totale de produits transportés entre le stock et le client.

$$Xt_c(t) = \int_{t-\xi_2}^t D(s) \cdot ds \quad (7)$$

### 3 RELATION ENTRE LE NIVEAU DE STOCK ET LA PERIODE DE MAINTENANCE PREVENTIVE

Dans cette section, nous allons étudier le lien existant entre le point de séparation et la période de la maintenance préventive.

**Hypothèse 2 :** La politique de maintenance est basée sur une réparation minimale, ce qui implique qu'après une maintenance, le système revient à l'état qu'il avait avant de tomber en panne.

Le coût de maintenance  $CM(t)$  basé sur une stratégie de type bloc est donné par l'équation (8) (Chelbi et Ait-Kadi 2004).

$$CM(T_p) = \frac{mc \cdot F_c(T_p) + mp}{T_p} \quad (8)$$

Où  $T_p$  est la période de maintenance préventive,  $mc$  correspond au coût de l'action de maintenance corrective,  $mp$  est le coût de l'action de maintenance préventive et  $F_c(t)$  est le nombre moyen de pannes.  $T_p$  est positive strictement.

Supposons qu'il existe un lien entre le niveau de stock et la période de la maintenance préventive.

Pour cette étude, nous allons calculer le nombre moyen de défaillances pour un système qui suit une distribution de Weibull  $(\alpha, \beta)$ . Soit  $E(F_p(t))$  le nombre moyen de maintenances préventives sur un horizon de temps fini  $t$ . Il est donné par l'équation (9).

$$E(F_p(t)) = \frac{t}{T_p} \quad (9)$$

Soit  $E(F_c(T_p))$  le nombre moyen de pannes qui se produisent sur un horizon de temps égal à la période de maintenance préventive  $T_p$  pour une loi de Weibull  $(\alpha, \beta)$ . Il est donné par l'équation (10) :

$$E(F_p(T_p)) = \int_0^{T_p} \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{s}{\beta}\right)^{\alpha-1} \cdot ds \quad (10)$$

Le nombre moyen de défaillances sur un horizon de temps fini et défini  $t$  est donc donné par :

$$E(F_c(t)) = \frac{t}{T_p} \cdot \left[ \int_0^{T_p} \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{s}{\beta}\right)^{\alpha-1} \cdot ds \right] \quad (11)$$

Soit  $CM(t)$  le coût total de maintenance sur un horizon de temps fini  $t$  :

$$CM(t) = mc \cdot E(F_c(t)) + mp \cdot E(F_p(t)) \quad (12)$$

Ensuite, nous remplaçons (9) et (11) dans (12) et nous obtenons :

$$CM(t) = \frac{t}{T_p} \cdot \left( mc \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \int_0^{T_p} \left( \frac{s}{\beta} \right)^{\alpha-1} \cdot ds + mp \right) \quad (13)$$

**Hypothèse 3 :** A l'instant initial, nous supposons que pendant la construction du stock initial, la machine ne tombe pas en panne.

Lorsqu'une action de maintenance préventive est réalisée, nous considérons, deux cas de figures (section 4.2 Gharbi *et al*, 2007): **a).** Il n'y a pas des pénuries à la fin de la période de maintenance préventive (Figure 2); **b).** A la fin d'une action de maintenance préventive, il y a des pénuries (Figure 3).

Nous étudions chacun de ces cas, afin de déduire la valeur de  $T_p$ .

#### Cas a)

Soit  $DMP$  la durée de l'action de maintenance préventive et  $T_{p1}$  la période de maintenance préventive lorsque, à la fin de l'action de maintenance, le niveau de stock est positif.

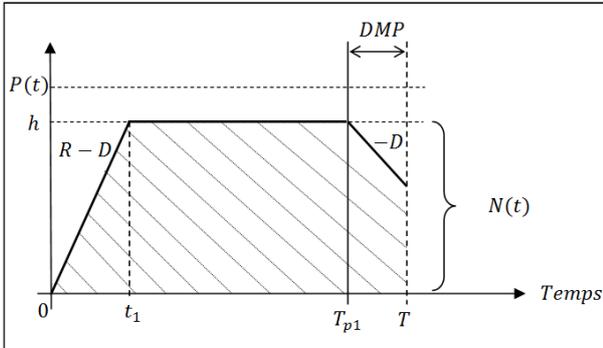


Figure 2 : L'action de maintenance préventive commence à  $T_{p1}$  et il n'y a pas des pénuries à la fin de l'action de maintenance préventive.

L'aire rayée  $A_1$ , de la Figure 2 est donnée par :

$$A_1 = \left( \frac{t_1 * h}{2} \right) + \left( T_{p1} * h - 2 \cdot \left( \frac{t_1 * h}{2} \right) \right) + \left( DMP * h - \left( \frac{D \cdot DMP^2}{2} \right) \right) \quad (14)$$

De l'équation de la pente nous avons :

$$(R - D) = \frac{h}{t_1}$$

et ensuite :

$$t_1 = \frac{h}{(R - D)} \quad (15)$$

En remplaçant (15) dans (14) et après une procédure mathématique afin de réduire l'expression, nous obtenons :

$$A_1 = h \left( T_{p1} - \frac{h}{2(R - D)} \right) + DMP \left( h - \frac{DMP \cdot D}{2} \right) \quad (16)$$

Nous supposons que  $\bar{N}_1(t)$  est le niveau de stock moyen pour une période de maintenance préventive, si à la fin de cette période, le niveau de stock est positif.

$$\bar{N}_1(t) = \frac{c}{T_{p1}} \quad (17)$$

Avec  $c$  une constante qui représente le stock cumulé sur une période de maintenance préventive.

Soit  $R(T_{p1})$  la fiabilité du système à l'instant  $T_{p1}$  : probabilité de ne pas avoir de défaillance dans l'intervalle  $[0, T_{p1}]$ . Pour une loi de Weibull, elle est donnée par l'équation (18) :

$$R(T_{p1}) = e^{-\left( \frac{T_{p1}}{\beta} \right)^\alpha} \quad (18)$$

Ensuite, nous avons :

$$\bar{N}_1(t) = \frac{\left[ h \cdot \left( T_{p1} - \frac{h}{2(R - D)} \right) \right] \cdot R(T_{p1}) + DMP \left( h - \frac{DMP \cdot D}{2} \right)}{T_{p1} + DMP} \quad (19)$$

Nous remplaçons (19) dans (17) et nous obtenons :

$$\frac{c}{T_{p1}} = \frac{\left[ h \cdot \left( T_{p1} - \frac{h}{2(R - D)} \right) \right] \cdot R(T_{p1}) + DMP \left( h - \frac{DMP \cdot D}{2} \right)}{T_{p1} + DMP} \quad (20)$$

$$c \cdot (T_{p1} + DMP) = T_{p1} \cdot \left[ \begin{array}{c} h \cdot T_{p1} \cdot R(T_{p1}) \\ - \frac{h^2 \cdot R(T_{p1})}{2(R - D)} \\ + DMP \left( h - \frac{DMP \cdot D}{2} \right) \end{array} \right] \quad (21)$$

A partir de l'équation (21), nous obtenons une expression quadratique :

$$h \cdot R(T_{p1}) \cdot T_{p1}^2 - \left( \frac{h^2 \cdot R(T_{p1})}{2 \cdot (R - D)} - h \cdot DMP + \frac{D \cdot DMP^2}{2} + c \right) \cdot T_{p1} - c \cdot DMP = 0 \quad (22)$$

De l'équation (22), nous obtenons la valeur de  $T_{p1}$  en fonction de  $h$  comme suit :

$$T_{p1} = \frac{\frac{h^2 \cdot R(T_{p1})}{2 \cdot (R-D)} - h \cdot DMP + \frac{D \cdot DMP^2}{2} + c \pm \sqrt{\left(\frac{h^2 \cdot R(T_{p1})}{2 \cdot (R-D)} - h \cdot DMP + \frac{D \cdot DMP^2}{2} + c\right)^2 + 4 \cdot h \cdot R(T_{p1}) \cdot c \cdot DMP}}{2 \cdot h \cdot R(T_{p1})} \quad (23)$$

### Cas b)

Soit  $T_{p2}$  la période de maintenance préventive quand à la fin de l'action de maintenance le niveau de stock est négatif. L'aire rayée  $A_2$ , de la Figure 3 est donnée par :

$$A_2 = \frac{h^2}{2 \cdot (R-D)} + h \cdot \left(T_{p2} - \frac{h}{(R-D)}\right) + \frac{D(D \cdot DMP^2 + 2 \cdot h \cdot DMP) + 2 \cdot h^2}{2 \cdot D} \quad (24)$$

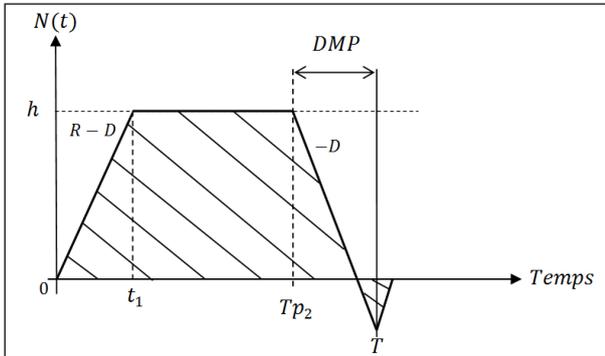


Figure 3 : L'action de maintenance préventive commence à  $T_p$  et il y a des pénuries à la fin de l'action de maintenance préventive.

Soit  $\bar{N}_2(t)$  le niveau de stock moyen, lorsqu'à la fin de la période de maintenance préventive, le niveau de stock est négatif. Il est donné par l'équation (25).

$$\bar{N}_2(t) = \frac{\left[\frac{h^2}{2 \cdot (R-D)} + h \cdot \left(T_{p2} - \frac{h}{(R-D)}\right)\right] \cdot R(T_{p2}) + \frac{D(D \cdot DMP^2 + 2 \cdot h \cdot DMP) + 2 \cdot h^2}{2 \cdot D}}{T_{p2} + DMP} \quad (25)$$

De façon similaire à ce que nous avons avec l'équation (17) :

$$\bar{N}_2(t) = \frac{c}{T_{p2}} \quad (26)$$

$$\frac{c}{T_{p2}} = \frac{\left[\frac{h^2}{2 \cdot (R-D)} + h \cdot \left(T_{p2} - \frac{h}{(R-D)}\right)\right] \cdot R(T_{p2}) + \frac{D(D \cdot DMP^2 + 2 \cdot h \cdot DMP) + 2 \cdot h^2}{2 \cdot D}}{T_{p2} + DMP} \quad (27)$$

$$c \cdot (T_{p2} + DMP) = T_{p2} \left[ \frac{\frac{h^2 \cdot R(T_{p2})}{2 \cdot (R-D)}}{+ h \cdot R(T_{p2}) \cdot \left(T_{p2} - \frac{h}{(R-D)}\right)} + \frac{D(D \cdot DMP^2 + 2 \cdot h \cdot DMP) + 2 \cdot h^2}{2 \cdot D} \right] \quad (28)$$

De (28), nous obtenons une équation quadratique :

$$h \cdot R(T_{p2}) \cdot T_{p2}^2 - \left(\frac{h^2 \cdot R(T_{p2})}{2 \cdot (R-D)} - \frac{DMP^2 \cdot D}{2} - h \cdot DMP - \frac{h^2}{D} + c\right) \cdot T_{p2} - DMP \cdot c = 0 \quad (29)$$

A partir de l'équation (29), nous pouvons obtenir la valeur de  $T_{p2}$  en fonction de  $h$ . Cette valeur est donnée par l'équation (30).

$$T_{p2} = \frac{\frac{h^2 \cdot R(T_{p2})}{2 \cdot (R-D)} - \frac{DMP^2 \cdot D}{2} - h \cdot DMP - \frac{h^2}{D} + c \pm \sqrt{\left(\frac{h^2 \cdot R(T_{p2})}{2 \cdot (R-D)} - \frac{DMP^2 \cdot D}{2} - h \cdot DMP - \frac{h^2}{D} + c\right)^2 + 4 \cdot h \cdot R(T_{p2}) \cdot DMP \cdot c}}{2 \cdot h \cdot R(T_{p2})} \quad (30)$$

Nous intégrons la probabilité pour chacun des cas (Gu et al., 2005), afin d'obtenir la valeur totale de  $T_p$ . Finalement, la valeur de  $T_p$  est donnée par l'équation (31):

$$T_p = E(T_{p1}) \cdot P_{np} + E(T_{p2}) \cdot P_p \quad (31)$$

où  $P_{np}$  représente la probabilité de ne pas avoir de pénurie à la fin de l'action de maintenance préventive et  $P_p$  est la probabilité d'avoir de pénuries à la fin de l'action de maintenance préventive.

## 4 ETUDE DE LA FONCTION DE COUT SELON LE NIVEAU DE STOCK

Le coût total  $CT(t)$  correspond à la somme des coûts de stockage, de transport, de maintenance et de pénurie. Dans cet article, les coûts de transport  $ct_i$  sont considérés fixes.  $ct_1$  est le coût unitaire des matières transportées de la machine vers le stock et  $ct_2$  est le coût unitaire de transport des pièces du stock vers le client.

$$CT(t) = g(N(t)) + Xt_1(t) \cdot ct_1 + Xt_2(t) \cdot ct_2 + CM(t) \quad (32)$$

avec :

$$g(N(t)) = \begin{cases} N(t) \cdot c^+, & \text{si } N(t) \geq 0 \\ N(t) \cdot c^-, & \text{si } N(t) < 0 \end{cases} \quad (33)$$

$g(N(t))$  correspond au coût de stockage à l'instant  $t$ ,  $c^+$  est le coût de possession d'une pièce,  $c^-$  est le coût de pénurie par pièce.

Soit  $L_T(h)$  le coût total moyen sur un horizon fini. Il est donné par :

$$L_T(h) = \left[ \frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} (g(N(t, h)) + Xt_1(t).ct_1 + Xt_2(t).ct_2).dt + CM(T) \right] \quad (34)$$

Nous développons l'équation (13) et nous obtenons une expression plus simple, afin de remplacer la valeur obtenue de  $T_p$  dans l'équation (34).

$$CM(T) = \frac{T}{T_p} \cdot \left( mc \cdot \frac{1}{\beta^\alpha} \cdot T_p^\alpha + mp \right) = T \cdot \left( mc \cdot \frac{T_p^{\alpha-1}}{\beta^\alpha} + \frac{mp}{T_p} \right) \quad (35)$$

Soit  $T1(h)$  le temps total pendant lequel le niveau de stock est positif ( $N(t) > 0$ ), et  $T2(h)$  le temps total pendant lequel le niveau de stock est négatif. Nous remplaçons (35) dans (34) et avec  $T1(h)$  et  $T2(h)$ , nous obtenons :

$$L_T(h) = \frac{T1(h).c^+}{T} + \frac{T2(h).c^-}{T} + T \cdot \left( mc \cdot \frac{T_p^{\alpha-1}}{\beta^\alpha} + \frac{mp}{T_p} \right) + \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^{t=T} (Xt_1(t).ct_1 + Xt_2(t).ct_2).dt \quad (36)$$

En remplaçant (31) dans (36) nous obtenons :

$$L_T(h) = \frac{T1(h).c^+}{T} + \frac{T2(h).c^-}{T} + T \cdot \left( mc \cdot \frac{(E(T_{p1}).P_{np} + E(T_{p2}).P_p)^{\alpha-1}}{\beta^\alpha} + \frac{mp}{(E(T_{p1}).P_{np} + E(T_{p2}).P_p)} \right) + \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^{t=T} (Xt_1(t).ct_1 + Xt_2(t).ct_2).dt \quad (37)$$

Afin de donner une expression plus réduite, nous appelons les termes de l'équation (23) comme suit :

$$A = \frac{h^2.R(T_{p1})}{2.(R-D)}, \quad B = -h.DMP, \quad C = \frac{D.DMP^2}{2} + c$$

Nous faisons de même avec les termes de l'équation (30) comme suit :

$$D = \frac{h^2.R(T_{p2})}{2.(R-D)}, \quad E = -\frac{DMP^2.D}{2} - h.DMP, \quad F = -\frac{h^2}{D} + c$$

Ainsi, nous obtenons pour le coût total moyen sur un horizon fini, l'expression suivante :

$$L_T(h) = \frac{T1(h).c^+}{T} + \frac{T2(h).c^-}{T} + \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^{t=T} (Xt_1(t).ct_1 + Xt_2(t).ct_2).dt + T \cdot \left( mc \cdot \frac{\left( \left( \frac{A+B+C + \sqrt{(A+B+C)^2 + 4.h.R(T_{p1}).DMP.c}}{2.h.R(T_{p1})} \right)^{P_{np}} + \left( \frac{D+E+F + \sqrt{(D+E+F)^2 + 4.h.R(T_{p2}).DMP.c}}{2.h.R(T_{p2})} \right)^{P_p} \right)^{\alpha-1}}{\beta^\alpha} + \frac{mp}{\left( \frac{A+B+C + \sqrt{(A+B+C)^2 + 4.h.R(T_{p1}).DMP.c}}{2.h.R(T_{p1})} \right)^{P_{np}} + \left( \frac{D+E+F + \sqrt{(D+E+F)^2 + 4.h.R(T_{p2}).DMP.c}}{2.h.R(T_{p2})} \right)^{P_p}} \right)$$

Le résultat précédent, nous permet de trouver le coût total moyen sur un horizon fini, en considérant une interaction entre la période de la maintenance préventive et le point de séparation. Dans Ramirez Restrepo et al. (2014), une étude de la valeur de la maintenance préventive ainsi que du point de séparation a été réalisée, en négligeant le lien entre ces deux valeurs.

Dans la section suivante, les résultats théoriques sont utilisés et couplés à une simulation pour déterminer les valeurs de la période de la maintenance préventive et du point de séparation.

## 5 RESULTATS NUMERIQUES

Nous avons réalisé une simulation de type événements discrets, dans laquelle les événements possibles dans le système sont : les pannes, les réparations et les maintenances préventives de la machine, ainsi que l'épuisement et la saturation du stock. Nous avons développé un programme sous le logiciel Dev-C++ IDE.

Les données du Tableau 1 ont été utilisées pour la simulation.

R	D	c <sup>+</sup>	c <sup>-</sup>	ξ1	ξ2	TBF		TTR		mp	mc
						α	β	α	β		
4	2	30	600	1	2	12	3	2	3	150	750

Tableau 1 : Paramètres de simulation

La fonction de coût a été calculée en étudiant les cas possibles pour le coût de stockage entre deux événements successifs.

Dans la Figure 4, nous pouvons observer la variation du coût total moyen en fonction du niveau de stock, pour des valeurs différentes de  $T_p$ .

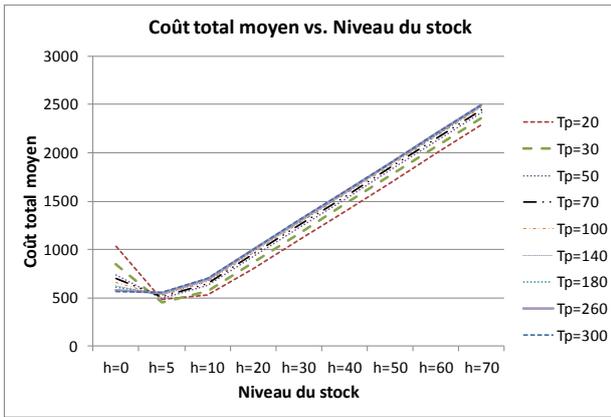


Figure 4 : Coût total moyen en fonction du niveau de stock

Des figures 4 et 5, nous observons que la valeur minimale du coût total moyen est obtenue avec une valeur de  $T_p$  égale à 26 unités de temps et un niveau de stock égal à 5 unités. La valeur du coût total moyen associée est égale à 445.2920 unités monétaires.

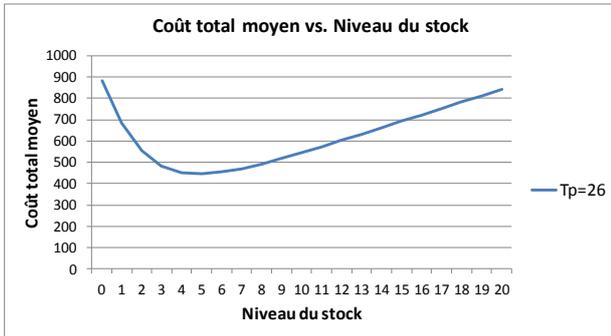


Figure 5 : Coût total moyen vs. niveau de stock pour la valeur de  $T_p$  qui minimise le coût total moyen.

La figure 6 montre des courbes différentes de la période de la maintenance préventive en fonction du coût total moyen, avec des valeurs différentes du niveau de stock. Les valeurs les plus petites pour le coût total moyen ont été trouvées avec  $h = 5$  unités. Cette valeur nous donne une idée préliminaire pour réaliser l'optimisation.

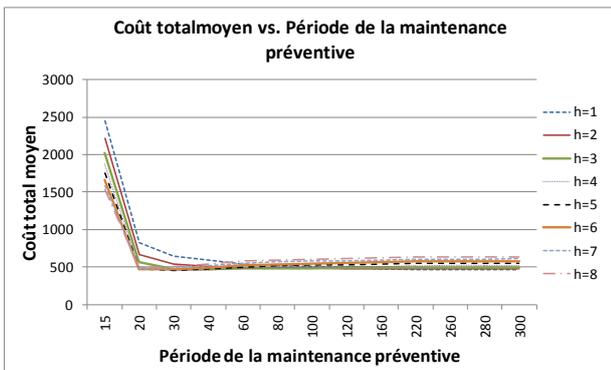


Figure 6 : Période de la maintenance préventive vs. coût total moyen

La figure 7 permet de faire un focus autour du niveau de stock qui minimise la valeur du coût total moyen, il existe une valeur de  $T_p$  pour laquelle le coût total moyen est minimum.

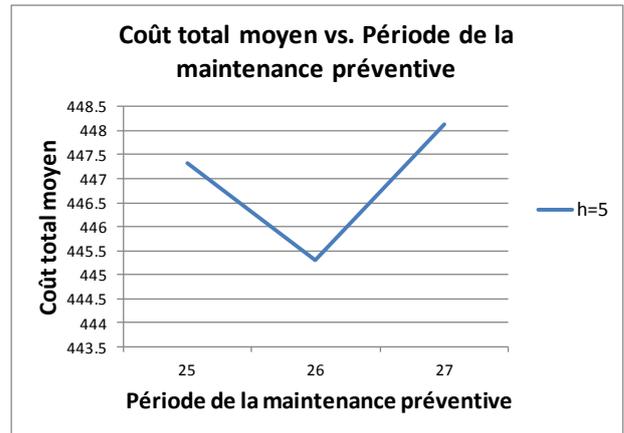


Figure 7 : Zoom de la période de la maintenance préventive vs. coût total moyen pour  $h = 5$  unités.

Nous avons trouvé pour  $T_p^*$  une valeur optimale égale à 25.08 unités de temps et pour  $h^*$  une valeur de  $4.82 \pm 0.0748$  unités. Le coût total moyen associé est de 441.1365 unités monétaires.

Nous allons traiter les deux cas théoriques étudiés dans la section 3. Pour rappel, dans le cas *a*, nous considérons qu'il n'y a pas des pénuries à la fin de la période de la maintenance préventive et dans le cas *b*, à la fin de la période de la maintenance préventive, il y a des pénuries.

### 5.1 Exemple d'application numérique pour le cas a.

$R$	$D$	$DMP$	$c$	$R(T_{p1})$
4	2	12.05 UT	1	1

Tableau 2 : Données numériques cas a.

Les valeurs du Tableau 2 ont été remplacées dans l'équation (23). Nous obtenons une courbe de type convexe qui prend sa valeur minimale quand  $h = 31$  unités (Figure 8). Cette valeur a été obtenue en considérant des valeurs différentes pour le niveau du stock entre 1 et 160 unités.

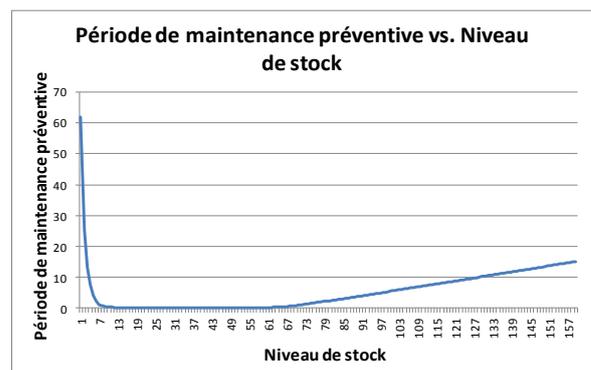
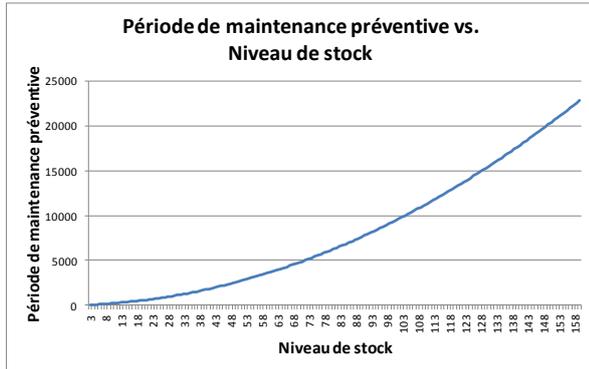


Figure 8.  $T_{p1}$  en fonction de  $h$

## 5.2 Exemple d'application numérique pour le cas b.

$R$	$D$	$DMP$	$c$	$R(T_{p2})$
4	2	12.05 UT	1	1

Tableau 3 : Données numériques cas b.

Figure 9.  $T_{p2}$  en fonction de  $h$ 

En remplaçant les données du Tableau 3 dans l'équation (30), nous obtenons la courbe montrée dans la Figure 9. Cette courbe laisse voir que plus la période de la maintenance préventive est importante, plus le niveau de stock augmente. Cela s'explique parce que s'il y a un stock important, il est possible de couvrir une période de maintenance préventive plus grande.

## 6 CONCLUSION

Dans ce papier nous avons étudié un système de production mono produit composé d'une machine, d'un stock de produits finis et d'un client. Les délais de transfert entre la machine et le stock, ainsi qu'entre le stock et le client ont été considérés. La machine est soumise à des pannes dépendantes du temps. Une stratégie de maintenance préventive de type bloc a été adoptée. Nous avons étudié le lien existant entre la période de la maintenance préventive et le niveau du stock. Pour ce faire, deux cas ont été considérés :

- S'il y a des pénuries à la fin de l'action de maintenance préventive;
- S'il n'y a pas des pénuries à la fin de l'action de maintenance préventive.

Une application numérique a été menée pour chacun des cas. Nous avons réalisé une simulation de type événements discrets dans laquelle plusieurs valeurs ont été testées pour la période de la maintenance préventive et pour le niveau de stock. Nous avons trouvé la valeur du niveau du stock et de la période de la maintenance préventive qui minimise le coût total moyen obtenus par simulation.

Dans une autre étude, (Ramirez Restrepo et al. 2014), nous avons considéré que le point de séparation et la période de la maintenance préventive étaient indépendants. Dans cet article nous avons relaxé cette hypothèse de travail et étudié la dépendance entre ces deux variables. Nous avons trouvé que la valeur du point de séparation est inférieure lorsque le point de séparation

est dépendant de la période de la maintenance préventive. Dans le premier cas, la valeur du point de séparation qui minimise le coût total est égale à 25 unités et dans le cas étudié dans ce papier, elle est égale à 5 unités ce qui permet de minimiser grandement les coûts de stockage.

Dans le futur, nous souhaiterions étendre nos travaux pour des systèmes de production plus complexes en considérant dans un premier temps des lignes de transfert avant d'envisager des systèmes d'assemblage / désassemblage et évaluer différentes politiques de pilotage autres que la politique type point de séparation. Nous voulons également intégrer des contraintes supplémentaires liées aux enjeux du développement durable et souhaiterions par exemple appliquer aux systèmes de production considérés une politique de type point de séparation avec prise en compte des émissions de polluants.

## REFERENCES

- Akella, R., and Kumar, P., 1986. Optimal control of production rate in a failure prone manufacturing system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(2), p. 116-126.
- Barlow, R.E. and Hunter, L.C., 1960. Optimum preventive maintenance policies. *Operations Research*, 8, p.90-100.
- Bielecki T. and Kumar P. R., 1988. Optimality of zero-inventory policies for unreliable manufacturing systems. *Operations Research*, 36(4), p. 532-541.
- Boukas, E. K., 1998. Hedging Point Policy Improvement. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 97(1), p. 47-70.
- Chelbi, A., & Ait-Kadi, D. 2004. Analysis of a production/inventory system with randomly failing production unit submitted to regular preventive maintenance. *European Journal of Operational Research* 156, p. 712-718.
- Gharbi, A., Kenné, J.-P. and Beit, M., 2007. Optimal safety stocks and preventive maintenance periods in unreliable manufacturing systems. *International Journal of Production Economics*, 107, p. 422-434.
- Gomez Urrutia, E., Hennequin, S. and Rezg, N., 2011. Optimization of a failure-prone manufacturing system with preventive maintenance: an IPA approach". *IFAC world congress 2011*, Milano, Italy, p. 10422-10427.
- Gu, L., Hennequin S. and Xie, X., (2005). Optimal control of a continuous flow failure prone manufacturing system. *Proceedings of the 16<sup>th</sup> IFAC World Congress, (IFAC'05)*, Praha, Czech Republic, vol. 16, p. 1428.
- Kimemia, J., and Gershwin, S., 1983. An Algorithm for the Computer Control of a Flexible Manufacturing System. *IIE Transactions*, AC-15, p. 353-362.
- Mourani, I., Hennequin, S. and Xie, X., 2006. Optimization of continuous-flow transfer lines with

- delay using IPA. *Proceedings of 12<sup>th</sup> IFAC Symposium of information Control problems in Manufacturing (INCOM2006)*, Saint Etienne, France, vol. 2, p. 323-328.
- Perkins, J. R. and Srikant, R., 1995. Hedging Policies for Failure-Prone Manufacturing Systems: Optimality of JIT and Bounds on Buffer Levels. *Proceedings of the 34<sup>th</sup> IEEE Transactions on Automatic Control*, New Orleans, USA, vol.3, p. 3144 – 3149.
- Plambeck, E.L., Fu, B.-R., Robinson, S.M., and Suri, R., 1996. Sample-path optimization of convex stochastic performance functions. *Mathematical Programming*, vol. 75, p.137-176.
- Ramirez Restrepo, L. M., Aguezoul, A. and Hennequin, S., 2014. Performance evaluation of preventive maintenance considering transportation delays. *19<sup>th</sup> IFAC World Congress, (IFAC WC 2014)*.
- Tan, B., and Gershwin, S. B., 2009. Analysis of a general Markovian two-stage continuous-flow production system with a finite buffer. *International Journal of Production Economics*, vol. 120(2), p. 327–339.
- Van Ryzin, G.J., 1987. *Control of Manufacturing Systems With Delays*. Thèse de M.Sc. MIT EECS LIDS-TH-1676, Laboratory for Information and Decision Systems.
- Van Ryzin, G.J., Lou, S. X.C. and Gershwin, S.B., 1991. Scheduling job shops with delay. *International Journal of Production Research*, 29(7), p. 1407-1422.
- Wardi, Y., and Melamed, B., 2001. Variational bounds and sensitivity analysis of traffic processes in continuous flow models. *Discrete Event Dynamic Systems*, vol. 11(3), p. 249-282.
- Xie, X., Hennequin, S. and Mourani, I., 2013. Perturbation analysis and optimisation of continuous flow transfer lines with delay. *International Journal of Production Research*, 51(23-24), p. 7250-7269.