HAL
open science

ETUDE ET COMMANDE ROBUSTE DE SYSTÈMES LOGISTIQUES SOUMIS À UNE DEMANDE INCONNUE BORNÉE.

Charifa Moussaoui, Rosa Abbou, Jean Jacques Loiseau

To cite this version:

Charifa Moussaoui, Rosa Abbou, Jean Jacques Loiseau. ETUDE ET COMMANDE ROBUSTE DE SYSTÈMES LOGISTIQUES SOUMIS À UNE DEMANDE INCONNUE BORNÉE. . MOSIM 2014, 10ème Conférence Francophone de Modélisation, Optimisation et Simulation, Nov 2014, Nancy, France. hal-01166595

HAL Id: hal-01166595

https://hal.science/hal-01166595

Submitted on 23 Jun 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Étude et commande robuste de systèmes logistiques, soumis à une demande inconnue bornée

C. MOUSSAOUI

LIMOS
UMR CNRS 6158
Campus Scientifique des Cézeaux
63173 AUBIÈRE Cedex, France

R. ABBOU, J.J LOISEAU

LUNAM Université , IRCCYN
UMR CNRS 6597
1 rue de la Noë,BP 92101
44321 NANTES Cedex 3, France

Charifa.Moussaoui, Rosa.Abbou, Jean-Jacques.Loiseau@irccyn.ec-nantes.fr

RÉSUMÉ : *Dans ce travail, nous proposons une méthode de gestion de production et de conception de commande pour un système logistique basique, permettant de garantir la stabilité du stock face à une demande incertaine mais bornée. Dans cette étude, on tient compte du délai présent dans la dynamique du système qui peut être sujet à des incertitudes. Nous montrons ainsi la robustesse de la loi de commande vis-à-vis de ces incertitudes. L'approche est basée sur des méthodes issues de la théorie du contrôle : une structure de commande saturée et contrainte, de type feedback prédicteur, est mise en place afin de prendre en compte les contraintes du système, de capacité et de positivité, tout en compensant l'effet du retard grâce à la partie prédicteur. On obtient ainsi des conditions de stabilisation du stock, et le respect des contraintes du système. Ces résultats théoriques sont appuyés par des résultats de simulation.*

MOTS-CLÉS : *Gestion de production et des stocks, systèmes à retards, théorie du contrôle, contraintes de positivité et de saturation, robustesse.*

1 INTRODUCTION

La conception des systèmes logistiques est une phase critique et déterminante. Il s'agit essentiellement de dimensionner les différentes ressources telles que les unités de production et de stockage, ainsi que les unités de distribution, de façon à pouvoir garantir un fonctionnement dit robuste pour le système. L'enjeu étant de pouvoir satisfaire les différentes demandes clients en y répondant dans les délais impartis, tout en optimisant l'utilisation des ressources disponibles et en faisant face à d'éventuels aléas.

Depuis les travaux pionniers de Simon (Simon, 52) portant sur l'étude de la dynamique de ces systèmes logistiques et la compréhension de leurs mécanismes, différents travaux tels que (Forrester, 1961), (Towill, 1982), (Edghill et Towill, 1989), (Sterman, 1989), (Riddalls et al., 2000) ont souligné la nécessité d'apporter une analyse formelle aux résultats empiriques de Simon, en mettant en œuvre des approches d'études issues de la théorie de la commande, donnant lieu à des modèles tels que l'Automatic Pipeline Inventory Ordered Base Production Control System, APIOBPCS, et ses variantes (John et al., 1994). Ces modèles ont permis de mettre en évidence la connexion entre les différents éléments du système manufacturier, à savoir les ordres de production, les demandes des consommateurs et les variations des niveaux des stocks, à travers des fonctions de transfert et des paramètres de commande. Un des paramètres les plus critiques révélé est le retard. En effet, que ce soit les délais de production, les temps de prise de décision ou les échéances de livraison, le retard est présent et commun à tous les systèmes manufacturiers et économiques, où l'interaction entre les différentes entités nécessite un temps de réalisation. Bien que l'importance du retard ait été établie depuis les tous premiers travaux de Simon et Forrester, en mettant à jour en particulier son rôle dans le déclenchement du bullwhip effect, ce phénomène d'amplification de la variation de la demande en amont du système logistique est un réel problème majeur. La prise en compte du retard, sans approximation, comme élément essentiel dans l'étude de la dynamique des systèmes logistiques est pourtant relativement récente. Cela est dû au fait que les systèmes à retards sont des systèmes à dimension infinie, en termes automatiques, qui possèdent un nombre infini de pôles, et dont l'étude de la stabilité n'est pas chose aisée. C'est avec l'avancée des recherches sur la stabilisation des systèmes à retards, et la compréhension des effets que ces retards engendrent sur la dynamique des systèmes, que des travaux tels que (Sipahi et al., 2010), (Warburton, 2004), ont amené des solutions exactes aux équations différentielles gouvernant la dynamique des systèmes de production, complétant les études et les travaux susmentionnés.

Cela étant établi, certains aspects des systèmes

logistiques ne sont pas pris en compte dans ces travaux, à savoir les limitations physiques et technologiques des ressources entrant dans les processus de production, de transport et de stockage. En effet, dans un système logistique, les stocks sont des ressources à capacités finies, les machines de production sont, quant à elles, conditionnées par leurs caractéristiques technologiques, et restent néanmoins limitées. La même contrainte s'applique pour les ressources de transport. D'autres contraintes apparaissent venant du fait qu'un niveau de stock ne peut avoir de valeurs négatives, pas plus qu'un ordre de production. Peu d'auteurs se sont intéressés à cette problématique, tels que (Wang et al., 2012), (Wang et al., 2013) qui ont traité la contrainte de positivité des ordres de production uniquement, et n'ont pas considéré les contraintes de saturation et de limite de stockage. Cela est dû au fait que la prise en compte de ces contraintes, implique l'utilisation de modèles non linéaires, dont l'analyse n'est pas aisée.

Une parfaite connaissance du comportement du système à concevoir ou à gérer est essentielle : le dimensionnement des stocks et le choix des machines de production doivent être guidés par une étude préalable des interactions entre les différents éléments du système et les demandes du marché auquel il est destiné, prenant en compte les contraintes réelles du système et les retards qui y sont présents. Un autre aspect peu présent dans la littérature, est la conception de commande robuste vis-à-vis des retards. En effet, dans un système logistique l'estimation des différents délais est souvent entachée d'erreurs et d'incertitudes, qu'il est souvent difficile de quantifier et de prévoir à l'avance. On peut alors rapidement se trouver en situation de pénurie si les calculs réalisés à l'avance ne donnent pas lieu à des marges de sécurité suffisantes, ou au contraire, si les marges prévues sont trop importantes, l'entreprise se retrouve en situation de surplus qui peut induire des pertes considérables.

Dans cet article, nous considérons un système logistique basique, constitué d'une unité de production, d'un stock de produits finis. L'unité de production est caractérisée par un délai qui peut être connu avec précision, mais qui peut tout aussi présenter des incertitudes. Le but de notre étude est de contrôler le système logistique, de façon à ce que les contraintes sur le niveau de stock et sur les taux de production soient respectées, tout en répondant aux commandes des consommateurs, et malgré la présence d'incertitude sur l'estimation du délai. La demande client est supposée inconnue mais bornée par une valeur maximale donnée.

Dans la section 2, nous présentons le modèle dynamique d'un système logistique basique, et nous formalisons les contraintes et spécifications de fonctionnement. On y présente également la structure de commande feedback prédicteur saturée et contrainte, et nous justifierons du choix de cette commande. En section 3 et 4, nous présentons notre méthodologie de travail, ainsi que l'essentiel de nos résultats, d'abord pour le cas d'un système sans incertitudes sur le délai, puis en considérant les incertitudes sur le retard. Cette étude est complétée par une discussion de la base d'un modèle de simulation que nous présentons en section 5. Enfin, une conclusion générale et quelques perspectives futures termineront ce travail.

2 MODÈLE DYNAMIQUE D'UN SYSTÈME LOGISTIQUE

Un système logistique basique est constitué d'une unité de production ou de transformation, et d'une unité de stockage. L'unité de production est caractérisée par une cadence (taux de production), et le délai nécessaire à l'accomplissement de ses tâches. La cadence est conditionnée par les capacités physiques des actionneurs et des machines de production, qui peuvent atteindre des seuils de saturation, correspondant à leurs capacités maximales de productivité. L'unité de stockage, ou simplement le stock, est, quant à elle, caractérisée par le flux entrant de matières (produits), issu de la production, et le flux sortant des matières correspondant aux ventes effectuées, et donc à la demande client. Tout comme l'unité de production, l'unité de stockage est une ressource dont la capacité est limitée. Dans cette section, nous proposons un modèle dynamique générique pour un tel système logistique, qui prend en compte les différents éléments susmentionnés : à savoir la dynamique du stock, les contraintes physiques du système et ses retards.

2.1 Dynamique du stock

L'évolution du niveau du stock dépend essentiellement des flux entrants issus de la production et des flux sortants issus de la demande client. La dynamique de ce niveau de stock est alors régie par l'équation différentielle retardée suivante

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} u(t-\theta) - d(t) & \text{pour } t \geq \theta \\ \phi(t) - d(t) & \text{pour } 0 \leq t < \theta\,, \end{cases} \tag{1}$$

où $y(t)$ est le niveau du stock instantané, $u(t)$ est le flux entrant, correspondant au flux de production, θ est le délai nécessaire à l'accomplissement des tâches de production, et $d(t)$ est la demande client qui correspond au flux sortant. $\phi(t)$ est *la fonction des conditions initiales* qui décrit l'état du système de production pour $t \leq \theta$.

2.2 Contraintes du système logistique

Les contraintes auxquelles est soumis le système logistique sont liées à ses limites physiques. D'une part, le niveau de stock ne peut prendre que des valeurs positives, car il quantifie une quantité de matière, (qu'elle

soit mesurée en nombre de pièces ou de lots, ou en unités de masse ou de volume). D'autre part, il ne peut pas excéder la capacité maximale de stockage. Celle-ci est noté Y_{max}. On a ainsi

$$y(t) \in [0, Y_{max}] \text{ , pour } t \geq 0, \tag{2}$$

De même, le flux de production $u(t)$ est un flux physique de matière qui est liée à la capacité des actionneurs et des machines mis en œuvre. De ce fait il ne peut prendre de valeurs négatives, et ne peut excéder la capacité maximale, qu'on note U_{max}, du matériel utilisé. Cette seconde contrainte est exprimée sous la forme suivante.

$$u(t) \in [0, U_{max}] \text{ , pour } t \geq 0. \tag{3}$$

Une dernière spécificité à présenter concerne la demande client $d(t)$. A l'instar du flux physique de matière, le flux de demande aussi ne peut prendre de valeurs négatives. Comme nous l'avons présenté dans l'introduction, nous considérons dans ce travail que la demande client est inconnue d'avance, et qu'elle est bornée. Elle varie arbitrairement entre un minimum et un maximum tels que

$$d(t) \in [0, d_{max}] \text{ , pour } t \geq 0. \tag{4}$$

2.3 Commande du taux de production

La commande de notre système est la variable $u(t)$, qui est la consigne instantanée de niveau de production. Gérer la production revient alors à maîtriser ces flux de produits de façon à atteindre les objectifs globaux fixés par la stratégie générale du système logistique. Cette stratégie vise à garantir un taux de service de cent pour cent, pour toute demande de la forme (4), avec la maîtrise des variations des niveaux de stock, et le respect des contraintes de positivité et de saturation (2 et (3). D'un point de vue système, il s'agit de mettre au point une commande $u(t)$ qui permet de stabiliser le système tout en prenant compte les différentes contraintes et spécifications du système logistique, ainsi que le retard θ présent dans sa dynamique. Pour ce faire, nous introduisons une loi de commande du type *feedback prédicteur saturé* qui se présente sous la forme suivante

$$u(t) = \underset{[0,U_{max}]}{sat}[K(y_c - z(t))] \text{ , pour } t \geq 0, \tag{5}$$

où y_c est le niveau de référence du stock, K est le gain du système qui définit la cadence de production, et $z(t)$ est la prédiction de l'état futur du stock que nous présentons en détail dans la suite.

Les commandes saturées sont souvent employées dans des systèmes où les actionneurs présentent des caractéristiques de saturation dues à leurs limitations physiques, permettant alors la prise en compte de ces limitations de capacité. Des travaux tels que (Tarbouriech et al., 2011), (Hu, 2001), ont montré l'efficacité supérieure de ces commandes saturées face à de simples commandes contraintes. L'utilisation de ce type de commande introduit néanmoins des non-linéarités dans le système contrôlé, la fonction *sat* étant définie par

$$\underset{[a,b]}{sat}[f(t)] = \begin{cases} b & \text{si } f(t) > b, \\ f(t) & \text{si } a \leq f(t) \leq b, \\ a & \text{si } f(t) < a. \end{cases}$$

Pour ce type de systèmes non-linéaires, les conditions de stabilité et de stabilisation peuvent être obtenues en caractérisant des ensembles dits *invariants* et dans lesquels les contraintes du systèmes sont satisfaites. La définition de l'invariance est donnée dans la section 3.1.

La structure de commande du type feedback prédicteur est bien connue pour ses propriétés stabilisantes, permettant de faire du placement de pôle fini pour des systèmes à retard (Manitius et Olbrot, 1979), (Mirkin et Raskin, 2003). Aussi connue sous le nom de réduction d'Artstein (Artstein, 1982), elle est basée sur le principe de compensation du retard, donnant lieu à un système réduit sans retard, grâce à la mise en place d'une prédiction de l'état futur du système de la forme

$$z(t) = \begin{cases} y(t) + \int_{t-\theta_0}^{t} u(\tau)d\tau & \text{pour } t \geq \theta_0, \\ y(t) + \int_{t}^{\theta} \phi(\tau)d\tau + \int_0^t u(\tau)d\tau & \text{pour } t < \theta_0, \end{cases} \tag{6}$$

où θ_0 est l'estimation du retard réel θ. Cette structure de commande permet une entière compensation et anticipation des effets du retard sur la dynamique du système, à condition que ce retard soit estimé avec précision, c'est à dire $\theta = \theta_0$. On parle alors de modèle nominal. Or, l'estimation en ligne du délai dans un système logistique peut être entachée d'incertitudes diverses et d'aléas (pannes, retards de livraison, grèves...), et de ce fait, la prédiction (6) basée sur l'estimation θ_0 n'est plus tout à fait juste. Nous proposons alors d'étudier le contrôle du système logistique dans les deux situations suivantes :

- Cas nominal : l'estimation du délai est conforme au délai réel, c'est à dire $\theta = \theta_0$,
- Cas avec incertitude : le délai réel est défini dans un intervalle d'incertitude tel que : $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, θ_1 et θ_2 étant connus, et θ_0 pouvant appartenir ou non à cet intervalle.

Dans ces deux situations, nous étudierons l'évolution du système sous l'action de la commande, afin de pouvoir paramétrer correctement le contrôleur, dans le but de garantir le respect des contraintes énoncées précédemment. Ceci est l'objet des sections suivantes.

3 ÉTUDE ET CONTRÔLE DE LA DYNAMIQUE DU SYSTÈME LOGISTIQUE : CAS NOMINAL

Dans cette section, nous étudions la dynamique du système contrôlé (1-5) dans le cas où le retard est estimé avec précision. Tout au long de ces développements, nous utiliserons alors une unique notation pour le retard qui est θ.

3.1 Dynamique du système contrôlé

Comme nous l'expliquons dans la section 2.3, pour le cas nominal, l'utilisation d'une structure feedback predicteur permet d'aboutir à un système réduit sans retard, car en effet, en utilisant les formules données par (1) et (6), on peut remarquer que $z(t)$ se réécrit sous la forme

$$z(t) = y(t+\theta) + \int_t^{t+\theta} d(\tau)d\tau \text{ , pour } t \geq 0. \qquad (7)$$

Par dérivation temporelle de cette dernière expression, on aboutit au système suivant

$$\dot{z}(t) = u(t) - d(t) \text{ ,pour } t \geq 0, \qquad (8)$$

ou plus explicitement

$$\dot{z}(t) = \underset{[0,U_{max}]}{sat}[K(y_c - z(t)] - d(t) \text{ , pour } t \geq 0. \qquad (9)$$

Le système (8) effectivement, est sans retard. Ce système est la réduction du système (1)-(5). Il est alors démontré dans (Artstein, 1982), qu'une loi de commande $u(t)$ est admissible pour le système en boucle fermée (1)-(5), si et seulement si cette même commande est admissible pour le système (9). Par ailleurs, il est établi que ces deux systèmes ont les mêmes propriétés dynamiques. Nous utilisons alors ce résultat pour étudier les comportements dynamiques de notre système logistique (1)-(5). En effet, notre démarche consiste à utiliser le système réduit (8)-(5) pour concevoir les paramètres de notre contrôleur qui répondent aux contraintes (2) et (3), en utilisant le principe de $\mathscr{D}$-invariance défini comme suit.

Définition 1 *(Blanchini, 1999)- Soit un système dynamique donné avec Ω un sous ensemble de son espace d'entrée, et une perturbation $d(t)$ appartenant à un ensemble $\mathscr{D}$. L'ensemble Ω est dit $\mathscr{D}$-invariant pour ce système si, pour toute condition initiale de Ω, les trajectoires générées par ce systèmes sont toutes incluses dans Ω, pour tout t et toute perturbation $d(t)$ de $\mathscr{D}$.*

L'existence d'un tel ensemble pour le système non-linéaire (8)-(5) permet d'apporter des conclusions concernant la stabilité du système, en particulier en terme de BIBO (Bounded Input, Bounded Output)-stabilité. La première partie de notre travail consiste à identifier cet ensemble, comme nous le montrons dans ce qui suit.

A partir de l'équation (7), nous pouvons constater que, $y(t+\theta)$ s'exprimant sous la forme

$$y(t+\theta) = z(t) - \int_t^{t+\theta} d(\tau)d\tau \text{ , pour} t \geq 0 \qquad (10)$$

la contrainte (2) est vérifiée si $z(t)$ et le terme $\int_t^{t+\theta} d(\tau)d\tau$ sont tous les deux bornés, de façon à ce que $y(t+\theta) \in [0, Y_{max}]$. Sous l'hypothèse que la spécification (4) est bien satisfaite, on constate que $\int_t^{t+\theta} d(\tau)d\tau \in [0, \theta\, d_{max}]$,$\forall t \geq 0$. De ce fait, $z(t)$ doit être aussi limitée par des bornes z_{min} et z_{max} vérifiant le relation (10) tel que

$$0 \leq z_{min} - \theta d_{max} \text{ pour } y(t+\theta) = 0,$$

et

$$z_{max} \leq Y_{max} \text{ pour } y(t+\theta) = Y_{max}.$$

On peut dire que le système (1)-(5) vérifie la contrainte (2) si et seulement si la condition

$$z(t) \in [\theta d_{max}, Y_{max}], \qquad (11)$$

avec $\theta d_{max} < Y_{max}$, est vérifiée pour le système réduit (8)-(5). Le problème de contrôle consiste à trouver les paramètres du contrôleur de façon à ce que l'intervalle $[\theta d_{max}, Y_{max}]$ soit $\mathscr{D}$-invariant pour le système (9), sous l'action de la demande $d(t)$, l'ensemble $\mathscr{D}$ étant alors défini par l'ensemble de variation de $d(t)$ décrit par (4).

Conditions initiales admissibles

Le système (1) est un système à retard sur entrée, l'ensemble des conditions initiales est défini pour $0 \leq t \leq \theta$, et à cause de la présence du retard, la loi de commande ne peut agir sur ce profil initial qu'à partir de $t = \theta$. En effet, comme le montre l'équation (1) pour $t \in [0, \theta]$, le dynamique du stock dépend uniquement de la fonction $\phi(t)$ et de la demande $d(t)$. S'assurer que les contraintes sont bien respectées dans cet intervalle de temps, mène à décrire ce qu'on appelle l'ensemble des conditions initiales admissibles, qui garantissent le respect de ces contraintes. Cet ensemble est caractérisé comme suit. En utilisant l'équation (1), pour $0 \leq t < \theta$, le niveau du stock est donné par

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \phi(\tau)\, d\tau - \int_0^t d(\tau)\, d\tau \,,$$

avec y_0 est le niveau du stock à $t = 0$, et la somme $\int_0^\theta \phi(\tau)d\tau$ représente l'encours initial qu'on dénote wip_0. Étant donné que $\int_0^t d(\tau)d\tau$ appartient à l'intervalle $[0, \theta d_{max}]$, alors $y(t)$ vérifie $y(t) \in [0, Y_{max}]$ pour $t \in [0, \theta[$ si et seulement si les conditions initiales sont telles que

$$\theta\, d_{max} \leq y_0 + wip_0 \leq Y_{max}.$$

Dans le cas où les conditions initiales ne sont pas admissibles, le système subit cette configuration initiale, et traverse une phase transitoire qui peut être plus ou moins longue.

3.2 Paramétrisation du contrôleur

La conception du contrôleur et sa paramétrisation consistent à choisir le gain K et le niveau de référence y_c de façon à ce que le système contrôlé respecte bien les contraintes et les spécifications de fonctionnement. Cette conception passe par deux phases essentielles. Premièrement, étant donné les paramètres du système physique, à savoir U_{max} et Y_{max}, et connaissant d_{max}, existe-t-il un jeu de paramètres réalisable qui permet au contrôleur d'atteindre les performances visées. Si la réponse à cette première phase est positive, alors en second lieu, se pose la question du choix de ce jeu de paramètre.
Dans cette section, nous apportons les réponses à ces deux questionnements sous forme du théorème suivant. Ces résultats sont basés sur la formulation de conditions nécessaires et suffisantes garantissant la $\mathscr{D}$-invariance de l'intervalle (11) ainsi que le respect des contraintes du système, comme nous le verrons dans la démonstration du théorème suivant.

Théorème 1 *Étant donné un système de la forme (1), il existe une commande de la forme (5), pour laquelle le système est BIBO-stable et les contraintes (2) et (3) sont satisfaites, pour tout $d(t) \in [0, d_{max}]$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées.*

$$\theta d_{max} < Y_{max} \,, \tag{12}$$

et

$$d_{max} \leq U_{max} \,. \tag{13}$$

De plus, si les conditions (12) et (13) sont vérifiées, alors les contraintes (2) et (3) sont satisfaites par le contrôleur (5) si et seulement si les paramètres de ce dernier sont tels que

$$\theta d_{max} + \frac{d_{max}}{K} \leq y_c \leq Y_{max}. \tag{14}$$

Preuve Comme nous l'indiquons dans l'introduction de cette section, le contrôle du système (9) doit être conçu de façon à ce que la contrainte (11) soit respectée. L'existence d'un contrôleur admissible est liée à l'existence de l'intervalle $[\theta\, d_{max}, Y_{max}]$ non vide, ce qui est vérifié quand $\theta\, d_{max} < Y_{max}$. Cela établit bien la nécessité de la condition (12), sa suffisance étant claire.
Les conditions (13) et (14) sont issues de l'analyse de la dynamique de $z(t)$. En effet, le but étant de démontrer que l'intervalle donné en (11) est bien $\mathscr{D}$-invariant pour le système. Cette propriété d'invariance est vraie si et seulement si les implications suivantes sont vérifiées. Pour tout $t \geq 0$

$$z(t) = z_{min} \Rightarrow \dot{z}(t) \geq 0 \,, \quad \text{et} \quad z(t) = z_{max} \Rightarrow \dot{z}(t) \leq 0 \,.$$

Se basant sur l'expression (9) de $\dot{z}(t)$, et connaissant la variation de $d(t)$ on aboutit aux inégalités suivantes

$$\underset{[0,U_{max}]}{sat}\,[K(y_c - z_{min})] \geq d_{max} \,, \tag{15}$$

et

$$\underset{[0,U_{max}]}{sat}\,[K(y_c - z_{max})] \leq 0 \,. \tag{16}$$

En utilisant la définition de la fonction *sat* donnée en section 2.3, on constate que l'inégalité (15) accepte une solution non vide si et seulement si $U_{max} \geq d_{max}$, ceci établit la suffisance ainsi que la nécessité de la condition (13). Dans ce cas y_c est tel que $z_{min} + d_{max}/K \leq y_c$, qui, sous l'hypothèse de la vérification de (12), et sachant que $z_{min} = \theta d_{max}$, établit la suffisance de la partie gauche de la condition (14) du théorème. La nécessite vient du fait que pour tout $y_c < z_{min} + d_{max}/K$, l'inégalité (15) n'a pas de solution. La même analyse est appliquée à l'étude de la condition (16). On observe alors que celle-ci n'a de solution que lorsque

$$y_c \leq z_{max} \,, \tag{17}$$

sachant que $z_{max} = Y_{max}$ on montre alors que $y_c \leq Y_{max}$. Ceci établit le membre de droite de la condition (14) du théorème et achève ainsi sa démonstration. ■

L'analyse approfondie des résultats donnés par ce théorème nous mène à formuler le corollaire suivant qui donne les bornes atteintes par les différentes variables du système, sous l'effet d'une loi de commande répondant aux conditions données par le théorème 1.

Corollaire 1 *Étant donné un système de la forme (1) avec des conditions initiales admissibles, et une loi de commande de la forme (5), vérifiant les conditions (12), (13) et (14). L'intervalle de variation final de $y(t)$ et de $u(t)$ est donné respectivement par*

$$y(t) \in \left[y_c - \frac{d_{max}}{K} - \theta\, d_{max} \,, y_c \right] \,, \tag{18}$$

et

$$u(t) \in [0\,, d_{max}] \,, \tag{19}$$

pour tout $t \geq 0$ et $d(t) \in [0, d_{max}]$.

Preuve A partir de l'équation (9), on voit que sous les hypothèses du théorème 1 les implications suivantes sont vraies pour tout $t \geq 0$,

$$z(t) \geq y_c \Rightarrow \dot{z}(t) \leq 0 \quad \text{et} \quad z(t) \leq y_c - \frac{d_{max}}{K} \Rightarrow \dot{z}(t) \geq 0 \,.$$

Ceci montre que l'intervalle effectif de variation de $z(t)$ est

$$z(t) \in \left[y_c - \frac{d_{max}}{K}, y_c \right] , \tag{20}$$

qui n'est autre que le plus petit intervalle invariant pour le système (9). En effet, sous ces mêmes hypothèses, on constate que l'intervalle (20) est inclus dans l'intervalle (11). De ce fait, en réutilisant les expressions (10) et (5), on peut reformuler les intervalles de variations de $y(t)$ et de $u(t)$ qui sont donnés par (18) et (19) respectivement. ■

4 ÉTUDE ET CONTRÔLE DE LA DYNAMIQUE DU SYSTÈME LOGISTIQUE : CAS AVEC INCERTITUDES

Dans cette section, nous étudions la dynamique du système contrôlé (1-5) dans le cas où le retard réel est dans un intervalle d'incertitude défini par $[\theta_1, \theta_2]$, θ_1 et θ_2 étant connus. Notre but est de construire un contrôleur qui puisse garantir les mêmes performances obtenues dans le cas nominal, et ce malgré la présence de l'incertitude sur le retard. On parle alors de commande *robuste*.

4.1 Dynamique du système contrôlé avec incertitudes

L'introduction de l'incertitude sur le retard ne modifie en rien les expressions de la dynamique de $y(t)$ et la forme de $u(t)$, données par les relations (1) et (5) respectivement. La modification porte sur l'expression de $z(t)$ qui est basée sur l'estimation θ_0 du retard réel θ, et qui est donnée sous la forme

$$z(t) = y(t) + \int_{t-\theta_0}^{t} u(\tau) d\tau . \tag{21}$$

En intégrant l'équation (21), entre t et $t+\theta$, et en utilisant l'expression de $z(t)$, on peut déduire que

$$y(t+\theta) = z(t) - \int_{t}^{t+\theta} d(\tau)\, d\tau + \int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau)\, d\tau , \tag{22}$$

Le terme $\int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau)\, d\tau$, correspond à l'erreur induite par l'incertitude du retard. En effet, en notant $\bar{z}(t)$ la prédiction exacte connaissant le retard réel θ, et dont la forme est donnée par :

$$\bar{z}(t) = y(t) + \int_{t-\theta}^{t} u(\tau) d\tau ,$$

ou de façon équivalente

$$\bar{z}(t) = y(t+\theta) + \int_{t}^{t+\theta} d(\tau) d\tau . \tag{23}$$

Cette dernière peut se réécrire en fonction de la prédiction $z(t)$ de la façon suivante :

$$\bar{z}(t) = z(t) + \int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau) d\tau . \tag{24}$$

On constate que la présence de ce terme d'erreur $\int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau) d\tau$, ne permet pas de borner $z(t)$ de façon sans équivoque, du fait que le retard θ n'est pas connu en temps réel, contrairement à ce que l'on obtient dans le cas nominal. Ceci dit, il est toujours possible de borner ce terme d'erreur tel que, pour tout $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ et pour tout $\theta_0 \geq 0$, $\int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau) d\tau$ appartient à l'intervalle

$$[\min(0, (\theta_1 - \theta_0) \cdot U_{max}), \max(0, (\theta_2 - \theta_0) \cdot U_{max})] . \tag{25}$$

L'étude à mener dans ce cas est similaire à celle menée dans le cas nominal, en effet, notre but est d'utiliser la dynamique du système réduit, afin de définir un ensemble $\mathscr{D}$-invariant, dans lequel les contraintes du système sont respectées, et les incertitudes sur les retards assimilés. C'est l'objet de la section suivante.

4.2 Paramètres de la commande robuste

Pour étudier la robustesse de la commande, il faut s'assurer que la sortie du système reste effectivement bornée, de façon à conserver la propriété de BIBO-stabilité, et que les contraintes sur $y(t)$ sont bien respectées. De la même façon que pour le cas nominal, nous utilisons l'équation (23) qui montre que $y(t+\theta)$ est borné, si et seulement si $\bar{z}(t)$ est borné, et est tel que pour tout $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$:

$$\bar{z}(t) \in [\theta_2 d_{max}, Y_{max}] \text{ avec } \theta_2 d_{max} \leq Y_{max} . \tag{26}$$

Au même titre que l'intervalle (11) pour le cas nominal, nous montrons ici que l'intervalle (26) est $\mathscr{D}$-invariant pour le système réduit dont la dynamique est donnée par :

$$\dot{\bar{z}}(t) = u(t) - d(t) , \tag{27}$$

ou, plus explicitement, en utilisant la relation (24)

$$\dot{\bar{z}}(t) = \underset{[0,U_{max}]}{sat} [K(y_c - \bar{z}(t) + \int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau) d\tau)] - d(t) . \tag{28}$$

L'intervalle (26) est $\mathscr{D}$-invariant, si pour tout $t \geq 0$

$$\bar{z}(t) = \bar{z}_{min} \Rightarrow \dot{\bar{z}}(t) \geq 0 , \quad \text{et} \quad \bar{z}(t) = \bar{z}_{max} \Rightarrow \dot{\bar{z}}(t) \leq 0 .$$

Ce qui mène aux expressions suivantes

$$\underset{[0,U_{max}]}{sat} \left[K(y_c - \theta_2 d_{max} + \int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau)\, d\tau) \right] \geq d_{max} , \tag{29}$$

et

$$\underset{[0,U_{max}]}{sat} \left[K(y_c - Y_{max} + \int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau)\, d\tau) \right] \leq 0 . \tag{30}$$

Étant donné l'intervalle d'évolution de $\int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau) d\tau$ exprimé par (25), on déduit de (29) l'inégalité

$$y_c \geq \theta_2 d_{max} + \frac{d_{max}}{K} - \min(0, (\theta_1 - \theta_0) \cdot U_{max}) , \tag{31}$$

avec

$$U_{max} \geq d_{max}\,.$$

De la même façon, on déduit de (30) l'inégalité

$$y_c \leq Y_{max} - \max(0, (\theta_2 - \theta_0) \cdot U_{max})\,. \tag{32}$$

On peut alors résumer les résultats ainsi obtenus sous la forme du théorème suivant.

Théorème 2 *Étant donné un système de la forme (1), avec une incertitude sur le retard réel $\theta \in [\theta_1\,, \theta_2]$, θ_1 et θ_2 étant connus, et soumis à une demande de la forme (4), il existe une commande de la forme (5)-(21), θ_0 étant le retard estimé, pour laquelle le système est BIBO-stable et les contraintes (2) et (3) sont satisfaites, pour tout $d(t) \in [0, d_{max}]$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées.*

$$\theta_2 d_{max} < Y_{max}\,, \tag{33}$$

et

$$d_{max} \leq U_{max}\,. \tag{34}$$

De plus, si les conditions (33) et (34) sont vérifiées, alors les contraintes (2) et (3) sont satisfaites par le contrôleur (5)-(21) si les paramètres de ce dernier sont tels que

$$\frac{d_{max}}{K} + \theta_2 d_{max} + \alpha \cdot U_{max} \leq Y_{max}\,, \tag{35}$$

avec

$$\theta_2 d_{max} + \frac{d_{max}}{K} - \min(0, (\theta_1 - \theta_0)) \cdot U_{max} \leq y_c\,, \tag{36}$$

et

$$y_c \leq Y_{max} - \max(0, (\theta_2 - \theta_0)) \cdot U_{max}\,. \tag{37}$$

α étant défini par

$$\alpha = max((\theta_2 - \theta_0), (\theta_2 - \theta_1), (\theta_0 - \theta_1)).$$

Preuve - Ce théorème 2 est la simple formulation des résultats de l'analyse précédente, sa preuve en découle alors directement.

Ainsi, le contrôle du système (28) doit être conçu de façon à ce que la contrainte sur la prédiction (27) soit respectée. L'existence d'un contrôleur admissible est lié à l'existence de l'intervalle $[\theta_2\, d_{max}, Y_{max}]$ non vide, ce qui est vérifié quand $\theta_2\, d_{max} < Y_{max}$. Cela établit bien la nécessité de la condition (33), sa suffisance étant claire.

Les conditions (33) et (34) sont issues de l'analyse de la dynamique de $\bar{z}(t)$. En effet, comme dans le cas du retard nominal, le but est de démontrer que l'intervalle donné en (26) est bien $\mathscr{D}$-invariant pour le système. Cette propriété d'invariance est vraie si et seulement si les implications suivantes sont vérifiées. Pour tout $t \geq 0$

$$\bar{z}(t) = \bar{z}_{min} \Rightarrow \dot{\bar{z}}(t) \geq 0\,, \quad \text{et} \quad \bar{z}(t) = \bar{z}_{max} \Rightarrow \dot{\bar{z}}(t) \leq 0\,.$$

Se basant sur l'expression (28) de $\dot{\bar{z}}(t)$, et connaissant la variation de $d(t)$, on aboutit aux inégalités suivantes

$$\underset{[0,U_{max}]}{sat}\left[K(y_c - z_{min} + \int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau)d\tau)\right] \geq d_{max}\,, \tag{38}$$

et

$$\underset{[0,U_{max}]}{sat}\left[K(y_c - z_{max} + \int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau)d\tau))\right] \leq 0\,. \tag{39}$$

En utilisant à nouveau la définition de la fonction *sat* donnée en section 2.3, on constate que l'inégalité (38) accepte une solution non vide si et seulement si $U_{max} \geq d_{max}$, ceci établit la suffisance ainsi que la nécessité de la condition (34). Dans ce cas y_c est tel que $z_{min} + d_{max}/K - \min(0, (\theta_1 - \theta_0) \cdot U_{max}) \leq y_c$,, et sachant que $z_{min} = \theta_2 d_{max}$, établit la suffisance de(36) du théorème. La nécessite vient du fait que pour tout $y_c < z_{min} + d_{max}/K - \min(0, (\theta_1 - \theta_0) \cdot U_{max})$, l'inégalité (38) n'a pas de solution.
La même analyse est appliquée à l'étude de la condition (39). On observe alors que celle-ci n'a de solution que lorsque

$$y_c \leq z_{max} - \max(0, (\theta_2 - \theta_0) \cdot U_{max})\,, \tag{40}$$

sachant que $z_{max} = Y_{max}$, on montre alors que $y_c \leq Y_{max} - \max(0, (\theta_2 - \theta_0) \cdot U_{max})$. Ceci établit l'inégalité (36) du théorème.

Aussi, et comme cela a été précisé auparavant, le délai réel θ est défini dans un intervalle d'incertitude tel que : $\theta \in [\theta_1\,, \theta_2]$, θ_1 et θ_2 étant connus, alors que le retard θ_0 est bien estimé, pouvant appartenir ou non à cet intervalle. Ce qui implique 3 cas possibles : $\theta_0 < \theta_1$, $\theta_0 \in [\theta_1\,, \theta_2]$ et $\theta_0 > \theta_2$. En développant chaque cas, et en tenant compte des résultats obtenus en (38) et (39), on déduit que $\frac{d_{max}}{K} + \theta_2 d_{max} + \alpha \cdot U_{max} \leq Y_{max}$ avec $\alpha = max((\theta_2 - \theta_0), (\theta_2 - \theta_1), (\theta_0 - \theta_1))$. Ce qui achève la démonstration de ce théorème. ■

Par ailleurs, comme pour le cas nominal, sous les hypothèses du théorème 2, il est possible de pousser l'analyse concernant les bornes atteintes par les variables du système, ce que nous formulons dans le corollaire suivant.

Corollaire 2 - *Étant donné un système de la forme (1) avec des conditions initiales admissibles, et une loi de commande de la forme (5)-(21), vérifiant les conditions de (33) à (37), l'intervalle de variation final de $u(t)$ et de $y(t)$ est donné respectivement par*

$$u(t) \in [0\,, d_{max}]\,, \tag{41}$$

et $y(t) \in$

$$\left[y_c - \frac{d_{max}}{K} - \theta_2 d_{max} + \min(0,(\theta_1-\theta_0)\cdot U_{max}), y_c + \max(0,(\theta_2-\theta_0)\cdot U_{max})\right], \tag{42}$$

pour tout $t \geq 0$, $d(t) \in [0, d_{max}]$ *et* $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

Preuve - Pour démontrer le résultat de ce corollaire, supposons que $d(t)$ est constante et est égale à d_{max}, et que $u(t) = d_{max}$ pendant au moins θ unités de temps. Dans ce cas, la dynamique du stock montre que le système est stable car $\dot{y}(t) = 0$. Sous les hypothèses du théorème 2, en particulier, $d_{max} \leq U_{max}$ pour tout $t \geq 0$, on peut remarquer que le système étant stabilisé, le plus petit intervalle de variation de $u(t)$ est en fait l'intervalle $[0, d_{max}]$. Aussi, nous pouvons constater, que $\dot{\bar{z}}(t) = 0$ et donc $\bar{z}(t)$ prend une valeur constante, atteinte quand le système est stabilisé, et qu'on note Z. D'autre part, en utilisant les expressions de $u(t)$ et de $z(t)$, (5) et (24) respectivement, on remarque que : $u(t) = k(y_c - Z + \int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau)\,d\tau)$. ce qui mène à l'expression suivante de Z.

$$Z = y_c - \frac{u(t)}{K} + \int_{t-\theta}^{t-\theta_0} u(\tau)\,d\tau$$

$u(t)$ variant dans l'intervalle $[0, d_{max}]$, on peut borner Z dans l'intervalle suivant

$$\left[y_c - \frac{d_{max}}{K} + \min(0,(\theta_1-\theta_0))\cdot U_{max}, y + \max(0,(\theta_2-\theta_0))\cdot U_{max}\right].$$

Finalement, on utilise ces nouvelles bornes de Z avec la relation (23) pour exprimer les bornes de $y(t)$, qui évolue bien dans l'intervalle (42). ■

Les résultats obtenus à l'issue de cette section montrent qu'il est possible de concevoir un compensateur robuste pour le système logistique soumis à des incertitudes sur le délai, et les demandes client, et de garantir - sous les hypothèses du théorème - le respect des contraintes de saturation et de capacité. Il est aussi important de noter que les résultats du cas incertain, coïncident exactement avec ceux obtenus dans le cas nominal, si θ, θ_1, θ_2, et θ_0 sont égaux.

5 EXEMPLE DE SIMULATION

Dans cette section, nous illustrons les différents résultats obtenus dans cet article pour un système logistique basique. Pour cela, nous utilisons un modèle de simulation Matlab et Simulink, avec les paramètres suivants du système.
La demande client est modélisée par un signal rectangulaire intervenant entre 15 et 140 unités de temps, avec une amplitude maximale $d_{max} = 240$. Les capacités maximum de stockage et de production sont $Y_{max} = 2920$ et $U_{max} = 300$ respectivement. Les paramètres du contrôleur K et y_c sont déterminés en fonction des théorèmes 1 et 2. En effet, commençons nos simulations avec un cas nominal pour lequel le retard $\theta = 6$. On choisit $K = 0,6$ et conformément à la condition (14), nous prenons $y_c = 1840$. Aussi, les conditions initiales sont choisies de façon à éviter les comportements transitoires du système, notre intérêt étant porté sur le régime établi. Les résultats de cette première simulation sont présentés sur la figure 1.

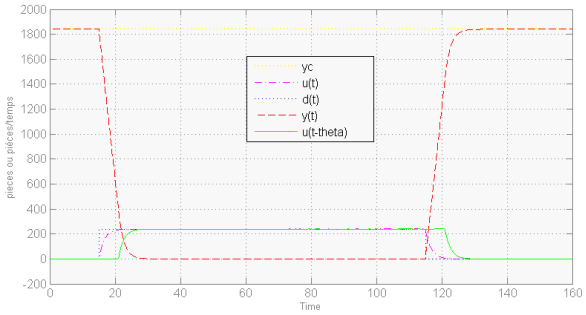

FIGURE 1: Résultats obtenus : $y_c = 1840$ - cas nominal.

A l'issue de ces résultats de simulation, on peut voir que les bornes données dans le corollaire 1 sont bien atteintes. Effectivement, pour ces valeurs des paramètres, on voit bien que $y(t) \in [0, 1840]$ et $u(t) \in [0, 240]$. On peut aussi constater que la compensation du retard est optimale dans le sens où les variations du niveau de stock sont entièrement maîtrisées, éliminant ainsi le bullwhip effect. La demande est totalement satisfaite et les contraintes de positivité, de capacité ainsi que de saturation sont respectées.

La seconde partie des simulations porte sur le cas incertain. Cette fois-ci, les paramètres du contrôleur sont choisis en fonction des conditions du théorème 2. Le retard incertain θ appartient à l'intervalle $[\theta_1, \theta_2] = [6, 8]$, et le retard estimé est fixé $\theta_0 = 7$. On vérifie évidemment que les valeurs de Y_{max} et U_{max} précédentes sont bien admissibles par les conditions du théorème 2, ce qui est bien le cas. Il suffit alors de choisir K et y_c conformément aux conditions (35) à (37). On garde $K = 0,6$ et $y_c = 2620$.
Les résultats de simulation suivants sont donnés pour différentes valeurs de θ, le but étant d'une part, de voir que les bornes décrites par le corollaire 2 sont bien atteintes, et d'autre part, l'effet de l'incertitude liée au retard sur la dynamique du stock. Pour ce faire nous présentons les trois configurations suivantes.

- Pour $\theta = 7$, C'est à dire que le retard a bien été estimé. On se retrouve alors de nouveau dans le cas nominal, et on constate sur la figure 2 que $y(t) \in [540, 2620]$ correspond au résultat obtenu dans le cas nominal.

- Pour $\theta = 6$, le graphique 3 montre que $y(t) \in [540, 2620]$, la borne minimum atteinte, correspond bien à la borne minimum donnée par la relation

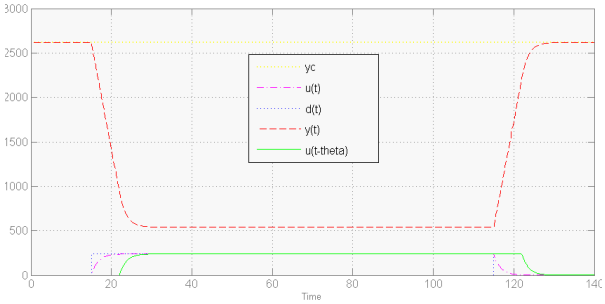

FIGURE 2: Résultats obtenus : $y_c = 2620$ et $\theta = 7$.

(42). On remarque aussi l'apparition de brèves fluctuations sur le niveau du stock. Ces fluctuations finissent par disparaitre une fois le régime établi sans dépassement notable.

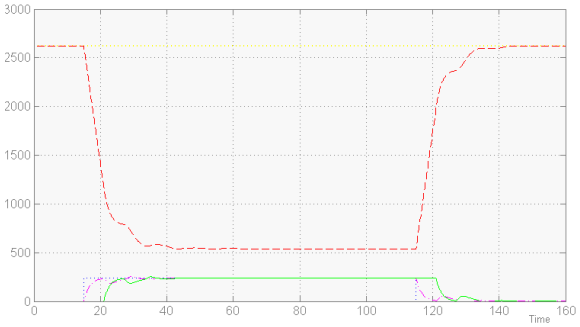

FIGURE 3: Résultats obtenus : $y_c = 2620$ et $\theta = 6$.

– Pour $\theta = 8$, on observe que $y(t) \in [540, 2860]$, cette fois-ci c'est la borne maximum donnée en (42) qui est atteinte comme nous le montre la figure 4. Ici encore on peut constater l'apparition de fluctuations sur le niveau du stock avant de se stabiliser, il est important d'observer que les fluctuations induites sur le niveau de production $u(t)$ ne sont pas croissantes (contrairement au cas du bullwhip effect, où les fluctuations sont grandissantes), l'amplitude maximale de ces fluctuations représente une augmentation de près de 21% par rapport à $d(t)$.

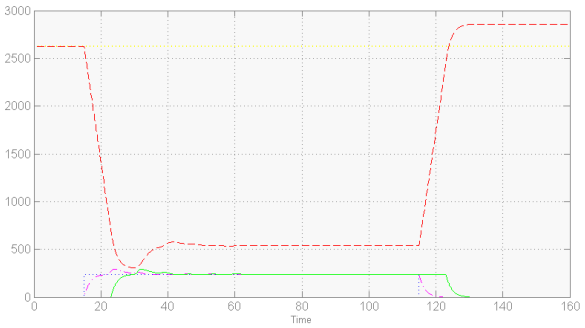

FIGURE 4: Résultats obtenus : $y_c = 2620$ et $\theta = 8$.

Ces résultats de simulation permettent d'affirmer, une fois encore, l'importance de la prise en compte du retard, et de sa bonne estimation. En effet, dans un cas nominal, la compensation du retard est optimale, aucune fluctuation ou dépassement ne sont constatés. Une telle structure de commande permet effectivement de venir à bout du bullwhip effect. Dans le cas avec retard incertain, nous avons pu tester la robustesse de la loi de commande proposée. Nous avons pu observer l'apparition de fluctuations sur le niveau du stock, ainsi que sur les ordres de production, l'apparition de ces fluctuations est corrélée avec l'importance que peut prendre l'écart entre le retard réel et son estimation. Ce qui est important à remarquer, c'est que la loi de commande que nous avons appliquée, permet de résorber ces fluctuations, et empêche donc leur amplification évitant ainsi l'apparition du bullwhip effect, et ce malgré une marge d'incertitude sur le délai. D'autre part, ces résultats de simulation permettent de vérifier la validité des bornes obtenues dans les corollaires 1 et 2, et montrent que ce sont effectivement des bornes atteintes par les différentes variables du système.

6 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Les résultats présentés dans cet article concernent l'étude et la commande robuste de système logistique, en présence d'incertitudes sur les délais, et une demande client bornée mais inconnue d'avance. La méthode développée est basée sur l'utilisation de méthodes bien connues dans le domaine de l'automatique et de la régulation des systèmes à retards. Leur application cependant reste inédite pour la résolution de problèmes non linéaires contraints de ce type, et pour une application aux systèmes logistiques en particulier. Nous avons pu démontrer qu'une connaissance exacte du retard, mène à une compensation complète des effets du retard, et de ce fait, à l'élimination totale de l'effet bullwhip.

En présence d'incertitudes sur le retard, la loi de commande proposée se révèle être robuste vis-à-vis de ces incertitudes. En effet, nous avons vu à travers les résultats de simulation, que les erreurs d'estimation du retard engendrent effectivement l'apparition de fluctuations sur les niveaux de stock et de production. Cela dit, contrairement au bullwhip effect, ces fluctuations ne sont pas d'amplitude croissante, grâce à la loi de commande mise en œuvre, ces fluctuations sont neutralisées, et tendent à disparaitre après un certain laps de temps.

L'étude présentée dans cet article concerne un système logistique basique. Parmi les extensions de ce travail, vient la commande robuste de systèmes logistiques plus complexes, à savoir des chaînes logistiques en cascade ou en réseau avec des incertitudes sur les retards. En effet, des premiers résultats concluants ont été présentés pour des chaînes logistiques en cascade (Moussaoui et al., 2014), en considérant des retards connus sans incertitudes, avec une élimination totale de l'effet bullwhip le long de la

chaîne. Notre objectif est d'étendre ces résultats en prenant en compte des incertitudes sur les retards des différents niveaux de la chaîne, afin d'étudier les performances du système dans cette configuration, notamment concernant l'effet bullwhip.

REFERENCES

Artstein, Z. 1982, Linear systems with delayed controls : A reduction. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol.27, no. 4, pp. 869-879.

Blanchini, F. 1999, Set invariance in control. Survey paper. Automatica, Vol. 35, no.11, pp. 1747-1767.

Edghill, J.S., Towill, D.R., 1989. The use of systems dynamics in manufacturing systems.Transaction of the Institute of Measurement and Control, Vol. 11, no. 4, pp. 208-216.

Forrester, J. W., 1961, Industrial Dynamics (Cambridge MA : MIT press).

Hu,T. L. Z. 2001, Control Systems with Actuator Saturation : Analysis and Design. Birkhäuser, Boston.

John, S., Naim, M.M., Towill, D.R., 1994. Dynamic analysis of a WIP compensated decision support system. International Journal of Management Systems and Design, Vol. 1, no. 4, pp. 283-297.

Manitius, A., Olbrot, A., 1979. Finite spectrum assignment problems for systems with delays. IEEE Trans. Automatic Control. 24, pp. 541-553.

Mirkin, L. , Raskin, N. 2003, Every stabilizing dead-time controller has an observer-predictor-based structure. Automatica. Vol.39, no.10, pp. 1747-1754.

Moussaoui, C., Abbou, R., Loiseau, JJ., 2014. Controller Design for a Class of Delayed and Constrained Systems : Application to Supply Chains. In Low-Complexity Controllers for Time-Delay Systems. Advances in Delays and Dynamics, Vol. 2, pp. 61-75.

Riddalls, C.E., Bennett, S. and Tipi, N.S. 2000, Modeling the dynamics of supply chains. International Journal of System Science, 31, pp. 969- 976.

Simon, H. A., 1952, On the application of servomechanism theory in the study of production control. Econometrica, 20, pp.247-268.

Sipahi, R., Delice, I.I., 2010, Stability of Inventory Dynamics in Supply Chains with Three Delays. International Journal of Production Economics, Vol.123, no.1, pp. 107-117.

Sterman, J. D., 1989. Modelling managerial behaviour misinterpretations of feedback in a dynamic decision-making experiment. Management science, Vol.35, no.3, pp. 321-339.

Towill, D.R., 1982. Dynamic analysis of an inventory and order based production control system. International Journal of Production Research, Vol. 20, no. 6, pp. 671- 687.

Wang, X., Disney, S.M. and Wang, J. 2012, Stability analysis of constrained inventory systems with transportation delay. European Journal of Operational Research., Vol. 223, no. 1, pp. 86 -95.

Wang, X., Disney, S.M. and Wang, J. 2014. Exploring the oscillatory dynamics of a forbidden returns inventory system. International Journal of Production Economics, pp. 3-12.

Warburton, R. D. H. 2004, An exact analytical solution to the production inventory control problem. International Journal of Production Economics, 92, pp. 81-96.

Manitius, A. and Olbrot, A. 1979, Finite spectrum assignment problems for systems with delays. IEEE Trans. Automatic Control, 24, pp.541-553.

Mirkin, L. and Raskin, N. 2003, Every stabilizing dead-time controller has an observer-predictor-based structure. Automatica, Vol.39, no. 10, pp.1747-1754.

Tarbouriech, S., Garcia, G., Da Silva, J., and Queinnec, I. 2011, Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators. Springer.

Warburton, R. D. H. , Disney, S. M. , Towill, D. R. and Hodgson, J. P. E. 2004, 'Technical Note : Further insights into 'the stability of supply chains', International Journal of Production Research, Vol. 42, no. 3, pp. 639-648.