



HAL
open science

Automorphismes bornés dans les structures simples, et endomorphismes bornés dans les expansions de corps par une famille Pfaffienne d'endomorphismes additifs

Frank Olaf Wagner

► **To cite this version:**

Frank Olaf Wagner. Automorphismes bornés dans les structures simples, et endomorphismes bornés dans les expansions de corps par une famille Pfaffienne d'endomorphismes additifs. 2016. hal-01162721v3

HAL Id: hal-01162721

<https://hal.science/hal-01162721v3>

Preprint submitted on 6 Sep 2016 (v3), last revised 24 Sep 2019 (v5)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

AUTOMORPHISMES BORNÉS DANS LES STRUCTURES SIMPLES, ET ENDOMORPHISMES BORNÉS DANS LES EXPANSIONS DE CORPS PAR UNE FAMILLE PFAFFIENNE D'ENDOMORPHISMES ADDITIFS

FRANK O. WAGNER

RÉSUMÉ. Un automorphisme borné d'un corps ou d'un groupe de centre approximatif trivial est définissable. Dans une expansion d'un corps par une famille \mathfrak{F} Pfaffienne d'endomorphismes additifs tel que la clôture algébrique dans l'expansion coïncide avec la clôture algébrique (corpique) relative de la \mathfrak{F} -sous-structure engendré, un endomorphisme borné, éventuellement composé par une puissance du Frobenius, est une composition d'endomorphismes associés canoniquement à \mathfrak{F} .

INTRODUCTION

Dans [9] Lascar appelle un automorphisme σ d'une structure \mathfrak{M} *borné* s'il existe un petit ensemble A de paramètres tel que pour tout $m \in M$ on a $\sigma(m) \in \text{acl}(A, m)$. Il montre que pour un ensemble fortement minimal \mathfrak{M} , le sous-groupe $\text{aut}_f(\mathfrak{M})$ des automorphismes forts (qui fixent $\text{acl}^{eq}(\emptyset)$) est simple modulo le sous-groupe distingué des automorphismes bornés, résultat généralisé ensuite [7] aux structures avec dimension entière compatible avec une notion d'indépendance stationnaire.

Plus généralement, un automorphisme σ d'un corps K avec théorie simple est appelé Σ -*borné* s'il y a un petit ensemble A de paramètres tel que pour tout $m \in M$ on a $\sigma(m) \in \Sigma \text{cl}(A, m)$, où Σ est la classe des types partiels co-étrangers aux génériques du corps, et la Σ -clôture $\Sigma \text{cl}(A)$ est l'ensemble de tous les éléments b tel que $\text{tp}(b/A)$ est Σ -analysable. Si Σ est la classe des types algébriques, alors la Σ -clôture est la clôture algébrique, et Σ -borné coïncide avec borné. Dans [1], Blossier, Hardouin et Martín Pizarro montrent que pour un corps muni d'opérateurs, tout automorphisme Σ -borné est définissable et obtenu par composition d'une puissance du Frobenius avec les automorphismes parmi les opérateurs ou leurs inverses. En particulier il en découle une démonstration uniforme de résultats de Lascar [9], Ziegler et Konnerth [8].

Bien évidemment, la définition d'un automorphisme borné à un sens pour n'importe quel permutation σ d'un ensemble X ; il n'est pas nécessaire que σ soit induite par un automorphisme de la structure ambiante, ni qu'elle préserve toute la structure induite sur X . De même, la définition de Σ -borné est valable pour tout ensemble X hyperdéfinissable dans une théorie simple; de plus on a libre choix de Σ , mais il convient de prendre Σ petit par rapport à X : par exemple, toute permutation de X est X -bornée.

Date: 1er Décembre 2016.

2010 Mathematics Subject Classification. 03C45, 12H05, 12H10.

Recherche conduite dans le cadre du projet ANR-13-BS01-0006 ValCoMo.

Dans cet article, nous allons généraliser le théorème principal de [1] en deux directions. D'une part, nous considérons les automorphismes groupe-théoriques Σ -bornés d'un groupe G hyperdéfinissable dans une théorie simple, où Σ est encore la classe des types partiels (avec paramètres) co-étrangers aux génériques de G . Nous montrons que si tout élément non-trivial a un centralisateur d'indice non-borné (autrement dit, si le centre approximatif $\tilde{Z}(G)$ du groupe est trivial), alors tout automorphisme Σ -borné est définissable.

D'autre part, nous regarderons les endomorphismes bornés dans une expansion d'un corps par une famille \mathfrak{F} d'endomorphismes additifs, tel que

- (1) la famille \mathfrak{F} est *Pfaffienne*, c'est-à-dire $f_i(xy)$ est combinaison linéaire des produits $f_j(x)f_k(y)$ pour $j, k \leq i$;
- (2) la clôture algébrique d'une partie A au sens de l'expansion est égale à la clôture algébrique corpique relative de la \mathfrak{F} -sous-structure engendré par A .

Ces conditions sont satisfaites en particulier par

- les corps différentiellement clos en caractéristique 0 avec plusieurs dérivations qui commutent [10];
- les corps aux différences génériques en toute caractéristique [5];
- les corps séparablement clos de degré d'imperfection fini avec une p -base nommée [6, 16];
- les corps différentiels aux différences génériques en caractéristique zéro où l'automorphisme commute avec la dérivation [3, 4];
- les corps munis d'opérateurs libres en caractéristique zéro [11].

(Pour la condition Pfaffienne, il faut utiliser [1, Proposition 1.4].) Nous montrerons que tout endomorphisme borné de K est une composition d'endomorphismes associés canoniquement aux fonctions dans \mathfrak{F} , qui de plus en sont des combinaisons linéaires, suivi par une puissance de l'inverse du Frobenius. Dans les cas mentionnés ci-dessus, les endomorphismes (sauf pour le Frobenius pour les corps séparablement clos) seront surjectifs, et les automorphismes associés seront les automorphismes parmi les fonctions dans \mathfrak{F} , et éventuellement le Frobenius.

1. PRÉLIMINAIRES

Dans cette section, nous allons rappeler quelques notions et résultats moins connus pour les groupes et théories simples. Pour plus de détail, on se référera à [14]. Comme d'habitude, on travaillera dans un modèle monstre d'une théorie simple, et on se fixe Σ , une famille \emptyset -invariante de types partiels avec paramètres.

Définition 1.1. La Σ -clôture $\Sigma\text{cl}(A)$ de A est la collection de tous les hyperimaginaires a tel que $\text{tp}(a/A)$ est Σ -analysable.

On a toujours $\text{bdd}(A) \subseteq \Sigma\text{cl}(A)$ avec égalité si Σ est vide. En général on choisira un ensemble Σ de types partiels qui sont petits par rapport à l'ensemble X sous considération (notamment $X \not\subseteq \Sigma\text{cl}(\emptyset)$).

Fait 1.2. [14, Lemma 3.5.3] *Sont équivalents :*

- (1) $\text{tp}(a/A)$ est étranger à Σ .
- (2) $a \downarrow_A \Sigma\text{cl}(A)$.
- (3) $a \downarrow_A \text{dcl}(aA) \cap \Sigma\text{cl}(A)$.
- (4) $\text{dcl}(aA) \cap \Sigma\text{cl}(A) \subseteq \text{bdd}(A)$.

Sauf en cas d'égalité avec la clôture bornée, la Σ -clôture a la taille du modèle monstre. L'équivalence (2) \Leftrightarrow (3) permet de n'en utiliser qu'une petite partie.

Fait 1.3. [14, Lemma 3.5.5] *Si $A \downarrow_B C$, alors $\Sigma\text{cl}(A) \downarrow_{\Sigma\text{cl}(B)} \Sigma\text{cl}(C)$. Plus précisément, pour tout $A_0 \subset \Sigma\text{cl}(A)$ on a $A_0 \downarrow_{B_0} \Sigma\text{cl}(C)$, où $B_0 = \text{dcl}(A_0 B) \cap \Sigma\text{cl}(B)$.*

Dans [15, 12] on trouvera d'autres propriétés de la Σ -clôture, ainsi qu'un découpage en différents niveaux.

Soit maintenant G un groupe hyperdéfinissable sur \emptyset .

Définition 1.4. (1) Deux sous-groupe hyperdéfinissables H et K sont *commensurables* si leur intersection est d'indice borné dans chacun.

(2) Un sous-groupe hyperdéfinissable H est *localement connexe* s'il est égal à tout conjugué groupe-théorique ou conjugué par automorphisme qui lui est commensurable.

Fait 1.5. [14, Corollary 4.5.16]

- (1) *Un sous-groupe hyperdéfinissable localement connexe de G a un paramètre canonique.*
- (2) *Tout sous-groupe hyperdéfinissable H de G a une composante localement connexe H^{loc} , qui est le plus petit sous-groupe hyperdéfinissable localement connexe commensurable avec H . Son paramètre canonique est définissable sur les paramètres utilisés pour hyperdéfinir H .*

On rappelle également la notion du centre approximatif.

Définition 1.6. Le centre approximatif d'un groupe hyperdéfinissable G , noté $\tilde{Z}(G)$, est le sous-groupe caractéristique des éléments dont le centralisateur est d'indice borné dans G .

Le centre approximatif de G est hyperdéfinissable sur les mêmes paramètres [14, Proposition 4.4.10]. Enfin, on a besoin du lemme de Ziegler ([17, Theorem 1] pour le cas stable abélien, et [2, lemme 1.2 et remarque 1.3] pour le cas général).

Fait 1.7. *Soient g et g' dans G tels que g , g' et gg' sont deux-à-deux indépendants. Alors les stabilisateurs à gauche de g et de gg' sont égaux, et commensurables avec $g\text{Stab}(g')g^{-1}$; ils sont \emptyset -connexes, et g est générique dans le translaté $\text{Stab}(g)g$, qui est définissable sur $\text{bdd}(\emptyset)$; de même pour g' et gg' .*

2. AUTOMORPHISMES Σ -BORNÉS D'UN GROUPE

Dans cette section, on considère encore un groupe G hyperdéfinissable sur \emptyset . On pose Σ la classe de tous les types partiels co-étrangers aux types génériques de G . (Comme les types génériques ont des extensions non-déviantes qui sont des translatés les uns des autres, co-étranger à un équivaut co-étranger à tous.) En particulier, si G a un type générique régulier, Σ consiste de tous les types partiels non-génériques.

Théorème 2.1. *Si $\tilde{Z}(G)$ est trivial, alors tout automorphisme Σ -borné σ de G est hyperdéfinissable.*

Démonstration. Soit A un ensemble tel que $\sigma(g) \in \Sigma\text{cl}(A, g)$ pour tout g dans G . Considérons d'abord $g \in G$ générique sur A , et $g' \in G$ générique sur $A, g, \sigma^{-1}(g)$.

Soit $A' = \Sigma\text{cl}(A) \cap \text{bdd}(A, g', \sigma(g'))$. D'après le fait 1.3 on a $g', \sigma(g') \downarrow_{A'} \sigma^{-1}(g), g$. Comme les génériques de G sont étrangers à Σ , les éléments g et g' restent génériques sur A' . Ainsi $g_0 = g'\sigma^{-1}(g)$ et $\sigma(g_0) = \sigma(g')g$ sont tous les deux génériques sur A' , et donc sur A .

Soit maintenant g_2 générique dans G sur A, g_0 , et $g_1 = g_0^{-1}g_2$. Alors g_0, g_1 et $g_2 = g_0g_1$ sont deux-à-deux indépendants sur A . D'après le fait 1.3 leurs Σ -clôtures $\Sigma\text{cl}(A, g_0), \Sigma\text{cl}(A, g_1)$ et $\Sigma\text{cl}(A, g_2)$ sont deux-à-deux indépendants sur $\Sigma\text{cl}(A)$. En particulier, $(g_0, \sigma(g_0)), (g_1, \sigma(g_1))$ et $(g_2, \sigma(g_2))$ sont deux-à-deux indépendants sur $\Sigma\text{cl}(A)$, et donc sur

$$B = \Sigma\text{cl}(A) \cap \text{bdd}(A, g_0, \sigma(g_0), g_1, \sigma(g_1), g_2, \sigma(g_2)).$$

De plus, comme les types génériques de G sont étrangers à Σ , les éléments $g_0, \sigma(g_0), g_1$ et g_2 restent chacun génériques sur B .

Pour $i \leq 2$ soit $S_i = \text{Stab}(g_i, \sigma(g_i)/B)$ le stabilisateur (à gauche) dans $G \times G$. Alors S_i est connexe sur B d'après le fait 1.7, le translaté $S \cdot (g_i, \sigma(g_i))$ est hyperdéfinissable sur B , et le couple $(g_i, \sigma(g_i))$ y est générique. De plus, $S_0 = S_2$; soit $S = S_0^{\text{loc}}$ sa composante localement connexe. Puisque

$$\begin{array}{ccc} g_i, \sigma(g_i) & \downarrow & B, \\ & \text{bdd}(A, g_i, \sigma(g_i)) \cap \Sigma\text{cl}(A) & \end{array}$$

S_i est commensurable avec $\text{Stab}(g_i, \sigma(g_i)/\text{bdd}(A, g_i, \sigma(g_i)) \cap \Sigma\text{cl}(A))$ pour $i = 0, 2$, dont la composante localement connexe est aussi S . Il en découle que S ainsi que le translaté $S \cdot (g_i, \sigma(g_i))$ est hyperdéfinissable sur $\text{bdd}(A, g_i, \sigma(g_i)) \cap \Sigma\text{cl}(A)$ pour $i = 0, 2$. Or, g_2 était un générique quelconque sur A, g_0 . Ainsi S est hyperdéfinissable sur $\Sigma\text{cl}(A) \cap \text{bdd}(A, a, \sigma(a))$ quel que soit le générique a , et donc sur

$$\bar{A} = \Sigma\text{cl}(A) \cap \bigcap_{a \text{ générique}} \text{bdd}(A, a, \sigma(a)).$$

Notons que puisque g_0 et $\sigma(g_0)$ sont génériques sur B , la projection de S_0 , et donc aussi de S , sur la première et sur la deuxième coordonnée sont génériques dans G , et donc des sous-groupes d'indice borné.

Comme $\sigma(g_0) \in \Sigma\text{cl}(A, g_0)$ et tous les types génériques de S sont des translatés de $\text{tp}(g_0, \sigma(g_0)/B)$ sur des paramètres indépendants, on a $g' \in \Sigma\text{cl}(B, g)$ pour tout générique (g, g') de S sur B . Si

$$h \in \text{coker}(S) = \{g \in G : (1, g) \in S\},$$

et $(g, g') \in S$ est générique sur B, h , alors $(g, g'h)$ est toujours générique sur B, h , et $h \in \Sigma\text{cl}(B, g)$. Puisque $h \downarrow_B g$ on obtient $h \in \Sigma\text{cl}(B) = \Sigma\text{cl}(A)$ et $\text{coker}(S) \subseteq \Sigma\text{cl}(A)$.

Soit maintenant $\lambda \in G$ quelconque, et $g \in G$ générique sur $\bar{A}, \lambda, \sigma(\lambda)$. On pose $g' = g^{-\lambda}$ et $B = \Sigma\text{cl}(A) \cap \text{bdd}(A, g, g', \sigma(g), \sigma(g'))$. Alors g et g' sont génériques sur B , et

$$(g, \sigma(g)) \in (S \cdot (g', \sigma(g')))^{(\lambda, \sigma(\lambda))} \cap (S \cdot (g, \sigma(g))).$$

Comme les deux translatés $S \cdot (g, \sigma(g))$ et $S \cdot (g', \sigma(g'))$ sont hyperdéfinissables sur B ,

$$g, \sigma(g) \downarrow_B \lambda, \sigma(\lambda)$$

et $(g, \sigma(g))$ est générique dans $S \cdot (g, \sigma(g))$ sur B , les deux groupes S et $S^{(\lambda, \sigma(\lambda))}$ sont commensurables, et donc égaux par connexité locale. Si $h \in \text{coker}(S)$, alors

$h^{\sigma(\lambda)} \in \text{coker}(S) \subset \Sigma \text{cl}(A)$. Or, σ est un automorphisme, donc surjectif, et $h^G \subseteq \Sigma \text{cl}(A)$. Alors pour $\lambda' \in G$ générique sur A , h on a $\lambda' \downarrow_{A,h} h^{\lambda'}$, puisque $\text{tp}(\lambda'/A, h)$ est étranger à Σ . Alors $C_G(h)$ est d'indice borné dans G et $h \in \tilde{Z}(G) = \{1\}$. Ainsi $\text{coker}(S)$ est trivial.

Pour $(\lambda, \lambda') \in S$ et $(g, g') \in S$ avec $g' \in G$ générique sur $\lambda, \sigma(\lambda), \lambda'$ on a alors

$$(g^\lambda, g^{\lambda'}) \in S \quad \text{et} \quad (g^\lambda, g^{\sigma(\lambda)}) \in S^{(\lambda, \sigma(\lambda))} = S.$$

Comme $\text{coker}(S)$ est trivial, on obtient $g^{\lambda'} = g^{\sigma(\lambda)}$ et $\sigma(\lambda)\lambda'^{-1} \in C_G(g')$. Puisque g' est générique sur $\sigma(\lambda), \lambda'$ on a $\sigma(\lambda)\lambda'^{-1} \in \tilde{Z}(G) = \{1\}$ et $\lambda' = \sigma(\lambda)$, pour tout $\lambda \in \text{pr}_1(S)$, où pr_1 est la projection sur la première coordonnée. Ainsi S définit σ sur le sous-groupe $\text{pr}_1(S)$ d'indice borné dans G .

Pour chaque ensemble définissable X tel que $X/(E \times E)$ contient S (où E est la relation d'équivalence type-définissable dont les éléments de G sont des classes), il y a un uplet fini $g_{X,0}, \dots, g_{X,k_X}$ tel que $G = \bigcup_{i \leq k_X} g_{X,i} \cdot (\text{pr}_1(X)/E)$. Alors le graphe de σ est hyperdéfini par

$$\bigcap_{X/(E \times E) \supseteq S} \bigcup_{i \leq k_X} (g_{X,i}, \sigma(g_{X,i}) \cdot (X/(E \times E))). \quad \square$$

Corollaire 2.2. *Soit σ un automorphisme Σ -borné d'un corps K hyperdéfinissable dans une théorie simple, où Σ est la classe des types partiels co-étrangers aux types génériques de K . Alors σ est hyperdéfinissable.*

Démonstration. Soit $G = K^+ \rtimes K^\times$. Alors G est hyperdéfinissable, et Σ est aussi l'ensemble des types partiels co-étrangers aux génériques de G (qui sont les paires de deux génériques indépendants de K). De plus, $\tilde{Z}(G) = \{1\}$, et σ induit un automorphisme $\tau : (a, b) \mapsto (\sigma(a), \sigma(b))$ de G . D'après le théorème précédent τ est hyperdéfinissable, et σ l'est aussi. \square

3. ENDOMORPHISMES BORNÉS D'UN CORPS AVEC OPÉRATEURS

Dans cette section, on considérera un corps K avec une famille bien-ordonnée $\mathfrak{F} = \{f_i : i < \alpha\}$ d'endomorphismes additifs. On suppose que

- (1) La famille \mathfrak{F} est K -libre : si $\sum_i \lambda_i f_i = 0$ pour des $\lambda_i \in K$, alors $\lambda_i = 0$ pour tout $i < \alpha$.
- (2) la famille est K -Pfaffienne, i.e. pour tout $i < \alpha$ il y a des $a_{j,k}^i \in K$ pour $j, k \leq i$, presque tous 0, tel que

$$f_i(xy) = \sum_{j,k \leq i} a_{j,k}^i f_j(x) f_k(y).$$

Remarque 3.1. Si on commence avec une famille K -Pfaffienne qui n'est pas K -libre, on peut en extraire une sous-famille K -libre et K -Pfaffienne. En particulier, en caractéristique positive on peut supposer que le Frobenius fait partie de \mathfrak{F} .

Lemme 3.2. *Si $\sum_{\bar{i}} a_{\bar{i}} f_{i_0}(x_0) \cdots f_{i_n}(x_n) = \sum_{\bar{i}} b_{\bar{i}} f_{i_0}(x_0) \cdots f_{i_n}(x_n)$ pour des $a_{\bar{i}}, b_{\bar{i}} \in K$, alors $a_{\bar{i}} = b_{\bar{i}}$ pour tout $\bar{i} = (i_0, \dots, i_n)$.*

Démonstration. Par récurrence sur n . Si $n = 0$, cela est conséquence de la K -liberté de \mathfrak{F} . On suppose donc l'énoncé vrai pour $n - 1$, et

$$\sum_{\bar{i}} a_{\bar{i}} f_{i_0}(x_0) \cdots f_{i_n}(x_n) = \sum_{\bar{i}} b_{\bar{i}} f_{i_0}(x_0) \cdots f_{i_n}(x_n).$$

Alors

$$0 = \sum_{i_n} \left(\sum_{i_0, \dots, i_{n-1}} (a_{\bar{i}} - b_{\bar{i}}) f_{i_0}(x_0) \cdots f_{i_{n-1}}(x_{n-1}) \right) f_{i_n}(x_n).$$

Si $a_{\bar{j}} \neq b_{\bar{j}}$ pour un $\bar{j} = (j_0, \dots, j_n)$, alors par hypothèse de récurrence

$$g_j(x_0, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i_0, \dots, i_{n-1}} (a_{\bar{i}} - b_{\bar{i}}) f_{i_0}(x_0) \cdots f_{i_{n-1}}(x_{n-1})$$

n'est pas identiquement 0 pour $j = j_n$, et il y a $\alpha \in K$ avec $g_{j_n}(\alpha) \neq 0$. Mais alors $\sum_j g_j(\alpha) f_j(x_n) = 0$, ce qui contredit encore la K -indépendance de \mathfrak{F} . \square

Corollaire 3.3. *Les coefficients $a_{j,k}^i$ sont uniquement déterminés.*

Démonstration. Immédiat. \square

En particulier $a_{j,k}^i = a_{k,j}^i$ pour tout $j, k \leq i$.

Corollaire 3.4. *Pour tout $i < \alpha$ la fonction*

$$\sigma_i = \sum_{j \leq i} a_{j,i}^i f_j(x)$$

est un endomorphisme d'anneau de K . De plus, on peut supposer $\sigma_i \in \mathfrak{F}$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} f_i(xy) &= \sum_{j,k \leq i} a_{j,k}^i f_j(x) f_k(y) = \sum_{j \leq i} a_{j,i}^i f_j(x) f_i(y) + \sum_{j \leq i, k < i} a_{j,k}^i f_j(x) f_k(y) \\ &= \sigma_i(x) f_i(y) + R(x, y), \end{aligned}$$

où $R(x, y) = \sum_{j \leq i, k < i} a_{j,k}^i f_j(x) f_k(y)$. Donc

$$\begin{aligned} f_i(xx'y) &= \sigma_i(xx') f_i(y) + R(xx', y) \\ &= \sigma_i(xx') f_i(y) + \sum_{j \leq i, k < i} \sum_{\ell, m \leq j} a_{j,k}^i a_{\ell, m}^j f_\ell(x) f_m(x') f_k(y) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_i(xx'y) &= \sigma_i(x) f_i(x'y) + R(x, x'y) \\ &= \sigma_i(x) \sigma_i(x') f_i(y) + R(x', y) + R(x, x'y) \\ &= \sigma_i(x) \sigma_i(x') f_i(y) + \sum_{j \leq i, k < i} a_{j,k}^i f_j(x') f_k(y) \\ &\quad + \sum_{j \leq i, k < i} \sum_{\ell, m \leq k} a_{j,k}^i a_{\ell, m}^k f_j(x) f_k(x') f_m(y). \end{aligned}$$

Par comparaison du coefficient de $f_i(y)$ on a donc d'après le lemme 3.2 que

$$\sigma_i(xx') = \sigma_i(x) \sigma_i(x')$$

et σ_i est un endomorphisme d'anneau de K .

Comme toute famille d'endomorphismes d'anneau de K est linéairement indépendante, soit il y a $j \leq i$ avec $\sigma_i = f_j$, soit il y a $j \leq i$ maximal tel que $a_{j,i}^i \neq 0$ et f_j n'est pas déjà multiplicatif. Alors on peut remplacer f_j par σ_i ; la famille \mathfrak{F}' d'endomorphismes additifs qui en résulte, et où l'on a mis les endomorphismes d'anneau au début de la suite, est encore K -libre et Pfaffienne. \square

Remarque 3.5. On a donc

$$f_i(xy) = \sigma_i(x)f_i(y) + \sum_{k < i} \sum_{j \leq i} a_{j,k}^i f_j(x)f_k(y).$$

Nous appelons σ_i l'endomorphisme associé à f_i .

On note que l'endomorphisme associé à un endomorphisme σ d'anneau est σ lui-même, et l'endomorphisme associé à une dérivation est l'identité.

Corollaire 3.6. [1, Corollaire 1.5] *La remarque 3.5 est satisfaite mutatis mutandis pour les compositions des endomorphismes additifs dans \mathfrak{F} , qu'on ordonne d'abord par la longueur de la composition, et ensuite par ordre lexicographique des indices des fonctions de \mathfrak{F} utilisées ; l'endomorphisme associé est la composition des endomorphismes associés des fonctions dans \mathfrak{F} .*

Démonstration. Évident. On note que l'ordre est un bon ordre. \square

Le lemme suivant ne sera pas utilisé pour la démonstration du théorème principal de cette section.

Lemme 3.7. *Tout sous-famille finie $\{f_i : i \in I_0\}$ de \mathfrak{F} est contenue dans une sous-famille finie Pfaffienne $\{f_i : i \in I\}$, avec $\max I = \max I_0$.*

Démonstration. On pose $I_{-1} = \emptyset$, et pour $n > 0$ on construit inductivement une chaîne de familles $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ en posant

$$I_{n+1} = I_n \cup \{j < \alpha : \exists i \in I_n \setminus I_{n-1} \exists k a_{j,k}^i \neq 0\}.$$

Comme la suite $\max(I_n \setminus I_{n-1})$ décroît strictement, la suite des I_n stationne éventuellement, et $I = \bigcup_{n < \omega} I_n$ donne une famille Pfaffienne $\{f_i : i \in I\}$. \square

Théorème 3.8. *Soit K un corps, et \mathfrak{F} une famille Pfaffienne d'endomorphismes additifs de K . Pour $A \subseteq K$ soit $\langle A \rangle$ la clôture de A par toutes les fonctions $f \in \mathfrak{F}$. On suppose que $\text{acl}(A) = \langle A \rangle^{\text{alg}} \cap K$, où acl est la clôture algébrique au sens de la structure $(K, +, \cdot, f : f \in \mathfrak{F})$, et A^{alg} est la clôture algébrique au sens corpique. Alors tout endomorphisme borné σ du corps K satisfait une identité de la forme*

$$\text{Frob}^j \circ \sigma = \sigma_i,$$

où σ_i est une composition d'endomorphismes associés de \mathfrak{F} , et du Frobenius.

Démonstration. On peut supposer que \mathfrak{F} est K -libre, et qu'en caractéristique positive le Frobenius fait partie de \mathfrak{F} . Soient $B = \text{acl}(B)$ des paramètres sur lesquels σ est borné.

Pour tout $a \in K$ l'image $\sigma(a)$ est dans

$$\text{acl}(Ba) = \langle Ba \rangle^{\text{alg}} \cap K = (B \cup \langle a \rangle)^{\text{alg}} \cap K.$$

Par compacité, il y a un nombre fini de polynômes $(P_i(\bar{x}_i, y) : i < \ell)$ sur B , et pour tout $i < \ell$ une suite $(f_{\theta_{i,j}} : j < |\bar{x}_i|)$ de compositions de fonctions dans \mathfrak{F} tel que pour tout $a \in K$ il y a $i < \ell$ avec $P_i(\bar{f}_{\theta_{i,j}}(a), y)$ non-trivial en y , et satisfait par $\sigma(a)$.

Soit $\bar{K} = K^{\text{alg}}$ la clôture algébrique de K , et $(f_{\theta_i} : i < n)$ la suite des fonctions $f_{\theta_{i,j}}$, avec $f_0 = \text{id}$. On considère le sous-groupe additif suivant de \bar{K}^{n+1} :

$$G = \{((f_{\theta_i}(a) : i < n), \sigma(a)) : a \in K\}.$$

Soit Γ sa clôture de Zariski, et Γ^0 la composante connexe de Γ . Alors Γ^0 est la clôture de Zariski de $G^0 = \Gamma^0 \cap G$, et ce dernier est d'indice fini dans G .

Comme tout élément (\bar{x}, y) de G satisfait une équation $P_i(\bar{x}, y) = 0$ (avec énumération convenable de \bar{x}), non-triviale en y , pour un $i < \ell$, la disjonction de ces équations est génériquement satisfaite dans Γ^0 et non-triviale en y d'après [13, Remark 27].

Or, les seuls sous-groupes algébriques additifs de \bar{K}^{n+1} sont donnés par des polynômes additifs. Il y a donc un polynôme $P \in \bar{K}[X_0, \dots, X_n]$ de la forme

$$P(\bar{x}, x_n) = \sum_{i \leq n, j < \omega} \lambda_{i,j} x_i^{p^j}$$

tel que $P(\bar{x}, x_n) = 0$ est satisfaite sur Γ^0 , et tel que $P(\bar{0}, x_n)$ est non-trivial. Comme G et G^0 sont $\text{Gal}(K)$ -invariants, Γ et Γ^0 le sont aussi, et on peut supposer que P est à coefficients dans la clôture inséparable de K . En composant avec une puissance du Frobenius, on peut même supposer que $P \in K[X_0, \dots, X_n]$.

La fonction $x \mapsto P((f_{\theta_i}(x))_{i < n}, \sigma(x))$ est un endomorphisme additif de K dont l'image F est un sous-groupe additif fini. En caractéristique zéro F est trivial; en caractéristique positive il y a un polynôme nontrivial additif $Q \in K[X]$ qui s'annule sur F . Ainsi

$$Q(P((f_{\theta_i}(x))_{i < n}, \sigma(x))) = 0$$

pour tout $x \in K$. Puisque \mathfrak{F} contient le Frobenius en caractéristique positive, on obtient une équation non-triviale de la forme

$$\sum_{i < n} \lambda_i f_{\theta_i}(x) = \sum_{j < \omega} \mu_j \sigma(x)^{p^j}$$

satisfaite sur K entier (éventuellement avec un n et des θ_i différents). On choisit une telle équation avec

$$\theta_m = \max\{\theta_i : \lambda_i \neq 0\}$$

minimal. De plus, on peut supposer qu'il n'y ait qu'un seul μ non-trivial, puisque pour j_0 maximal avec $\mu_{j_0} \neq 0$ et $a \in K$ transcendant,

$$\sum_{i < n} \lambda_i f_{\theta_i}(ax) - \sigma(a)^{p^{j_0}} \sum_{i < n} \lambda_i f_{\theta_i}(x) = \sum_{j < j_0} \mu_j [\sigma(a)^{p^j} - \sigma(a)^{p^{j_0}}] \sigma(x)^{p^j}$$

nous permet de réduire le nombre de μ_j non-triviaux, tout en conservant θ_m d'après le corollaire 3.6. Alors, on peut prendre $\mu = 1$, et $\sum_{i < n} \lambda_i f_{\theta_i}(x) = \sigma(x)^{p^j}$ pour tout $x \in K$.

Pour tout $a \in K$ on a d'après le corollaire 3.6 que

$$\begin{aligned} \sum_{i < n} \lambda_i f_{\theta_i}(ax) &= \lambda_m \sigma_{\theta_m}(a) f_{\theta_m}(x) + \sum_{\theta < \theta_m} \alpha_{\theta} f_{\theta}(x) \\ &= \sigma(ax)^{p^j} = \sigma(a)^{p^j} \sigma(x)^{p^j} \\ &= \sigma(a)^{p^j} \sum_{i < n} \lambda_i f_{\theta_i}(x) \end{aligned}$$

pour certains coefficients $\alpha_{\theta} \in K$ qui dépendent de a . Si $\sigma_{\theta_m}(a) \neq \sigma(a)^{p^j}$, alors

$$\sigma(a)^{p^j} \sum_{\theta < \theta_m} \alpha_{\theta} f_{\theta}(x) - \sigma_{\theta_m}(a) \sum_{i < n} \lambda_i f_{\theta_i}(x) = [\sigma(a)^{p^j} - \sigma_{\theta_m}(a)] \sigma(x)^{p^j}$$

donne une équation avec un θ maximal plus petit, une contradiction. Le théorème en découle. \square

Cette preuve s'inspire de la démonstration de Blossier, Hardouin et Martin Pizarro [1, Théorème 3.1], mais il utilise les propriétés génériques de l'enveloppe définissable (qui ici est égale à la clôture de Zariski) de [13] à la place du stabilisateur. Nous n'avons besoin pour notre théorème 3.8 qu'une partie de l'hypothèse 4 de [1] (la caractérisation de la clôture algébrique) et nous ne faisons aucune hypothèse sur la simplicité de l'expansion ; par contre nous supposons dès le début la propriété Pfaffienne ([1, Proposition 1.4], qui découle de leur hypothèse 1). Notons que nous ne parlons pas des inverses des automorphismes dans \mathfrak{F} : on préserve le caractère Pfaffien en les rajoutant, et dans les applications ils seront nécessaires pour obtenir la caractérisation de la clôture algébrique. Vu qu'un automorphisme \mathbb{F} -linéaire dans \mathfrak{F} est toujours associé dans le sens de [1], on récupère ainsi [1, Théorème 3.1] : Un automorphisme σ -borné d'un corps simple est définissable d'après le corollaire 2.2, donc borné, et on peut appliquer le théorème 3.8.

RÉFÉRENCES

- [1] T. Blossier, C. Hardouin et A. Martin Pizarro. *Sur les automorphismes bornés de corps munis d'opérateurs*, Math. Res. Letters, à paraître. <http://arxiv.org/abs/1505.03669>
- [2] T. Blossier, A. Martin Pizarro et F. O. Wagner. *À la recherche du tore perdu*, J. Symb. Logic, 81(1) :1–31, 2016.
- [3] R. F. Bustamante Medina. *Differentially closed fields of characteristic zero with a generic automorphism*, Rev. Mat. Teoría Apl. 14 :81–100, 2007.
- [4] R. F. Bustamante Medina. *Rank and dimension in difference-differential fields*, Notre Dame J. Formal Logic 52 :403–414, 2011.
- [5] Z. Chatzidakis et E. Hrushovski. *Model Theory of difference fields*, Trans. Amer. Math. Soc. 351 :2997–3071, 1999.
- [6] F. Delon. *Idéaux et types sur les corps séparablement clos*, Mém. Soc. Math. Fr. 33, pp. 76, 1988.
- [7] D. Evans, Z. Ghadernezhad et K. Tent. *Simplicity of the automorphism groups of some Hrushovski constructions*, preprint 2013. <http://arxiv.org/abs/1312.3430>
- [8] R. Konnerth. *Automorphism groups of differentially closed fields*, Ann. Pure Appl. Logic 118 :1–60, 2002.
- [9] D. Lascar. *Les automorphismes d'un ensemble fortement minimal*, J. Symb. Logic 57 :238–251, 1992.
- [10] T. McGrail. *The model theory of differential fields with finitely many commuting derivations*, J. Symb. Logic 65 :885–913, 2000.
- [11] R. Moosa et T. Scanlon. *Model theory of fields with free operators in characteristic zero*, J. Math. Logic 14, 2014.
- [12] D. Palacín et F. O. Wagner. *Ample thoughts*, J. Symb. Logic 78 :489–510, 2013.
- [13] F. O. Wagner. *Subgroups of stable groups*, J. Symb. Logic 55(1) :151–156, 1990.
- [14] F. O. Wagner. *Simple Theories*, Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [15] F. O. Wagner. *Some remarks on one-basedness*, J. Symb. Logic 69 :34–38, 2004.
- [16] C. Wood. *Notes on the stability of separably closed fields*, J. Symb. Log. 44 :412–416, 1979.
- [17] M. Ziegler. *A Note on generic types*, preprint 2006. <http://arxiv.org/math.L0/0608433>

UNIVERSITÉ DE LYON ; CNRS ; UNIVERSITÉ LYON 1 ; INSTITUT CAMILLE JORDAN UMR5208,
43 BOULEVARD DU 11 NOVEMBRE 1918, F-69622 VILLEURBANNE CEDEX, FRANCE
E-mail address: wagner@math.univ-lyon1.fr