



HAL
open science

Automorphismes bornés dans les structures simples, et endomorphismes définissables dans les expansions de corps par une famille Pfaffienne d'endomorphismes additifs

Frank Olaf Wagner

► **To cite this version:**

Frank Olaf Wagner. Automorphismes bornés dans les structures simples, et endomorphismes définissables dans les expansions de corps par une famille Pfaffienne d'endomorphismes additifs. 2016. hal-01162721v2

HAL Id: hal-01162721

<https://hal.science/hal-01162721v2>

Preprint submitted on 1 Sep 2016 (v2), last revised 24 Sep 2019 (v5)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AUTOMORPHISMES BORNÉS DANS LES STRUCTURES SIMPLES, ET ENDOMORPHISMES DÉFINISSABLES DANS LES EXPANSIONS DE CORPS PAR UNE FAMILLE PFAFFIENNE D'ENDOMORPHISMES ADDITIFS

FRANK O. WAGNER

RÉSUMÉ. Un automorphisme borné d'un corps ou d'un groupe de centre approximatif trivial est définissable. Dans une expansion d'un corps par une famille \mathfrak{F} Pfaffienne d'endomorphismes additifs tel que la clôture algébrique dans l'expansion coïncide avec la clôture algébrique (corpique) relative de la \mathfrak{F} -sous-structure engendré, un endomorphisme définissable, éventuellement composé par une puissance du Frobenius, est une composition d'endomorphismes associés à \mathfrak{F} .

INTRODUCTION

Dans [9] Lascar appelle un automorphisme σ d'une structure \mathfrak{M} *borné* s'il existe un petit ensemble A de paramètres tel que pour tout $m \in M$ on a $\sigma(m) \in \text{acl}(A, m)$. Il montre que pour un ensemble fortement minimal \mathfrak{M} , le sous-groupe $\text{aut}_f(\mathfrak{M})$ des automorphismes forts (qui fixent $\text{acl}^{eq}(\emptyset)$) est simple modulo le sous-groupe distingué des automorphismes bornés, résultat généralisé ensuite [7] aux structures avec dimension entière compatible avec une notion d'indépendance stationnaire.

Plus généralement, pour un corps K avec théorie simple, Blossier, Hardouin et Martín Pizarro appellent un automorphisme σ *borné* s'il y a un petit ensemble A de paramètres tel que pour tout $m \in M$ on a $\sigma(m) \in \Sigma\text{cl}(A, m)$, où Σ est la classe des types partiels co-étrangers aux génériques du corps [1], et la Σ -clôture $\Sigma\text{cl}(A)$ est l'ensemble de tous les éléments b tel que $\text{tp}(b/A)$ est Σ -analysable. Ils montrent que pour un corps muni d'opérateurs, tout automorphisme borné est définissable et obtenu par composition d'une puissance du Frobenius avec les automorphismes parmi les opérateurs ou leurs inverses. En particulier il en découle une démonstration uniforme de résultats de Lascar [9], Ziegler et Konnerth [8].

Bien évidemment, la définition d'un automorphisme borné à un sens pour n'importe quel permutation σ d'un ensemble X hyperdéfinissable dans une théorie simple; il n'est pas nécessaire que σ soit induite par un automorphisme de la structure ambiante, ni qu'elle préserve toute la structure induite sur X . De même, on a libre choix de Σ , mais il convient de prendre Σ petit par rapport à X : par exemple, toute permutation de X est X -bornée.

Dans cet article, nous allons considérer les automorphismes groupe-théoriques Σ -bornés d'un groupe G hyperdéfinissable dans une théorie simple, où Σ est encore la classe des types partiels (avec paramètres) co-étrangers aux génériques de G .

Date: 1^{er} septembre 2016.

2010 Mathematics Subject Classification. 03C45.

Recherche conduite dans le cadre du projet ANR-13-BS01-0006 ValCoMo.

Nous montrons que si tout élément non-trivial a un centralisateur d'indice non-borné (autrement dit, si le centre approximatif $\tilde{Z}(G)$ du groupe est trivial), alors tout automorphisme Σ -borné est définissable.

Dans une dernière section, nous allons considérer des expansions d'un corps par une famille \mathfrak{F} d'endomorphismes additifs, tel que

- (1) la famille \mathfrak{F} est *Pfaffienne*, c'est-à-dire $f_i(xy)$ est combinaison linéaire des produits $f_j(x)f_k(y)$ pour $j, k \leq i$;
- (2) La clôture algébrique d'une partie A au sens de l'expansion est égale à la clôture algébrique corpique relative de la \mathfrak{F} -sous-structure engendré par A .

Ces conditions sont satisfaites en particulier par

- les corps différentiellement clos en caractéristique 0 avec n dérivations qui commutent [10];
- les corps aux différences génériques en toute caractéristique [5];
- les corps séparablement clos de degré d'imperfection fini avec une p -base nommée [6, 15];
- les corps différentiels aux différences en caractéristique zéro où l'automorphisme commute avec la dérivation [3, 4];
- les corps munis d'opérateurs libres en caractéristique zéro [11].

(Pour la condition Pfaffienne, il faut utiliser [1, Proposition 1.4].) Nous montrons alors que tout endomorphisme définissable de K est une composition d'endomorphismes associés aux fonctions dans \mathfrak{F} , qui de plus en sont des combinaisons linéaires, suivi par une puissance de l'inverse du Frobenius. Dans les cas mentionnés ci-dessus, les endomorphismes (sauf pour le Frobenius pour les corps séparablement clos) seront surjectifs, et les automorphismes associés seront les automorphismes parmi les fonctions dans \mathfrak{F} , et éventuellement le Frobenius. Nous récupérerons ainsi le théorème principal de Blossier, Hardouin et Martin Pizarro [1].

1. PRÉLIMINAIRES

Dans cette section, nous allons rappeler quelques notions et résultats moins connus pour les groupes et théories simples. Pour plus de détail, on se référera à [13]. Comme d'habitude, on travaillera dans un modèle monstre d'une théorie simple, et on se fixe Σ , une famille \emptyset -invariante de types partiels avec paramètres.

Définition 1.1. La Σ -clôture $\Sigma\text{cl}(A)$ de A est la collection de tous les hyperimaginaires a tel que $\text{tp}(a/A)$ est Σ -analysable.

On a toujours $\text{bdd}(A) \subseteq \Sigma\text{cl}(A)$ avec égalité si Σ est vide. En général on choisira un ensemble Σ de types partiels qui sont petits par rapport à l'ensemble X sous considération (notamment $X \not\subseteq \Sigma\text{cl}(\emptyset)$).

Fait 1.2. [13, Lemma 3.5.3] *Sont équivalents :*

- (1) $\text{tp}(a/A)$ est étranger à Σ .
- (2) $a \downarrow_A \Sigma\text{cl}(A)$.
- (3) $a \downarrow_A \text{dcl}(aA) \cap \Sigma\text{cl}(A)$.
- (4) $\text{dcl}(aA) \cap \Sigma\text{cl}(A) \subseteq \text{bdd}(A)$.

Sauf en cas d'égalité avec la clôture bornée, la Σ -clôture a la taille du modèle monstre. L'équivalence (2) \Leftrightarrow (3) permet de n'en utiliser qu'une petite partie.

Fait 1.3. [13, Lemma 3.5.5] *Si $A \downarrow_B C$, alors $\Sigma\text{cl}(A) \downarrow_{\Sigma\text{cl}(B)} \Sigma\text{cl}(C)$. Plus précisément, pour tout $A_0 \subset \Sigma\text{cl}(A)$ on a $A_0 \downarrow_{B_0} \Sigma\text{cl}(C)$, où $B_0 = \text{dcl}(A_0B) \cap \Sigma\text{cl}(B)$.*

Dans [14, 12] on trouvera d'autres propriétés de la Σ -clôture, ainsi qu'un découpage en différents niveaux.

Soit maintenant G un groupe hyperdéfinissable sur \emptyset .

Définition 1.4. (1) Deux sous-groupe hyperdéfinissables H et K sont *commensurables* si leur intersection est d'indice borné dans chacun.

(2) Un sous-groupe hyperdéfinissable H est *localement connexe* s'il est égal à tout conjugué groupe-théorique ou conjugué par automorphisme qui lui est commensurable.

Fait 1.5. [13, Corollary 4.5.16]

(1) *Un sous-groupe hyperdéfinissable localement connexe de G a un paramètre canonique.*

(2) *Tout sous-groupe hyperdéfinissable H de G a une composante localement connexe H^{loc} , qui est le plus petit sous-groupe hyperdéfinissable localement connexe commensurable avec H . Son paramètre canonique est définissable sur les paramètres utilisés pour hyperdéfinir H .*

On rappelle également la notion du centre approximatif.

Définition 1.6. Le centre approximatif d'un groupe hyperdéfinissable G , noté $\tilde{Z}(G)$, est le sous-groupe caractéristique des éléments dont le centralisateur est d'indice borné dans G .

Le centre approximatif de G est hyperdéfinissable sur les mêmes paramètres [13, Proposition 4.4.10]. Enfin, on a besoin du lemme de Ziegler ([16, Theorem 1] pour le cas stable abélien, et [2, lemme 1.2 et remarque 1.3] pour le cas général).

Fait 1.7. *Soient g et g' dans G tels que g, g' et gg' sont deux-à-deux indépendants. Alors les stabilisateurs à gauche de g et de gg' sont égaux, et commensurables avec $g\text{Stab}(g')g^{-1}$; ils sont \emptyset -connexes, et g est générique dans le translaté $\text{Stab}(g)g$, qui est définissable sur $\text{bdd}(\emptyset)$; de même pour g' et gg' .*

2. AUTOMORPHISMES BORNÉS

Dans cette section, on considère encore un groupe G hyperdéfinissable sur \emptyset . On pose Σ la classe de tous les types partiels co-étrangers aux types génériques de G . (Comme les types génériques ont des extensions non-déviantes qui sont des translatés les uns des autres, co-étranger à un équivaut co-étranger à tous.) En particulier, si G a un type générique régulier, Σ consiste de tous les types partiels non-génériques.

Théorème 2.1. *Si $\tilde{Z}(G)$ est trivial, alors tout automorphisme Σ -borné σ de G est hyperdéfinissable.*

Démonstration. Soit A un ensemble tel que $\sigma(g) \in \Sigma\text{cl}(A, g)$ pour tout g dans G . Considérons d'abord $g \in G$ générique sur A , et $g' \in G$ générique sur $A, g, \sigma^{-1}(g)$. Soit $A' = \Sigma\text{cl}(A) \cap \text{bdd}(A, g', \sigma(g'))$. D'après le fait 1.3 on a $g', \sigma(g') \downarrow_{A'} \sigma^{-1}(g), g$. Comme les génériques de G sont étrangers à Σ , les éléments g et g' restent génériques

sur A' . Ainsi $g_0 = g'\sigma^{-1}(g)$ et $\sigma(g_0) = \sigma(g')g$ sont tous les deux génériques sur A' , et donc sur A .

Soit maintenant g_2 générique dans G sur A, g_0 , et $g_1 = g_0^{-1}g_2$. Alors g_0, g_1 et $g_2 = g_0g_1$ sont deux-à-deux indépendants sur A . D'après le fait 1.3 leurs Σ -clôtures $\Sigma\text{cl}(A, g_0), \Sigma\text{cl}(A, g_1)$ et $\Sigma\text{cl}(A, g_2)$ sont deux-à-deux indépendants sur $\Sigma\text{cl}(A)$. En particulier, $(g_0, \sigma(g_0)), (g_1, \sigma(g_1))$ et $(g_2, \sigma(g_2))$ sont deux-à-deux indépendants sur $\Sigma\text{cl}(A)$, et donc sur

$$B = \Sigma\text{cl}(A) \cap \text{bdd}(A, g_0, \sigma(g_0), g_1, \sigma(g_1), g_2, \sigma(g_2)).$$

De plus, comme les types génériques de G sont étrangers à Σ , les éléments $g_0, \sigma(g_0), g_1$ et g_2 restent chacun génériques sur B .

Pour $i \leq 2$ soit $S_i = \text{Stab}(g_i, \sigma(g_i)/B)$ le stabilisateur (à gauche) dans $G \times G$. Alors S_i est connexe sur B d'après le fait 1.7, le translaté $S \cdot (g_i, \sigma(g_i))$ est hyperdéfinissable sur B , et le couple $(g_i, \sigma(g_i))$ y est générique. De plus, $S_0 = S_2$; soit $S = S_0^{\text{loc}}$ sa composante localement connexe. Puisque

$$\begin{array}{ccc} g_i, \sigma(g_i) & \downarrow & B, \\ & \text{bdd}(A, g_i, \sigma(g_i)) \cap \Sigma\text{cl}(A) & \end{array}$$

S_i est commensurable avec $\text{Stab}(g_i, \sigma(g_i)/\text{bdd}(A, g_i, \sigma(g_i)) \cap \Sigma\text{cl}(A))$ pour $i = 0, 2$, dont la composante localement connexe est aussi S . Il en découle que S ainsi que le translaté $S \cdot (g_i, \sigma(g_i))$ est hyperdéfinissable sur $\text{bdd}(A, g_i, \sigma(g_i)) \cap \Sigma\text{cl}(A)$ pour $i = 0, 2$. Or, g_2 était un générique quelconque sur A, g_0 . Ainsi S est hyperdéfinissable sur $\Sigma\text{cl}(A) \cap \text{bdd}(A, a, \sigma(a))$ quel que soit le générique a , et donc sur

$$\bar{A} = \Sigma\text{cl}(A) \cap \bigcap_{a \text{ générique}} \text{bdd}(A, a, \sigma(a)).$$

Notons que puisque g_0 et $\sigma(g_0)$ sont génériques sur B , la projection de S_0 , et donc aussi de S , sur la première et sur la deuxième coordonnée sont génériques dans G , et donc des sous-groupes d'indice borné.

Comme $\sigma(g_0) \in \Sigma\text{cl}(A, g_0)$ et tous les types génériques de S sont des translatés de $\text{tp}(g_0, \sigma(g_0)/B)$ sur des paramètres indépendants, on a $g' \in \Sigma\text{cl}(B, g)$ pour tout générique (g, g') de S sur B . Si

$$h \in \text{coker}(S) = \{g \in G : (1, g) \in S\},$$

et $(g, g') \in S$ est générique sur B, h , alors $(g, g'h)$ est toujours générique sur B, h , et $h \in \Sigma\text{cl}(B, g)$. Puisque $h \downarrow_B g$ on obtient $h \in \Sigma\text{cl}(B) = \Sigma\text{cl}(A)$ et $\text{coker}(S) \subseteq \Sigma\text{cl}(A)$.

Soit maintenant $\lambda \in G$ quelconque, et $g \in G$ générique sur $\bar{A}, \lambda, \sigma(\lambda)$. On pose $g' = g^{-\lambda}$ et $B = \Sigma\text{cl}(A) \cap \text{bdd}(A, g, g', \sigma(g), \sigma(g'))$. Alors g et g' sont génériques sur B , et

$$(g, \sigma(g)) \in (S \cdot (g', \sigma(g')))^{(\lambda, \sigma(\lambda))} \cap (S \cdot (g, \sigma(g))).$$

Comme les deux translatés $S \cdot (g, \sigma(g))$ et $S \cdot (g', \sigma(g'))$ sont hyperdéfinissables sur B ,

$$g, \sigma(g) \downarrow_B \lambda, \sigma(\lambda)$$

et $(g, \sigma(g))$ est générique dans $S \cdot (g, \sigma(g))$ sur B , les deux groupes S et $S^{(\lambda, \sigma(\lambda))}$ sont commensurables, et donc égaux par connexité locale. Si $h \in \text{coker}(S)$, alors $h^{\sigma(\lambda)} \in \text{coker}(S) \subset \Sigma\text{cl}(A)$. Or, σ est un automorphisme, donc surjectif, et $h^G \subseteq \Sigma\text{cl}(A)$. Alors pour $\lambda' \in G$ générique sur A, h on a $\lambda' \downarrow_{A, h} h^{\lambda'}$, puisque $\text{tp}(\lambda'/A, h)$

est étranger à Σ . Alors $C_G(h)$ est d'indice borné dans G et $h \in \tilde{Z}(G) = \{1\}$. Ainsi $\text{coker}(S)$ est trivial.

Pour $(\lambda, \lambda') \in S$ et $(g, g') \in S$ avec $g' \in G$ générique sur $\lambda, \sigma(\lambda), \lambda'$ on a alors

$$(g^\lambda, g'^{\lambda'}) \in S \quad \text{et} \quad (g^\lambda, g'^{\sigma(\lambda)}) \in S^{(\lambda, \sigma(\lambda))} = S.$$

Comme $\text{coker}(S)$ est trivial, on obtient $g'^{\lambda'} = g'^{\sigma(\lambda)}$ et $\sigma(\lambda)\lambda'^{-1} \in C_G(g')$. Puisque g' est générique sur $\sigma(\lambda), \lambda'$ on a $\sigma(\lambda)\lambda'^{-1} \in \tilde{Z}(G) = \{1\}$ et $\lambda' = \sigma(\lambda)$, pour tout $\lambda \in \text{pr}_1(S)$, où pr_1 est la projection sur la première coordonnée. Ainsi S définit σ sur le sous-groupe $\text{pr}_1(S)$ d'indice borné dans G .

Pour chaque ensemble définissable X tel que $X/(E \times E)$ contient S (où E est la relation d'équivalence type-définissable dont les éléments de G sont des classes), il y a un uplet fini $g_{X,0}, \dots, g_{X,k_X}$ tel que $G = \bigcup_{i \leq k_X} g_{X,i} \cdot (\text{pr}_1(X)/E)$. Alors le graphe de σ est hyperdéfini par

$$\bigcap_{X/(E \times E) \supseteq S} \bigcup_{i \leq k_X} (g_{X,i}, \sigma(g_{X,i}) \cdot (X/(E \times E))). \quad \square$$

Corollaire 2.2. *Soit σ un automorphisme Σ -borné d'un corps K hyperdéfinissable dans une théorie simple, où Σ est la classe des types partiels co-étrangers aux types génériques de K . Alors σ est hyperdéfinissable.*

Démonstration. Soit $G = K^+ \rtimes K^\times$. Alors G est hyperdéfinissable, et Σ est aussi l'ensemble des types partiels co-étrangers aux génériques de G (qui sont les paires de deux génériques indépendants de K). De plus, $\tilde{Z}(G) = \{1\}$, et σ induit un automorphisme $\tau : (a, b) \mapsto (\sigma(a), \sigma(b))$ de G . D'après le théorème précédent τ est hyperdéfinissable, et σ l'est aussi. \square

3. CORPS AVEC OPÉRATEURS

Dans cette section, on considérera un corps K avec une famille bien-ordonnée $\mathfrak{F} = \{f_i : i < \alpha\}$ d'endomorphismes additifs. On suppose que

- (1) La famille \mathfrak{F} est K -libre : si $\sum_i \lambda_i f_i = 0$ pour des $\lambda_i \in K$, alors $\lambda_i = 0$ pour tout $i < \alpha$.
- (2) la famille est K -Pfaffienne, i.e. pour tout $i < \alpha$ il y a des $a_{j,k}^i \in K$ pour $j, k \leq i$, presque tous 0, tel que

$$f_i(xy) = \sum_{j,k \leq i} a_{j,k}^i f_j(x) f_k(y).$$

Remarque 3.1. Si on commence avec une famille K -Pfaffienne qui n'est pas K -libre, on peut en extraire une sous-famille K -libre et K -Pfaffienne. En particulier, en caractéristique positive on peut supposer que le Frobenius fait partie de \mathfrak{F} .

Lemme 3.2. *Si $\sum_{\bar{i}} a_{\bar{i}} f_{i_0}(x_1) \cdots f_{i_0}(x_n) = \sum_{\bar{i}} b_{\bar{i}} f_{i_0}(x_0) \cdots f_{i_n}(x_n)$ pour des $a_{\bar{i}}, b_{\bar{i}} \in K$, alors $a_{\bar{i}} = b_{\bar{i}}$ pour tout $\bar{i} = (i_0, \dots, i_n)$.*

Démonstration. Par récurrence sur n . Si $n = 0$, cela est conséquence de la K -liberté de \mathfrak{F} . On suppose donc l'énoncé vrai pour $n - 1$, et

$$\sum_{\bar{i}} a_{\bar{i}} f_{i_0}(x_0) \cdots f_{i_n}(x_n) = \sum_{\bar{i}} b_{\bar{i}} f_{i_0}(x_0) \cdots f_{i_n}(x_n).$$

Alors

$$0 = \sum_{i_n} \left(\sum_{i_0, \dots, i_{n-1}} (a_{\bar{i}} - b_{\bar{i}}) f_{i_0}(x_0) \cdots f_{i_{n-1}}(x_{n-1}) \right) f_{i_n}(x_n).$$

Si $a_{\bar{i}} \neq b_{\bar{i}}$ pour un \bar{i} , alors par hypothèse de récurrence

$$g_{i_n}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i_0, \dots, i_{n-1}} (a_{\bar{i}} - b_{\bar{i}}) f_{i_0}(x_0) \cdots f_{i_{n-1}}(x_{n-1})$$

n'est pas identiquement 0, et il y a $\alpha \in K$ et i_n avec $g_{i_n}(\alpha) \neq 0$. Mais alors $\sum_{i_n} g_{i_n}(\alpha) f_{i_n}(x_n) = 0$, ce qui contredit encore la K -indépendance de \mathfrak{F} . \square

Corollaire 3.3. *Les coefficients $a_{j,k}^i$ sont uniquement déterminés.*

Démonstration. Immédiat. \square

En particulier $a_{j,k}^i = a_{k,j}^i$ pour tout $j, k \leq i$.

Corollaire 3.4. *Pour tout $i < \alpha$ la fonction*

$$\sigma_i = \sum_{j \leq i} a_{j,i}^i f_j(x)$$

est un endomorphisme d'anneau de K . De plus, on peut supposer $\sigma_i \in \mathfrak{F}$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} f_i(xy) &= \sum_{j,k \leq i} a_{j,k}^i f_j(x) f_k(y) = \sum_{j \leq i} a_{j,i}^i f_j(x) f_i(y) + \sum_{j \leq i, k < i} a_{j,k}^i f_j(x) f_k(y) \\ &= \sigma_i(x) f_i(y) + R(x, y), \end{aligned}$$

où $R(x, y) = \sum_{j \leq i, k < i} a_{j,k}^i f_j(x) f_k(y)$. Donc

$$\begin{aligned} f_i(xx'y) &= \sigma_i(xx') f_i(y) + R(xx', y) \\ &= \sigma_i(xx') f_i(y) + \sum_{j \leq i, k < i} \sum_{\ell, m \leq j} a_{j,k}^i a_{\ell, m}^j f_\ell(x) f_m(x') f_k(y) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_i(xx'y) &= \sigma_i(x) f_i(x'y) + R(x, x'y) \\ &= \sigma_i(x) \sigma_i(x') f_i(y) + R(x', y) + R(x, x'y) \\ &= \sigma_i(x) \sigma_i(x') f_i(y) + \sum_{j \leq i, k < i} a_{j,k}^i f_j(x') f_k(y) \\ &\quad + \sum_{j \leq i, k < i} \sum_{\ell, m \leq k} a_{j,k}^i a_{\ell, m}^k f_j(x) f_\ell(x') f_m(y). \end{aligned}$$

Par comparaison du coefficient de $f_i(y)$ on a donc d'après le lemme 3.2 que

$$\sigma_i(xx') = \sigma_i(x) \sigma_i(x')$$

et σ_i est un endomorphisme d'anneau de K .

Comme toute famille d'endomorphismes d'anneau de K est linéairement indépendante, soit il y a $j \leq i$ avec $\sigma_i = f_j$, soit il y a $j \leq i$ maximal tel que $a_{j,i}^i \neq 0$ et f_j n'est pas déjà multiplicatif. Alors on peut remplacer f_j par σ_i ; la famille \mathfrak{F}' d'endomorphismes additifs qui en résulte, et où l'on a mis les endomorphismes d'anneau au début de la suite, est encore K -libre et Pfaffienne. \square

Remarque 3.5. On a donc

$$f_i(xy) = \sigma_i(x) f_i(y) + \sum_{k < i} \sum_{j \leq i} a_{j,k}^i f_j(x) f_k(y).$$

Nous appelons σ_i l'endomorphisme associé à f_i .

On note que l'endomorphisme associé à un endomorphisme σ d'anneau est σ lui-même, et l'endomorphisme associé à une dérivation est l'identité.

Corollaire 3.6. [1, Corollaire 1.5] *La remarque 3.5 est satisfaite mutatis mutandis pour les compositions des endomorphismes additifs dans \mathfrak{F} , qu'on ordonne d'abord par la longueur de la composition, et ensuite par ordre lexicographique des indices des fonctions de \mathfrak{F} utilisées; l'endomorphisme associé est la composition des endomorphismes associés des fonctions dans \mathfrak{F} .*

Démonstration. Évident. On note que l'ordre est un bon ordre. \square

Le lemme suivant ne sera pas utilisé pour la démonstration du théorème principal de cette section.

Lemme 3.7. *Tout sous-famille finie $\{f_i : i \in I_0\}$ de \mathfrak{F} est contenue dans une sous-famille finie Pfaffienne $\{f_i : i \in I\}$, avec $\max I = \max I_0$.*

Démonstration. On pose $I_{-1} = \emptyset$, et pour $n > 0$ on construit inductivement une chaîne de familles $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ en posant

$$I_{n+1} = I_n \cup \{j < \alpha : \exists i \in I_n \setminus I_{n-1} \exists k a_{j,k}^i \neq 0\}.$$

Comme la suite $\max(I_n \setminus I_{n-1})$ décroît strictement, la suite des I_n stationne éventuellement, et $I = \bigcup_{n < \omega} I_n$ donne une famille Pfaffienne $\{f_i : i \in I\}$. \square

Théorème 3.8. *Soit K un corps, et \mathfrak{F} une famille Pfaffienne d'endomorphismes additifs de K . Pour $A \subseteq K$ soit $\langle A \rangle$ la clôture de A par toutes les fonctions $f \in \mathfrak{F}$. On suppose que $\text{acl}(A) = \langle A \rangle^{\text{alg}} \cap K$, où acl est la clôture algébrique au sens de la structure $(K, +, \cdot, f : f \in \mathfrak{F})$, et A^{alg} est la clôture algébrique au sens corpique. Alors tout endomorphisme d'anneau définissable σ de K satisfait une identité de la forme*

$$\text{Frob}^j \circ \sigma = \sigma_i,$$

où σ_i est une composition d'endomorphismes d'anneaux engendrés par combinaison K -linéaire par \mathfrak{F} , et le Frobenius.

Démonstration. On peut supposer que \mathfrak{F} est K -libre, et qu'en caractéristique positive le Frobenius fait partie de \mathfrak{F} . Soit \mathfrak{M} un modèle contenant les paramètres nécessaires pour définir σ .

Soit $a \in K$ transcendant sur \mathfrak{M} , et \bar{a} une base de transcendance de $\langle a \rangle$ sur \mathfrak{M} , de longueur n borné par $|\mathfrak{F}| + \aleph_0$ et avec $a = a_0$. Soit \bar{a}' un cohéritier de \bar{a} sur \mathfrak{M} . Alors \bar{a}' est algébriquement indépendant sur $\mathfrak{M}\bar{a}$; et $\bar{a} + \bar{a}'$ (avec addition par coordonnées) est algébriquement indépendant sur $\mathfrak{M}\bar{a}$ et sur $\mathfrak{M}\bar{a}'$.

On pose $\bar{K} = K^{\text{alg}}$ la clôture algébrique de K , et $S_a = \text{Stab}(\bar{a}, \sigma(a)/\mathfrak{M}^{\text{alg}})$ le stabilisateur additif de $(\bar{a}, \sigma(\bar{a}))$ dans \bar{K}^{n+1} au sens de la structure de pur corps algébriquement clos. Alors le triplet $(\bar{a}, \sigma(a))$, $(\bar{a}', \sigma(a'))$ et $(\bar{a} + \bar{a}', \sigma(a + a'))$ satisfait aux hypothèses du fait 1.7 sur $\mathfrak{M}^{\text{alg}}$ dans le pur corps algébriquement clos \bar{K} . Il en suit que S_a est un sous-groupe connexe algébrique additif de \bar{K}^{n+1} dont la projection sur les premières n coordonnées est K^n et la projection sur la dernière coordonnée est K , et que $(\bar{a}, \sigma(a))$ est un élément générique du translaté $S + (\bar{a}, \sigma(a))$; ce translaté est définissable sur $\mathfrak{M}^{\text{alg}}$.

Comme les seuls sous-groupes algébriques additifs de \bar{K}^n sont donnés par des polynômes additifs, il y a un polynôme de la forme

$$P_a(\bar{x}, x_n) = \sum_{i \leq n, j < \omega} \lambda_{i,j} x_i^{p_j}$$

tel que $P_a(\bar{x}, x_n) = 0$ est satisfaite sur S . De plus, comme

$$\sigma(a) \in \text{acl}(a) = \langle a \rangle^{\text{alg}} = \bar{a}^{\text{alg}},$$

on peut choisir P_a tel que $P_a(\bar{0}, x_n)$ est non-trivial. Donc

$$(\dagger) \quad P_a((f_{\theta_i}(x))_{i < n}, \sigma(x)) = -P(\bar{a}, \sigma(a))$$

est satisfaite pour tout x qui a le même type que a sur \mathfrak{M} au sens de l'expansion, où $\bar{a} = (f_{\theta_i}(a) : i < n)$ pour des fonctions f_{θ_i} qui sont des compositions de fonctions dans \mathfrak{F} .

Or, (\dagger) définit un translaté \mathfrak{M} -définissable d'un sous-groupe de K^+ . Pour tout élément transcendant de K il y a un tel translaté qui le contient; tout élément algébrique est un translaté du sous-groupe trivial par un élément de \mathfrak{M} . Par compacité un nombre fini de ces sous-groupes recouvrent K^+ ; d'après le lemme de Neumann on n'a besoin que des translatés des sous-groupes d'indice fini. En particulier il y a un de ces translatés qui contient 0 et qui est donc un sous-groupe additif lui-même, donné par une équation $P((f_{\theta_i}(x))_{i < n}, \sigma(x)) = 0$.

La fonction $x \mapsto P((f_{\theta_i}(x))_{i < n}, \sigma(x))$ est un homomorphisme additif dont l'image F est fini. En caractéristique zéro F est trivial; en caractéristique positive il y a un polynôme nontrivial additif $Q \in K[X]$ qui s'annule sur F . Ainsi

$$Q(P((f_{\theta_i}(x))_{i < n}, \sigma(x))) = 0$$

pour tout $x \in K$. Puisque \mathfrak{F} contient le Frobenius en caractéristique positive, on obtient une équation non-triviale de la forme

$$(\ddagger) \quad \sum_{i < n} \lambda_i f_{\theta_i}(x) = \sum_{j < \omega} \mu_j \sigma(x)^{p^j}$$

satisfaite sur K entier. On choisit une telle équation tel que

$$\theta_m = \max\{\theta_i : \lambda_i \neq 0\}$$

est minimal. De plus, on peut supposer qu'il n'y ait qu'un seul μ non-trivial, puisque pour j_0 maximal avec $\mu_{j_0} \neq 0$

$$\sum_{i < n} \lambda_i f_{\theta_i}(ax) - \sigma(a)^{p^{j_0}} \sum_{i < n} \lambda_i f_{\theta_i}(x) = \sum_{j < j_0} \mu_j [\sigma(a)^{p^j} - \sigma(a)^{p^{j_0}}] \sigma(x)^{p^j}$$

nous permet de réduire le nombre de μ_j non-triviaux, tout en conservant θ_m d'après le corollaire 3.6. Alors, on peut prendre $\mu = 1$.

Pour tout $a \in K$ on a que $(ax, \sigma(ax))$ satisfait (\ddagger) ; en regardant le coefficient de f_{θ_m} , il découle de la minimalité de θ_m et du corollaire 3.6 que

$$\lambda_{\theta_m} \sigma_{\theta_m}(a) = \sigma(a)^{p^j}.$$

Alors $\lambda_{\theta_m} = 1$ par multiplicativité; le théorème en découle. \square

Cette preuve s'inspire de la démonstration de Blossier, Hardouin et Martin Pizarro [1, Théorème 3.1]; la découper en deux parties (corollaire 2.2 et théorème 3.8) nous a permis de mieux isoler les hypothèses pour chaque partie. En particulier nous n'avons retenu pour notre théorème 3.8 qu'une partie de l'hypothèse 4 de [1] (la caractérisation de la clôture algébrique) et faisons aucune hypothèse sur la simplicité de l'expansion; par contre nous supposons dès le début la propriété Pfaffienne ([1, Proposition 1.4], qui découle de leur hypothèse 1). Notons que nous ne parlons pas des inverses des automorphismes dans \mathfrak{F} : on préserve le caractère Pfaffien en les rajoutant, et dans les applications ils seront nécessaires pour obtenir

la caractérisation de la clôture algébrique. Vu qu'un automorphisme \mathbb{F} -linéaire dans \mathfrak{F} est toujours associé, on récupère ainsi [1, Théorème 3.1].

RÉFÉRENCES

- [1] T. Blossier, C. Hardouin et A. Martin Pizarro. *Sur les automorphismes bornés de corps munis d'opérateurs*, Math. Res. Letters, à paraître. <http://arxiv.org/abs/1505.03669>
- [2] T. Blossier, A. Martin Pizarro et F. O. Wagner. *À la recherche du tore perdu*, J. Symb. Logic, 81(1) :1–31, 2016.
- [3] R. F. Bustamante Medina. *Differentially closed fields of characteristic zero with a generic automorphism*, Rev. Mat. Teoría Apl. 14 :81–100, 2007.
- [4] R. F. Bustamante Medina. *Rank and dimension in difference-differential fields*, Notre Dame J. Formal Logic 52 :403–414, 2011.
- [5] Z. Chatzidakis et E. Hrushovski. *Model Theory of difference fields*, Trans. Amer. Math. Soc. 351 :2997–3071, 1999.
- [6] F. Delon. *Idéaux et types sur les corps séparablement clos*, Mém. Soc. Math. Fr. 33, pp. 76, 1988.
- [7] D. Evans, Z. Ghadernezhad et K. Tent. *Simplicity of the automorphism groups of some Hrushovski constructions*, preprint 2013. <http://arxiv.org/abs/1312.3430>
- [8] R. Konnerth. *Automorphism groups of differentially closed fields*, Ann. Pure Appl. Logic 118 :1–60, 2002.
- [9] D. Lascar. *Les automorphismes d'un ensemble fortement minimal*, J. Symb. Logic 57 :238–251, 1992.
- [10] T. McGrail. *The model theory of differential fields with finitely many commuting derivations*, J. Symb. Logic 65 :885–913, 2000.
- [11] R. Moosa et T. Scanlon. *Model theory of fields with free operators in characteristic zero*, J. Math. Logic 14, 2014.
- [12] D. Palacín et F. O. Wagner. *Ample thoughts*, J. Symb. Logic 78 :489–510, 2013.
- [13] F. O. Wagner. *Simple Theories*, Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [14] F. O. Wagner. *Some remarks on one-basedness*, J. Symb. Logic 69 :34–38, 2004.
- [15] C. Wood. *Notes on the stability of separably closed fields*, J. Symb. Log. 44 :412–416, 1979.
- [16] M. Ziegler. *A Note on generic types*, preprint 2006. <http://arxiv.org/math.L0/0608433>

UNIVERSITÉ DE LYON ; CNRS ; UNIVERSITÉ LYON 1 ; INSTITUT CAMILLE JORDAN UMR5208,
43 BOULEVARD DU 11 NOVEMBRE 1918, F-69622 VILLEURBANNE CEDEX, FRANCE
E-mail address: wagner@math.univ-lyon1.fr