



HAL
open science

Automorphismes bornés dans les structures simples

Frank Olaf Wagner

► **To cite this version:**

| Frank Olaf Wagner. Automorphismes bornés dans les structures simples. 2015. hal-01162721v1

HAL Id: hal-01162721

<https://hal.science/hal-01162721v1>

Preprint submitted on 11 Jun 2015 (v1), last revised 24 Sep 2019 (v5)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AUTOMORPHISMES BORNÉS DANS LES STRUCTURES SIMPLES

FRANK O. WAGNER

RÉSUMÉ. Un automorphisme borné d'un corps ou d'un groupe de centre approximatif trivial est définissable.

INTRODUCTION

Dans [5] Lascar appelle un automorphisme σ d'une structure \mathfrak{M} *borné* s'il existe un petit ensemble A de paramètres tel que pour tout $m \in M$ on a $\sigma(m) \in \text{acl}(A, m)$. Il montre que pour un ensemble fortement minimal \mathfrak{M} , le sous-groupe $\text{aut}_f(\mathfrak{M})$ des automorphismes forts (qui fixent $\text{acl}^{eq}(\emptyset)$) est simple modulo le sous-groupe distingué des automorphismes bornés, résultat généralisé ensuite [3] aux structures avec dimension entière compatible avec une notion d'indépendance stationnaire.

Plus généralement, pour un corps K avec théorie simple, Blossier, Hardouin et Martín Pizarro appellent un automorphisme σ *borné* s'il y a un petit ensemble A de paramètres tel que pour tout $m \in M$ on a $\sigma(m) \in \Sigma\text{cl}(A, m)$, où Σ est la classe des types partiels co-étrangers aux génériques du corps [1], et la Σ -clôture $\Sigma\text{cl}(A)$ est l'ensemble de tous les éléments b tel que $\text{tp}(b/A)$ est Σ -analysable. Ils montrent que pour un corps muni d'opérateurs, tout automorphisme borné est définissable et obtenu par composition d'une puissance du Frobenius avec les automorphismes parmi les opérateurs ou leurs inverses, dopnnant ainsi une démonstration uniforme de résultats de Lascar [5], Ziegler et Konnerth [4].

Bien évidemment, la définition d'un automorphisme borné à un sens pour n'importe quel permutation σ d'un ensemble X hyperdéfinissable dans une théorie simple ; il n'est pas nécessaire que σ soit induite par un automorphisme de la structure ambiante, ni qu'elle préserve toute la structure induite sur X . De même, on a libre choix de Σ , mais il convient de prendre Σ petit par rapport à X : par exemple, toute permutation de X est X -bornée.

Dans cet article, nous allons considérer les automorphismes groupe-théoriques Σ -bornés d'un groupe G hyperdéfinissable dans une théorie simple, où Σ est encore la classe des types partiels (avec paramètres) co-étrangers aux génériques de G . Nous montrons que si tout élément non-trivial a un centralisateur d'indice non-borné (autrement dit, si le centre approximatif du groupe est trivial), alors tout automorphisme Σ -borné est définissable. Comme tout automorphisme définissable d'un corps muni d'opérateurs est une composition d'une puissance du Frobenius avec les automorphismes parmi les opérateurs, on récupère ainsi le théorème de Blossier, Hardouin et Martín Pizarro.

Date: 11 juin 2015.

2010 Mathematics Subject Classification. 03C45.

Recherche conduite dans le cadre du projet ANR-13-BS01-0006 ValCoMo.

1. PRÉLIMINAIRES

Dans cette section, nous allons rappeler quelques notions et résultats moins connus pour les groupes et théories simples. Pour plus de détail, on se référera à [7]. Comme d'habitude, on travaillera dans un modèle monstre d'une théorie simple, et on se fixe Σ , une famille \emptyset -invariante de types partiels avec paramètres.

Définition 1.1. La Σ -clôture $\Sigma\text{cl}(A)$ de A est la collection de tous les hyperimaginaires a tel que $\text{tp}(a/A)$ est Σ -analysable.

On a toujours $\text{bdd}(A) \subseteq \Sigma\text{cl}(A)$ avec égalité si Σ est vide. En général on choisira un ensemble Σ de types partiels qui sont petits par rapport à l'ensemble X sous considération (notamment $X \not\subseteq \Sigma\text{cl}(\emptyset)$).

Fait 1.2. [7, Lemma 3.5.3] *Sont équivalents :*

- (1) $\text{tp}(a/A)$ est étranger à Σ .
- (2) $a \downarrow_A \Sigma\text{cl}(A)$.
- (3) $a \downarrow_A \text{dcl}(aA) \cap \Sigma\text{cl}(A)$.
- (4) $\text{dcl}(aA) \cap \Sigma\text{cl}(A) \subseteq \text{bdd}(A)$.

Sauf en cas d'égalité avec la clôture bornée, la Σ -clôture a la taille du modèle monstre. L'équivalence (2) \Leftrightarrow (3) permet de n'en utiliser qu'une petite partie.

Fait 1.3. [7, Lemma 3.5.5] *Si $A \downarrow_B C$, alors $\Sigma\text{cl}(A) \downarrow_{\Sigma\text{cl}(B)} \Sigma\text{cl}(C)$. Plus précisément, pour tout $A_0 \subset \Sigma\text{cl}(A)$ on a $A_0 \downarrow_{B_0} \Sigma\text{cl}(C)$, où $B_0 = \text{dcl}(A_0B) \cap \Sigma\text{cl}(B)$.*

Dans [8, 6] on trouvera d'autres propriétés de la Σ -clôture, ainsi qu'un découpage en différents niveaux.

Soit maintenant G un groupe hyperdéfinissable sur \emptyset .

Définition 1.4. (1) Deux sous-groupe hyperdéfinissables H et K sont *commensurables* si leur intersection est d'indice borné dans chacun.

- (2) Un sous-groupe hyperdéfinissable H est *localement connexe* s'il est égal à tout conjugué groupe-théorique ou conjugué par automorphisme qui lui est commensurable.

Fait 1.5. [7, Corollary 4.5.16]

- (1) *Un sous-groupe hyperdéfinissable localement connexe de G a un paramètre canonique.*
- (2) *Tout sous-groupe hyperdéfinissable H de G a une composante localement connexe H^{loc} , qui est le plus petit sous-groupe hyperdéfinissable localement connexe commensurable avec H . Son paramètre canonique est définissable sur les paramètres utilisés pour hyperdéfinir H .*

On rappelle également la notion du centre approximatif.

Définition 1.6. Le centre approximatif d'un groupe hyperdéfinissable G , noté $\tilde{Z}(G)$, est le sous-groupe distingué des éléments dont le centralisateur est d'indice borné dans G .

Le centre approximatif de G est hyperdéfinissable sur les mêmes paramètres [7, Proposition 4.4.10]. Enfin, on a besoin du lemme de Ziegler ([9, Theorem 1] pour le cas stable abélien, et [2, Lemme 1.2 et remarque 1.3] pour le cas général).

Fait 1.7. *Soient g et g' dans G tels que g , g' et gg' sont deux-à-deux indépendants. Alors les stabilisateurs à gauche de g et de gg' sont égaux, et commensurables avec $g\text{Stab}(g')g^{-1}$; ils sont \emptyset -connexes, et g est générique dans le translaté $\text{Stab}(g)g$, qui est définissable sur $\text{bdd}(\emptyset)$; de même pour g' et gg' .*

2. AUTOMORPHISMES BORNÉS

Dans cette section, on considère encore un groupe G hyperdéfinissable sur \emptyset . On pose Σ la classe de tous les types partiels co-étrangers aux types génériques de G . (Comme les types génériques ont des extensions non-déviantes qui sont des translatsés les uns des autres, co-étranger à un équivaut co-étranger à tous.) En particulier, si G a un type générique régulier, Σ consiste de tous les types partiels non-génériques.

Théorème 2.1. *Si $\tilde{Z}(G)$ est trivial, alors tout automorphisme Σ -borné σ de G est hyperdéfinissable.*

Démonstration. Soit A un ensemble tel que $\sigma(g) \in \Sigma\text{cl}(A, g)$ pour tout g dans G . Considérons d'abord $g \in G$ générique sur A , et $g' \in G$ générique sur $A, g, \sigma^{-1}(g)$. Soit $A' = \Sigma\text{cl}(A) \cap \text{bdd}(A, g', \sigma(g'))$. D'après le fait 1.3 on a $g', \sigma(g') \perp_{A'} \sigma^{-1}(g), g$. Comme les génériques de G sont étrangers à Σ , les éléments g et g' restent génériques sur A' . Ainsi $g_0 = g'\sigma^{-1}(g)$ et $\sigma(g_0) = \sigma(g')g$ sont tous les deux génériques sur A' , et donc sur A .

Soit maintenant g_2 générique dans G sur A, g_0 , et $g_1 = g_0^{-1}g_2$. Alors g_0, g_1 et $g_2 = g_0g_1$ sont deux-à-deux indépendants sur A . D'après le fait 1.3 leurs Σ -clôtures $\Sigma\text{cl}(A, g_0), \Sigma\text{cl}(A, g_1)$ et $\Sigma\text{cl}(A, g_2)$ sont deux-à-deux indépendants sur $\Sigma\text{cl}(A)$. En particulier, $(g_0, \sigma(g_0)), (g_1, \sigma(g_1))$ et $(g_2, \sigma(g_2))$ sont deux-à-deux indépendants sur $\Sigma\text{cl}(A)$, et donc sur

$$B = \Sigma\text{cl}(A) \cap \text{bdd}(A, g_0, \sigma(g_0), g_1, \sigma(g_1), g_2, \sigma(g_2)).$$

De plus, comme les types génériques de G sont étrangers à Σ , les éléments $g_0, \sigma(g_0), g_1$ et g_2 restent chacun génériques sur B .

Pour $i \leq 2$ soit $S_i = \text{Stab}(g_i, \sigma(g_i)/B)$ le stabilisateur (à gauche) dans $G \times G$. Alors S_i est connexe sur B d'après le fait 1.7, le translaté $S \cdot (g_i, \sigma(g_i))$ est hyperdéfinissable sur B , et le couple $(g_i, \sigma(g_i))$ y est générique. De plus, $S_0 = S_2$; soit $S = S_0^{loc}$ sa composante localement connexe. Puisque

$$\begin{array}{ccc} g_i, \sigma(g_i) & & B, \\ & \downarrow & \\ & \text{bdd}(A, g_i, \sigma(g_i)) \cap \Sigma\text{cl}(A) & \end{array}$$

S_i est commensurable avec $\text{Stab}(g_i, \sigma(g_i)/\text{bdd}(A, g_i, \sigma(g_i)) \cap \Sigma\text{cl}(A))$ pour $i = 0, 2$, dont la composante localement connexe est aussi S . Il en découle que S ainsi que le translaté $S \cdot (g_i, \sigma(g_i))$ est hyperdéfinissable sur $\text{bdd}(A, g_i, \sigma(g_i)) \cap \Sigma\text{cl}(A)$ pour $i = 0, 2$. Or, g_2 était un générique quelconque sur A, g_0 . Ainsi S est hyperdéfinissable sur $\Sigma\text{cl}(A) \cap \text{bdd}(A, a, \sigma(a))$ quel que soit le générique a , et donc sur

$$\bar{A} = \Sigma\text{cl}(A) \cap \bigcap_{g \text{ générique}} \text{bdd}(A, g, \sigma(g)).$$

Notons que puisque g_0 et $\sigma(g_0)$ sont génériques sur B , la projection de S_0 , et donc aussi de S , sur la première et sur la deuxième coordonnée sont génériques dans G , et donc des sous-groupes d'indice borné.

Comme $\sigma(g_0) \in \Sigma\text{cl}(A, g_0)$ et tous les types génériques de S sont des translatés de $\text{tp}(g_0, \sigma(g_0)/B)$ sur des paramètres indépendants, on a $g' \in \Sigma\text{cl}(B, g)$ pour tout générique (g, g') de S sur B . Si

$$h \in \text{coker}(S) = \{g \in G : (1, g) \in S\},$$

et $(g, g') \in S$ est générique sur B, h , alors $(g, g'h)$ est toujours générique sur B, h , et $h \in \Sigma\text{cl}(B, g)$. Puisque $h \downarrow_B g$ on obtient $h \in \Sigma\text{cl}(B) = \Sigma\text{cl}(A)$ et $\text{coker}(S) \subseteq \Sigma\text{cl}(A)$.

Soit maintenant $\lambda \in G$ quelconque, et $g \in G$ générique sur $\bar{A}, \lambda, \sigma(\lambda)$. On pose $g' = g^{-\lambda}$ et $B = \Sigma\text{cl}(A) \cap \text{bdd}(A, g, g', \sigma(g), \sigma(g'))$. Alors g et g' sont génériques sur B , et

$$(g, \sigma(g)) \in (S \cdot (g', \sigma(g')))^{(\lambda, \sigma(\lambda))} \cap (S \cdot (g, \sigma(g))).$$

Comme les deux translatés $S \cdot (g, \sigma(g))$ et $S \cdot (g', \sigma(g'))$ sont hyperdéfinissables sur B ,

$$g, \sigma(g) \downarrow_B \lambda, \sigma(\lambda)$$

et $(g, \sigma(g))$ est générique dans $S \cdot (g, \sigma(g))$ sur B , les deux groupes S et $S^{(\lambda, \sigma(\lambda))}$ sont commensurables, et donc égaux par connexité locale. Si $h \in \text{coker}(S)$, alors $h^{\sigma(\lambda)} \in \text{coker}(S) \subset \Sigma\text{cl}(A)$. Or, σ est un automorphisme, donc surjectif, et $h^G \subseteq \Sigma\text{cl}(A)$. Alors pour $\lambda' \in G$ générique sur A, h on a $\lambda' \downarrow_{A, h} h^{\lambda'}$, puisque $\text{tp}(\lambda'/A, h)$ est étranger à Σ . Alors $C_G(h)$ est d'indice borné dans G et $h \in \tilde{Z}(G) = \{1\}$. Ainsi $\text{coker}(S)$ est trivial.

Pour $(\lambda, \lambda') \in S$ et $(g, g') \in S$ avec $g' \in G$ générique sur $\lambda, \sigma(\lambda), \lambda'$ on a alors

$$(g^\lambda, g'^{\lambda'}) = (g^\lambda, g'^{\sigma(\lambda)})$$

et $\sigma(\lambda)\lambda'^{-1} \in C_G(g')$. Puisque g' est générique sur $\sigma(\lambda), \lambda'$ on a $\sigma(\lambda)\lambda'^{-1} \in \tilde{Z}(G) = \{1\}$ et $\lambda' = \sigma(\lambda)$, pour tout $\lambda \in \text{pr}_1(S)$. Ainsi S définit σ sur un sous-groupe d'indice borné de G .

Pour chaque ensemble définissable X tel que $X/(E \times E)$ contient S (où E est la relation d'équivalence type-définissable dont les éléments de G sont des classes), il y a un uplet fini $g_{X,0}, \dots, g_{X,k_X}$ tel que $G = \bigcup_{i \leq k_X} g_{X,i} \cdot (\text{pr}_1(X)/E)$. Alors le graphe de σ est hyperdéfini par

$$\bigcap_{X/(E \times E) \supseteq S} \bigcup_{i \leq k_X} (g_{X,i}, \sigma(g_{X,i})) \cdot (X/(E \times E)).$$

□

Corollaire 2.2. *Soit σ un automorphisme Σ -borné d'un corps K hyperdéfinissable dans une théorie simple, où Σ est la classe des types partiels co-étrangers aux types génériques de K . Alors σ est hyperdéfinissable.*

Démonstration. Soit $G = K^+ \times K^\times$. Alors G est hyperdéfinissable, et Σ est aussi l'ensemble des types partiels co-étrangers aux génériques de G (qui sont les paires de deux génériques indépendants de K). De plus, $\tilde{Z}(G) = \{1\}$, et σ induit un automorphisme $\tau : (a, b) \mapsto (\sigma(a), \sigma(b))$ de G . D'après le théorème précédent τ est hyperdéfinissable, et σ l'est aussi. □

RÉFÉRENCES

- [1] T. Blossier, C. Hardouin et A. Martin-Pizarro. *Sur les automorphismes bornés de corps munis d'opérateurs*, preprint 2015. <http://arxiv.org/abs/1505.03669>
- [2] T. Blossier, A. Martin-Pizarro et F. O. Wagner. *À la recherche du tore perdu*, preprint 2013. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00758982>
- [3] D. Evans, Z. Ghadernezhad et K. Tent. *Simplicity of the automorphism groups of some Hrushovski constructions*, preprint 2013. <http://arxiv.org/abs/1312.3430>
- [4] R. Konnerth. *Automorphism groups of differentially closed fields*, Ann. Pure Appl. Logic 118 :1–60, 2002.
- [5] D. Lascar. *Les automorphismes d'un ensemble fortement minimal*, J. Symb. Logic 57 :238–251, 1992.
- [6] D. Palacín et F. O. Wagner. *Ample thoughts*, J. Symb. Logic 78 :489–510, 2013.
- [7] F. O. Wagner. *Simple Theories*, Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [8] F. O. Wagner. *Some remarks on one-basedness*, J. Symb. Logic 69 :34–38, 2004.
- [9] M. Ziegler. *A Note on generic types*, preprint 2006. <http://arxiv.org/math.L0/0608433>

UNIVERSITÉ DE LYON ; CNRS ; UNIVERSITÉ LYON 1 ; INSTITUT CAMILLE JORDAN UMR5208,
43 BOULEVARD DU 11 NOVEMBRE 1918, F-69622 VILLEURBANNE CEDEX, FRANCE
E-mail address: wagner@math.univ-lyon1.fr