HAL open science

MODELISATION GEOMETRIQUE ET QUANTIQUE EN PHYSIQUE

Jean Louis Jonot

To cite this version:

Jean Louis Jonot. MODELISATION GEOMETRIQUE ET QUANTIQUE EN PHYSIQUE. [Rapport de recherche] Académie de Versailles. 2015. hal-01159709v5

HAL Id: hal-01159709

https://hal.science/hal-01159709v5

Submitted on 29 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE ET QUANTIQUE EN PHYSIQUE

JONOT JEAN LOUIS

Abstract. Lorsque l'on s'intéresse à l'équation relativiste de Dirac

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(mc^2-i\hbar c\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\psi$$

et à l'équation relativiste d'Einstein

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}=\Lambda g_{\mu\nu}+KT_{\mu\nu},$$

on se pose la question de savoir si on peut déterminer une relation qui lie ces deux équations. Sur les fibrés vectoriels on remarque que les solutions de l'équation de Dirac sont des sections du fibré tangent et les solutions de l'équation d'Einstein sont des sections des $(2,0)$-tenseurs. On est amené à construire les opérateurs de Dirac-Einstein de rang n à partir d'une connexion et d'une section de Dirac du fibré tangent $T\Omega$ et d'étendre cette connexion et cette section au fibré des $(2,0)$-tenseurs. Ensuite, on est amené à quantifier ces opérateurs par un procédé de quantification des fibrés des états.

1. Les opérateurs de Dirac-Einstein de rang n

Sauf mention contraire, $\zeta=(E,\pi,\Omega,F)$ est un fibré vectoriel réel ou complexe de dimension finie, de fibre F, dont la base est une C^∞-variété Ω, de dimension 4, appelée *"univers"*. On note

$$\Lambda^n\Omega=\wedge^n T^*\Omega,$$

le fibré des n-formes différentielles sur Ω et l'espace des (p,q)-tenseurs, p fois covariant et q fois contravariant, est noté

$$T^{p,q}\Omega=\left(\otimes^p T^*\Omega\right)\otimes\left(\otimes^q T\Omega\right).$$

On munit ζ d'une connexion,

$$\nabla:\Gamma\left(E\right)\to\Gamma\left(\Lambda^1\Omega\otimes E\right).$$

Definition 1. *Une section γ du fibré $\mathrm{L}\left(\Lambda^1\Omega\otimes E,E\right)$ est une section de Dirac du fibré des états E.*

L'endomorphisme $\gamma\otimes\nabla$ de $\Gamma\left(E\right)$ est défini par

$$\gamma\otimes\nabla\left(s\right)=\gamma\left(\nabla s\right),\ s\in\Gamma\left(E\right),$$

c'est-à-dire,

$$\gamma\otimes\nabla\left(s\right)\left(\omega\right)=\gamma\left(\omega\right)\left(\nabla s\left(\omega\right)\right),\omega\in\Omega.$$

Les sections d'endomorphismes de Dirac sont définies par,

Key words and phrases. Espace de Sobolev, Section de Dirac, Connexion, Fibré hermitien, Espace de Fock, Espace de Bose-Fock, Espace de Fermi-Fock, Distribution.

$$\gamma^{d}(s)=\gamma(d\otimes s),d\in\Lambda^{1}\Omega \text{ et } s\in\Gamma(E),$$

le commutateur d'une famille finie d'endomorphismes de Dirac $\left\{\gamma^{d^{\mu}}\right\}$ est

$$\left[\gamma^{d^{1}},\gamma^{d^{2}},\cdots,\gamma^{d^{n}}\right]=\sum_{\tau\in\mathrm{Perm}\{1,2,\cdots,n\}}\varepsilon(\tau)\gamma^{d^{\tau(1)}}\circ\gamma^{d^{\tau(2)}}\circ\cdots\circ\gamma^{d^{\tau(n-1)}}\circ\gamma^{d^{\tau(n)}},$$

et l'anticommutateur ou crochet de Poisson est défini par,

$$\left\{\gamma^{d^{1}},\gamma^{d^{2}},\cdots,\gamma^{d^{n}}\right\}=\sum_{\tau\in\mathrm{Perm}\{1,2,\cdots,n\}}\gamma^{d^{\tau(1)}}\circ\gamma^{d^{\tau(2)}}\circ\cdots\circ\gamma^{d^{\tau(n-1)}}\circ\gamma^{d^{\tau(n)}}.$$

Le commutateur définit une section de $\mathrm{L}(\Lambda^{n}\Omega\otimes E,E)$. Les extensions de rang n d'une section γ sont les sections $\gamma_{n}\in\Gamma(\mathrm{L}(\Lambda^{n}(\Omega)\otimes E,E))$

$$\gamma_{n}\left(\left(d^{1}\wedge d^{2}\wedge\cdots\wedge d^{n}\right)\otimes s\right)=\left[\gamma^{d^{1}},\gamma^{d^{2}},\cdots,\gamma^{d^{n}}\right](s),\ s\in\Gamma(E)$$

et on prolonge γ_{n} par $C^{\infty}(\Omega,\mathbb{R})$-linéarité sur $\Lambda^{n}(\Omega)\otimes E$. Toute connexion sur ∇ a une extension $d_{n}^{\nabla}:\Gamma(\Lambda^{n}(\Omega)\otimes E)\rightarrow\Gamma\left(\Lambda^{n+1}(\Omega)\otimes E\right)$ avec,

$$d_{0}^{\nabla}=\nabla,\Lambda^{0}(\Omega)\otimes E=E$$

et

$$d_{n}^{\nabla}(\psi\otimes s)=d\psi\otimes s+(-1)^{n}\psi\wedge\nabla s,\psi\in\Lambda^{n}(\Omega).$$

Definition 2. *Une équation de Dirac-Einstein au rang n ou équation d'état de rang n est définie par*

$$\gamma_{n}\otimes\nabla_{n-1}(s)=\gamma_{n}(\nabla_{n-1}s)=\lambda s,\ \nabla_{n-1}=d_{n-1}^{\nabla}\circ\cdots\circ d_{0}^{\nabla},$$

où λ est une C^{∞}-application définie sur une carte de Ω.

1.1. **Etude locale des équations d'état de rang** 1. Soit U une carte de l'univers Ω sur laquelle les fibrés tangent ξ_{Ω} et ζ sont trivialisables. Soit

$$\left\{\partial_{\mu}=\frac{\partial}{\partial x^{\mu}},0\leqslant\mu\leqslant3\right\}$$

les champs de vecteurs sur U linéairement indépendants associés et

$$\{d^{\nu}=dx^{\nu},0\leqslant\nu\leqslant3\},$$

la base duale. Sur $E(U)$ il existe un *"local frame"*, noté $\{e_{\alpha},0\leqslant\alpha\leqslant n-1\}$,

$$n=\dim E.$$

On pose $s=s^{\alpha}e_{\alpha}$ alors

$$\begin{aligned}\nabla s&=\nabla(s^{\alpha}e_{\alpha})=ds^{\alpha}\otimes e_{\alpha}+s^{\alpha}\nabla e_{\alpha}\\&=ds^{\alpha}\otimes e_{\alpha}+s^{\alpha}\Gamma_{\alpha j}^{\beta}d^{j}\otimes e_{\beta}.\end{aligned}$$

La connexion s'écrit

$$\nabla e_{\alpha}=\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}d^{\nu}\otimes e_{\beta},$$

avec des C^{∞} fonctions $\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}$ définies sur U à valeurs complexes ou réelles, $\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}$ sont les symboles de Christoffel associés à la connexion ∇ et $ds^{\alpha}=\partial_{\nu}s^{\alpha}d^{\nu}$,

$$\begin{aligned}\nabla s&=\partial_{\nu}s^{\alpha}d^{\nu}\otimes e_{\alpha}+s^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}d^{\nu}\otimes e_{\beta}\\&=\left(\partial_{\nu}s^{\beta}+s^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}\right)d^{\nu}\otimes e_{\beta}.\end{aligned}$$

La section de Dirac γ de E a pour représentation

$$\gamma\left(d^{\nu}\otimes e_{\beta}\right)=\gamma_{\beta}^{\nu\sigma}e_{\sigma},$$

et si $\gamma^{\nu}=\gamma\left(d^{\nu}\right)$ avec $\left(\gamma^{\nu}\right)_{\beta}^{\alpha}=\gamma_{\beta}^{\nu\alpha}$,

$$\begin{aligned}\gamma\otimes\nabla\left(s\right)&=\gamma\left(\left(\partial_{\nu}s^{\beta}+s^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}\right)d^{\nu}\otimes e_{\beta}\right)\\ \gamma\otimes\nabla\left(s\right)&=\left(\partial_{\nu}s^{\beta}+s^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}\right)\gamma\left(d^{\nu}\otimes e_{\beta}\right)\\ \gamma\otimes\nabla\left(s\right)&=\gamma_{\beta}^{\nu\sigma}\left(\partial_{\nu}s^{\beta}+s^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}\right)e_{\sigma}.\end{aligned}$$

L'équation de Dirac-Einstein de rang 1, s'écrit localement,

$$\gamma_{\beta}^{\nu\sigma}\left(\partial_{\nu}s^{\beta}+s^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}\right)=\lambda s^{\sigma},\ 0\leqslant\sigma\leqslant n-1.$$

Les matrices de Dirac γ^{μ}, $0\leqslant\mu\leqslant 3$, sont des matrices carrées d'ordre n dont les coefficients sont des applications C^{∞} sur U, à valeurs réelles ou complexes. On pose

$$\left(D_{\nu}s\right)^{\beta}=\partial_{\nu}s^{\beta}+s^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta},$$

D_{ν} est la section locale de $\mathrm{End}\left(E\right)$ définie par,

$$D_{\nu}=\mathrm{L}_{\nu}+\Gamma_{\nu},$$

où Γ_{ν} est la section locale de $\mathrm{End}\left(E\right)$ dont la matrice, dans le *"local frame"*, est

$$\left(\Gamma_{\nu}\right)_{\alpha}^{\beta}=\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}$$

et L_{ν} est l'endomorphisme de Lie le long du champ $\partial_{\nu}=\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$ défini par,

$$\mathrm{L}_{\nu}\,s=\left(\partial_{\nu}s^{\alpha}\right)e_{\alpha}.$$

L'équation s'écrit

$$\gamma_{\beta}^{\nu\sigma}\left(D_{\nu}s\right)^{\beta}=\lambda s^{\sigma},$$

et

$$\gamma^{\nu}D_{\nu}\left(s\right)=\lambda s.$$

L'opérateur de l'équation d'état de rang 1 est,

$$H_{1}=\gamma\otimes\nabla=\gamma^{\nu}D_{\nu}.$$

Theorem 1. *L'opérateur H_1 de l'équation d'état du premier ordre est*

$$H_{1}=\gamma^{\nu}D_{\nu},$$

γ^{ν} sont les quatre matrices de Dirac dans le "local frame" $\{e_{\alpha},0\leqslant\alpha\leqslant n-1\}$

$$D_{\nu}=\mathrm{L}_{\nu}+\Gamma_{\nu},$$

L_{ν} est l'opérateur de Lie et Γ_{ν} est l'opérateur de Christoffel.

1.2. **Extension d'une paire (∇,γ) de ξ_Ω au fibré $T^{2,0}\Omega$.** A partir d'une connexion ∇ sur les champs, on peut étendre l'endomorphisme ∇_X aux tenseurs de façon unique avec deux conditions sur l'extension $\widetilde{\nabla}_X$, $\widetilde{\nabla}_X$ commute avec les contractions et

$$\widetilde{\nabla}_X\left(S\otimes T\right)=\widetilde{\nabla}_X\left(S\right)\otimes T+S\otimes\widetilde{\nabla}_X\left(T\right).$$

La connexion sur les $(2,0)$-tenseurs est définie à partir de la connexion initiale ∇ sur les champs en posant,

$$\widetilde{\nabla}\left(d^1\otimes d^2\right)=\nabla^*\left(d^1\right)\otimes d^2+d^1\otimes\nabla^*\left(d^2\right),$$

on définit la connexion duale ∇_X^* par

$$L_X\left(d\otimes Y\right)=d\otimes\nabla_X Y+\nabla_X^* d\otimes Y,\ d\otimes Y\left(\omega\right)=d\left(\omega\right)\left(Y\left(\omega\right)\right),$$

de façon plus générale pour un fibré ζ et son dual, on pose

$$L_X\left(s^*\otimes s\right)=s^*\otimes\nabla_X s+\nabla_X^* s^*\otimes s,\ s^*\otimes s\left(\omega\right)=s^*\left(\omega\right)\left(s\left(\omega\right)\right)$$

L_X est la dérivée de Lie le long du champ X. En particulier,

$$\begin{aligned}L_{\partial_\beta}\left(d^\sigma\otimes\partial_\mu\right)&=d^\sigma\otimes\nabla_{\partial_\beta}\partial_\mu+\nabla_{\partial_\beta}^* d^\sigma\otimes\partial_\mu\\0&=d^\sigma\left(\Gamma_{\beta\mu}^\tau\partial_\tau\right)+\nabla_{\partial_\beta}^* d^\sigma\left(\partial_\mu\right),\\\nabla_{\partial_\beta}^* d^\sigma\left(\partial_\mu\right)&=-\Gamma_{\beta\mu}^\sigma\text{ et }\nabla_{\partial_\beta}^* d^\sigma=-\Gamma_{\beta\tau}^\sigma d^\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{\partial_\beta}\left(d^\sigma\otimes d^\tau\right)&=\widetilde{\nabla}\left(d^\sigma\otimes d^\tau\right)\left(\partial_\beta\right)=\left(\Gamma_{\rho\gamma\delta}^{\sigma\tau}d^\rho\otimes d^\gamma\otimes d^\delta\right)\left(\partial_\beta\right)\\\widetilde{\nabla}_{\partial_\beta}\left(d^\sigma\otimes d^\tau\right)&=\Gamma_{\rho\gamma\delta}^{\sigma\tau}d^\rho\left(\partial_\beta\right)d^\gamma\otimes d^\delta=\Gamma_{\beta\gamma\delta}^{\sigma\tau}d^\gamma\otimes d^\delta,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{\partial_\beta}\left(d^\sigma\otimes d^\tau\right)&=\nabla_{\partial_\beta}^* d^\sigma\otimes d^\tau+d^\sigma\otimes\nabla_{\partial_\beta}^* d^\tau\\&=-\Gamma_{\beta\mu}^\sigma d^\mu\otimes d^\tau-\Gamma_{\beta\rho}^\tau d^\sigma\otimes d^\rho\\&=-\left(\Gamma_{\beta i}^\sigma+\Gamma_{\beta j}^\tau\right)d^i\otimes d^j,\end{aligned}$$

on a

$$\Gamma_{\beta ij}^{\sigma\tau}=-\left(\Gamma_{\beta i}^\sigma+\Gamma_{\beta j}^\tau\right)\tag{1.1}$$

Il y a une façon naturelle de décrire les endomorphismes de Dirac sur les $(2,0)$-tenseurs, si γ est une section de Dirac du fibré des champs, γ^* la section du fibré dual est définie par

$$\begin{aligned}\left(\gamma^d\right)^*\left(\zeta\right)&=\zeta\circ\gamma^d,\ \zeta\text{ et }d\in\Lambda^1\Omega,\\\left(\zeta\circ\gamma^d\right)\left(\omega\right)&=\zeta\left(\omega\right)\circ\gamma^d\left(\omega\right),\ \omega\in\Omega.\end{aligned}$$

Ensuite, pour obtenir la section de Dirac sur les $(2,0)$-tenseurs, on pose

$$\widetilde{\gamma}^d\left(\zeta\otimes\xi\right)=\left(\gamma^d\right)^*\left(\zeta\right)\otimes\left(\gamma^d\right)^*\left(\xi\right),\tag{1.2}$$

pour chaque ω, on prend le produit tensoriel des deux 1-formes $\left(\zeta\circ\gamma^d\right)\left(\omega\right)$ et $\left(\xi\circ\gamma^d\right)\left(\omega\right)$, on a

$$\widetilde{\gamma}^\mu\left(d^\nu\otimes d^\tau\right)=\gamma_{\rho\sigma}^{\mu\nu\tau}d^\rho\otimes d^\sigma=\left(\gamma^\mu\right)^*\left(d^\nu\right)\otimes\left(\gamma^\mu\right)^*\left(d^\tau\right),$$

$$\begin{aligned}\left(\gamma^\mu\right)^*\left(d^\nu\right)\left(\partial_\rho\right)&=d^\nu\circ\gamma^\mu\left(\partial_\rho\right)\\&=d^\nu\left(\gamma_\rho^{\mu\sigma}\partial_\sigma\right)=\gamma_\rho^{\mu\nu}\end{aligned}$$

$$(\gamma^{\mu})^{*}(d^{\nu}) = \gamma_{\rho}^{\mu\nu} d^{\rho},$$

$$\widetilde{\gamma}^{\mu}(d^{\nu} \otimes d^{\tau}) = \gamma_{\rho}^{\mu\nu}\gamma_{\sigma}^{\mu\tau} d^{\rho} \otimes d^{\sigma},$$

il suit

$$\gamma_{\rho\sigma}^{\mu\nu\tau} = \gamma_{\rho}^{\mu\nu}\gamma_{\sigma}^{\mu\tau}.$$

Theorem 2. *Si une pseudo-métrique riemannienne g suit une équation d'état de Dirac-Einstein de rang* 1*, alors dans toute carte U, $g = g_{ij} d^{i} \otimes d^{j}$ vérifie l'équation*

$$\gamma_{\rho\sigma}^{\mu\nu\tau}\left(\partial_{\mu} g_{\nu\tau} + g_{\alpha\beta}\Gamma_{\mu\nu\tau}^{\alpha\beta}\right) = \lambda g_{\rho\sigma}, \tag{1.3}$$

avec

$$\Gamma_{\mu\nu\tau}^{\alpha\beta} = -\left(\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\tau}^{\beta}\right) \ \ et\ \gamma_{\rho\sigma}^{\mu\nu\tau} = \gamma_{\rho}^{\mu\nu}\gamma_{\sigma}^{\mu\tau}. \tag{1.4}$$

1.3. **Etude locale des équations d'état de rang** 2. Sur le fibré ζ, avec les notations précédentes, on définit l'opérateur H_2 comme suit. Pour $n = 2$,

$$\gamma_2\left(\left(d^1 \wedge d^2\right) \otimes s\right) = \left[\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}\right](s) = \gamma^{d^1}\gamma^{d^2}(s) - \gamma^{d^2}\gamma^{d^1}(s)$$

et

$$\nabla_1 = d_1^{\nabla} \circ d_0^{\nabla} = R^{\nabla}$$

représente la courbure de la connexion ∇. Sur un ouvert de trivialisation U de ξ_{Ω} et ζ, on a pour $s = s^{\alpha} e_{\alpha}$,

$$\begin{aligned}
R^{\nabla}(s) &= d_1^{\nabla}(\nabla s) = d_1^{\nabla}\left(\left(\partial_{\nu} s^{\beta} + s^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}\right) d^{\nu} \otimes e_{\beta}\right) \\
&= d\left(\left(\partial_{\nu} s^{\beta} + s^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}\right) d^{\nu}\right) \otimes e_{\beta} - \left(\left(\partial_{\nu} s^{\beta} + s^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}\right) d^{\nu}\right) \wedge \nabla e_{\beta} \\
&= \left(d\left(\partial_{\nu} s^{\beta} + s^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}\right) \wedge d^{\nu}\right) \otimes e_{\beta} - \left(\left(\partial_{\nu} s^{\beta} + s^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}\right) d^{\nu} \wedge \Gamma_{\beta\sigma}^{\tau} d^{\sigma}\right) \otimes e_{\tau} \\
&= \left(d\left(\partial_{\nu} s^{j} + s^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{j}\right) \wedge d^{\nu}\right) \otimes e_{j} - \left(\left(\partial_{\nu} s^{\beta} + s^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}\right) d^{\nu} \wedge \Gamma_{\beta\sigma}^{j} d^{\sigma}\right) \otimes e_{j} \\
&= \left(\partial_{\mu}\left(\partial_{\nu} s^{j} + s^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{j}\right) - \left(\partial_{\mu} s^{\beta} + s^{\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\beta}\right)\Gamma_{\beta\nu}^{j}\right)(d^{\mu} \wedge d^{\nu}) \otimes e_{j} \\
&= \left(\partial_{\mu}\partial_{\nu} s^{j} + \left(\partial_{\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^{j} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta}\Gamma_{\beta\nu}^{j}\right) s^{\alpha}\right)(d^{\mu} \wedge d^{\nu}) \otimes e_{j}.
\end{aligned}$$

La section de Dirac γ de $E(\zeta)$ a pour représentation locale

$$\gamma(d^{\nu} \otimes e_{\beta}) = \gamma_{\beta}^{\nu\sigma} e_{\sigma},$$

et si $\gamma^{\nu} = \gamma^{d^{\nu}}$, on pose $(\gamma^{\nu})_{\beta}^{\alpha} = \gamma_{\beta}^{\nu\alpha}$, alors

$$\gamma_2 \otimes R^{\nabla}(s) = \left(\partial_{\mu}\partial_{\nu} s^{j} + \left(\partial_{\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^{j} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta}\Gamma_{\beta\nu}^{j}\right) s^{\alpha}\right)[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}](e_{j}),$$

$$\begin{aligned}
[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}](e_{j}) &= \gamma^{\mu}\left(\gamma_{j}^{\nu\sigma} e_{\sigma}\right) - \gamma^{\nu}\left(\gamma_{j}^{\mu\sigma} e_{\sigma}\right) \\
&= \left(\gamma_{j}^{\nu\sigma}\gamma_{\sigma}^{\mu k} - \gamma_{j}^{\mu\sigma}\gamma_{\sigma}^{\nu k}\right) e_{k}
\end{aligned}$$

et

$$\gamma_2 \otimes R^{\nabla}(s^{\alpha} e_{\alpha}) = \left(\gamma_{j}^{\nu\sigma}\gamma_{\sigma}^{\mu k} - \gamma_{j}^{\mu\sigma}\gamma_{\sigma}^{\nu k}\right)\left(\partial_{\mu}\partial_{\nu} s^{j} + \left(\partial_{\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^{j} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta}\Gamma_{\beta\nu}^{j}\right) s^{\alpha}\right) e_{k}.$$

Si on pose $\triangle_{j}^{k}$ l'opérateur

$$\triangle_{j}^{k} = \left(\gamma_{j}^{\nu\sigma}\gamma_{\sigma}^{\mu k} - \gamma_{j}^{\mu\sigma}\gamma_{\sigma}^{\nu k}\right)\partial_{\mu}\partial_{\nu},$$

et

$$\Upsilon_{\alpha}^{k} = \left(\gamma_{j}^{\nu\sigma}\gamma_{\sigma}^{\mu k} - \gamma_{j}^{\mu\sigma}\gamma_{\sigma}^{\nu k}\right)\left(\partial_{\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^{j} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta}\Gamma_{\beta\nu}^{j}\right)$$

alors

$$\begin{aligned}\gamma_2 \otimes R^{\nabla}\left(s^{\alpha}e_{\alpha}\right) &= \left(\triangle_j^k s^j + \Upsilon_{\alpha}^k s^{\alpha}\right) e_k \\ &= \left(\triangle_{\tau}^k s^{\tau} + \Upsilon_{\tau}^k s^{\tau}\right) e_k \\ &= \left(\triangle_{\tau}^k + \Upsilon_{\tau}^k\right) s^{\tau} e_k.\end{aligned}$$

Pour un champ chronologique $T = t^{\rho}\partial_{\rho}$, les équations d'évolution s'écrivent localement

$$\left(\triangle_{\tau}^k + \Upsilon_{\tau}^k\right) s^{\tau} = \chi\left(t^{\rho}\partial_{\rho}s^k + t^{\rho}s^{\alpha}\Gamma_{\rho\alpha}^k\right). \tag{1.5}$$

où

$$\begin{aligned}\nabla_T s^{\alpha}e_{\alpha} &= t^{\rho}\nabla_{\partial_{\rho}}\left(s^{\alpha}e_{\alpha}\right) \\ &= t^{\rho}\left(\partial_{\rho}s^{\alpha}e_{\alpha} + s^{\alpha}\Gamma_{\alpha\rho}^{\beta}e_{\beta}\right) \\ &= \left(t^{\rho}\partial_{\rho}s^k + t^{\rho}s^{\alpha}\Gamma_{\rho\alpha}^k\right) e_k,\end{aligned}$$

L'équation 1.5 est l'équation locale sur une carte de trivialisation de ξ_{Ω} et ζ, cette équation est l'équation d'évolution de Dirac-Einstein de rang 2 développée dans le *"local frame"* associé à la carte avec la condition

$$\gamma_2 \otimes R^{\nabla} = \chi\nabla_T \text{ avec } \chi = i\lambda \text{ ou } \chi = \lambda \text{ et } \lambda \in C^{\infty}\left(U, \mathbb{R}\right),$$

respectivement, complexe ou réelle.

Theorem 3. *L'opérateur $H_2 = \gamma_2 \otimes R^{\nabla}$ a pour représentation locale*

$$H_2\left(s^{\alpha}e_{\alpha}\right) = \left(\triangle_{\tau}^k + \Upsilon_{\tau}^k\right) s^{\tau} e_k \tag{1.6}$$

avec

$$\triangle_j^k = \left(\gamma_j^{\nu\sigma}\gamma_{\sigma}^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma}\gamma_{\sigma}^{\nu k}\right)\partial_{\mu}\partial_{\nu}, \tag{1.7}$$

et

$$\Upsilon_{\alpha}^k = \left(\gamma_j^{\nu\sigma}\gamma_{\sigma}^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma}\gamma_{\sigma}^{\nu k}\right)\left(\partial_{\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^j - \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta}\Gamma_{\beta\nu}^j\right). \tag{1.8}$$

Remark 1. *Si la connexion est plate, l'équation d'évolution se ramène à l'équation triviale,ce système d'équations est*

$$t^{\rho}\partial_{\rho}s^{\tau} = 0,\ \forall\tau.$$

1.4. **Représentation matricielle de $H_2 = \gamma_2 \otimes R^{\nabla}$.** Avec les notations précédentes, dans le *"local frame"* $\{\partial_{\mu} : \mu = 0, 1, 2, 3\}$ et son dual $\{d^{\nu}\}$, on peut définir les coefficients $\gamma_{\nu}^{\mu\tau}$ par les relations

$$\gamma^{\mu}\left(e_{\nu}\right) = \gamma\left(d^{\mu} \otimes e_{\nu}\right) = \gamma_{\nu}^{\mu\tau}e_{\tau},$$

et on définit la courbure de la connexion ∇ sur le fibré tangent par

$$R^{\nabla}\left(\partial_{\nu}, \partial_{\mu}\right)\left(e_{\sigma}\right) = \nabla_{\partial_{\nu}}\nabla_{\partial_{\mu}}e_{\sigma} - \nabla_{\partial_{\mu}}\nabla_{\partial_{\nu}}e_{\sigma} = R_{\sigma\mu\nu}^{\tau}e_{\tau},$$

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu\kappa}^{\sigma} &= \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} - \partial_{\kappa}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} - \Gamma_{\kappa\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \\ &= \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} - \Gamma_{\kappa\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \left(\partial_{\kappa}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}\right) \\ &= \Lambda_{\nu\mu\kappa}^{\sigma} - \Lambda_{\kappa\mu\nu}^{\sigma},\end{aligned}$$

où

$$\Lambda_{\nu\mu\kappa}^{\sigma} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} - \Gamma_{\kappa\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$$

est le tenseur de Christoffel. Sur une carte de trivialisation U de ξ_Ω et ζ, pour l'opérateur de Dirac de rang 2, si on pose $s = s^\alpha e_\alpha$, on a

$$R^\nabla(s) = \left(\partial_{\mu\nu} s^j + \left(\partial_\mu \Gamma^j_{\alpha\nu} - \Gamma^j_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\mu}\right) s^\alpha\right)(d^\mu \wedge d^\nu) \otimes e_j,$$

en utilisant le tenseur de Christoffel

$$R^\nabla(s) = \left(\partial_{\mu\nu} s^j + \Lambda^j_{\mu\alpha\nu} s^\alpha\right)(d^\mu \wedge d^\nu) \otimes e_j,$$

et

$$\gamma_2 \otimes R^\nabla(s) = \left(\partial_\mu \partial_\nu s^j + \left(\partial_\mu \Gamma^j_{\alpha\nu} - \Gamma^\beta_{\alpha\mu}\Gamma^j_{\beta\nu}\right) s^\alpha\right)[\gamma^\mu, \gamma^\nu](e_j),$$

$$\begin{aligned}[\gamma^\mu, \gamma^\nu](e_j) &= \gamma^\mu\left(\gamma^{\nu\sigma}_j e_\sigma\right) - \gamma^\nu\left(\gamma^{\mu\sigma}_j e_\sigma\right)\\ &= \left(\gamma^{\nu\sigma}_j \gamma^{\mu k}_\sigma - \gamma^{\mu\sigma}_j \gamma^{\nu k}_\sigma\right) e_k\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\gamma_2 \otimes R^\nabla(s^\alpha e_\alpha) &= \left(\gamma^{\nu\sigma}_j \gamma^{\mu k}_\sigma - \gamma^{\mu\sigma}_j \gamma^{\nu k}_\sigma\right)\left(\partial_\mu \partial_\nu s^j + \Lambda^j_{\mu\alpha\nu} s^\alpha\right) e_k\\ &= \left(\gamma^{\nu\sigma}_j \gamma^{\mu k}_\sigma - \gamma^{\mu\sigma}_j \gamma^{\nu k}_\sigma\right)\left(\partial_\mu \partial_\nu s^j + \Lambda^j_{\mu\alpha\nu} s^\alpha\right) e_k.\end{aligned}$$

On a

$$H_2(e_\alpha) = \left(\gamma^{\nu\sigma}_j \gamma^{\mu k}_\sigma - \gamma^{\mu\sigma}_j \gamma^{\nu k}_\sigma\right)\Lambda^j_{\mu\alpha\nu} e_k,$$

en permutant les indices μ et ν

$$H_2(e_\alpha) = \left(\gamma^{\mu\sigma}_j \gamma^{\nu k}_\sigma - \gamma^{\nu\sigma}_j \gamma^{\mu k}_\sigma\right)\Lambda^j_{\nu\alpha\mu} e_k = -\left(\gamma^{\nu\sigma}_j \gamma^{\mu k}_\sigma - \gamma^{\mu\sigma}_j \gamma^{\nu k}_\sigma\right)\Lambda^j_{\nu\alpha\mu} e_k,$$

en utilisant le tenseur de courbure

$$R^j_{\alpha\mu\nu} = \Lambda^j_{\mu\alpha\nu} - \Lambda^j_{\nu\alpha\mu}$$

$$\begin{aligned}H_2(e_\alpha) &= \frac{1}{2}\left(\gamma^{\nu\sigma}_j \gamma^{\mu k}_\sigma - \gamma^{\mu\sigma}_j \gamma^{\nu k}_\sigma\right) R^j_{\alpha\mu\nu} e_k\\ &= \frac{1}{2}\left([\gamma^\nu, \gamma^\mu]\right)^k_j R^j_{\alpha\mu\nu} e_k\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}H^k_\alpha &= \frac{1}{2}\left(\gamma^{\nu\sigma}_j \gamma^{\mu k}_\sigma - \gamma^{\mu\sigma}_j \gamma^{\nu k}_\sigma\right) R^j_{\alpha\mu\nu}\\ &= \frac{1}{2}\left(\gamma^{\mu k}_\sigma \gamma^{\nu\sigma}_j R^j_{\alpha\mu\nu} - \gamma^{\nu k}_\sigma \gamma^{\mu\sigma}_j R^j_{\alpha\mu\nu}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\gamma^{\mu k}_\sigma \mathcal{R}^\sigma_{\alpha\mu} + \gamma^{\nu k}_\sigma \mathcal{R}^\sigma_{\alpha\nu}\right)\\ &= \gamma^{\mu k}_\sigma \mathcal{R}^\sigma_{\alpha\mu},\end{aligned}$$

où

$$\gamma^{\nu\sigma}_j R^j_{\alpha\mu\nu} = \mathcal{R}^\sigma_{\alpha\mu} \text{ et } \gamma^{\mu\sigma}_j R^j_{\alpha\mu\nu} = -\gamma^{\mu\sigma}_j R^j_{\alpha\nu\mu} = -\mathcal{R}^\sigma_{\alpha\nu}.$$

La matrice de l'opérateur H_2 dans la base $\{e_\alpha\}$ est

$$(H_2)^k_\alpha = \frac{1}{2}\left([\gamma^\nu, \gamma^\mu]\right)^k_j R^j_{\alpha\mu\nu} = \gamma^{\mu k}_\sigma \mathcal{R}^\sigma_{\alpha\mu},\ \mathcal{R}^\sigma_{\alpha\mu} = \gamma^{\nu\sigma}_j R^j_{\alpha\mu\nu}. \tag{1.9}$$

Si on pose

$$R^\sigma_{\mu\nu\kappa} = \left(\mathcal{M}_{\nu\kappa}\right)^\sigma_\mu,$$

$$\left(\mathcal{M}_{\nu\kappa}\right)^\sigma_\mu = \partial_\nu\left(\Gamma_\kappa\right)^\sigma_\mu - \partial_\kappa\left(\Gamma_\nu\right)^\sigma_\mu + \left([\Gamma_\nu, \Gamma_\kappa]\right)^\sigma_\mu$$

on peut écrire

$$\mathcal{M}_{\nu\kappa} = \partial_\nu \Gamma_\kappa - \partial_\kappa \Gamma_\nu + [\Gamma_\nu, \Gamma_\kappa] \,, \tag{1.10}$$

l'opérateur de dérivation ∂_ν est la dérivée le long du champ ∂_ν de tous les coefficients de la matrice de Christoffel

$$\Gamma_\kappa = \left((\Gamma_\kappa)^\sigma_\mu \right) = \left(\Gamma^\sigma_{\kappa\mu} \right).$$

La matrice de l'opérateur H_2 dans le *"local frame"* $\{\partial_\nu\}$ s'écrit en utilisant l'équation 1.9

$$(H_2)^k_\alpha = (\gamma^\mu)^k_\sigma (\gamma^\nu)^\sigma_j (\mathcal{M}_{\mu\nu})^j_\alpha = (\gamma^\mu \gamma^\nu \mathcal{M}_{\mu\nu})^k_\alpha \,,$$
$$H_2 = \gamma^\mu \gamma^\nu \mathcal{M}_{\mu\nu}.$$

On peut écrire en utilisant 1.10,

$$\begin{aligned} H_2 &= \gamma^\mu \gamma^\nu \left(\partial_\nu \Gamma_\mu - \partial_\mu \Gamma_\nu + [\Gamma_\nu, \Gamma_\mu] \right) \\ &= \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\nu \Gamma_\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \Gamma_\nu + \gamma^\mu \gamma^\nu \Gamma_\nu \Gamma_\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu \Gamma_\mu \Gamma_\nu \\ &= \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\nu \Gamma_\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \Gamma_\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu \Gamma_\nu \Gamma_\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu \Gamma_\nu \Gamma_\mu, \end{aligned}$$

et

$$H_2 = [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \left(\partial_\nu \Gamma_\mu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu \right).$$

Remark 2. *Le calcul précédent utilise le calcul tensoriel pour des tenseurs à valeurs dans les matrices.*

A partir d'une connexion initale ∇ et une section initale de Dirac sur $T\Omega$, on peut déterminer l'opérateur H_2 par

$$\begin{aligned} ([\widetilde{\gamma}^\mu, \widetilde{\gamma}^\nu])^{\sigma\tau}_{\rho\eta} &= (\gamma^\mu)^{\alpha\beta}_{\rho\eta} (\gamma^\nu)^{\sigma\tau}_{\alpha\beta} - (\gamma^\nu)^{\alpha\beta}_{\rho\eta} (\gamma^\mu)^{\sigma\tau}_{\alpha\beta} \\ &= (\gamma^\mu)^\alpha_\rho (\gamma^\mu)^\beta_\eta (\gamma^\nu)^\sigma_\alpha (\gamma^\nu)^\tau_\beta - (\gamma^\nu)^\alpha_\rho (\gamma^\nu)^\beta_\eta (\gamma^\mu)^\sigma_\alpha (\gamma^\mu)^\tau_\beta \\ &= (\gamma^\mu \gamma^\nu)^\sigma_\rho (\gamma^\mu \gamma^\nu)^\tau_\eta - (\gamma^\nu \gamma^\mu)^\sigma_\rho (\gamma^\nu \gamma^\mu)^\tau_\eta \\ &= \det \begin{pmatrix} (\gamma^\mu \gamma^\nu)^\sigma_\rho & (\gamma^\nu \gamma^\mu)^\tau_\eta \\ (\gamma^\nu \gamma^\mu)^\sigma_\rho & (\gamma^\mu \gamma^\nu)^\tau_\eta \end{pmatrix} = (\mathcal{A}^{\mu\nu})^{\sigma\tau}_{\rho\eta} \,. \end{aligned}$$

et

$$(H_2)^{\sigma\tau}_{\rho\eta} = \left(\mathcal{A}^{\mu\nu} \left(\partial_\nu \widetilde{\Gamma}_\mu + \widetilde{\Gamma}_\nu \widetilde{\Gamma}_\mu \right) \right)^{\sigma\tau}_{\rho\eta} \,, \tag{1.11}$$

avec

$$\widetilde{\Gamma}_\mu = \left(\left(\widetilde{\Gamma}_\mu \right)^{\sigma\tau}_{\alpha\beta} \right) = \left(\Gamma^{\sigma\tau}_{\mu\alpha\beta} \right) = - \left(\Gamma^\sigma_{\mu\alpha} + \Gamma^\tau_{\mu\beta} \right) = -2 \boxtimes \Gamma_\mu,$$

en posant

$$(2 \boxtimes \Gamma_\mu)^{\sigma\tau}_{\alpha\beta} = \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} + \Gamma^\tau_{\mu\beta}.$$

Remark 3. *Si A et B des $(1,1)$-tenseurs, on note $A \boxplus B$*

$$(A \boxplus B)^{\sigma\tau}_{\alpha\beta} = A^\sigma_\alpha + B^\tau_\beta \text{ et } 2 \boxtimes \Gamma_\mu = \Gamma_\mu \boxplus \Gamma_\mu,$$

et

$$\left(\partial_\nu \widetilde{\Gamma}_\mu + \widetilde{\Gamma}_\nu \widetilde{\Gamma}_\mu \right)^{\sigma\tau}_{\alpha\beta} = \partial_\nu \left(\widetilde{\Gamma}_\mu \right)^{\sigma\tau}_{\alpha\beta} + \left(\widetilde{\Gamma}_\nu \right)^{\kappa\iota}_{\alpha\beta} \left(\widetilde{\Gamma}_\mu \right)^{\sigma\tau}_{\kappa\iota} \,.$$

L'équation 1.11 est définie par

$$(H_2)^{\sigma\tau}_{\rho\eta} = \left(\mathcal{A}^{\mu\nu} \left(\partial_\nu \Gamma_\mu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu \right) \right)^{\sigma\tau}_{\rho\eta} = (\mathcal{A}^{\mu\nu})^{\alpha\beta}_{\rho\eta} \left(\partial_\nu \Gamma_\mu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu \right)^{\sigma\tau}_{\alpha\beta} \,.$$

On veut déterminer une section de Dirac initiale γ et une connexion initiale ∇, pour laquelle l'opérateur H_2 vérifie

$$(H_2)_{\rho\eta}^{\sigma\tau}\gamma_{\sigma\tau} = (H_2)_{\rho\eta} = R_{\rho\eta} - KT_{\rho\eta}, \tag{1.12}$$

où $R_{\rho\eta}$ est le tenseur de Ricci associé à la connexion initiale ∇, $T_{\rho\eta}$ est le tenseur énergie-impulsion, K est une constante et $\gamma_{\sigma\tau}$ est le $(2,0)$-tenseur symétrique dont la représentation matricielle dans le *"local frame"* $\{d^\mu \otimes d^\nu\}$ est

$$\left(\frac{1}{8}\operatorname{Trace}\left(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\right)\right)^{-1}$$

en faisant l'hypothèse sur γ que

$$\left(\frac{1}{8}\operatorname{Trace}\left(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\right)\right)$$

est une matrice inversible. Sous cette hypothèse, l'opérateur H_2 est dit relativiste.

Remark 4. *L'équation 1.12, n'a de sens que sur le fibré tangent $T\Omega$.*

Si l'équation 1.12 est vérifiée, les métriques d'Einstein sont les métriques qui vérifient l'équation d'état de rang 2 pour la fonction propre

$$\lambda = \frac{1}{2}R + \Lambda,$$

où Λ est la constante cosmologique et R est la courbure scalaire de la connexion ∇.

Definition 3. *L'opérateur de rang 2 vérifiant l'équation 1.12 est un opérateur de Ricci. Une métrique d'Einstein est une métrique g pour laquelle*

$$H_2 g = \left(\frac{1}{2}R + \Lambda\right) g,$$

où R est la courbure scalaire de la connexion ∇ et Λ est la constante cosmologique.

Remark 5. *On peut définir des opérateurs de Ricci à tous les rangs n.*

1.5. **Paire relativiste.** On se fixe sur le fibré tangent $T\Omega$, une connexion ∇ et une section de Dirac γ. Le tenseur de Poisson est défini par

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\operatorname{Trace}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right),$$

où γ^μ et γ^ν sont les matrices de Dirac associée à γ dans le *"local frame"* induit par une carte U. On a dit que le tenseur $\gamma^{\mu\nu}$ est un tenseur symétrique, s'il est inversible, on note $\gamma_{\mu\nu}$, la matrice inverse. Le $(2,0)$-tenseur $\gamma_{\mu\nu}$ définit une métrique locale sur la carte U. La connexion ∇ de $T\Omega$ a pour courbure

$$R^\nabla\left(\partial_\nu, \partial_\mu\right)(e_\sigma) = \nabla_{\partial_\nu}\nabla_{\partial_\mu}\partial_\sigma - \nabla_{\partial_\mu}\nabla_{\partial_\nu}\partial_\sigma = R_{\sigma\mu\nu}^{\tau}\partial_\tau,$$

tenseur de Ricci

$$R_{\sigma\nu} = R_{\sigma\mu\nu}^{\mu}$$

et pour courbure scalaire

$$R = R_\nu^\nu,\ R_\nu^\sigma = R_{\sigma\nu},$$

Definition 4. *La paire* $\{\nabla, \gamma\}$ *est relativiste si elle vérifie l'équation relativiste d'Einstein*

$$R_{\mu\nu} - KT_{\mu\nu} = \left(\frac{1}{2}R + \Lambda\right)\gamma_{\mu\nu},$$

où $T_{\mu\nu}$ *est le tenseur énergie-impulsion,* K *est une constante. La connexion et la section sont dites relativistes.*

Les coefficients de Christoffel et le tenseur de courbure sont entièrement définis par la section de Dirac sous l'hypothèse

$$\{\nabla, \gamma\} \text{ est une paire relativiste.}$$

En général, les sections de Dirac considérées sont métriques, c'est-à-dire, que le tenseur de Poisson associé qui est indépendant du *"local frame"* est inversible et son inverse définit une métrique locale sur Ω. Dans le cas des dimensions infinies, on verra que l'on doit imposer aux endomorphisme de Dirac d'être des endomorphismes bornés et à trace pour définir le tenseur de Poisson.

2. La (∇, γ)-quantification

La *"*(∇, γ)*-quantification"* est un procédé de quantification simple des fibrés vectoriels réels ou complexes pour un fibré d'état défini par une particule. On veut réprésenter les états d'un système physique comme les sections d'un fibré hermitien. On est ainsi amené à adapter les postulats de la physique quantique à la théorie des fibrés vectoriels. Le principe de quantification se fait en définissant sur chaque fibre une observable qui varie de façon C^∞. En dimension finie, on construit un opérateur, équivalent à l'opérateur hamiltonien, à partir d'une connexion ∇ sur le fibré et d'une section de Dirac γ. L'équation des états dite équation de Dirac-Einstein est décrite par une équation des sections propres du fibré considéré. L'équation d'évolution du système se fait le long d'un champ chronologique, c'est une généralisation de l'équation d'évolution de Schrödinger aux fibrés. L'espace de base du fibré est, en général, une carte de l'univers Ω ou l'univers lui-même. L'espace total est une variété qui peut être de dimension infinie si la fibre est de dimension infinie. On peut encore définir la notion d'application C^∞ étendue aux variétés banachiques ou hilbertiennes. On rappelle quelques faits élémentaires.

2.1. Les outils mathématiques.

L'hypothèse que l'on fait est la suivante, sur une carte de l'univers Ω, les systèmes physiques sont décrits par des fibrés. Ces fibrés sont des fibrés vectoriels réels ou complexes, ou des fibrés dont la fibre est un groupe de Lie. Les fibrés des états de l'univers définis sur Ω sont notés

$$\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H}) \text{ ou } \zeta = (E, \pi, \Omega)$$

s'il n'y a pas de confusion sur la fibre $\mathcal{H}$, on parlera du fibré d'état E. En général, $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert séparable. L'ensemble des sections du fibré E est noté $\Gamma(E)$. Les exemples les plus utilisés en physique sont le fibré trivial $\Omega \times \mathbb{C}$ dont les sections sont les applications C^∞ de Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$, le fibré tangent $T\Omega$ et son complexifié $T_{\mathbb{C}}\Omega = T\Omega \otimes \mathbb{C}$ qui ont pour sections, respectivement, les champs réels et complexes et le fibré des $(2,0)$-tenseurs $\Lambda^2\Omega$.

Pour nous, une observable en ω est un opérateur $\Phi(\omega) : E_\omega \to E_\omega$ ayant une base de vecteurs propres pour chaque ω et telle que l'application $\omega \to \Phi(\omega)$ est C^∞ dans le sens suivant, pour toute section $s \in \Gamma(E)$, l'application

$$\omega \to \Phi(\omega)(s(\omega))$$

est C^∞. On remarque que cette définition a un sens si la fibre $\mathcal{H}$ du fibré est de dimension finie, on peut étendre cette notion à un fibré de dimension infinie, hilbertien ou banachique, dans le cas hilbertien $\Phi(\omega)$ est un opérateur self-adjoint pour tout $\omega \in \Omega$. L'observable Φ est donc une section du fibré, dont la fibre est formée par les éléments de $\mathrm{End}(\mathcal{H})$ qui sont diagonalisables. Les fonctions $\lambda : U \subset \Omega \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour lesquelles il existe une section s, non nulle sur U, vérifiant

$$\Phi(\omega)(s(\omega)) = \lambda(\omega)\, s(\omega)\,,\ \forall \omega \in U$$

sont les fonctions propres de Φ sur U et la section s est une section propre de Φ sur U. Si la fibre est hilbertienne, Le théorème de Von Neumann permet d'associer à $\Phi(\omega)$, une mesure spectrale

$$P_{\Phi(\omega)} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(E_\omega)\,,$$

à chaque borélien B de $\mathbb{R}$ on associe un projecteur $P_{\Phi(\omega)}(B)$ de l'espace d'Hilbert complexe E_ω. Pour chaque couple $(s,t) \in \Gamma(E)^2$ et chaque $\omega \in \Omega$, on définit la mesure complexe $\nu_{(s(\omega),t(\omega))}$ sur les boréliens de $\mathbb{R}$

$$\nu_{(s(\omega),t(\omega))}(B) = \left\langle P_{\Phi(\omega)}(B)(s(\omega)) \mid t(\omega)\right\rangle_\omega .$$

On en déduit, pour chaque $\omega \in \Omega$ et chaque $s \in \Gamma(E)$, l'existence d'une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}$ définie par

$$\nu_{s(\omega)}(B) = \left\langle P_{\Phi(\omega)}(B)(s(\omega)) \mid s(\omega)\right\rangle_\omega .$$

En particulier, pour $s \in \Gamma(E)$, on définit une section ν_s sur le fibré $\mathcal{B}(\Omega)$ dont la fibre est formée des mesures boréliennes sur $\mathbb{R}$. Si la section s est normalisée pour tout ω, c'est-à-dire, $\|s(\omega)\|_\omega = 1$, $\nu_{s(\omega)}$ est une probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}$, notée $P_{s,\Phi}$ avec $P_{s,\Phi}(\omega) = \nu_{s(\omega)}$.

En utilisant la décomposition de Paul Levy, ν_s s'écrit comme une somme de mesures

$$\nu_s = \nu_s^{ac} + \nu_s^{p} + \nu_s^{sc},$$

où ν_s^{ac} est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, ν_s^p est une somme de mesures de Dirac et ν_s^{sc} est une mesure singulièrement continue, la fonction de répartition est une fonction continue et la mesure n'est chargée que sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Si

$$\nu_s = \nu_s^p$$

on dit que s a un spectre discret et si

$$\nu_s = \nu_s^{ac},$$

on dit que s a un spectre continu.

2.2. **L'équation des états.** Sur une carte U où le fibré tangent et le fibré d'état sont trivialisables, on pose $\{\partial_\mu, \mu = 0,1,2,3\}$ le local frame associé à la carte U et $\{e_\nu, \nu = 0,1,2,\cdots,m-1\}$ une base de sections du fibré des états resteint à U. On pose $\{d^\mu, \mu = 0,1,2,3\}$ le local frame dual et $\gamma^\mu = \gamma^{d^\mu}$ les endomorphismes de Dirac associés. Ces endomorphismes sont représentés par des matrices carrées d'ordre m dans la base $\{e_\nu, \nu = 0,1,2,\cdots,m-1\}$ dont les coefficients sont dans $C^\infty(U)$, si la dimension de la fibre est finie. Le tenseur de Poisson est défini par

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{8}\,\mathrm{Trace}\left(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\right),$$

il est indépendant du choix de la base $\{s_\nu, \nu = 0, 1, 2, \cdots, m-1\}$ en dimension finie, cette notion s'étend en dimension infinie pour des opérateurs à trace. L'univers Ω est muni d'une métrique de Lorentz g, dont la matrice dans le local frame $\{\partial_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ est $(g_{\mu\nu})$ et $(g^{\mu\nu})$ est sa matrice inverse, on fait l'hypothèse

$$(\gamma^{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}). \tag{2.1}$$

Si on n'impose pas l'existence d'une métrique de Lorentz g sur l'univers Ω, on fait l'hypothèse que localement $(\gamma^{\mu\nu})$ est inversible et $(\gamma_{\mu\nu}) = (\gamma^{\mu\nu})^{-1}$ est la matrice d'une métrique de Lorentz g_γ sur l'ouvert U, afin de pouvoir définir une équation d'évolution le long d'un champ chronologique T. L'équation d'état est donnée par

$$H(s) = \lambda s,\ H = \gamma \otimes \nabla \tag{2.2}$$

où λ est une fonction propre C^∞ définie sur la carte U de Ω. Les équations d'état des champs et des métriques dans $\{\partial_j\}$ définies sur une carte U sont

$$\gamma^{\nu\sigma}_{\beta}\left(\partial_\nu X^\beta + X^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha\nu}\right) = -i\lambda X^\sigma, \tag{2.3}$$

pour les champs complexes $X = X^\alpha \partial_\alpha$ et pour les métriques

$$\gamma^{\mu\nu\tau}_{\rho\sigma}\left(\partial_\mu g_{\nu\tau} + g_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha\beta}_{\mu\nu\tau}\right) = \lambda g_{\rho\sigma}, \tag{2.4}$$

avec

$$\Gamma^{\alpha\beta}_{\mu\nu\tau} = -\left(\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^\beta_{\mu\tau}\right) \text{ et } \gamma^{\mu\nu\tau}_{\rho\sigma} = \gamma^{\mu\nu}_\rho \gamma^{\mu\tau}_\sigma. \tag{2.5}$$

2.3. **L'équation d'évolution d'un système quantique.** On se place sur une carte U de l'univers Ω sur laquelle le tenseur de Poisson $\gamma^{\mu\nu}$ définit une métrique g. On suppose que cette métrique est Lorentzienne, c'est-à-dire, qu'il existe au moins un champ $T : \Omega \to T\Omega$ de genre temps

$$\forall \omega \in U, g(\omega)(T(\omega), T(\omega)) < 0.$$

Pour l'espace-temps de Minkowski $\left(\mathbb{R}^4, \eta\right)$, $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$, le champ $T = \frac{\partial}{\partial t}$ donne l'orientation du temps. Soit $T_\omega = \mathbb{R}T(\omega)$, le sous-espace vectoriel de dimension 1, engendré par le vecteur $T(\omega) \in T_\omega U$. Ce sous-espace est non isotrope pour la forme bilinéaire $g(\omega)$ sur $T_\omega U$ et scinde $T_\omega U$ en une somme orthogonale unique

$$T_\omega U = T_\omega \oplus E_\omega,$$

où $E_\omega = T_\omega^\perp$. Les restrictions $g(\omega)\mid_{E_\omega}$ et $-g(\omega)\mid_{T_\omega}$sont définies positives. Tout champ $X : \Omega \to T(\Omega)$ se décompose en $X = X_E - tT$, où $t : \Omega \to \mathbb{R}$ est une C^∞-application, X_E est un champ espace, c'est-à-dire, $X_E(\omega) \in E_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$. En particulier,

$$|X_E(\omega)|_g^2 = g(\omega)(X_E(\omega), X_E(\omega)) > 0$$

si $X_E(\omega) \neq o_{T_\omega(\Omega)}$.

Definition 5. *Un champ X est orienté vers le T-futur si $X = X_E - tT$, avec $t > 0$ et vers le T-passé si $t < 0$.*

Un champ T est stable en $\omega \in \Omega$, s'il existe une carte U de Ω pour laquelle

$$T = T^\nu \partial_\nu$$

et

$$\partial_k\left(T^j g_{ij}\right) = \partial_i\left(T^j g_{kj}\right),\ \forall k, i.$$

Example 1. *Si Ω est l'espace de Minkowski alors $\frac{\partial}{\partial t}$ est un champ chronologique stable.*

Si T est stable sur U, on peut feuilleter en espace-temps la carte U de l'univers Ω où vit ce champ chronologique T. Les parties espace-temps de l'univers Ω sont des variétés de dimension 4 connexes, munies d'une métrique de Lorentz g et d'une chronologie définie par un champ local T , tel que $g(T,T) = -1$. Chaque chronologie stable permet de feuilleter Ω en deux feuilletages orthogonaux pour la métrique g. L'un est le feuilletage espace, noté $\mathcal{E}$, dont les feuilles sont des sous-variétés connexes sans bord, de dimension 3 de Ω, dites feuilles d'espace, l'autre est le feuilletage chronologique noté $\mathcal{T}$, dont les feuilles sont des sous-variétés connexes sans bord, de dimension 1 de Ω, dites feuilles chronologiques. Ces feuilles chronologiques ne peuvent être que $\mathbb{S}^1$ ou $\mathbb{R}$. Chaque champ X se décompose de façon unique, sous la forme

$$X = X_E - tT,$$

où $X_E(\omega) \in T_\omega(E) = E_\omega$, $t \in C^\infty(\Omega)$ où E est l'unique feuille du feuilletage de $\mathcal{E}$ contenant ω.

La notion de changement local de coordonnées entre deux espace-temps définis par les champs chronologiques T et S est la donnée d'une section θ, définie sur un ouvert connexe $U \subseteq \Omega$ du fibré

$$\mathrm{Hom}(T\Omega) = \Lambda^1(\Omega) \otimes T\Omega$$

telle que

$$\theta \otimes T = S$$

et

$$g(\theta \otimes X, \theta \otimes Y) = g(X,Y)$$

pour tout champ X, Y sur Ω. On rappelle que pour un champ X de Ω défini sur U,

$$\theta \otimes X(\omega) = \theta(\omega)(X(\omega))$$

et l'application

$$\omega \to \theta(\omega) : T_\omega\Omega \to T_\omega\Omega$$

vérifiant $\theta(\omega)$ est une $g(\omega)$-isométrie, on dit que θ conserve la métrique de Lorentz. On peut remarquer que ce changement d'espace-temps est un opérateur d'état. Pour tous les champs chronologiques T et S, il existe un changement local de coordonnées. On peut définir la dérivée covariante le long du champ chronologique T , noté ∇_T.

L'équation d'évolution d'une section locale s définie sur U, le long d'un champ chronologique T, non nécessairement stable, d'un système soumis à aucune observation est

$$Hs = i\lambda\nabla_T s,\ H = \gamma \otimes \nabla \tag{2.6}$$

si le fibré est complexe ou

$$Hs = \lambda\nabla_T s,\ H = \gamma \otimes \nabla \tag{2.7}$$

si le fibré est réel [13].

Remark 6. *Le champ chronologique T est défini par la métrique Lorentzienne g de l'univers Ω. Si aucune métrique n'est fixée, on impose au tenseur de Poisson $\gamma^{\mu\nu}$ de définir cette métrique Lorentzienne sur U, le champ chronologique T est défini à partir de cette métrique.*

2.4. **Les axiomes de quantification.**

Axiom 1. *L'état d'un système physique est défini, par une section s d'un fibré hermitien E, dit fibré des états.*

Axiom 2. *A tout observable $\mathcal{O}$ est associée une section Φ de $\mathcal{O}(E)$, formée des éléments de $\operatorname{End}(E)$, self-adjoints. On dit que Φ est l'observable quantique de la grandeur physique $\mathcal{O}$.*

Axiom 3. *Quelque soit la section s du système où l'on effectue la mesure de la grandeur $\mathcal{O}$, les seuls résultats possibles sont les fonctions propres de Φ.*

Axiom 4. *Si s représente l'état normalisé du système, la probabilité de trouver la fonction λ lors d'une mesure de $\mathcal{O}$ dans Δ est*

$$P_{s,\Phi}(\lambda) = P_{s,\Phi}(\Delta)$$

où

$$P_{s,\Phi}(\Delta)(\omega) = P_{s(\omega),\Phi(\omega)}(\Delta(\omega))$$

avec $\Delta(\omega) =]\lambda_1(\omega), \lambda_2(\omega)]$ si le spectre de s est continu. Si le spectre est discret, cette probabilité est

$$P_{s,\Phi}(\lambda)(\omega) = P_{s(\omega),\Phi(\omega)}(\lambda(\omega)).$$

Axiom 5. *L'état du système immédiatement après une mesure ayant donnée la fonction λ est*

$$\widetilde{\phi} = \frac{P_{E_\lambda}(\phi)}{\|P_{E_\lambda}(\phi)\|},$$

où $\widetilde{\phi}(\omega) = P_{E_{\lambda(\omega)}}(\phi(\omega))$ et $P_{E_{\lambda(\omega)}}$ est le projecteur sur le sous-espace propre $E_{\lambda(\omega)}$ associé à la valeur propre $\lambda(\omega)$ de $\Phi(\omega)$.

Axiom 6. *Soit s, l'état du système en ω_0 dans une carte U de Ω, tant que le système n'est soumis à aucune observation, son évolution le long d'un champ chronologique T associé au tenseur de Poisson $\gamma^{\mu\nu}$ est*

$$Hs = i\lambda\nabla_T s$$

, où $H = \gamma \otimes \nabla$, γ est la section de Dirac et ∇ est la connexion qui sont associés au fibré des états.

2.5. **L'équation de Schrödinger-Dirac.** Si on prend une métrique de Lorentz g, on peut définir localement un champ chronologique T. On a une connexion naturelle qui est la connexion de Levi-Civita complexifiée sur le fibré des champs complexes. On impose à la section de Dirac de vérifier localement

$$\gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu},$$

ou de vérifier des relations du type

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I_4,$$

on peut consulter [3],[4]. Le groupe de Dirac associé à ces relations est

$$\mathcal{D} = \left\{ \gamma^d : \frac{1}{2}\{\gamma^d, \gamma^\delta\} = g(d^*, \delta^*)\mathbf{I}_4,\ d \text{ et } \delta \in \Lambda^1\Omega \right\}.$$

Pour construire un fibré hermitien sur $T_{\mathbb{C}}\Omega$, on se fixe une métrique riemannienne sur l'univers Ω que l'on complexifie pour obtenir sur chaque fibre de $T_{\mathbb{C}}\Omega$ un produit hermitien, on peut ainsi, quantifier le fibré $T_{\mathbb{C}}\Omega$. Ensuite, on se fixe un champ

chronologique dans le local frame associé à une carte U. L'équation d'évolution le long du champ chronologique T s'écrit

$$\gamma^{\nu} D_{\nu} X = i\lambda \left[T, X\right], \tag{2.8}$$

où $D_{\nu} = \mathrm{L}_{\nu} + \Gamma_{\nu}$, où Γ_{ν} est la section locale de $\mathrm{End}\,(E)$ dont la matrice, dans le "local frame", est $(\Gamma_{\nu})_{\alpha}^{\beta} = \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}$ et L_{ν} est l'endomorphisme de Lie le long du champ ∂_{ν} défini par, $\mathrm{L}_{\nu}\, X = (\partial_{\nu} X^{\mu})\, \partial_{\mu}$. Les coefficients $\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}$ sont les coefficients de Christoffel de la connexion ∇. L'opérateur d'état en X est proportionnel à la mesure du défaut de commutativité de X par rapport au champ chronologique T. L'équation 2.8 est l'équation de Schrödinger-Dirac. Si on développe l'équation sur chaque composante de ∂_{σ} on a

$$\gamma_{\beta}^{\nu\sigma} \left(\partial_{\nu} X^{\beta} + X^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}\right) = i\lambda \left(T^{\nu} \partial_{\nu} X^{\sigma} - X^{\nu} \partial_{\nu} T^{\sigma}\right), \tag{2.9}$$

$\gamma_{\beta}^{\nu\sigma}$ sont les coefficients de la matrice de Dirac $\gamma^{\nu} = \gamma^{d^{\nu}}$ dans la base $\{\partial_{\mu}\}$ et de base duale $\{d^{\mu}\}$. On peut interpréter la fonction λ comme une densité de masse locale sur U.

3. Quantification des fibrés d'état de l'univers Ω

3.1. **Les états de l'univers Ω.** Un espace de Banach complexe induit une structure de Banach réel en se restreignant à la multiplication d'un réel par un vecteur. Une application linéaire d'un espace de Banach dans un autre sera $\mathbb{R}$-linéaire si l'un au moins des deux espaces est réel, $\mathbb{C}$-linéaire sinon. Le produit d'un espace de banach par un autre est un espace de banach réel si l'un au moins des deux est réel, complexe sinon. Une bonne référence sur les notions de variété banachique, de fibré de banach et de C^{∞} différentiabilité sur les variétés banachiques est développée dans les annexes de [24].

L'univers Ω est une C^{∞}-variété, connexe, de dimension 4. Un fibré sur l'univers Ω est un fibré de fibre un espace d'hilbert *séparable* $\mathcal{H}$, noté

$$\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$$

où E est l'espace total de ζ. Par la suite, on ne parlera que du fibré E, s'il n'y a aucune confusion.

L'espace E est modelé sur $\mathbb{R}^4 \times \mathcal{H}$ qui a une structure d'espace de banach réel. On peut appliquer la théorie des fibrés des espaces de banach au fibré des états de l'univers. Sur chaque fibre E_{ω}, il existe un produit scalaire hermitien de classe C^{∞}, c'est-à-dire, pour toutes sections s et t de $\Gamma\,(E)$, l'application

$$\omega \to \langle s\,(\omega) \mid t\,(\omega)\rangle_{\omega}$$

est C^{∞} comme application de Ω dans $\mathbb{C}$.

Ce fibré ζ est muni d'une connexion ∇, la continuité de ∇ est définie dans le sens suivant, pour chaque compact K, l'application de restriction à K

$$\nabla_K : s\mid_K \to \nabla s\mid_K$$

est continue pour les normes

$$\|s\|_K = \sup\left\{\sqrt{\langle s\,(\omega) \mid s\,(\omega)\rangle_{\omega}} : \omega \in K\right\}$$

et

$$\|d \otimes s\|_K = \sup\left\{\|s\|_K, \|d\|_K\right\}$$

sur le fibré $\Lambda^1\Omega \otimes E$, où

$$\|d\|_K = \sup\{\|d_\omega\| : \omega \in K\}$$

avec

$$\|d_\omega\| = \sup\{|d_\omega(u)| : g(\omega)(u,u) \leqslant 1,\ u \in T_\omega\Omega\}$$

et g est une métrique riemannienne fixée sur Ω. Sur $\Lambda^1\Omega \otimes E$, les fibres ont une structure complexe définie par

$$\lambda.(d(\omega) \otimes s(\omega)) = d(\omega) \otimes (\lambda s(\omega)),\ \lambda \in \mathbb{C}$$

on peut parler de la $\mathbb{C}$-linéarité. La connexion ∇ a une autre représentation notée encore ∇,

$$\nabla : \Gamma(T\Omega) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E),\ (X,s) \to \nabla_X s$$

$\nabla_X s$ est la dérivée covariante de s, le long du champ X, dans cette représentation on impose à la forme bilinéaire

$$\nabla_K : (X,s)\mid_K \to \nabla_X s\mid_K$$

qu'elle soit continue pour les normes $\|X\|_K$ et $\|s\|_K$ définies sur tout compact K , la norme $\|X\|_K$ est définie par

$$\|X\|_K = \sup\{g(\omega)(X(\omega) \mid X(\omega)) : \omega \in K\}$$

où g est la métrique riemannienne sur Ω définie plus haut. Les deux notions précédentes sont équivalentes. On se fixe ensuite une section de Dirac γ de E, on pose γ^d, l'endomorphisme de Dirac associé à $d \in \Lambda^1\Omega$. On suppose que $\gamma^d(\omega)$ est un opérateur borné pour la structure de Hilbert de E_ω pour tout $\omega \in \Omega$ et l'application

$$\omega \to \gamma^d(\omega)$$

est C^∞ dans le sens suivant, pour toute section s de E l'application

$$\omega \to \gamma^d(\omega)(s(\omega))$$

est C^∞ comme application entre la variété Ω et la variété de banach E.

Definition 6. *Un fibré d'état de l'univers Ω est un fibré $\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$ muni d'un produit hermitien C^∞, d'une connexion ∇ et d'une section de Dirac γ à trace.*

La section de Dirac est une section à trace si pour toute carte U de Ω et toute 1-forme d définie sur cette carte, l'application $\gamma^d(\omega)$ est un opérateur borné à trace de E_ω pour tout $\omega \in U \subset \Omega$.

On choisit une section de Dirac à trace. Sur une carte U où le fibré tangent est trivialisable, on pose $\{\partial_\mu, \mu = 0,1,2,3\}$ le *"local frame"* associé à la carte U, $\{d^\mu, \mu = 0,1,2,3\}$ le *"local frame"* dual et $\gamma^\mu = \gamma^{d^\mu}$ les endomorphismes de Dirac associés à la base duale d^μ. Le tenseur de Poisson est défini par

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{8}\operatorname{Trace}(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}) = \frac{1}{4}\operatorname{Trace}(\gamma^\mu\gamma^\nu). \tag{3.1}$$

Pour chaque $\omega \in \Omega$, $\gamma^\mu(\omega)$ est un opérateur de l'espace d'hilbert E_ω qui est un opérateur borné à trace de E_ω pour $\mu = 0,1,2,3$, ils forment un idéal des opérateurs bornés donc 3.1 a un sens. Le tenseur de Poisson est un tenseur symétrique, on suppose que la matrice $(\gamma^{\mu\nu})$ est inversible et que sa matrice inverse $(\gamma_{\mu\nu})$ définit, sur la carte U, une métrique de Lorentz g_γ par

$$g_\gamma(\partial_\mu, \partial_\nu) = \gamma_{\mu\nu}. \tag{3.2}$$

Definition 7. *La section des groupes de Dirac est définie par*

$$\mathcal{D} = \left\{\gamma^d : d \in \Lambda^1\Omega\right\}$$

où

$$\mathcal{D}(\omega) = \left\{\gamma^d(\omega) : E_\omega \to E_\omega : d \in \Lambda^1\Omega\right\}$$

avec

$$\gamma^d(\omega)(\nu) = \gamma(\omega)(d(\omega) \otimes \nu),\ \nu \in E_\omega.$$

Les hypothèses sont les suivantes, si on munit Ω d'une métrique Lorentzienne h, on veut localement sur toute carte

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2h^{\mu\nu} Id_E. \tag{3.3}$$

Remark 7. *Avec une base de* 1*-formes* $\{\delta_\mu\}$ *pour laquelle*

$$\frac{1}{4}\operatorname{Trace}\left(\left\{\gamma^{\delta_\mu}, \gamma^{\delta_\nu}\right\}\right) = \delta_{\mu\nu} \ \textit{si}\ (\mu,\nu) \neq (1,1) \ \textit{et}\ \frac{1}{4}\operatorname{Trace}\left(\left\{\gamma^{\delta_1}, \gamma^{\delta_1}\right\}\right) = -1$$

l'opérateur

$$J = \gamma^{\delta_1}$$

définit une structure presque complexe sur le fibré d'état restreint à U*, noté* $E(U)$*, quand la relation 3.3 est vérifiée.*

Sur Ω on a une métrique pseudo-riemannienne qui permet de définir une forme volume μ. Dans une carte, si Ω est orientable cette forme volume s'écrit

$$\mu = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|}\, d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \wedge d^4,$$

les sections s telles que

$$\int_\Omega \langle s \mid s\rangle \mu = \int_\Omega \langle s(\omega) \mid s(\omega)\rangle_\omega \mu(\omega) < +\infty$$

sont les sections de carré intégrable, le complété de ces sections est un espace de Hilbert.

Definition 8. *Pour cette métrique pseudo-riemannienne, la probabilité de trouver la particule dans une région* V *de l'univers* Ω *dans l'état* s *est*

$$p(V) = \frac{\int_V \langle s \mid s\rangle \mu}{\int_\Omega \langle s \mid s\rangle \mu}.$$

Remark 8. *Les sections d'état telles que* $\int_\Omega \langle s \mid s\rangle \mu = 1$ *sont les sections unitaires pour la métrique* g*.*

3.2. **Densités d'état de l'univers et structure complexe.** Pour un fibré d'état $\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$, $\mathcal{O}(\zeta)$ est le sous-fibré de $\operatorname{End}(\zeta)$ dont la fibre est formée des éléments de $\operatorname{End}(\mathcal{H})$ qui sont autoadjoints. Soit $\mathcal{A}_E$ un élément de $\Gamma(\mathcal{O}(\zeta))$, pour chaque $\omega \in \Omega$, l'application

$$\mathcal{A}_E(\omega) : E_\omega \to E_\omega$$

est une observable de E_ω. Une fonction $\lambda : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction localement propre de $\mathcal{A}_E$ si en chaque point $\omega_0 \in \Omega$, il existe une carte U et une section locale s sur U, non nulle sur U pour laquelle

$$\mathcal{A}_E(\omega)(s(\omega)) = \lambda(\omega)\, s(\omega)$$

pour tout $\omega \in U$. La section s est une section locale propre associée à la fonction λ. On note $E_\omega(\lambda)$, le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda(\omega)$. Soit

$$E(\lambda) = \cup_{\omega\in\Omega} E_\omega(\lambda),$$

et

$$\zeta(\lambda) = (E(\lambda), \pi_\lambda, \Omega)$$

où $\pi_\lambda = \pi \mid_{E(\lambda)}$. Si $\zeta(\lambda)$ est un sous-fibré de ζ, on dit que λ est une fonction propre et $\zeta(\lambda)$ est le sous-fibré propre associé à la fonction propre λ, $\dim\zeta(\lambda)$ est la dimension de $\zeta(\lambda)$. La section $\mathcal{A}_E$ de $\mathcal{O}(\zeta)$ est diagonalisable s'il existe une suite $\{\lambda_j\}$ de fonctions propres telles que ζ soit la somme de Whitney des sous-fibrés propres $\zeta(\lambda_j)$

$$\zeta = \oplus_j \zeta(\lambda_j).$$

Proposition 1. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une section $\mathcal{A}_E$ de $\mathcal{O}(\zeta)$ soit diagonalisable est qu'il existe une suite de fonctions propres $\{\lambda_j\}$ telle que*

$$\mathcal{H} = \oplus_j \mathcal{H}_j,$$

où $\mathcal{H}_j$ est la fibre du fibré hilbertien $\zeta(\lambda_j)$.

Proof. Chaque fibre $E_\omega(\lambda_j) = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}_E(\omega) - \lambda_j(\omega) Id_{E_\omega})$ est hilbertienne comme sous-espace fermé de E_ω. La condition $\mathcal{H} = \oplus_j \mathcal{H}_j$ est réalisée si et seulement si sur chaque fibre

$$E_\omega = \oplus_j E_\omega(\lambda_j),$$

et

$$\zeta = \oplus_j \zeta(\lambda_j).$$

□

Remark 9. *Si ∇^j est une connexion définie sur $\zeta(\lambda_j)$ alors*

$$\nabla s = \nabla^j s_j \tag{3.4}$$

avec $s = \sum_j s_j$ est une connexion sur ζ. Une connexion ∇ qui vérifie l'équation 3.4 est une $\mathcal{A}$-connexion.

Si $\dim(\zeta) < +\infty$ et L est une section de $\mathrm{End}(\zeta)$ alors L est diagonalisable, au sens des fibrés vectoriels si

$$\dim(\zeta) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Spect}(L)} \dim\zeta(\lambda),$$

où $\mathrm{Spect}(L)$ est formé des fonctions propres de L.

Definition 9. *Une densité d'état de l'observable $\mathcal{A}_E$ est une fonction propre λ de $\mathcal{A}_E$.*

Remark 10. *On peut définir une représentation géométrique de l'univers Ω, en utilisant la densité des fonctions de Morse pour la C^∞-topologie fine de Whitney dans $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On approche chaque fonction λ de densité d'état par une fonction de Morse Λ, et on applique le procédé de modélisation géométrisation de l'univers par chirurgie.*

Definition 10. *La forme différentielle d est γ-diagonalisable si et seulement si γ^d est diagonalisable au sens des fibrés.*

Si d est γ-diagonalisable alors toute section s peut s'écrire localement

$$s = \sum_j s^j,$$

où s^j est une section locale de $E(\lambda_j)$ associée à la fonction propre λ_j et

$$\gamma^d(s) = \sum_j \lambda_j s^j = \lambda_j s^j,$$

en utilisant le principe de sommation d'Einstein au somme infinie. Si γ est une section de Dirac à trace

$$\operatorname{Trace} \gamma^d = \sum_j n_j \lambda_j \text{ et } \det \gamma^d = \prod_j \lambda_j^{n_j},$$

où $n_j(\omega) = \dim E(\lambda_j(\omega)) < +\infty$, avec

$$\sum_j n_j(\omega) |\lambda_j(\omega)| < +\infty \text{ et } \prod_j |\lambda_j(\omega)|^{n_j(\omega)} < +\infty$$

pour tout $\omega \in \Omega$.

Une C^∞-section polynomiale est une section du fibré de base Ω et de fibre $\mathbb{C}[X]$

$$\omega \to P(\omega), \; P(\omega)(X) \in \mathbb{C}[X]$$

où $P(\omega)(X)$ est un polynôme de dégré fini de la variable X, noté $\deg P(\omega)$. La notion de C^∞-section est définie dans le sens suivant,

$$(\omega, X) \to P(\omega)(X)$$

est C^∞ comme application $\Omega \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. En particulier, $\deg P(\omega)$ est indépendant du choix de ω, on le note $\deg P$. La section polynomiale P, de dégré minimal, pour laquelle

$$P(\omega)\left(\gamma^d(\omega)\right) = o,$$

est la section minimale associée à γ^d. Si

$$P(\omega)(X) = X^2 + 1$$

on dit que γ^d définie une structure presque complexe sur le fibré des états ζ. Une structure complexe sur le fibré des états $\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$ est un automorphisme de fibré

$$J : E \to E$$

tel que

$$J^2 = -Id,$$

c'est-à-dire, de polynôme minimal $X^2 + 1$. Les fonctions propres de J sont les fonctions constantes

$$\lambda = i \text{ et } \overline{\lambda} = -i,$$

les sous-fibrés propres $\zeta^{1,0}$ et $\zeta^{0,1}$ associés vérifient

$$\zeta = \zeta^{1,0} \oplus \zeta^{0,1},$$

on définit un scindage de ζ, toute section s s'écrit

$$s = s^{1,0} + s^{0,1}, \; s^{1,0} = \frac{1}{2}(s - iJs) \text{ et } s^{0,1} = \frac{1}{2}(s + iJs).$$

Les sections s de bidegré $(1,0)$ sont les sections de $\zeta^{1,0}$ et les sections s de bidegré $(0,1)$ formées des sections de $\zeta^{0,1}$, alors

$$\Gamma(\zeta) = \Gamma\left(\zeta^{1,0}\right) \oplus \Gamma\left(\zeta^{0,1}\right).$$

L'application

$$\mathcal{Q} : \Gamma\left(\zeta^{1,0}\right) \to \Gamma\left(\zeta^{0,1}\right), \ \mathcal{Q}\left(s^{1,0}\right) = s^{0,1}$$

est l'opération de conjuguaison. Sur ζ, on a défini un produit scalaire hermitien C^∞, c'est-à-dire, pour toutes sections s et t, l'application

$$\omega \to \langle s(\omega) \mid t(\omega)\rangle_\omega$$

est C^∞ comme application de Ω dans $\mathbb{C}$. Le fibré dual de ζ, noté ζ^*, donne un isomorphisme canonique de $\Gamma(\zeta)$ dans $\Gamma(\zeta^*)$ défini par

$$\mathcal{R} : \Gamma(\zeta) \to \Gamma(\zeta^*), \ \mathcal{R}(s) = s^*$$

avec

$$s^*(\omega)(v) = \langle s(\omega) \mid v\rangle_\omega, \ v \in E_\omega(\zeta).$$

Cet isomorphisme est appelé isomorphisme de Riesz. L'opérateur J induit un opérateur, noté J^*, défini par

$$J^*(\omega)(\xi(\omega))(w) = \xi(\omega)\left(J(\omega)^{-1}(w)\right) = -\xi(\omega)(J(\omega)(w)), \ w \in E_\omega(\zeta)$$

pour toute $\xi \in \Gamma(\zeta^*)$ et $\omega \in \Omega$. L'automorphisme J^* du fibré ζ^* définit une structure complexe sur ζ^*. On a le scindage

$$\wedge^r \zeta = \bigoplus_{p+q=r} \wedge^{p,q} \zeta$$

où

$$\wedge^{p,q}\zeta = \wedge^p\left(\zeta^{1,0}\right)^* \bigwedge \wedge^q\left(\zeta^{0,1}\right)^*,$$

les formes différentielles de ζ de bidegré (p,q) sont les sections $\wedge^{p,q}\zeta$. L'opération de conjuguaison s'étend à

$$\mathcal{Q} : \wedge^{p,q}\zeta \to \wedge^{q,p}\zeta, \ \mathcal{Q}(\xi) = \overline{\xi}.$$

On a pour tout $\xi \in \wedge^r\zeta$,

$$J^*\xi(s_1, \cdots, s_r) = (-1)^r \xi(Js_1, \cdots, Js_r)$$

et ainsi

$$J^{*2} \mid_{\wedge^r\zeta} = (-1)^r Id_{\wedge^r\zeta}.$$

Si $\xi \in \wedge^{p,q}\zeta$ alors

$$J^*\xi = (-1)^{p+q} i^{p-q}\xi,$$

avec cette convention le dual de $\zeta^{1,0}$ est le sous-espace complexe des formes ξ telles que

$$J^*\xi = -i\xi$$

et

$$\zeta^* = \left(\zeta^{1,0}\right)^* \oplus \left(\zeta^{0,1}\right)^*$$

toute forme différéntielle ξ du fibré d'état s'écrit

$$\xi = \eta + \overline{\eta}$$

avec

$$\eta = \frac{1}{2}(\xi + iJ^*\xi) \ \text{ et } \overline{\eta} = \frac{1}{2}(\xi - iJ^*\xi).$$

Definition 11. *Soit L un automorphisme diagonalisable du fibré ζ. On dit qu'une connexion ∇ est une L-connexion si et seulement si il existe sur chaque fibré propre $E(\lambda_j)$ une connexion ∇_j telle que*

$$\nabla s = \nabla_j s^j$$

où

$$s = \sum_j s^j,\ s^j \in \Gamma(E(\lambda_j)).$$

Proposition 2. *Pour une J-connexion ∇, si $\nabla_{1,0}$ est la connexion de $\zeta^{1,0}$ associée à ∇ et $\nabla_{0,1}$ est la connexion de $\zeta^{0,1}$ associée à ∇ alors*

$$\nabla_{1,0} = \frac{1}{2}(\nabla - i\nabla J) = \frac{1}{2}\nabla \circ (Id - iJ) \text{ et } \nabla_{0,1} = \frac{1}{2}(\nabla + i\nabla J) = \frac{1}{2}\nabla \circ (Id + iJ).$$

Remark 11. *Pour toute métrique riemannienne g, on peut définir l'isomorphisme de Riesz sur le fibré tangent $T\Omega$ en posant*

$$\mathcal{R}_g : \Gamma(T\Omega) \to \Gamma(T^*\Omega),\ \mathcal{R}_g(X) = d_X$$

où

$$d_X(\omega)(v) = g(\omega)(X(\omega), v),$$

pour tout $v \in T_\omega\Omega$. Ainsi, à partir d'une métrique riemannienne g, on construit une section de Dirac γ

$$\gamma(d \otimes s) = \gamma^d(s) = \nabla_{\mathcal{R}_g^{-1}(d)} s$$

et on prolonge par $\mathbb{C}$-linéarité sur chaque fibre. On impose que γ soit $C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$-linéaire, c'est-à-dire, on admet l'existence d'une section $\alpha \in \Gamma\left(\left(\wedge^1\Omega \otimes E\right)^*, E\right)$ telle que

$$\gamma(t)(\omega) = \alpha(t(\omega)),$$

pour tout $t \in \Gamma\left(\wedge^1\Omega \otimes E\right)$ et $\omega \in \Omega$. On peut consulter [6] pour une preuve de l'existence et l'unicité de α en dimension finie.

3.3. **Les fibrés des états de l'univers en dimension finie.** Dans ce qui suit $\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{F})$ est un fibré de dimension finie. Sur une carte U où le fibré tangent et le fibré d'état sont trivialisables, on pose $\{\partial_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ le *"local frame"* associé à la carte U et $\{e_\nu, \nu = 0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ une base de sections du fibré des états resteint à U. On pose $\{d^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ le *"local frame"* dual et $\gamma^\mu = \gamma^{d^\mu}$ les endomorphismes de Dirac associés, représentés par des matrices carrées d'ordre n dans la base $\{e_\nu, \nu = 0, 1, 2, \cdots, n-1\}$. Le tenseur de Poisson est défini par

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{8}\operatorname{Trace}(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}),$$

il est indépendant du choix de la base $\{e_\nu, \nu = 0, 1, 2, \cdots, n-1\}$.

L'équation 3.2 permet d'écrire une équation entre la courbure de Ricci, la courbure scalaire et le tenseur de Poisson associé à la section de Dirac γ si on fait l'hypothèse pour g_γ d'être une métrique qui vérifie l'équation relativiste d'Einstein, on obtient

$$Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\gamma_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + \Lambda\gamma_{\mu\nu},$$

où $(\gamma_{\mu\nu}) = (\gamma^{\mu\nu})^{-1}$.

Si on suppose que la fibre $\mathcal{F}$ est une C^∞-variété, une connexion généralisée ∇ sur un fibré $\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{F})$, de fibre $\mathcal{F}$ et de groupe structural $\mathcal{G} \subset \operatorname{Diff}(\mathcal{F})$, est

la donnée pour tout $x \in E$, d'un sous-espace vectoriel $\tau(x)$ contenu dans T_xE tel que

$$\tau(x) \overset{T_x\pi}{\to} T_{\pi(x)}\Omega$$

soit un isomorphisme et $x \to \tau(x)$ est C^∞, c'est-à-dire, localement il existe une famille libre de champs $\{s_\mu\}$ de E telle que

$$\tau(x) = \mathrm{Vect}\{s_\mu(x)\},$$

et les changements de repère sont à valeurs dans $\mathcal{G}$

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathcal{G}.$$

Remark 12. *En général, la fibre est un groupe de Lie.*

Localement, la connexion est définie en fixant un nombre fini de formes différentielles sur E. Si

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, \cdots, y_{n-1}), \ \dim \mathcal{F} = n$$

un système de coordonnées (x_0, x_1, x_2, x_3) correspond aux coordonnées horizontales et $(y_0, \cdots, y_{n-1})$ correspond aux coordonnées verticales qui est un système de coordonnées sur la variété $\mathcal{F}$. On est sur une carte U où le fibré est trivialisable. Dans ce système de coordonnées toute fome différentielle s'écrit, en utilisant le principe de sommation d'Einstein,

$$\lambda_\alpha = a_{\alpha\mu} d^\mu + b_{\alpha\nu}\delta^\nu, \ d^\mu = dx_\mu \text{ et } \delta^\nu = dy_\nu.$$

La connexion généralisée $\tau(x)$ est l'intersection de ces formes, la condition de transversabilité aux fibres est donnée par l'inversibilité de la matrice

$$(b_{\alpha\nu}).$$

Si une particule parcourt le chemin paramétré par

$$\gamma : I = [0;1] \to \Omega,$$

et l'état de la particule est $\mathcal{E}_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$, on peut décrire l'état de la particule en $\gamma(1)$, que l'on note $\mathcal{E}_1$, comme suit.

Theorem 4. *Avec les hypothèses précédentes, il existe un unique chemin de changement des états de la particule,* $\Gamma : [0;1] \to E$ *vérifiant*

$$\Gamma(0) = \mathcal{E}_0,$$

$$\pi \circ \Gamma = \gamma,$$

et

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} \in \tau(\Gamma(t)), \ \forall t \in I.$$

Proof. Localement, $x_\mu = \gamma_\mu(t)$, on veut définir $y_\nu = \Gamma_\nu(t)$,

$$\lambda_\alpha(\gamma) = \sum_{\mu=0}^{3} a_{\alpha\mu}\frac{d\gamma_\mu}{dt} + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_{\alpha\nu}\frac{d\Gamma_\nu}{dt} = 0, \ \forall \alpha = 0, 1, \cdots, n-1.$$

On est donc amené à résoudre, si $b_\alpha = -\sum_{\mu=0}^{3} a_{\alpha\mu}\frac{d\gamma_\mu(t)}{dt}$, le système

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} b_{\alpha\nu}\frac{d\Gamma_\nu}{dt} = b_\alpha,$$

la matrice $B = (b_{\alpha\nu})$ est inversible, donc

$$\left(\frac{d\Gamma_\nu}{dt}\right) = B^{-1}(b_\alpha).$$

On en déduit, $\frac{d\Gamma_\nu}{dt}$ et Γ_ν, l'unicité est fixé par l'état initiale $\mathcal{E}_0$. □

Definition 12. *Avec les notations précédentes, l'état final $\mathcal{E}_1$ de la particule est*

$$\mathcal{E}_1 = \Gamma(1).$$

On note pour une particule en $\omega \in \Omega$

$$\Omega_\omega = \{\gamma : I \to \Omega : \gamma(0) = \gamma(1) = \omega\}.$$

Pour chaque chemin $\gamma \in \Omega_\omega$, on peut définir un difféomorphisme de la fibre des états $\pi^{-1}(\omega)$ comme suit

$$H_\gamma(\mathcal{E}) = \Gamma_{\mathcal{E}}(1)$$

où $\Gamma_{\mathcal{E}}$ est l'unique relèvement Γ de γ pour l'état $\mathcal{E}$, c'est-à-dire, $\Gamma(0) = \mathcal{E}$. L'application d'holonomie associée est

$$H_\omega : \Omega_\omega \to \operatorname{Diff} \pi^{-1}(\omega), \ \gamma \to H_\omega(\gamma).$$

Proposition 3. *1)$H_\omega(\gamma_1\gamma_2) = H_\omega(\gamma_2) H_\omega(\gamma_1)$ et $H_\omega(\mathbf{1}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$.*
2)Si γ_1 et γ_2 sont homotopes $H_\omega(\gamma_1) = H_\omega(\gamma_2)$, l'application

$$\Pi : \pi_1(\Omega) \to \operatorname{Diff} \mathcal{F}, \ \Pi(\widetilde{\gamma}) = p_\omega \circ H_\omega(\gamma)$$

est homorphisme de groupe, p_ω est le difféomorphisme canonique de $\pi^{-1}(\omega)$ sur F.

Remark 13. *Dans l'hypothèse où le système de Pfaff $x \to \tau(x)$ est involutif, c'est-à-dire, quand la connexion ∇ est plate et si la fibre $\mathcal{F}$ est une variété fermée on peut reconstituer géométriquement l'espace total des états E,*

$$E \simeq \frac{\widetilde{\Omega} \times \mathcal{F}}{\pi_1(\Omega)}$$

$\widetilde{\Omega}$ représente le revêtement universel de l'univers Ω.

Si deux chemins γ_1 et γ_2 de Ω_ω sont homotopes alors

$$H_\omega(\gamma_1) = H_\omega(\gamma_2),$$

en particulier, si l'un des états de la particule est $\mathcal{E}$ en l'événement $\omega \in \Omega$, les autres états possibles de cette particule sont

$$H_\gamma(\mathcal{E}), \ \widetilde{\gamma} \in \pi_1(\Omega, \omega),$$

le groupe $\pi_1(\Omega, \omega)$ est discret et l'ensemble des états possibles de la particule est discret. Le groupe fondamental de l'univers Ω décrit l'ensemble des états d'une particule comme le groupe

$$G_{\omega,\mathcal{E}} = \{H_\omega(\gamma)(\mathcal{E}) : \widetilde{\gamma} \in \pi_1(\Omega, \omega)\},$$

muni du produit canonique induit par $\pi_1(\Omega, \omega)$. On pose

$$H_{\omega,\mathcal{E}} : \pi_1(\Omega, \omega) \to G_{\omega,\mathcal{E}} \text{ où } H_{\omega,\mathcal{E}}(\widetilde{\gamma}) = H_\omega(\gamma)(\mathcal{E}),$$

alors on a l'isomorphisme

$$G_{\omega,\mathcal{E}} \simeq \frac{\pi_1(\Omega, \omega)}{\ker(H_{\omega,\mathcal{E}})}.$$

3.4. **La relation fondamentale entre la connexion ∇ et la connexion généralisée.** Soit $\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$ un fibré d'état de l'univers Ω, pour chaque section s de ζ,

$$s : \Omega \to E,\ \pi \circ s = Id_{\Omega}$$

on a

$$Ts : T\Omega \longrightarrow TE,\ T\pi \circ Ts = Id_{T\Omega},$$

l'espace tangent $T_{s(\omega)}E$ contient l'espace tangent à la fibre E_{ω}, à savoir $T_{s(\omega)}E_{\omega}$, qui est le noyau de $T_{s(\omega)}\pi$ et est canoniquement isomorphe à E_{ω}. La suite

$$o \to E_{\omega} \to T_{s(\omega)}E \overset{T_{s(\omega)}\pi}{\to} T_{\omega}\Omega \to o$$

est exacte car $T\pi \circ Ts = Id_{T\Omega}$. Lorsque cette suite est scindée, c'est-à-dire, lorsque

$$T_{s(\omega)}E \simeq E_{\omega} \oplus T_{\omega}\Omega$$

tel que l'inclusion $E_{\omega} = E_{\omega} \times \{o\} \subset T_{s(\omega)}E$ soit l'inclusion $E_{\omega} \to T_{s(\omega)}E$ et la seconde projection

$$T_{s(\omega)}E \simeq E_{\omega} \oplus T_{\omega}\Omega \to T_{\omega}\Omega$$

soit égale à $T_{s(\omega)}\pi$, on en déduit alors, de

$$T_{\omega}s \in \operatorname{Hom}\left(T_{\omega}\Omega, T_{s(\omega)}E\right)$$

un élément de $\Lambda^1_{\omega}\Omega \otimes E_{\omega} \simeq \operatorname{Hom}\left(T_{\omega}\Omega, E_{\omega}\right)$ défini par

$$pr_{\omega} \circ T_{\omega}s,$$

pr_{ω} est la projection sur E_{ω} parallèlement à $T_{\omega}\Omega$ dans le scindage

$$T_{s(\omega)}E \simeq E_{\omega} \oplus T_{\omega}\Omega.$$

Si on se fixe un sous-fibré du fibré tangent de E, noté $\tau(E)$, tel que

$$T(E) = \ker T\pi \oplus \tau(E)$$

et une application $\theta : x \in E \to \theta(x)$, $\theta(x)$ est un isomorphisme de $\ker T_x\pi$ sur $E_{\pi(x)}$, c'est-à-dire, une section d'homomorphismes de fibrés vectoriels de base E, d'espace total respectivement

$$\cup_{x\in E} \ker T_x\pi \text{ et } \cup_{x\in E} \{x\} \times E_{\pi(x)},$$

de projection $\pi \mid_{\cup_{x\in E} \ker T_x\pi}$ pour le premier fibré, qui est un sous-fibré du fibré tangent à E et $p(x,u) = x$ pour le second fibré. Pour toute section s de ζ, la valeur de la connexion ∇ en s est

$$\nabla s = \theta \circ pr \circ Ts,$$

où pr est la projection sur $\ker T\pi$ parallèlement à $\tau(E)$. L'isomorphisme

$$\theta(x) : \ker T_x\pi \to E_{\pi(x)}$$

est défini par, si $in_{\pi(x)}$ est l'inclusion naturelle de $E_{\pi(x)}$ dans E,

$$T_x in_{\pi(x)} : T_x E_{\pi(x)} \to T_x E$$

est un isomorphisme de $T_x E_{\pi(x)}$ sur $\ker T_x\pi$ et

$$\theta(x) = pr_2(x) \circ \left(T_x in_{\pi(x)}\right)^{-1}$$

où

$$pr_{\pi(x)} : T_x E_{\pi(x)} = E_{\pi(x)} \times E_{\pi(x)} \to E_{\pi(x)},\ pr_{\pi(x)}(y,u) = u.$$

Theorem 5. *Une connexion est la donnée d'un scindage*

$$T_xE \simeq E_{\pi(x)} \oplus T_{\pi(x)}\Omega,$$

en tout point $x \in E$, variant de façon C^∞ avec x, qui est compatible avec la structure de fibré vectoriel de ζ.

Proof. La preuve est dans le théorème 2.3.2 [27]. □

Remark 14. *On note* $\ker(\zeta)$ *le fibré défini par*

$$\ker(\zeta) = (\cup_{x\in E} \ker T_x\pi, \pi, E, \mathcal{H}),$$

l'isomorphisme de fibré vectoriel θ permet de définir sur $\ker(\zeta)$ *une structure de fibré hermitien. Pour chaque x de E, $\theta(x)^{-1}$ transporte le produit hermitien de $E_{\pi(x)}$ sur $\ker T_x\pi$. Si τ est une connexion généralisée sur le fibré ζ, le fibré $\left(\cup_x \tau(x), \pi, E, \mathbb{R}^4\right)$ permet de définir sur E une métrique dont la forme quadratique est définie par,*

$$Q_E(X) = \langle X_1 \mid X_1\rangle + Q(T\pi(X_2)),$$

où Q est la forme quadratique associée à la pseudo-métrique riemannienne sur Ω et $X = X_1 + X_2 \in \ker T\pi \oplus \tau(E)$ pour tout champ X de E.

Sous certaines conditions, le fibré tangent de E permet de définir l'univers Ω comme une feuille de l'espace total E du fibré des états ζ. On veut donner un caractère symétrique aux dimensions. La dimension de la fibre de TE est $4+\dim\mathcal{H}$ pour un fibré d'état $\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$ de l'univers Ω. On munit E d'une pseudo-métrique riemannienne g, de signature $(4, \dim\mathcal{H})$. La connexion de Levi-Civita associée à la pseudo-métrique g définie une connexion généralisée

$$\tau : x \in E \to \tau(x) \subset T_xE,$$

si le système de Pfaff est involutif, il définit un feuilletage de l'espace total E.

Theorem 6. *Le système de Pfaff est involutif si et seulement si la courbure de la connexion associée R^∇ est nulle.*

Proof. La preuve est donnée dans [6]. □

Si on suppose que l'espace total E du fibré ζ est une variété parallélisable, il existe une connexion plate ∇. Le système de Pfaff associé est involutif, on peut feuilleter E, par des feuilles de dimension 4. Chaque feuille de ce fibré va décrire un exemplaire de Ω pour un choix convenable de ζ.

Definition 13. *Une pseudo-métrique riemannienne de signature* $(4, \dim\mathcal{H})$ *est "invariante" si la signature de la restriction de g, à chaque feuille $\mathcal{T}$ du feuilletage défini par τ, est constante. Une feuille $\mathcal{T}$ du feuilletage a pour pseudo-métrique $g\mid_{\mathcal{T}}$ qui est de signature (p, q) avec $p+q = 4$. Un fibré hermitien dont l'espace total est muni d'une pseudo-métrique de signature* $(4, \dim\mathcal{H})$*, invariante et plate est un fibré d'état stable.*

La feuille $\mathcal{T}$ de notre univers des états stables est une feuille de signature $(1, 3)$, la feuille de l'univers des états de signature $(2, 2)$ est l'univers mixte, la dimension temps est la même que celle d'espace. La signature $(0, 4)$ est une feuille état de type riemannien, le temps est de dimension nulle et enfin les feuilles d'états de signature $(3, 1)$ donne une dimension d'espace. On peut se poser la question de savoir si l'univers Ω est modelé sur $\mathbb{C}^k$, $k \geqslant 2$. On fait appel aux dimensions

complexes en interprétant la notion de dimension espace comme une dimension de partie imaginaire nulle et la dimension temps étant une dimension de partie réelle nulle. Si on ne fait pas d'hypothèse "*d'invariance*" la notion d'espace et de temps varie localement.

3.5. **Les espaces de Sobolev attachés aux fibrés des états.** Chaque fibré d'état

$$\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$$

de l'univers Ω est muni d'une section hermitienne, notée $\langle \bullet \mid \bullet \rangle$. Les fibres sont munies d'un produit scalaire hermitien. L'univers Ω est muni d'une orientation et d'une mesure Lebesguienne μ. En générale, cette mesure Lebesguienne est définie par une métrique pseudo-riemannienne g. On identifie chaque section s, à la classe des sections qui sont μ presque partout égales à s. Une section s est nulle μ-presque partout, si

$$\mu\left(\{\omega \in \Omega : s(\omega) \neq o_\omega\}\right) = 0.$$

On définit le produit scalaire

$$\langle s \mid t \rangle_\mu = \int_\Omega \langle s \mid t \rangle \, \mu,$$

s et t sont deux sections de ζ. Si ∇ est une connexion sur le fibré ζ et γ une section de Dirac sur ζ, on définit pour une section s la norme d'ordre p,

$$\|s\|_p = \sqrt[p]{\int_\Omega |s|^p \, \mu}$$

avec, $|s| = \sqrt{\langle s \mid s \rangle}$ et on pose

$$\|s\|_{m,p} = \left(\sum_{k=0}^{m} \left\| \nabla_\gamma^k s \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \; 1 \leqslant p < +\infty \text{ et } \nabla_\gamma^0 s = s$$

avec

$$\nabla_\gamma^n = \gamma_n \otimes \nabla_{n-1}$$

et

$$\nabla_\gamma^0 = Id.$$

Le sous-espace de $\Gamma(\zeta)$, noté $\Gamma^{m,p}(\zeta)$, est

$$\Gamma^{m,p}(\zeta) = \left\{ \phi \in \Gamma(\zeta) : \|s\|_{m,p} < +\infty \right\}.$$

Les espaces de type Sobolev attachés au fibré hermitien ζ sont définis par la complétion des espaces normés $\Gamma^{m,p}(\zeta)$ et sont notés

$$\mathcal{W}^{m,p}(\zeta).$$

Par construction, ces espaces sont des espaces de Banach. Si on pose

$$\mathcal{H}^m(\zeta) = \mathcal{W}^{m,2}(\zeta),$$

les espaces obtenus sont des espaces d'Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle s \mid t \rangle_m = \sum_{k=0}^{m} \int_\Omega \left\langle \nabla_\gamma^k s \mid \nabla_\gamma^k t \right\rangle \mu.$$

Remark 15. *Les espaces de Hilbert $\mathcal{H}^m(\zeta)$ sont définis pour l'étude spectrale de l'extension de la dérivée de Lie aux champs complexes en identifiant $\mathcal{L}_X$ à un opérateur*

$$\mathcal{L}_X : \mathcal{H}^m(\zeta) \to \mathcal{H}^m(\zeta), \ \mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$$

avec $E(\zeta) = T\Omega \otimes \mathbb{C}$.

Si on veut déterminer toutes les équations d'évolution d'ordre n du fibré des états $\zeta|_U$ où U est un ouvert Ω, il suffit de regarder l'opérateur d'évolution

$$H_n = \gamma_n \otimes \nabla_{n-1}$$

comme un endomorphisme de l'espace de Banach $\mathcal{W}^{n,p}(\zeta|_U)$. Si cet endomorphisme est diagonalisable pour au moins un réel $p \geqslant 1$, on en déduit toutes les équations d'évolution possibles des sections s de $\mathcal{W}^{n,p}(\zeta|_U)$. On généralise la notion d'opérateur d'évolution comme un opérateur diagonalisable de $\mathcal{W}^{n,p}(\zeta|_U)$ qui devient une observable si $p = 2$.

On va étendre cette notion d'espace de Sobolev en définissant les espaces L^p d'un fibré et en présentant une théorie des distributions sur les fibrés. Dans la suite, l'ensemble des sections, non nécessairement différentiables, du fibré ζ est noté $\mathcal{S}(\zeta)$. On note

$$\mathcal{L}^p(\zeta, \mu) = \left\{ s \in \mathcal{S}(\zeta) : \int_\Omega |s|^p \mu < +\infty \right\},$$

où $|s| = \sqrt{\langle s \mid s \rangle}$ est μ-mesurable. $\mathcal{O}$ est le sous-espace vectoriel formé par les sections nulles μ presque partout. L'espace $L^p(\zeta, \mu)$ est

$$L^p(\zeta, \mu) = \frac{\mathcal{L}^p(\zeta, \mu)}{\mathcal{O}}.$$

Proposition 4. *$L^p(\zeta, \mu)$ est espace de Banach pour la norme $\|s\|_p = \sqrt[p]{\int_\Omega |s|^p \, d\mu}$ et $L^2(\zeta, \mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\langle s \mid t \rangle_\mu = \int_\Omega \langle s \mid t \rangle \mu.$$

On se propose de définir une théorie des distributions sur les fibrés d'états. Pour cela, on introduit l'espace vectoriel des sections test, défini par

$$\mathcal{D}(\zeta) = \{ s \in \Gamma(\zeta) : \operatorname{supp}(s) \text{ est compact} \},$$

on rappelle que

$$\operatorname{supp}(s) = \operatorname{Adh}\{ \omega : s(\omega) \neq o_\omega \}.$$

Definition 14. *Une distribution D est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\zeta)$. L'ensemble des distributions sur ζ est noté $\mathcal{D}'(\zeta)$.*

Pour une section $s \in \mathcal{S}(\zeta)$, localement intégrable, c'est-à-dire, une section s telle que pour tout compact K de Ω

$$\int_K |s| \mu < +\infty$$

on définit la distribution

$$D_s(t) = \langle D_s, t \rangle = \int_\Omega \langle s \mid t \rangle \mu. \tag{3.5}$$

Proposition 5. *$D_s = o$ si et seulement si $s = o$ μ-presque partout.*

On a une inclusion naturelle de $\frac{\mathcal{S}_{\mathrm{loc}}(\zeta)}{\mathcal{O}}$ dans $\mathcal{D}'(\zeta)$ où $\mathcal{S}_{\mathrm{loc}}(\zeta)$ est l'ensemble des sections localement intégrables. On a

$$L^p(\zeta,\mu) \subset \frac{\mathcal{S}_{\mathrm{loc}}(\zeta)}{\mathcal{O}},$$

et un plongement naturel de $L^p(\zeta,\mu)$ dans $\mathcal{D}'(\zeta)$. On identifiera $L^p(\zeta,\mu)$ et son image dans $\mathcal{D}'(\zeta)$.

Remark 16. *1)Si 3.5 est vérifiée, on dit que la distribution est régulière et on identifie D_s à s. Dans cette situation, on note $\langle D_s, t\rangle = \langle s \mid t\rangle_\Omega$.*

2)$D_{\lambda s} = \overline{\lambda} D_s$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definition 15. *Le produit scalaire hermitien $\langle \bullet \mid \bullet\rangle$ est parallèle à la connexion ∇ si et seulement si pour tout champ X de Ω et pour toutes sections s et t de $\Gamma(\zeta)$*

$$X.\langle s \mid t\rangle = \langle \nabla_X s \mid t\rangle + \langle s \mid \nabla_X t\rangle, \tag{3.6}$$

où $X.\langle s \mid t\rangle$ est la dérivée de Lie le long du champ X de la C^∞-application

$$\omega \to \langle s(\omega) \mid t(\omega)\rangle_\omega .$$

Theorem 7. *Si le produit scalaire $\langle \bullet \mid \bullet\rangle$ est parallèle à la connexion ∇ alors*

$$\langle \nabla_X s, t\rangle = -\langle s \mid \mathrm{div}(X)\, t + \nabla_X t\rangle_\mu ,$$

pour toutes sections test t et toute section $s \in \Gamma(\zeta)$.

Proof. Il suffit de vérifier que dans les hypothèses du théorème

$$I = \int_\Omega L_X(f)\,\mu = -\int_\Omega f\,\mathrm{div}(X)\,\mu$$

pour toute C^∞-fonction f à support compact avec $L_X(f)$ est la dérivée de Lie le long du champ X de f. On peut se ramener à une carte en utilisant une partition de l'unité associé à un recouvrement de cartes U. Dans le local frame $\{\partial_\nu\}$ associé à la carte U, de dual $\{d^\nu\}$ la forme volume μ s'écrit

$$\mu = \theta d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \wedge d^4$$

avec θ fonction de classe C^∞, non nulle, sur U. On a, si $X = X^\nu \partial_\nu$

$$I = \int_U X^\nu(\partial_\nu f)\,\theta d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \wedge d^4$$

et

$$I = \int_U \partial_\nu(X^\nu f\theta)\, d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \wedge d^4 - \int_U f\partial_\nu(X^\nu\theta)\, d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \wedge d^4.$$

La fonction f est à support compact dans U, donc

$$\int_U \partial_\nu(X^\nu f\theta)\, d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \wedge d^4 = 0.$$

Ensuite on écrit

$$\begin{aligned}
&\int_U f\partial_\nu(X^\nu\theta)\, d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \wedge d^4 \\
&= \int_U f(\theta\partial_\nu X^\nu + d\theta(X))\, d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \wedge d^4 \\
&= \int_U f\left(\partial_\nu X^\nu + \frac{d\theta(X)}{\theta}\right)\mu
\end{aligned}$$

On en déduit $I = -\int_U f \operatorname{div}(X)\,\mu$ car $\operatorname{div}(X) = \partial_\nu X^\nu + \frac{d\theta(X)}{\theta}$ dans le local frame $\{\partial_\nu\}$. □

Definition 16. $\operatorname{div}(X) = \operatorname{div}_\mu(X)$ *est la divergence de* X *associée à la forme volume* μ*, c'est-à-dire,* $\mathcal{L}_X(\mu) = \operatorname{div}(X).\mu$.

Si le produit scalaire est parallèle à la connexion, cela permet de définir la dérivée covariante d'une distribution D de ζ, le long d'un champ X par

$$\langle \nabla_X D, t\rangle = -\langle D, \operatorname{div}(X)\,t + \nabla_X t\rangle$$

pour tout $t \in \mathcal{D}(\zeta)$. On peut étendre la notion de dérivée covariante d'une section s localement intégrable quelconque, au sens des distributions le long du champ X, notée encore $\nabla_X s$, telle que

$$\nabla_X s = \nabla_X D_s.$$

Cette notion étend la notion de dérivée covariante, $\nabla_X s \in \mathcal{D}'(\zeta)$ car

$$\nabla_X s = -D \circ T_X$$

où

$$T_X(t) = \operatorname{div}(X)\,t + \nabla_X t,$$

qui est un opérateur borné de $\mathcal{D}(\zeta)$, pour tout compact $K \subset \Omega$, la restriction à K de

$$\nabla : (X, t) \to \nabla_X t$$

est continue pour les normes définies plus haut.

Proposition 6. *1)*$\langle \nabla_{fX} D, t\rangle = \langle \nabla_X D, ft\rangle$ *pour toute* C^∞*-application* f
2)$\nabla_X(fD) = f\nabla_X D$.

Proof. La seule difficulté est de vérifier 1). On a

$$\langle \nabla_{fX} D, t\rangle = -\langle D, \operatorname{div}(fX)\,t + \nabla_{fX} t\rangle$$
$$\operatorname{div}(fX)\,t + \nabla_{fX} t = (f\operatorname{div}(X) + df(X))\,t + f\nabla_X t$$
$$(f\operatorname{div}(X) + df(X))\,t + f\nabla_X t = \operatorname{div}(X)\,ft + \nabla_X(ft).$$

On en déduit

$$\langle \nabla_{fX} D, t\rangle = -\langle D, \operatorname{div}(X)\,ft + \nabla_X(ft)\rangle = \langle \nabla_X D, ft\rangle.$$

Cette égalité peut s'écrire si

$$H_f(t) = ft,\ H_f(t)(\omega) = f(\omega)\,t(\omega),$$
$$\nabla_{fX} D = \nabla_X D \circ H_f.$$

□

Remark 17. *On dit que* H_f *est une homothétie de rapport* f*. Avec cette notation,*

$$\nabla_X \circ H_f = H_f \circ \nabla_X \ \textit{sur}\ \mathcal{D}'(\zeta).$$

On se donne une famille de champs de Ω

$$\partial = \{\partial_j\}_{j\in\{1,\cdots,q\}},$$

et pour tout k-uplets tels que

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k \text{ et } \nu = (\nu_1, \cdots, \nu_k) \text{ avec } \nu_j \neq \nu_{j+1} \text{ et } \nu_j \in \{1, \cdots, q\}$$

on définit les opérateurs

$$\nabla_\nu^\alpha = \nabla_{\nu_1}^{\alpha_1} \circ \cdots \circ \nabla_{\nu_k}^{\alpha_k} \text{ où } \nabla_j^\alpha = \nabla_{\partial_j} \circ \cdots \circ \nabla_{\partial_j},$$

la composition se fait sur α opérateurs égaux à ∇_{∂_j}, avec $\nabla_\nu^0 = Id$ et les dérivées covariantes sont prises au sens des distributions. L'espace de Sobolev $W_\partial^{m,p}(\zeta)$ est le complété de

$$\{s \in L^p(\zeta,\mu) : \nabla_\nu^\alpha s \in L^p(\zeta,\mu),\ |\alpha| \leqslant m\ \}$$

pour la norme

$$\|s\|_\partial^{m,p} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\nabla_\nu^\alpha s\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leqslant p < +\infty, \\ \sup\{\|\nabla_\nu^\alpha s\|_\infty : |\alpha| \leqslant m\} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

le nombre d'opérateurs ∇_ν^α pour α fixé est $4 \times 3^{k-1}$ si $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$, $\|s\|_\partial^{m,p}$ est une norme.

Remark 18. *$\nabla_\nu^\alpha s$ est une composée de dérivations prises dans le sens des distributions.*

Remark 19. *Dans le cas de $T(\mathbb{R}^4)$ où $\mathbb{R}^4$ est muni de la mesure de Lebesgue μ et ∂ est formé des dérivations $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$, on retombe sur les espaces de Sobolev de $\mathbb{R}^4$.*

3.6. **Quantification des fibrés des états de l'univers.** Il y a deux procédés de quantification d'un fibré des états de Ω. Le premier consiste à travailler globalement sur les sections du fibré qui ont un carré intégrable, cette approche nécessite l'apport d'une forme volume μ. On peut, ainsi, construire l'espace de Hilbert $L^2(\zeta,\mu)$, ensuite construire l'espace de Fock associé à cet espace de Hilbert et utiliser les procédés de quantification habituels. L'autre procédé ne fait pas intervenir de forme volume, on travaille sur chaque fibre et on procède à une quantification fibre à fibre. On s'intéresse, dans un premier temps à ce procédé de quantification.

Soit $\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$ un fibré d'état de l'univers Ω, on note $\otimes^n\zeta$, le produit tensoriel d'ordre n de ζ et $\otimes^0\zeta = (\Omega \times \mathbb{C}, \pi_1, \Omega, \mathbb{C})$ le fibré trivial de fibre $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{S}_n(\zeta)$, le symétrisé de $\otimes^n\zeta$ et $\mathcal{A}_n(\zeta)$, l'antisymétrisé de $\otimes^n\zeta$. L'espace de Bose-Fock de ζ est la somme de Whitney infinie et complète des symétrisés $\mathcal{S}_n(\zeta)$

$$\mathcal{F}_+(\zeta) = (\cup_{\omega\in\Omega}\mathcal{F}_+(\zeta)(\omega), \pi, \Omega, \mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$$

c'est-à-dire, pour chaque $\omega \in \Omega$,

$$\mathcal{F}_+(\zeta)(\omega) = \left\{ u = \left\{u^{(n)}\right\}_{n=0}^\infty : u^{(n)} \in \mathcal{S}_n(E_\omega(\zeta)), \sum_{n=0}^\infty \left\|u^{(n)}\right\|_\omega^2 < \infty \right\}$$

$\mathcal{S}_n(E_\omega(\zeta))$ est le symétrisé d'ordre n de la fibre $E_\omega(\zeta)$ munit du produit hermitien induit par le produit hermitien de $E_\omega(\zeta)$, noté $\langle \bullet \mid \bullet \rangle_\omega$, et l'espace de Fermi-Fock est la somme de Whitney infinie et complète des antisymétrisés $\mathcal{A}_n(\zeta)$

$$\mathcal{F}_-(\zeta) = (\cup_{\omega\in\Omega}\mathcal{F}_-(\zeta)(\omega), \pi, \Omega, \mathcal{F}_-(\mathcal{H})).$$

Les espaces de Bose-Fock et de Fermi-Fock ont une structure de fibré hermitien sur Ω. L'espace de Bose-Fermi-Fock d'une paire de fibrés (ζ, ξ) est défini par le produit tensoriel des fibrés $\mathcal{F}_+(\zeta)$ et $\mathcal{F}_-(\xi)$

$$\mathcal{F}(\zeta,\xi) = \mathcal{F}_+(\zeta) \otimes \mathcal{F}_-(\xi),$$

c'est le fibré de Bose-Fermi-Fock associé à la paire (ζ, ξ) des fibrés d'état de l'univers Ω.

Si on prend n sections $s_1, \cdots, s_n$, le symétrisé s'écrit

$$\mathcal{S}_n(s_1 \otimes \cdots \otimes s_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}\{1,\cdots,n\}} s_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes s_{\sigma(n)}$$

et l'antisymétrisé s'écrit

$$\mathcal{A}_n(s_1 \otimes \cdots \otimes s_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}\{1,\cdots,n\}} \varepsilon(\sigma)\, s_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes s_{\sigma(n)}.$$

Remark 20. *Le fibré $\otimes^n \zeta$ a pour fibre $\otimes^n \mathcal{H}$ et chaque fibre est donnée par*

$$E_\omega(\otimes^n \zeta) = \otimes^n E_\omega(\zeta).$$

On note $\mathcal{C}(\zeta, \xi)$, l'ensemble des applications L

$$\omega \to L(\omega) : E_\omega(\zeta) \to E_\omega(\xi),$$

pour chaque $\omega \in \Omega$, $L(\omega)$ est un opérateur de $E_\omega(\zeta)$ dans $E_\omega(\xi)$ qui est densément défini et fermé. Ponctuellement,

$$\mathrm{dom}(L) = \{\mathrm{dom}(L(\omega)) : \omega \in \Omega\}$$

est formé de l'ensemble de tous les domaines des opérateurs

$$L(\omega) : E_\omega(\zeta) \to E_\omega(\xi).$$

L'application L est C^∞ dans le sens suivant, pour chaque section $s \in \mathcal{S}(\zeta)$ vérifiant $s(\omega) \in \mathrm{dom}(L(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$, l'application

$$\omega \to L(\omega)(s(\omega)) = L \otimes s(\omega)$$

est une section de $\mathcal{S}(\xi)$. Les sections telles que $s(\omega) \in \mathrm{dom}(L(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$, forment un sous-ensemble des sections de $\mathcal{S}(\zeta)$, noté

$$\mathrm{dom}\left(\widetilde{L}\right) = \{s \in \mathcal{S}(\zeta) : s(\omega) \in \mathrm{dom}(L(\omega)), \forall \omega \in \Omega\},$$

où l'application $\widetilde{L}$ est définie par

$$\widetilde{L} : \mathrm{dom}\left(\widetilde{L}\right) \subset \mathcal{S}(\zeta) \to \mathcal{S}(\xi),\ \widetilde{L}(s) = L \otimes s.$$

Definition 17. *Si L est densément défini l'adjoint de $L \in \mathrm{Hom}(\zeta, \xi)$ est l'opérateur $L^* \in \mathrm{Hom}(\xi, \zeta)$ qui vérifie*

$$\langle L^* \otimes s \mid t \rangle_\zeta = \langle s \mid L \otimes t \rangle_\xi$$

pour toute section $s \in \mathrm{dom}\left(\widetilde{L^*}\right)$ et $t \in \mathrm{dom}\left(\widetilde{L}\right)$. On a pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\langle L^*(\omega)\, s(\omega) \mid t(\omega) \rangle_{\omega,\zeta} = \langle s(\omega) \mid L(\omega)\, t(\omega) \rangle_{\omega,\xi}.$$

L'espace $\mathrm{dom}\left(\widetilde{L^*}\right)$ est formé des sections $s \in \mathcal{S}(\xi)$ pour lesquelles il existe une section $\tau \in \mathcal{S}(\zeta)$ telle que

$$\langle \tau \mid t \rangle_\zeta = \langle s \mid L \otimes t \rangle_\xi$$

pour tout $t \in \mathrm{dom}\left(\widetilde{L}\right)$. Si L est densément défini τ est unique et on pose $L^* \otimes s = \tau$.

Remark 21. *L'opérateur adjoint associé à L est entiérement défini par*

$$\langle L^*(\omega)(v) \mid w \rangle_{\omega,\zeta} = \langle v \mid L(\omega)(w) \rangle_{\omega,\xi},\ \forall w \in E_\omega(\zeta),\ \forall v \in E_\omega(\xi) \text{ et } \forall \omega \in \Omega.$$

Proposition 7. *Si L est fermé et densément défini alors L^* est fermé et densément défini. Dans ce cas $L^{**} = L$.*

Proof. On peut consulter [1],[2] pour une preuve sur chaque fibre du fibré. □

Notation 1. *Pour un opérateur $L \in \mathrm{Hom}(\zeta)$, on pose $\mathrm{Im}(L) = \{\mathrm{Im}(L(\omega)) : \omega \in \Omega\}$ l'ensemble des images de L, $\mathrm{Ker}(L) = \{\mathrm{Ker}(L(\omega)) : \omega \in \Omega\}$ est l'ensemble des noyaux de L. Les sous-ensembles de $\mathbb{C}$, $\rho(L) = \{\rho(L(\omega)) : \omega \in \Omega\}$ forme la résolvante de L, elle est formée des sous-ensembles $\rho(L(\omega))$ définis par*

$$\rho(L(\omega)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : L(\omega) \text{ est injective}, \mathrm{Im}(L(\omega)) \text{ est dense et } L(\omega) - \lambda \mathbf{I}_\omega \text{ est borné}\}$$

où $\mathbf{I}_\omega$ est l'application identique sur la fibre $E_\omega(\zeta)$.

$\sigma(L) = \{\sigma(L(\omega)) : \omega \in \Omega\}$ est l'ensemble des spectres $\sigma(L(\omega)) = \mathbb{C} \smallsetminus \rho(L(\omega))$ et $\sigma_p(L) = \{\sigma_p(L(\omega)) : \omega \in \Omega\}$ où $\sigma_p(L(\omega))$ est l'ensemble des valeurs propres de $L(\omega)$.

Definition 18. *Une fonction $\phi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ est propre pour L si $\phi(\omega) \in \sigma_p(L(\omega))$, ϕ est une résolvante de L si $\phi(\omega) \in \rho(L(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$. La fonction ϕ est spectrale si $\phi(\omega) \in \sigma(L(\omega))$.*

Proposition 8. *Si L est densément défini alors $\ker L^* = \mathrm{Im}(L)^\perp$, c'est-à-dire, pour tout $\omega \in \Omega$*

$$\ker L^*(\omega) = \mathrm{Im}(L(\omega))^\perp$$

l'orthogonalité est définie dans l'espace de Hilbert $E_\omega(\xi)$.

Si $L \in \mathcal{C}(\zeta, \xi)$ alors l'opérateur de $\mathbf{I}_\zeta + L^*L$ de $\mathrm{Hom}(\zeta)$ est un opérateur injectif,

$$\ker(\mathbf{I}_\zeta + L^*L) = (\Omega \times o, \pi_1, \Omega, o)$$

et

$$\mathrm{Im}(\mathbf{I}_\zeta + L^*L) = \zeta,$$

ponctuellement, cela signifie que

$$\ker\left(\mathbf{I}_{E_\omega(\zeta)} + L(\omega)^* L(\omega)\right) = \{o_\omega\}$$

et

$$\mathrm{Im}\left(\mathbf{I}_{E_\omega(\zeta)} + L(\omega)^* L(\omega)\right) = E_\omega(\zeta).$$

L'opérateur $(\mathbf{I}_\zeta + L^*L)^{-1}$ est positif et L^*L est autoadjoint avec $\sigma(L^*L) \subset \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire, $\sigma\left(L(\omega)^* L(\omega)\right) \subset \mathbb{R}^+$ pour tout $\omega \in \Omega$.

On travaille dorénavant sur les sections des fibrés considérés précédemment. Chaque section s de $\mathcal{F}_+(\zeta)$ s'écrit

$$s = \left\{s^{(n)}\right\},$$

où $s^{(n)}$ est une section de $\mathcal{S}_n(\zeta)$ que l'on peut identifier à une section de $\mathcal{F}_+(\zeta)$

$$\left\{o, \cdots, o, s^{(n)}, o, \cdots\right\}.$$

La section vide de l'espace de Bose-Fock est la section constante $\mathbf{1}_+$ définie par

$$\mathbf{1}_+ = \{\mathbf{1}, \mathbf{o}, \mathbf{o}, \cdots\}$$

qui s'écrit ponctuellement,

$$\mathbf{1}_+(\omega) = \{1, o_\omega, o_\omega, \cdots\}.$$

Pour chaque section s de $\mathcal{S}(\zeta)$, il existe un unique opérateur linéaire $a(s)$ densément défini et fermé sur $\mathcal{F}_+(\zeta)$, non borné, appelé annulateur de Bose, son adjoint est l'opérateur $a(s)^*$. Il vérifie les propriétés

$$1)\ \left(a(s)^* \otimes \mathbf{t}\right)^{(0)} = o,$$

$$2)\ \left(a(s)^* \otimes \mathbf{t}\right)^{(n)} = \sqrt{n}\mathcal{S}_n\left(s \otimes \mathbf{t}^{(n-1)}\right) \text{ pour tout } n \geqslant 1 \text{ et } \mathbf{t} \in \operatorname{dom}\left(\widetilde{a(s)^*}\right). \tag{3.7}$$

Ponctuellement pour chaque $u \in E_\omega(\zeta)$, l'opérateur $a(u)$ a pour adjoint $a(u)^*$ qui s'écrit

$$a(u)^*\left(\left\{\mathbf{v}^{(n)}\right\}\right) = \left\{o, \left\{\sqrt{n}\mathcal{S}_n\left(u \otimes \mathbf{v}^{(n-1)}\right)\right\}_{n\geqslant 1}\right\}$$

où $\mathcal{S}_n\left(u \otimes \mathbf{v}^{(n-1)}\right)$ est le symétrisé de $u \otimes \mathbf{v}^{(n-1)}$ pour tout $\left\{\mathbf{v}^{(n-1)}\right\} \in \mathcal{F}_+(\zeta)(\omega)$.

Remark 22. *L'opérateur $a(s)^*$ est défini en prenant pour chaque $\omega \in \Omega$, l'adjoint de l'opérateur*

$$a(s)(\omega) : \mathcal{F}_+(\zeta)(\omega) \to \mathcal{F}_+(\zeta)(\omega),$$

sur chaque fibre $\mathcal{F}_+(\zeta)(\omega)$.

On a

$$a(s) \otimes \mathbf{1}_+ = \mathbf{o} \text{ pour toute section } s \in \mathcal{S}(\xi),$$

où $\mathbf{o}(\omega) = (0, o_\omega, o_\omega, \cdots)$.

Pour chaque section s de $\mathcal{S}(\xi)$, il existe un unique opérateur linéaire $b(s)$ sur $\mathcal{F}_-(\xi)$ appelé annulateur de Fermi tel que

$$1)\ \operatorname{dom}(b(s)) = \mathcal{F}_-(\xi) \text{ et } \|b(s)(\omega)\| = \|s(\omega)\|_\omega \text{ pour tout } \omega \in \Omega,$$

l'adjoint $b(s)^*$ vérifie

$$2)\ \left(b(s)^* \otimes \mathbf{t}\right)^{(0)} = \mathbf{o} \text{ et } \left(b(s)^* \otimes \mathbf{t}\right)^{(n)} = \sqrt{n}\mathcal{A}_n\left(s \otimes \mathbf{t}^{(n-1)}\right),\ n \geqslant 1 \text{ et } \mathbf{t} \in \mathcal{F}_-(\xi),$$

$\mathcal{A}_n\left(s \otimes \mathbf{t}^{(n-1)}\right)$ est l'antisymétrisé d'ordre n de $s \otimes \mathbf{t}^{(n-1)}$. Ponctuellement, pour chaque $u \in E_\omega(\xi)$, l'opérateur $b(u)$ a pour adjoint $b(u)^*$ qui vérifie

$$b(u)^*\left(\left\{\mathbf{v}^{(n)}\right\}\right) = \left\{0, \left\{\sqrt{n}\mathcal{A}_n\left(u \otimes \mathbf{v}^{(n-1)}\right)\right\}_{n\geqslant 1}\right\},\ \left\{\mathbf{v}^{(n)}\right\} \in \mathcal{F}_-(\xi)(\omega).$$

On a les anticommutations canoniques suivantes

$$\left[b(s), b(t)^*\right] = \langle s \mid t\rangle \mathbf{I},$$
$$\{b(s), b(t)\} = \mathbf{o},$$

pour toute section $s \in \mathcal{S}(\xi)$ et $t \in \mathcal{S}(\xi)$. En particulier,

$$b(s)^2 = \mathbf{o},\ s \in \mathcal{S}(\xi).$$

La section vide de l'espace de Fermi-Fock est la section constante $\mathbf{1}_-$ définie par

$$\mathbf{1}_- = \{\mathbf{1}, \mathbf{o}, \mathbf{o}, \cdots\}$$

ponctuellement,

$$\mathbf{1}_-(\omega) = \{1, o_\omega, o_\omega, \cdots\}$$

cette section vide vérifie

$$b(s) \otimes \mathbf{1}_- = \mathbf{o} \text{ pour toute section } s \in \mathcal{S}(\xi).$$

On introduit un opérateur différentiel extérieur sur les fibrés des états de la façon suivante. Soit $L \in \mathcal{C}(\zeta, \xi)$, on pose

$$\mathcal{D}_L^\infty = \mathrm{Vect}\left\{ a(s_1)^* \cdots a(s_n)\, \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^*\, \mathbf{1}_- : s_j \in \mathcal{C}^\infty(L^*L) \text{ et } t_k \in \mathcal{C}^\infty(LL^*) \right\}$$

où

$$\mathcal{C}^\infty(T) = \cap_{n=1}^\infty \mathrm{dom}\left(\widetilde{T^n}\right) \text{ pour } T \in \mathrm{Hom}(\zeta) \text{ ou } T \in \mathrm{Hom}(\xi).$$

Proposition 9. *Il existe un unique opérateur linéaire d_L, densément défini et fermé sur $\mathcal{F}(\zeta, \xi)$ tel que*

$$1) \mathcal{D}_L^\infty \subset \mathrm{dom}(d_L) \text{ et } \mathcal{D}_L^\infty \text{ est un coeur de } d_L,$$

pour chaque section $\mathbf{s} \in \mathcal{D}_L^\infty$ de la forme

$$\mathbf{s} = a(s_1)^* \cdots a(s_n)^*\, \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^*\, \mathbf{1}_-$$

alors

$$2) d_L \mathbf{s} = \mathbf{o} \text{ pour } n = 0$$

$$d_L \mathbf{s} = \sum_{j=1}^n a(s_1)^* \cdots \widehat{a(s_j)^*} \cdots a(s_n)^*\, \mathbf{1}_+ \otimes b(L \otimes s_j)^*\, b(t_1)^* \cdots b(t_p)^*\, \mathbf{1}_-,$$

d_L laisse invariant $\mathcal{D}_L^\infty$.

De plus,

$$3) \mathcal{D}_L^\infty \subset \mathrm{dom}(d_L^*)$$

et

$$d_L^* \mathbf{s} = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1}\, a(L^* \otimes u_k)^*\, a(s_1)^* \cdots a(s_n)^*\, \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_k)^* \cdots b(t_p)^*\, \mathbf{1}_-$$

pour tout $\mathbf{s} = a(s_1)^* \cdots a(s_n)^*\, \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^*\, \mathbf{1}_-$. Dans le cas $p = 0$, on a

$$d_L^* \mathbf{s} = \mathbf{o},$$

en particulier, d_L^* laisse invariant $\mathcal{D}_L^\infty$.

$$4) \mathrm{dom}\left(d_L^2\right) = \mathrm{dom}(d_L) \text{ et pour tout } \mathbf{s} \in \mathrm{dom}(d_L),\ d_L^2 \mathbf{s} = \mathbf{o}.$$

Si T est un opérateur linéaire borné de $\mathrm{Hom}(\zeta, \xi)$ avec $\mathrm{dom}(T) = \mathcal{S}(\zeta)$ alors pour tout $\mathbf{s} \in \mathcal{D}_L^\infty$ et α, $\beta \in C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$,

$$5) \alpha d_L \mathbf{s} + \beta d_T \mathbf{s} = d_{\alpha L + \beta T} \mathbf{s}.$$

Proof. Il suffit de vérifier que la propriété est vraie sur chaque fibre des fibrés considérés. La démonstration sur une fibre du fibré est donnée dans [1]. □

Definition 19. *L'opérateur de Dirac sur $\mathcal{F}(\zeta, \xi)$ est défini par*

$$Q_L = d_L + d_L^*$$

avec $\mathrm{dom}(Q_L) = \mathrm{dom}(d_L) \cap \mathrm{dom}(d_L^*)$.

L'opérateur de Laplace-Beltrami sur $\mathcal{F}(\zeta, \xi)$ est

$$\Delta_L = d_L d_L^* + d_L^* d_L.$$

Pour un opérateur autoadjoint T de $\mathrm{Hom}(\zeta)$, c'est-à-dire, pour tout $\omega \in \Omega$, l'opérateur

$$T(\omega) : E_\omega(\zeta) \to E_\omega(\zeta)$$

est autoadjoint pour la structure d'espace de Hilbert sur chaque fibre, on pose

$$\widehat{T}^{(n)} : \otimes^n \zeta \to \otimes^n \zeta$$

défini par

$$\widehat{T}^{(0)} = \mathbf{o}$$

et

$$\widehat{T}^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{I} \otimes \cdots \otimes \mathbf{I} \otimes T \otimes \mathbf{I} \otimes \ldots \otimes \mathbf{I},\ n \geqslant 1$$

où T se trouve à la j-ième place et

$$\mathbf{I} : \omega \to \mathbf{I}(\omega) = Id_{E_\omega(\zeta)}.$$

La seconde quantification de T sur $\mathcal{F}(\zeta)$ est

$$\widehat{T} = \oplus_{n=0}^{\infty} \widehat{T}^{(n)}$$

qui est un opérateur autoadjoint, il suit que pour tout $\omega \in \Omega$, $0 \in \sigma_p\left(\widehat{T}(\omega)\right)$, $\mathbf{1}(\omega) \in \ker\left(\widehat{T}(\omega)\right)$. La fonction constante identiquement nulle est une fonction propre de $\widehat{T}$. L'opérateur $\widehat{T}$ est stable sur $\mathcal{F}_+(\zeta)$ et $\mathcal{F}_-(\zeta)$, on pose

$$\widehat{T}_+ = \widehat{T}\mid_{\mathcal{F}_+(\zeta)} \text{ et } \widehat{T}_- = \widehat{T}\mid_{\mathcal{F}_-(\zeta)},$$

ces opérateurs sont autoadjoints et la fonction identiquement nulle est propre pour $\widehat{T}_+$ et $\widehat{T}_-$ car $\mathbf{1}_\pm(\omega) \in \ker\left(\widehat{T}_\pm(\omega)\right)$. L'opérateur nombre sur $\mathcal{F}_-(\xi)$ est défini par

$$N = \widehat{\mathbf{I}}_- = \oplus_{n=0}^{\infty} (n \otimes^n \mathbf{I})\mid_{\mathcal{F}_-(\xi)},$$

et on pose

$$(-1)_-^N = \oplus_{n=0}^{\infty} ((-1)^n \otimes^n \mathbf{I})\mid_{\mathcal{F}_-(\xi)}.$$

Soit Γ l'opérateur de $\mathcal{F}(\zeta, \xi)$

$$\Gamma = \mathbf{I}_{\mathcal{F}_+(\zeta)} \otimes (-1)_-^N,$$

c'est un opérateur autoadjoint tel que

$$\Gamma^2 = \mathbf{I}_{\mathcal{F}(\zeta,\xi)}$$

il a pour fonctions propres, les fonctions constantes $+1$ et -1 et comme sous-espaces propres

$$\mathcal{F}_{+1}(\zeta, \xi) = \oplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{F}_+(\zeta) \otimes \mathcal{A}_{2p}(\zeta)$$

et

$$\mathcal{F}_{-1}(\zeta, \xi) = \oplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{F}_+(\zeta) \otimes \mathcal{A}_{2p+1}(\zeta).$$

On obtient une décomposition orthogonale

$$\mathcal{F}(\zeta, \xi) = \mathcal{F}_{+1}(\zeta, \xi) \oplus \mathcal{F}_{-1}(\zeta, \xi),$$

on note P_+ et P_- les projections orthogonales sur respectivement $\mathcal{F}_{+1}(\zeta, \xi)$ et $\mathcal{F}_{-1}(\zeta, \xi)$ alors

$$\Gamma = P_+ - P_-.$$

Soit l'opérateur

$$\mathcal{L} = \widehat{L^*L}_+ \otimes \mathbf{I}_{\mathcal{F}_-(\xi)} \oplus \mathbf{I}_{\mathcal{F}_+(\zeta)} \otimes \widehat{LL^*}_-,$$

c'est un opérateur de $\mathcal{F}(\zeta,\xi)$ qui est positif et autoadjoint, la fonction identiquement nulle sur Ω est une fonction propre de $\mathcal{L}$ car

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}_+ \otimes \mathbf{1}_- \in \ker(\mathcal{L}).$$

Theorem 8. *1)L'opérateur Q_L est autoadjoint et essentiellement autoadjoint sur chaque coeur de $\mathcal{L}$. En particulier, Q_L est essentiellement autoadjoint sur $\mathcal{D}_L^\infty$.*

2)L'opérateur Γ laisse invariant $\operatorname{dom}(Q_L)$ *et*

$$\{\Gamma, Q_L\} = \Gamma Q_L + Q_L \Gamma = o_{\mathcal{F}(\zeta,\xi)}$$

sur $\operatorname{dom}(Q_L)$.

3)On a l'égalité entre les opérateurs

$$\Delta_L = \mathcal{L} = Q_L^2.$$

Proof. Il suffit de vérifier le résultat sur chaque fibre du fibré $\mathcal{F}(\zeta,\xi)$. Sur les fibres, on peut consulter [2]. □

Definition 20. *Le quadruplet*

$$\{\mathcal{F}(\zeta,\xi), Q_L, \mathcal{L}, \Gamma\}$$

est appelée quantification supersymétrique du triplet (ζ, L, ξ).

Dans ce qui suit, on suppose que l'opérateur $L \in \mathcal{C}(\zeta,\xi)$ et $L^* \in \mathcal{C}(\xi,\zeta)$ ont pour fonction propre la fonction identiquement nulle, c'est-à-dire, que

$$\ker L = (\cup_{\omega\in\Omega} \ker L(\omega), \pi, \Omega) \text{ et } \ker L^* = (\cup_{\omega\in\Omega} \ker L^*(\omega), \pi, \Omega)$$

sont des sous-fibrés de ζ et ξ, on pose

$$\operatorname{nul} L = \dim(\ker L).$$

Theorem 9. *Si* $\ker L$ *et* $\ker L^*$ *sont des sous-fibrés de, respectivement ζ et ξ, alors* $\ker Q_L$ *et* $\ker \mathcal{L}$ *sont des sous-fibrés de $\mathcal{F}(\zeta,\xi)$ et*

$$\ker Q_L = \ker \mathcal{L} = \oplus_{n,p=0}^\infty [\mathcal{S}_n(\ker L) \otimes \mathcal{A}_p(\ker L^*)].$$

On a,

$$\text{1)Si } \operatorname{nul} L = 0 \text{ et } \operatorname{nul} L^* < \infty \text{ alors } \operatorname{nul} Q_L = 2^{\operatorname{nul} L^*} < \infty.$$

$$\text{2)Si } \operatorname{nul} L = 0 \text{ et } \operatorname{nul} L^* = \infty \text{ alors } \operatorname{nul} Q_L = \infty.$$

$$\text{3)Si } \operatorname{nul} L \geqslant 1 \text{ alors } \operatorname{nul} Q_L = \infty.$$

Proof. On vérifie que si $\ker L$ et $\ker L^*$ sont des sous-fibrés de ζ et ξ alors $\ker Q_L$ et $\ker \mathcal{L}$ sont des sous-fibrés de $\mathcal{F}(\zeta,\xi)$ en remarquant que la propriété

$$\ker Q_L(\omega) = \ker \widehat{L}(\omega) = \oplus_{n,p=0}^\infty [\mathcal{S}_n(\ker(L(\omega))) \otimes \mathcal{A}_p(\ker(L^*(\omega)))] \tag{3.8}$$

est vraie pour tout $\omega \in \Omega$. Ensuite, on peut écrire, puisque $\ker L$ et $\ker L^*$ sont des fibrés

$$\ker Q_L = \ker \mathcal{L} = \oplus_{n,p=0}^\infty [\mathcal{S}_n(\ker L) \otimes \mathcal{A}_p(\ker L^*)].$$

La relation 3.8 a été démontrée dans [1](Lemme 3.4). □

Pour plus de propriétés sur les opérateurs Q_L, $\mathcal{L}$ on peut consulter [2] pour l'étude sur chaque fibre des opérateurs

$$Q_L(\omega) : E_\omega(\mathcal{F}(\zeta,\xi)) \to E_\omega(\mathcal{F}(\zeta,\xi))$$

et

$$\mathcal{L}(\omega) : E_\omega(\mathcal{F}(\zeta,\xi)) \to E_\omega(\mathcal{F}(\zeta,\xi)),$$

pour tout $\omega \in \Omega$. Notamment, on peut étendre les théorèmes de Monsieur Arai, pour l'étude du spectre de Q_L et de $\mathcal{L}$ ainsi que la notion de classe d'opérateurs de Dirac pertubés en dimension infinie si $\ker L$ et $\ker L^*$ sont des sous-fibrés de ζ et ξ.

On s'intéresse, dorénavant, aux espaces de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\zeta,\mu)$ et $\mathcal{K} = L^2(\xi,\mu)$ où μ est une forme volume sur Ω. Les produits scalaires associés sont

$$\langle s \mid t\rangle_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \langle s \mid t\rangle \mu$$

pour toutes sections s et t de $\mathcal{H}$ et

$$\langle s \mid t\rangle_{\mathcal{K},} = \int_\Omega \langle s \mid t\rangle \mu$$

pour toutes sections s et t de $\mathcal{K}$. Pour un opérateur

$$L \in \mathrm{Hom}(\zeta,\xi)$$

on définit l'opérateur

$$\widetilde{L} : \mathrm{dom}\left(\widetilde{L}\right) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{K},\ \widetilde{L}(s) = L \otimes s$$

avec

$$\mathrm{dom}\left(\widetilde{L}\right) = \{s \in \mathcal{H} : L \otimes s \in \mathcal{K}\} \text{ et } L \otimes s(\omega) = L(\omega)\, s(\omega).$$

On suppose que $\widetilde{L}$ est un opérateur densément défini et fermé. On pose

$$\mathcal{D}^\infty_{\widetilde{L}} = \mathrm{Vect}\left\{a(s_1)^* \cdots a(s_n)\, \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^*\, \mathbf{1}_- : s_j \in \mathcal{C}^\infty\left(\widetilde{L}^*\widetilde{L}\right) \text{ et } t_k \in \mathcal{C}^\infty\left(\widetilde{L}\widetilde{L}^*\right)\right\}$$

où

$$\mathcal{C}^\infty(T) = \cap_{n=1}^\infty \mathrm{dom}(T^n)$$

pour un opérateur T de $\mathcal{H}$ ou de $\mathcal{K}$.

Proposition 10. *Il existe un unique opérateur linéaire $d_{\widetilde{L}}$, densément défini et fermé sur $\mathcal{F}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ tel que*

$$1)\mathcal{D}^\infty_{\widetilde{L}} \subset \mathrm{dom}\left(d_{\widetilde{L}}\right) \text{ et } \mathcal{D}^\infty_{\widetilde{L}} \text{ est un coeur de } d_{\widetilde{L}},$$

pour chaque section $\mathbf{s} \in \mathcal{D}^\infty_{\widetilde{L}}$ de la forme

$$\mathbf{s} = a(s_1)^* \cdots a(s_n)^*\, \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^*\, \mathbf{1}_-$$

alors

$$2)d_{\widetilde{L}}\mathbf{s} = \mathbf{o} \text{ pour } n = 0$$

$$d_{\widetilde{L}}\mathbf{s} = \sum_{j=1}^n a(s_1)^* \cdots \widehat{a(s_j)^*} \cdots a(s_n)^*\, \mathbf{1}_+ \otimes b\left(\widetilde{L}s_j\right)^* b(t_1)^* \cdots b(t_p)^*\, \mathbf{1}_-,$$

$d_{\widetilde{L}}$ laisse invariant $\mathcal{D}^\infty_{\widetilde{L}}$.

De plus,

$$3)\mathcal{D}^\infty_{\widetilde{L}} \subset \mathrm{dom}\left(d^*_{\widetilde{L}}\right)$$

et

$$d_{\widetilde{L}}^{*}\mathbf{s}=\sum_{k=1}^{p}\left(-1\right)^{k-1}a\left(\widetilde{L}^{*}u_{k}\right)^{*}a\left(s_{1}\right)^{*}\cdots a\left(s_{n}\right)^{*}\mathbf{1}_{+}\otimes b\left(t_{1}\right)^{*}\cdots b\left(t_{k}\right)^{*}\cdots b\left(t_{p}\right)^{*}\mathbf{1}_{-}$$

pour tout $\mathbf{s}=a\left(s_{1}\right)^{*}\cdots a\left(s_{n}\right)^{*}\mathbf{1}_{+}\otimes b\left(t_{1}\right)^{*}\cdots b\left(t_{p}\right)^{*}\mathbf{1}_{-}$. *Dans le cas* $p=0$, $d_{\widetilde{L}}^{*}\mathbf{s}=\mathbf{o}$, *en particulier,* $d_{\widetilde{L}}^{*}$ *laisse invariant* $\mathcal{D}_{\widetilde{L}}^{\infty}$.

$$4)\operatorname{dom}\left(d_{\widetilde{L}}^{2}\right)=\operatorname{dom}\left(d_{\widetilde{L}}\right)\ \textit{et pour tout}\ \mathbf{s}\in\operatorname{dom}\left(d_{\widetilde{L}}\right),\ d_{\widetilde{L}}^{2}\mathbf{s}=\mathbf{o}.$$

Si T *est un opérateur de* $\operatorname{Hom}\left(\zeta,\xi\right)$ *tel que* $\widetilde{T}$ *est borné et* $\operatorname{dom}\left(\widetilde{T}\right)=\mathcal{H}$ *alors pour tout* $\mathbf{s}\in\mathcal{D}_{\widetilde{L}}^{\infty}$ *et* α, $\beta\in\mathbb{C}$,

$$5)\alpha d_{\widetilde{L}}\mathbf{s}+\beta d_{\widetilde{T}}\mathbf{s}=d_{\alpha\widetilde{L}+\beta\widetilde{T}}\mathbf{s}.$$

Proof. La preuve est donnée dans [1]. □

On peut définir l'opérateur de Dirac

$$Q_{\widetilde{L}}=d_{\widetilde{L}}+d_{\widetilde{L}}^{*}$$

de domaine

$$\operatorname{dom}Q_{\widetilde{L}}=\operatorname{dom}d_{\widetilde{L}}\cap\operatorname{dom}d_{\widetilde{L}}^{*},$$

et l'opérateur de Laplace-Beltrami

$$\Delta_{\widetilde{L}}=d_{\widetilde{L}}^{*}d_{\widetilde{L}}+d_{\widetilde{L}}d_{\widetilde{L}}^{*}$$

sur $\mathcal{F}\left(\mathcal{H},\mathcal{K}\right)$.

La seconde quantification de T sur $\mathcal{F}\left(\mathcal{H}\right)$ est

$$\widehat{T}=\oplus_{n=0}^{\infty}\widehat{T}^{(n)}$$

qui est un opérateur autoadjoint, $0\in\sigma_{p}\left(\widehat{T}\right)$, $\mathbf{1}\in\ker\left(\widehat{T}\right)$ et donc $\widehat{T}$ a pour propre 0. L'opérateur $\widehat{T}$ est stable sur $\mathcal{F}_{+}\left(\mathcal{H}\right)$ et $\mathcal{F}_{-}\left(\mathcal{H}\right)$, on pose

$$\widehat{T}_{+}=\widehat{T}\mid_{\mathcal{F}_{+}(\mathcal{H})}\ \text{et}\ \widehat{T}_{-}=\widehat{T}\mid_{\mathcal{F}_{-}(\mathcal{H})},$$

ces opérateurs sont autoadjoints et 0 est une valeur propre pour $\widehat{T}_{+}$ et $\widehat{T}_{-}$ car $\mathbf{1}_{\pm}\in\ker\left(\widehat{T}_{\pm}\right)$. L'opérateur nombre sur $\mathcal{F}_{-}\left(\mathcal{K}\right)$ est défini par

$$N=\widehat{\mathbf{I}}_{-}=\oplus_{n=0}^{\infty}\left(n\otimes^{n}\mathbf{I}\right)\mid_{\mathcal{F}_{-}(\mathcal{K})},\ \mathbf{I}=Id_{\mathcal{K}}$$

et on pose comme précédemment

$$\left(-1\right)_{-}^{N}=\oplus_{n=0}^{\infty}\left(\left(-1\right)^{n}\otimes^{n}\mathbf{I}\right)\mid_{\mathcal{F}_{-}(\mathcal{K})}.$$

Soit Γ l'opérateur de $\mathcal{F}\left(\mathcal{H},\mathcal{K}\right)$

$$\Gamma=Id_{\mathcal{F}_{+}(\mathcal{H})}\otimes\left(-1\right)_{-}^{N},$$

c'est un opérateur autoadjoint tel que

$$\Gamma^{2}=Id_{\mathcal{F}(\mathcal{H},\mathcal{K})}$$

il a pour valeurs propres, les fonctions constantes $+1$ et -1 et comme sous-espaces propres

$$\mathcal{F}_{+1}\left(\mathcal{H},\mathcal{K}\right)=\oplus_{p=0}^{\infty}\mathcal{F}_{+}\left(\mathcal{H}\right)\otimes\mathcal{A}_{2p}\left(\mathcal{K}\right)$$

et

$$\mathcal{F}_{-1}\left(\mathcal{H},\mathcal{K}\right)=\oplus_{p=0}^{\infty}\mathcal{F}_{+}\left(\mathcal{H}\right)\otimes\mathcal{A}_{2p+1}\left(\mathcal{K}\right).$$

On obtient une décomposition orthogonale

$$\mathcal{F}(\mathcal{H},\mathcal{K}) = \mathcal{F}_{+1}(\mathcal{H},\mathcal{K}) \oplus \mathcal{F}_{-1}(\mathcal{H},\mathcal{K}),$$

on note P_+ et P_- les projections orthogonales sur respectivement $\mathcal{F}_{+1}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ et $\mathcal{F}_{-1}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ alors

$$\Gamma = P_+ - P_-.$$

Soit l'opérateur

$$\overline{L} = \widehat{\widetilde{L}^*\widetilde{L}} \otimes \mathbf{I}_{\mathcal{F}_-(\mathcal{K})} + \mathbf{I}_{\mathcal{F}_+(\mathcal{H})} \otimes \widehat{\widetilde{L}\widetilde{L}^*}_-,$$

c'est un opérateur de $\mathcal{F}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ qui est positif et autoadjoint, 0 est une valeur propre de $\overline{L}$ car

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}_+ \otimes \mathbf{1}_- \in \ker\left(\overline{L}\right).$$

Theorem 10. *1)L'opérateur $Q_{\widetilde{L}}$ est autoadjoint et essentiellement autoadjoint sur chaque coeur de $\overline{L}$. En particulier, $Q_{\widetilde{L}}$ est essentiellement autoadjoint sur $\mathcal{D}^\infty_{\widetilde{L}}$.*

2)L'opérateur Γ laisse invariant $\operatorname{dom}\left(Q_{\widetilde{L}}\right)$ *et*

$$\left\{\Gamma, Q_{\widetilde{L}}\right\} = \Gamma Q_{\widetilde{L}} + Q_{\widetilde{L}}\Gamma = o_{\mathcal{F}(\mathcal{H},\mathcal{K})}$$

sur $\operatorname{dom}\left(Q_{\widetilde{L}}\right)$.

3)On a l'égalité entre les opérateurs

$$\Delta_{\widetilde{L}} = \overline{L} = Q^2_{\widetilde{L}}.$$

Proof. La preuve est dans [2]. □

Definition 21. *Le quadruplet*

$$\left\{\mathcal{F}(\mathcal{H},\mathcal{K}), Q_{\widetilde{L}}, \overline{L}, \Gamma\right\}$$

est appelée μ-quantification supersymétrique du triplet (ζ, L, ξ).

3.7. **Quantification de la connexion ∇.** Le fibré ξ sur Ω, d'espace total

$$E(\xi) = \Lambda^1\Omega \otimes E(\zeta)$$

où ζ est le fibré des états de l'univers Ω muni de la connexion ∇ et de la section de Dirac γ, a une structure de fibré complexe. On suppose l'existence sur ce fibré ξ, d'une structure de fibré d'état ayant la propriété suivante, il existe une forme volume μ sur Ω telle que

$$\nabla : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$$

soit un opérateur fermé, densément défini, de domaine

$$\operatorname{dom}(\nabla) \subset \mathcal{H} \cap \Gamma(E(\zeta))$$

à valeurs dans $\mathcal{K}$ avec

$$\mathcal{H} = L^2(\zeta,\mu) \text{ et } \mathcal{K} = L^2(\xi,\mu).$$

Sous ces hypothèses, il existe un unique opérateur linéaire d_∇, densément défini et fermé sur $\mathcal{F}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ tel que

$$\mathcal{D}^\infty_\nabla \subset \operatorname{dom}(d_\nabla) \text{ et } \mathcal{D}^\infty_\nabla \text{ est un coeur de } d_\nabla,$$

pour chaque section $\mathbf{s} \in \mathcal{D}^\infty_\nabla$ de la forme

$$\mathbf{s} = a(s_1)^* \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-$$

alors

$$d_{\nabla}\mathbf{s}=\mathbf{o}\text{ pour }n=0$$

$$d_{\nabla}\mathbf{s}=\sum_{j=1}^{n}a\left(s_{1}\right)^{*}\cdots\widehat{a\left(s_{j}\right)^{*}}\cdots a\left(s_{n}\right)^{*}\mathbf{1}_{+}\otimes b\left(\nabla s_{j}\right)^{*}b\left(t_{1}\right)^{*}\cdots b\left(t_{p}\right)^{*}\mathbf{1}_{-},$$

d_{∇} laisse invariant $\mathcal{D}_{\nabla}^{\infty}$.

De plus,

$$\mathcal{D}_{\nabla}^{\infty}\subset\operatorname{dom}\left(d_{\nabla}^{*}\right)$$

et

$$d_{\nabla}^{*}\mathbf{s}=\sum_{k=1}^{p}\left(-1\right)^{k-1}a\left(\nabla^{*}u_{k}\right)^{*}a\left(s_{1}\right)^{*}\cdots a\left(s_{n}\right)^{*}\mathbf{1}_{+}\otimes b\left(t_{1}\right)^{*}\cdots b\left(t_{k}\right)^{*}\cdots b\left(t_{p}\right)^{*}\mathbf{1}_{-}$$

pour tout $\mathbf{s}=a\left(s_{1}\right)^{*}\cdots a\left(s_{n}\right)^{*}\mathbf{1}_{+}\otimes b\left(t_{1}\right)^{*}\cdots b\left(t_{p}\right)^{*}\mathbf{1}_{-}$. Dans le cas $p=0$, $d_{\nabla}^{*}\mathbf{s}=\mathbf{o}$, en particulier, d_{∇}^{*} laisse invariant $\mathcal{D}_{\nabla}^{\infty}$.

On peut définir l'opérateur de Dirac

$$Q_{\nabla}=d_{\nabla}+d_{\nabla}^{*}$$

de domaine

$$\operatorname{dom}Q_{\nabla}=\operatorname{dom}d_{\nabla}\cap\operatorname{dom}d_{\nabla}^{*},$$

et l'opérateur de Laplace-Beltrami

$$\Delta_{\nabla}=d_{\nabla}^{*}d_{\nabla}+d_{\nabla}d_{\nabla}^{*}$$

sur $\mathcal{F}\left(\mathcal{H},\mathcal{K}\right)$. On a, si on pose

$$\overline{\nabla}=\widehat{\nabla^{*}\nabla}\otimes\mathbf{I}_{\mathcal{F}_{-}(\mathcal{K})}+\mathbf{I}_{\mathcal{F}_{+}(\mathcal{H})}\otimes\widehat{\nabla\nabla^{*}}_{-}$$

$$\left\{\mathcal{F}\left(\mathcal{H},\mathcal{K}\right),Q_{\nabla},\overline{\nabla},\Gamma\right\}$$

est la μ-quantification de (ζ,∇,ξ) et

$$\Delta_{\nabla}=\overline{\nabla}=Q_{\nabla}^{2}.$$

Pour définir l'espace de Hilbert $\mathcal{K}$, on construit un produit scalaire naturel sur le fibré des formes différentielles $\Lambda^{1}\Omega=T^{*}\Omega$ de la façon suivante. On prend une métrique riemannienne g sur Ω, l'isomorphisme de Riesz permet d'identifier $T\Omega$ à son dual par

$$\mathcal{R}_{g}:T\Omega\rightarrow\Lambda^{1}\Omega,\ \mathcal{R}_{g}\left(X\right)=d_{X}$$

où

$$d_{X}\left(Y\right)=g\left(X,Y\right),\ \forall Y\in\Gamma\left(T\Omega\right).$$

Cet isomorphisme de Riesz transporte le produit scalaire sur le fibré $\Lambda^{1}\Omega$,

$$\left\langle d\mid\delta\right\rangle=g\left(\mathcal{R}_{g}^{-1}\left(d\right),\mathcal{R}_{g}^{-1}\left(\delta\right)\right),\ \forall d,\delta\in\Lambda^{1}\Omega.$$

On définit le produit hermitien naturel sur $\Lambda^{1}\Omega\otimes E\left(\zeta\right)$ par

$$\left\langle d\otimes s\mid\delta\otimes t\right\rangle=\left\langle d\mid\delta\right\rangle\left\langle s\mid t\right\rangle,$$

et on prolonge par $C^{\infty}\left(\Omega,\mathbb{C}\right)$-linéarité. Le fibré ξ, d'espace total

$$E\left(\xi\right)=\Lambda^{1}\Omega\otimes E\left(\zeta\right)$$

est un fibré d'état de l'univers Ω, on a une structure d'espace vectoriel complexe sur chaque fibre

$$\lambda d\otimes s=d\otimes\left(\lambda s\right),\ \forall\lambda\in C^{\infty}\left(\Omega,\mathbb{C}\right).$$

On définit $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ par

$$\mathcal{H} = L^2(\zeta, \mu) \text{ et } \mathcal{K} = L^2(\xi, \mu)$$

où μ est la forme volume induite par la métrique riemannienne g.

On peut, également, quantifier l'opérateur d'évolution

$$\nabla_\gamma^1 = \gamma \otimes \nabla$$

en regardant sa restriction à l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}^1(\zeta) = \mathcal{W}^{1,2}(\zeta),$$

$\nabla_\gamma^1 |_{\mathcal{H}^1(\zeta)}$ est un opérateur borné. Sur l'espace de Bose-Fermi-Fock $\mathcal{F}\left(\mathcal{H}^1(\zeta), \mathcal{H}^1(\zeta)\right)$, on a une μ-quantification supersymétrique

$$\left\{\mathcal{F}\left(\mathcal{H}^1(\zeta), \mathcal{H}^1(\zeta)\right), Q_{\widetilde{\nabla_\gamma^1|_{\mathcal{H}^1(\zeta)}}}, \overline{\nabla_\gamma^1 |_{\mathcal{H}^1(\zeta)}}, \Gamma\right\}$$

du triplet

$$\left(\mathcal{H}^1(\zeta), \nabla_\gamma^1 |_{\mathcal{H}^1(\zeta)}, \mathcal{H}^1(\zeta)\right).$$

On a deux procédés de quantification supersymétrique du triplet (ζ, L, ξ), le premier ne fait intervenir que la structure hermitienne des fibrés et les espaces de Fock attachés à ces structures et le second procédé fait intervenir une forme volume μ induite par une métrique riemannienne g sur Ω.

Si $L \in \mathrm{Hom}(\zeta, \xi)$ et pour chaque $\omega \in \Omega$, l'opérateur

$$L(\omega) : E_\omega(\zeta) \to E_\omega(\xi)$$

est densément défini et fermé, on peut quantifier cet opérateur fibre à fibre par un procédé de quantification décrit dans [2]. Ce procédé est appelé quantification par fibre. Si on veut quantifier globalement l'opérateur, on travaille sur les sections des fibrés ζ et ξ en définissant l'opérateur

$$\widetilde{L} : \mathcal{S}(\zeta) \to \mathcal{S}(\xi), \ \widetilde{L}(s) = L \otimes s$$

avec

$$L \otimes s(\omega) = L(\omega)(s(\omega)), \ \forall \omega \in \Omega.$$

Remark 23. *Si on prend pour $L = \gamma^d$, l'endomorphisme de Dirac associé à la 1-forme d, on a $\gamma^d \in \mathrm{Hom}(\zeta, \zeta)$. Si on impose à cet endomorphisme d'être densément défini et fermé en chaque point $\omega \in \Omega$, on peut quantifier ces endomorphismes de Dirac par fibre ou globalement. Il en est de même pour les opérateurs*

$$L = \gamma_n \otimes \nabla_{n-1}.$$

Pour quantifier globalement, on construit les espaces de Sobolev $W_\partial^{m,p}(\zeta)$ ou du type Sobolev $\mathcal{W}^{m,p}(\zeta)$ qui sont des espaces de Hilbert pour $p = 2$ et on restreint l'opérateur $\widetilde{L}$ à $W_\partial^{m,2}(\zeta)$ ou $\mathcal{W}^{m,2}(\zeta)$. Pour construire $W_\partial^{m,p}(\zeta)$, on est amené à construire une théorie des distributions sur les fibrés des états dont le produit scalaire hermitien est parallèle à la connexion ∇. L'exemple classique de connexion de ce type est la connexion de Levi-Civita d'une métrique riemannienne. Le produit scalaire défini par la métrique riemannienne est parallèle à la connexion de Levi-Civita de cette métrique.

Les principes de quantification d'un fibré des états donne un procédé de quantification sur un état et le passage à l'espace de Bose-Fermi-Fock permet de décrire la quantification sur l'ensemble des états. Si on veut quantifier l'équation d'évolution, cette équation est locale, on quantifie sur une carte en prenant le *"local frame"*

$\partial = \{\partial_\nu\}$ et pour espace de hilbert $W_\partial^{1,2}(\zeta)$, ensuite on quantifie les opérateurs $\gamma \otimes \nabla$ et ∇_T et on obtient l'équation d'évolution quantifiée

$$\Delta_{\gamma\otimes\nabla} = -\lambda^2 \Delta_{\nabla_T}.$$

4. Champs de divergence nulle et champs en corde

4.1. **Champs essentiellement autoadjoints.** Soit $\left(\mathbb{R}^4, \eta\right)$ l'univers de Minkowski où $\eta = -dt^2 + d^2x + d^2y + d^2z$, la mesure de Lebesgue associée est $\sqrt{|\det \eta|} dtdxdydz = dtdxdydz$, c'est-à-dire, la mesure standard de $\mathbb{R}^4$ qui est notée par la suite $d\lambda$.

$L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right)$ est l'espace de Hilbert pour le produit $\langle f \mid g\rangle = \int_{\mathbb{R}^4} f\overline{g} d\lambda$. L'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} = \partial_t$ est défini sur

$$\operatorname{dom}(i\partial_t) = \left\{ f \in L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right) : i\partial_t f \in L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right)\right\},$$

c'est-à-dire, l'ensemble des classes de fonctions de $L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right)$, ayant un représentant dérivable presque partout pour la mesure de Lebesgue, dont la classe est dans $L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right)$.

Lemma 1. *L'opérateur non borné, $T = (\operatorname{dom}(i\partial_t), i\partial_t)$, est densément défini et symétrique.*

Proof. $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}\right)$ est dense dans $L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right)$ et $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}\right) \subset \operatorname{dom}(i\partial_t)$. Pour deux fonctions f et g de $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}\right)$,

$$\int_{\mathbb{R}^4} i\partial_t f\overline{g} d\lambda = \int_{\mathbb{R}^3}\left(\int_{\mathbb{R}} i\partial_t f\overline{g} dt\right) dxdydz$$
$$= \int_{\mathbb{R}^3}\left(\int_{\mathbb{R}} f\overline{i\partial_t g} dt\right) dxdydz = \int_{\mathbb{R}^4} f\overline{i\partial_t g} d\lambda.$$

Les théorèmes de convergence de Lebesgue permettent d'étendre l'égalité précédente aux fonctions presque partout dérivables par rapport à la variable t, dont la dérivée presque partout est dans $L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right)$.

Soit ϕ une fonction C^∞, à support compact telle que $0 \leqslant \phi \leqslant 1$ et $\int_{\mathbb{R}^4} \phi d\lambda = 1$. Soit $\{\phi_n\}$, l'approximation de l'identité définie par

$$\phi_n(u) = n^4 \phi(nu),\ u \in \mathbb{R}^4.$$

On a, d'après l'égalité démontrée précédemment,

$$\int_{\mathbb{R}^4} i\partial_t (f * \phi_n)\overline{g * \phi_n} d\lambda = \int_{\mathbb{R}^4} f * \phi_n \overline{i\partial_t (g * \phi_n)} d\lambda$$

pour toutes fonctions f, g appartenant à $\operatorname{dom}(i\partial_t)$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. On vérifie que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^4} i\partial_t (f * \phi_n)\overline{g * \phi_n} d\lambda = \int_{\mathbb{R}^4} i\partial_t f\overline{g} d\lambda,$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^4} i\partial_t (f * \phi_n)\overline{g * \phi_n} d\lambda - \int_{\mathbb{R}^4} i\partial_t f\overline{g} d\lambda\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^4} \left|i\partial_t (f * \phi_n)\overline{g * \phi_n} - i\partial_t f\overline{g}\right| d\lambda,$$
$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^4} \left|i\partial_t (f * \phi_n)\overline{g * \phi_n} - i\partial_t f\overline{g * \phi_n}\right| d\lambda + \int_{\mathbb{R}^4} \left|i\partial_t f\overline{g * \phi_n} - i\partial_t f\overline{g}\right| d\lambda.$$

On a

$$\int_{\mathbb{R}^4} \left|i\partial_t (f * \phi_n)\overline{g * \phi_n} - i\partial_t f\overline{g * \phi_n}\right| d\lambda \leqslant \left\|\partial_t (f * \phi_n) - \partial_t f\right\|_2 \left\|g * \phi_n\right\|_2,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^4} \left| i\partial_t f \overline{g * \phi_n} - i\partial_t f \overline{g} \right| d\lambda \leqslant \|\partial_t f\|_2 \|g * \phi_n - g\|_2 .$$

Pour la première inégalité

$$\lim_{n\to+\infty} \|\partial_t (f * \phi_n) - \partial_t f\|_2 = \lim_{n\to+\infty} \|(\partial_t f) * \phi_n - \partial_t f\|_2 = 0$$

et

$$\|g * \phi_n\|_2 \leqslant \|g\|_2 \|\phi_n\|_1 = \|g\|_2 .$$

Pour la deuxième inégalité

$$\lim_{n\to+\infty} \|g * \phi_n - g\|_2 = 0,$$

on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^4} i\partial_t (f * \phi_n) \overline{g * \phi_n} d\lambda = \int_{\mathbb{R}^4} i\partial_t f \overline{g} d\lambda,$$

et comme conséquence

$$\int_{\mathbb{R}^4} i\partial_t f \overline{g} d\lambda = \int_{\mathbb{R}^4} f \overline{i\partial_t g} d\lambda.$$

□

Corollary 1. *T est fermable.*

L'opérateur $\overline{T}$ désigne la plus petite extension fermée de T, $\operatorname{dom}\left(\overline{T}\right)$ est l'espace de Sobolev $H_t^1\left(\mathbb{R}^4\right)$. La fermeture $\overline{T}$ est symétrique.

Proposition 11. *T est essentiellement autoadjoint.*

Proof. $\operatorname{Ran}(\partial_t \pm \operatorname{Id})$ contient les fonctions indicatrices des boréliens de $\mathbb{R}^4$ dont la frontière est de mesure nulle. On a

$$\partial_t \mathbf{1}_B \pm \mathbf{1}_B \underset{pp}{=} \pm \mathbf{1}_B,$$

$\operatorname{Ran}(\partial_t \pm \operatorname{Id})$ est dense, donc $\operatorname{Ran}\left(\overline{T} \pm i \operatorname{Id}\right)$ contient $i \operatorname{Ran}(\partial_t \pm \operatorname{Id})$ qui est dense dans $L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right)$, T est essentiellement autoadjoint. □

Par abus de langage, on note encore $i\partial_t$, l'opérateur T et on pose $\partial_0 = \partial_t, \partial_1 = \partial_x, \partial_2 = \partial_y$ et $\partial_3 = \partial_z$ la base canonique. Tout champ X de $\mathbb{R}^4$ s'écrit, $X = X^j \partial_j$. L'opérateur associé à ce champ est $(\operatorname{dom}(L_X), L_X)$ où L_X est la dérivée de Lie le long du champ X et

$$\operatorname{dom}(L_X) = \left\{ f \in L^2\left(\mathbb{R}^4, d\mu\right) : L_X(f) \in L^2(\mathbb{R}^4, d\mu),\ f \text{ a un représentant } C^1 \text{ pp} \right\},$$

$d\mu = \rho d\lambda$, $\rho > 0$ sauf peut-être sur un ensemble de Lebesgue de mesure nulle. Le théorème donne une condition sur les X^j pour que l'opérateur L_X soit essentiellement autoadjoint.

Theorem 11. *L_X est essentiellement autoadjoint si les conditions suivantes sont réalisées*

$$\partial_j \left(X^j \rho\right) \underset{pp}{=} 0, \tag{4.1}$$

pour la mesure $d\lambda$ et

$$\operatorname{Re}\left(X^j\right) = 0.$$

Proof. Si f et h sont des représentants dérivables presque partout dans les classes choisies dans $L^2\left(\mathbb{R}^4, d\mu\right)$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^4}\left(X^j\partial_j f\right)\overline{h}\rho d\lambda = \int_{\mathbb{R}^4}\left(\partial_j f\right)X^j\overline{h}\rho d\lambda,$$

l'intégrale est convergente et on a, si ρ est de classe C^1 presque partout

$$\int_{\mathbb{R}^4}\left(\partial_j f\right)X^j\overline{h}\rho d\lambda = \int_{\mathbb{R}^4} f i\partial_j\left(-iX^j\overline{h}\rho\right)d\lambda,$$

$$\int_{\mathbb{R}^4} f\partial_j\left(X^j\overline{h}\rho\right)d\lambda = \int_{\mathbb{R}^4} f\overline{h}\partial_j\left(X^j\rho\right)d\lambda + \int_{\mathbb{R}^4} f\left(\overline{\overline{X^j}\partial_j h}\right)\rho d\lambda,$$

pour que l'opérateur soit symétrique, il faut que

$$\int_{\mathbb{R}^4} f\overline{h}\partial_j\left(X^j\rho\right)d\lambda + \int_{\mathbb{R}^4} f\left(\overline{\overline{X^j}\partial_j h}\right)\rho d\lambda = \int_{\mathbb{R}^4} f\left(\overline{X^j\partial_j h}\right)\rho d\lambda$$

pour toutes fonctions f, h et pour une fonction ρ presque partout de classe C^1. On déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^4} f\overline{h}\partial_j\left(X^j\rho\right)d\lambda = 0,$$

et

$$X^j \underset{pp}{=} \overline{X^j}, \text{ pour } j = 0, 1, 2, 3.$$

L'égalité presque partout est une égalité pour des fonctions de classe C^∞, donc

$$\operatorname{Re}\left(X^j\right) = 0,$$

et

$$\partial_j\left(X^j\rho\right) \underset{pp}{=} 0,$$

ce qui est équivalent à

$$L_X\left(\rho\right) \underset{pp}{=} -\operatorname{div}\left(X\right).\rho.$$

L'opérateur est symétrique, donc fermable. $\operatorname{Ran}\left(L_X \pm \operatorname{Id}\right)$ est dense dans

$$L^2\left(\mathbb{R}^4, d\mu\right)$$

car l'opérateur $X^j\partial_j \pm \operatorname{Id}$ a une image dense puisqu'il contient les boréliens bornés, de frontière de mesure μ nulle. □

On a une généralisation de ce résultat lorsque le support du champ X est l'univers Ω muni d'une métrique pseudo-riemannienne g, Ω est orientable. Si λ représente la forme volume associée à g, on a

$$\mathcal{L}_X\left(\lambda\right) = \operatorname{div}\left(X\right).\lambda,$$

$\mathcal{L}_X$ est la dérivée de Lie sur les 4-formes différentielles de Ω. Ceci permet de définir de façon intrinsèque la divergence d'un champ X sur l'univers Ω. Le domaine de L_X se généralise comme suit,

$$\operatorname{dom}\left(L_X\right) = \left\{f \in L^2\left(\Omega, \rho d\lambda\right) : L_X\left(f\right) \in L^2(\Omega, \rho d\lambda)\right\},$$

on note encore L_X, l'opérateur non borné

$$\left(\operatorname{dom}\left(L_X\right), L_X\right),$$

dans tout ce qui suit $\rho \geqslant 0$, éventuellement nulle sur un ensemble de mesure nulle pour la mesure $d\lambda$.

On peut donner une généralisation du théorème précédent,

Theorem 12. *L_X est essentiellement autoadjoint si les conditions suivantes sont réalisées*

$$L_X(\rho) + \operatorname{div}(X)\rho \underset{pp}{=} 0, \tag{4.2}$$

pour la mesure $d\lambda$ et

$$\operatorname{Re} X = o.$$

Remark 24. *Si $\rho = 1$, $\operatorname{div}(X) = 0$. Les champs essentiellement autoadjoints sont les champs qui conservent le volume le long de leur flot.*

Definition 22. *1)Les champs X pour lesquels L_X est essentiellement autoadjoint sont les champs autoadjoints pour la métrique g.*

2)Les champs réels autoadjoints X, pour la métrique g, sont les champs pour lesquels iX est autoadjoint pour g.

Le champ réel X est autoadjoint si, lorsque l'on munit l'univers Ω orientable d'une pseudo-métrique de riemann g, la 4-forme différentielle λ vérifient

$$L_X(\rho) \underset{pp}{=} -\operatorname{div}(X).\rho, \tag{4.3}$$

pour la mesure $d\lambda$ et où, la divergence de X est définie par l'équation

$$\mathcal{L}_X(\lambda) = \operatorname{div}(X).\lambda.$$

Sur $\mathbb{R}^4$, si on cherche une mesure de la forme $\rho d\lambda$ qui rende le champ X autoadjoint, il faut que

$$\partial_j\left(X^j\rho\right) \underset{pp}{=} 0,$$

en particulier, ρ est presque partout dérivable pour la mesure de Lebesgue. Cette équation s'écrit

$$\left(\partial_j X^j\right)\rho + X^j\partial_j\rho \underset{pp}{=} 0.$$

On s'intéresse au champ chronologique ∂_t comme opérateur de $L^2\left(\mathbb{R}^4, d\mu\right)$ avec une mesure $d\mu = \rho d\lambda$. Par abus de langage, ∂_t est autoadjoint si

$$\partial_t\rho \underset{pp}{=} 0 \tag{4.4}$$

pour la mesure de Lebesgue $d\lambda$. L'équation 4.4, permet d'affirmer qu'il existe un sous ensemble E de mesure de Lebesgue nulle tel que sur chaque composante connexe de $\mathbb{R}^4 \setminus E$, ρ est une fonction indépendante de la variable temps t, donc

$$\rho(t,x,y,z) \underset{pp}{=} \zeta(x,y,z)$$

pour la mesure de Lebesgue et

$$\int_{\mathbb{R}^4}\phi\overline{\psi}d\mu = \sum_C\int_C\zeta\phi\overline{\psi}d\lambda,$$

où C parcourt l'ensemble des composantes connexes de $\mathbb{R}^4 \setminus E$. Si on pose $\phi_C = \mathbf{1}_C\phi$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^4}\phi\overline{\psi}d\mu = \sum_C\int_{\mathbb{R}^4}\zeta_C\phi_C\overline{\psi_C}d\lambda.$$

Le champ $\rho\partial_t$ s'écrit, en utilisant le procédé de sommation d'Einstein pour les sommes infinies

$$\rho\partial_t = \zeta_C\partial_t^C,$$

où la classe de $\partial_t^C \phi$ dans $L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right)$ est celle de $\partial_t\left(\mathbf{1}_C \phi\right)$. On a une décomposition de l'opérateur $\rho\partial_t$ en une somme d'opérateurs proportionnels au champ chronologique dont le coefficient de proportionalité ne dépend que de la position espace de l'événement considéré.

Proposition 12. *Si $\partial_t \rho \underset{pp}{=} 0$ pour la mesure de Lebesgue alors $\rho\partial_t$ est un champ autoadjoint pour la métrique de Minkowski.*

Conclusion 1. *Le champ chronologique ∂_t est autoadjoint pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^4$. Si on change la mesure de $\mathbb{R}^4$ par une mesure $d\mu$, cette mesure est de la forme $d\mu = \rho d\lambda$. Le champ chronologique reste autoadjoint pour cette mesure si*

$$\partial_t \rho \underset{pp}{=} 0,$$

presque partout pour la mesure de Lebesgue $d\lambda$.

4.2. **Analyse spectrale des champs autoadjoints.** Chaque champ autoadjoint X décompose $L^2(\Omega, d\omega)$ en une somme orthogonale de trois sous-espaces

$$L^2(\Omega, d\lambda) = {L^2}_{X,ac}(\Omega, d\lambda) \oplus {L^2}_{X,p}(\Omega, d\lambda) \oplus {L^2}_{X,sc}(\Omega, d\lambda).$$

Plus généralement si T désigne un opérateur non borné, autoadjoint dont la mesure spectrale est

$$E_T : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(L^2(\Omega, d\lambda)),$$

il y a une décomposition en somme orthogonale

$$L^2(\Omega, d\lambda) = {L^2}_{T,ac}(\Omega, d\lambda) \oplus {L^2}_{T,p}(\Omega, d\lambda) \oplus {L^2}_{T,sc}(\Omega, d\lambda),$$

la partie ${L^2}_p(\Omega, d\lambda)$ est une somme orthogonale de sous-espaces propres de la fermeture de T, on dit que ϕ^p est la *"représentation discrétisée"* ou *"quantique"* de l'onde pour l'opérateur T. L'onde ϕ^{ac} est la partie mesurable pour T et ϕ^{sc} est la partie résiduelle de l'onde ϕ. La décomposition orthogonale dépend de l'opérateur, mais également du choix de la mesure Lebesguienne fixée sur l'univers Ω.

Definition 23. *Les valeurs propres d'un opérateur T sont les valeurs $\mu \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le sous-espace*

$$E_\lambda = \left\{\phi \in L^2(\Omega, d\lambda) : T\phi = \mu\phi\right\},$$

est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega, d\lambda)$, non réduit à $\{o\}$. Si la dimension de ce sous-espace propre est fini, on dit que la valeur propre λ est de type fini. $\mathcal{V}_T$ sont les valeurs propres de T et $\mathcal{W}_T$ sont les valeurs propres de type fini.

Remark 25. *Si T est borné, les sous-espaces E_λ sont fermés.*

Lemma 2. *Si T est autoadjoint et $\mu \in \mathcal{V}_T$ alors $E_T\left(\{\mu\}\right)$ est le projecteur sur le sous-espace propre E_μ parallèlement à $E_\mu^\perp$.*

Lemma 3. *${L^2}_{T,p}(\Omega, d\lambda)$ est la somme orthogonale des sous-espaces propres de T.*

L'opérateur $i\partial_t$ est essentiellement autoadjoint. Une valeur propre μ de $i\partial_t$ est une valeur réelle pour laquelle $\ker\left(i\partial_t - \mu\,\mathrm{Id}\right)$ est un sous espace vectoriel fermé et non nul. L'équation

$$i\partial_t \phi \underset{pp}{=} \mu\phi$$

pour la mesure de Lebesgue, a des solutions dans $L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right)$, non nulles. Soit $\phi_n(t) = \mathbf{1}_{[-n,n]}(t)\exp(-i\mu t)\psi(x,y,z)$, $\phi_n \in L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right)$ si $\psi \in L^2\left(\mathbb{R}^3, dxdydz\right)$. La suite $\{\phi_n\}$ est dans $\ker(i\partial_t - \mu\,\mathrm{Id})$, mais

$$\lim_{n\to+\infty} \phi_n(t) = \phi(t),$$

avec $\phi(t) = \exp(-i\mu t)\psi(x,y,z)$ et $\phi \notin L^2\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right)$. En particulier,

$$L^2_{\partial_t,p}\left(\mathbb{R}^4, d\lambda\right) = \{o\}$$

relativement au champ chronologique ∂_t, les ondes ϕ n'ont pas de *"partie discrétisée"*.

On a le *"procédé de discrétisation"* suivant. Soit f une fonction borélienne localement intégrable sur $\mathbb{R}$, l'application $B \to E_{f(\partial_t)}(B) = E_{\partial_t}\left(f^{-1}(B)\right)$ est une mesure spectrale, d'après le théorème de Von Neumann, il existe un unique opérateur autoadjoint, noté $f(i\partial_t)$, dont la mesure spectrale est $E_{f(i\partial_t)}$. Les valeurs propres μ de cet opérateur sont celles pour lesquelles $\ker(f(i\partial_t) - \mu\,\mathrm{Id})$ est un sous espace vectoriel fermé non nul.

Pour quantifier ∂_t, on prend une partition de $\mathbb{R}$ formée d'une suite de boréliens $\{B_n\}$ de $\mathbb{R}$. On se fixe une suite $\mu_n \in \mathbb{R}$, la quantification de ∂_t est $f(i\partial_t)$ où

$$f = \sum_n \mu_n \mathbf{1}_{B_n}.$$

Dans cette situation, on dit que l'on a discrétisé le temps le long de la suite $\{(B_n, \mu_n)\}$ et on a

$$f(i\partial_t) = \sum_n \mu_n E_{\partial_t}(B_n).$$

Remark 26. *Si* $\sum_n |\mu_n| < +\infty$ *et* $\sup\{\|E_{\partial_t}(B_n)\|\} < +\infty$ *alors* $f(i\partial_t)$ *est borné.*

4.3. **Les espaces de Sobolev attachés aux fibrés des états de l'univers.** On généralise la notion d'espace de Hilbert $L^2(\Omega, d\lambda)$ définie par une mesure Lebesguienne $d\lambda$ sur l'univers Ω, à un fibré

$$\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$$

des états de l'univers Ω. Dans cette situation, $\mathcal{H}$ est un espace d'Hilbert, E est l'espace total et π est la projection de E sur Ω. On rappelle qu'un fibré d'état de l'univers Ω est un fibré complexe muni d'une section hermitienne, notée $\langle \bullet \mid \bullet \rangle$, induite par la fibre $\mathcal{H}$. Chaque fibre est muni d'un produit scalaire hermitien. L'univers Ω est muni d'une orientation et d'une mesure Lebesguienne λ. On définit le produit scalaire

$$\langle \phi \mid \psi \rangle = \int_\Omega \langle \phi(\omega) \mid \psi(\omega) \rangle_\omega \, d\lambda(\omega),$$

ϕ et ψ sont deux sections de ζ. L'espace $L^2(\zeta)$ est la complétion de l'espace vectoriel normé

$$\{\phi \in \Gamma(E) : \|\phi\| < +\infty\}$$

où $\Gamma(E)$ est l'ensemble des sections de classe C^∞ de ζ et $\|\phi\|^2 = \langle \phi \mid \phi \rangle$. L'espace $L^2(\zeta)$ est un espace d'Hilbert que l'on note par la suite $L^2(E, d\lambda)$. Alors

$$\nabla^n_\gamma = \gamma_n \circ \nabla_{n-1} \text{ avec } \nabla_{n-1} = d^\nabla_{n-1} \circ \cdots \circ d^\nabla_0$$

appartient à $\operatorname{End}(\zeta)$. On définit pour une section ϕ la norme d'ordre p, $\|\phi\|_p = \int_\Omega |\phi|^p \, d\lambda$ avec, $|\phi| = \sqrt{\langle \phi \mid \phi \rangle}$ et

$$\|\phi\|_{m,p} = \sum_{k=0}^{m} \left\|\nabla_\gamma^k \phi\right\|_p, \; 1 \leqslant p < +\infty \text{ et } \nabla_\gamma^0 \phi = \phi.$$

On pose $\Gamma^{m,p}(\zeta) = \left\{\phi \in \Gamma(\zeta) : \|\phi\|_{m,p} < +\infty\right\}$, les espaces de Sobolev attachés au fibré hermitien ζ sont définis par la complétion des espaces normés $\Gamma^{m,p}(\zeta)$ et sont notés

$$\mathcal{W}^{m,p}(\zeta).$$

Par construction, ces espaces sont des espaces de Banach. Si on pose

$$\mathcal{H}^m(\zeta) = \mathcal{W}^{m,2}(\zeta),$$

les espaces obtenus sont des espaces d'Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle \phi \mid \psi \rangle_m = \sum_{k=0}^{m} \int_\Omega \left\langle \nabla_\gamma^k \phi \mid \nabla_\gamma^k \phi \right\rangle d\lambda.$$

L'exemple le plus simple est celui de l'univers de Minkowski $\left(\mathbb{R}^4, \eta\right)$, dans cette situation tous les fibrés des états sont triviaux

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^k \\ \downarrow \pi \\ \mathbb{R}^4 \end{array},$$

et sont munis de la section hermitienne canonique

$$z^1 \overline{z^2} = \sum_{\mu=1}^{k} z_\mu^1 \overline{z_\mu^2}, \; z^\nu = (z_1^\nu, z_2^\nu, \cdots, z_k^\nu) \in \mathbb{C}^k,$$

la connexion est la connexion de Levi-Civita ∇_η associée à la métrique de Minkowski η. Les matrices de Dirac associées à la section de Dirac γ, $\gamma^\mu(\phi) = \gamma(d_\mu \otimes \phi)$ où $\{d_\mu\}$ est la base duale de $\{\partial_\mu\}$, doivent vérifier

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I_4,$$

on en déduit $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = O_4$ si $\mu \neq \nu$, $\left\{\gamma^0, \gamma^0\right\} = -2I_4$ et $\{\gamma^\mu, \gamma^\mu\} = 2I_4$ pour $\mu = 1, 2, 3$. On peut écrire

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu \text{ si } \mu \neq \nu,$$
$$\left(\gamma^0\right)^2 = -I_4,$$
$$\left(\gamma^\mu\right)^2 = I_4.$$

Definition 24. *Le goupe $\mathcal{M}$ engendré par les γ^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$ et ayant pour relations $\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu$, $\left(\gamma^0\right)^2 = -I_4$ et $\left(\gamma^\mu\right)^2 = I_4$ est le groupe de Minkowski, on le note*

$$\mathcal{M} = \left\{\gamma^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3 : \gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu, \left(\gamma^0\right)^2 = -I_4, \left(\gamma^\mu\right)^2 = I_4\right\}.$$

Dans le cas général, le groupe de Dirac sur $\left(\mathbb{R}^4, g\right)$ est

$$\mathcal{D} = \left\{\gamma^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3 : \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I_4\right\}.$$

Remark 27. *On peut généraliser le groupe de Dirac à (Ω, g) muni d'un fibré des états ayant une connexion ∇ et une section de Dirac γ.*

Proposition 13. *Les matrices* $\gamma^0 = \begin{pmatrix} O_2 & I_2 \\ -I_2 & O_2 \end{pmatrix}$ *et* $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} O_2 & \sigma_\mu \\ \sigma_\mu & O_2 \end{pmatrix}$, $\mu = 1,2,3$ *où les matrices* σ_μ *sont les matrices de Pauli d'ordre* 2, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, *vérifient* $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$, $\left(\gamma^0\right)^2 = -I_4$ *et* $\left(\gamma^\mu\right)^2 = I_4$ *pour* $\mu = 1,2,3$. *On peut comparer à [8].*

La section de Dirac est entièrement définie par les matrices de Dirac, la connexion est définie par la connexion de Levi-Civita de la métrique et la mesure définie par cette métrique η est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^4$. On peut ainsi, définir tous les espaces de Sobolev des états attachés à l'univers de Minkowski $\left(\mathbb{R}^4, \eta\right)$.

Remark 28. *Les espaces de Hilbert* $\mathcal{H}^m(\zeta)$ *sont définis pour l'étude spectrale de l'extension de la dérivée de Lie aux champs complexes en identifiant* $\mathcal{L}_X$ *à un opérateur*

$$\mathcal{L}_X : \mathcal{H}^m(\zeta) \to \mathcal{H}^m(\zeta), \ \mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$$

avec $\zeta = (T_{\mathbb{C}}\Omega, \pi, \Omega, \mathcal{H})$.

4.4. **Opérateur de type Dirac associé à un champ essentiellement autoadjoint.** Soit $\mathcal{H}$ un espace d'Hilbert, on note $\mathcal{H}^{\otimes n}$, le tensorialisé d'ordre n et $\mathcal{H}_+^{\otimes n}$ et $\mathcal{H}_-^{\otimes n}$ sont respectivement le symétrisé et l'antisymétrisé de $\mathcal{H}^{\otimes n}$.

$\mathcal{H}_+^{\otimes n}$ est engendré par

$$\{h_1, h_2, \cdots, h_n\} = \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}(\{1,2,\cdots,n\})} h_{\sigma(1)} \otimes h_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes h_{\sigma(n)}$$

et $\mathcal{H}_-^{\otimes n}$ est engendré par

$$[h_1, h_2, \cdots, h_n] = \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}(\{1,2,\cdots,n\})} \epsilon(\sigma)\, h_{\sigma(1)} \otimes h_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes h_{\sigma(n)},$$

où $\mathrm{Perm}(\{1, 2, \cdots, n\})$ est l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \cdots, n\}$ et $\epsilon(\sigma)$ est la signature de σ. On pose

$$[h_1, h_2, \cdots, h_n]_+ = \{h_1, h_2, \cdots, h_n\}$$

et

$$[h_1, h_2, \cdots, h_n]_- = [h_1, h_2, \cdots, h_n].$$

L'espace de *Bose-Fock* et l'espace de *Fermi-Fock* sont respectivement

$$\mathcal{F}_+(\mathcal{H}) = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_+^{\otimes n} \text{ et } \mathcal{F}_-(\mathcal{H}) = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_-^{\otimes n}$$

avec $\mathcal{H}_S^{\otimes 0} = \mathcal{H}_A^{\otimes 0} = \mathcal{H}^{\otimes 0} = \mathbb{C}$, l'espace de *Bose-Fermi-Fock est*

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \mathcal{F}_+(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}_-(\mathcal{H}).$$

Les éléments de l'espace de Fock s'écrivent $\phi = \{\phi^n\}$, on identifie ϕ^n à

$$\{0, 0, \cdots, \phi^n, 0, \cdots\},$$

on pose $\mathbf{1}_\pm = \{1, 0, 0, \cdots\} \in \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})$, $\mathbf{1}_+$ représente le *"boson fock vacuum"* et $\mathbf{1}_-$ le *"fermion fock vacuum"*. En général, si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont deux espaces de Hilbert, l'espace de Bose-Fermi-Fock pour le couple $(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ est

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K}) = \mathcal{F}_+(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}_-(\mathcal{K}),$$

pour nous $\mathcal{H} = L^2(\Omega, d\lambda)$ pour les champs scalaires et $\mathcal{H} = L^2(T_{\mathbb{C}}\Omega, d\lambda)$ dans le cas des champs de vecteurs complexes, où $T_{\mathbb{C}}\Omega$ est muni d'une section hermitienne et $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue induite par la métrique de Lorentz sur l'univers Ω.

Si $\mathcal{H} = \mathcal{K}$, on pose

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{H}).$$

Pour tout champ $X \in \mathcal{H}(g)$, on peut construire des opérateurs densément définis, fermés et non bornés, qui sont les opérateurs dits d'*annulation* et dont les duaux sont les opérateurs de *création* des *champs bosoniques* et des *champs fermioniques*

$$A(X)\left([X_1, X_2, \cdots, X_n]_{\pm}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} \epsilon_{\pm}(j) \langle X \mid X_j \rangle_{\mathcal{H}(g)} \left[X_1, X_2, \cdots, \widehat{X_j}, \cdots, X_n\right]_{+},$$

avec

$$\epsilon_{+}(j) = 1 \text{ et } \epsilon_{-}(j) = (-1)^{j-1}.$$

Les propriétés de ces opérateurs sont les suivantes

$$A_{\pm}(X)\mathbf{1}_{\pm} = 0,$$

$$\mathcal{H}_{\pm}^{\otimes n} = \overline{\operatorname{Vect}\left\{A_{\pm}(X_1)^* \cdots A_{\pm}(X_n)^* \mathbf{1}_{\pm} : X_j \in \mathcal{H}(g), j = 1, 2, \cdots, n\right\}},$$

et on a les règles d'anticommutation

$$\left[A_{\pm}(X), A_{\pm}(Y)^*\right]_{\mp} = \langle X \mid Y \rangle_{\mathcal{H}(g)},$$

$$\left[A_{\pm}(X), A_{\pm}(Y)\right]_{\mp} = 0,$$

$$\left[A_{\pm}(X)^*, A_{\pm}(Y)^*\right]_{\mp} = 0.$$

Remark 29. *Avec les conventions* $[A, B]_{-} = AB - BA$ *et* $[A, B]_{+} = AB + BA$.

La construction précédente peut se faire en prenant pour espace de Hilbert, l'espace $\mathcal{H} = L^2(\Omega, d\lambda)$ ou $\mathcal{H} = L^2(T_{\mathbb{C}}\Omega, d\lambda)$, où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue définie par la métrique Lorentzienne g. On construit les opérateurs d'*annulation* $A_{\pm}$ et de création $A_{\pm}^*$ qui à chaque onde ϕ associe un opérateur sur l'espace $\mathcal{F}_{\pm}$. On étend ces opérateurs à l'espace de Fock $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ comme suit

$$A^{+}(\phi) = A_{+}(\phi) \otimes \mathrm{Id} \text{ et } A^{-}(\phi) = \mathrm{Id} \otimes A_{-}(\phi),$$

Id est l'application identique sur les espaces respectifs $\mathcal{F}_{-}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{F}_{+}(\mathcal{H})$.

Lorsque le champ X est essentiellement autoadjoint, la fermeture de la dérivée de Lie $\overline{L_X}$ est densément définie et autoadjointe. $\overline{L_X}^*$ est l'application duale. On pose $\mathcal{D}_X$, le sous-espace vectoriel défini par

$$\mathcal{D}_X = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{array}{c} A^{+}(\phi_1)^* \cdots A^{+}(\phi_n)^* A^{-}(\psi_1)^* \cdots A^{-}(\psi_p)^* \mathbf{1} : \\ \phi_j \in \operatorname{dom}(T), \psi_k \in \operatorname{dom}(T^*), n, p \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

où $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{+} \otimes \mathbf{1}_{-}$.

Theorem 13. *Si X est un champ essentiellement autoadjoint, il existe un unique opérateur d_X , densément défini et fermé de l'espace de Fock $\mathcal{F}\left(L^2(\Omega, d\lambda)\right)$ vérifiant,*

1)$\mathcal{D}_X$ est un coeur de d_X,

2)Pour

$$\Psi = A^{+}(\phi_1)^* \cdots A^{+}(\phi_n)^* A^{-}(\psi_1)^* \cdots A^{-}(\psi_p)^* \mathbf{1}, \tag{4.5}$$

on a

$$d_X \Psi = 0 \text{ pour } n = 0,$$

$$d_X\Psi = \sum_{j=1}^{n} A^+(\phi_1)^* \cdots \widehat{A^+(\phi_j)} \cdots A^+(\phi_n)^* A^-(\psi_1)^* \cdots A^-(\psi_p)^* \mathbf{1}.$$

De plus, $d_X^2 = o$ *et pour chaque base hilbertienne* $\{e_n\} \subset \operatorname{dom}\left(\overline{L_X}^*\right)$

$$d_X\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} A^+\left(\overline{L_X}^* e_n\right) A^-(e_n)\Psi,\ \Psi \in \mathcal{D}_X,$$

pour la topologie forte de $\mathcal{F}\left(L^2(\Omega, d\lambda)\right)$*, si* $\{\phi_n\} \subset \operatorname{dom}\left(\overline{L_X}\right)$ *alors*

$$\langle \Phi \mid \Psi \rangle_{\mathcal{F}(L^2(\Omega,d\lambda))} = \lim_{N\to\infty} \left\langle \Phi \mid \sum_{n=1}^{N} A^+(e_n) A^-\left(\overline{L_X} e_n\right)\Psi \right\rangle,\ \Phi,\ \Psi \in \mathcal{D}_X.$$

$\mathcal{D}_X \subset \mathcal{D}(d_X^*)$ *et*

$$d_X^*\Psi$$
$$= \sum_{k=1}^{p} \epsilon_-(k) A^+\left(\overline{L_X}^* \psi_k\right)^* A^+(\phi_1)^* \cdots A^+(\phi_n)^* A^-(\psi_1)^* \cdots \widehat{A^-(\psi_k)}^* \cdots A^-(\psi_p)^* \mathbf{1},$$

si Ψ *vérifie l'équation 4.5.*

Proof. C'est un cas particulier de la proposition 2.1 de [1], appliqué à l'opérateur non borné fermable et symétrique associé à la dérivée de Lie pour un champ de divergence nulle, c'est-à-dire, essentiellement autoadjoint pour la métrique g. □

Definition 25. *L'opérateur de Dirac associé au champ essentiellement autoadjoint est défini par*

$$Q_X = d_X + d_X^*,\ \operatorname{dom}(Q_X) = \operatorname{dom}(d_X) \cap \operatorname{dom}(d_X^*).$$

Pour l'opérateur, non borné autoadjoint T sur un espace d'Hilbert $\mathcal{H}$, il existe un unique opérateur autoadjoint T_n sur $\mathcal{H}^{\otimes n}$, pour lequel le produit tensoriel algébrique de n exemplaires de $\operatorname{dom}(T)$ soit un *"coeur" de* $\operatorname{dom}(T_n)$, T_n vérifie

$$T_n(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_n) = \sum_{j=1}^{n} \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_{j-1} \otimes T(\phi_j) \otimes \phi_{j+1} \otimes \cdots \otimes \phi_n,$$

où $\phi_j \in \operatorname{dom}(T_n)$, si on pose $T_0 = o$ l'opérateur identiquement nul, on construit l'opérateur autoadjoint

$$\Gamma(T) = \oplus_{n=0}^{\infty} T_n,$$

cet opérateur défini sur

$$\oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n},$$

est appelée la deuxième quantification de l'opérateur T [21]. On a,

$$\Gamma(T)(\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})) \subset \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}).$$

On pose $\Gamma_\pm(T) = \Gamma(T)\mid_{\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})}$, pour la fermeture de l'opérateur associé à la dérivée de Lie, on pose $\Gamma_\pm(X) = \Gamma(X)\mid_{\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})}$. Le Laplacien associé à l'opérateur de type Dirac est

$$\Delta_X = \Gamma_+\left(\overline{L_X}^* \circ \overline{L_X}\right) \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \Gamma_-\left(\overline{L_X} \circ \overline{L_X}^*\right).$$

Theorem 14. *Si* $\operatorname{div}(X) = o$ *alors*

$$\Delta_X = Q_X^2 = d_X^* d_X + d_X d_X^*.$$

Proof. Ce théorème est une conséquence directe du théorème 2.2 de [1]. □

On rappelle que deux champs X et Y, essentiellement autoadjoints sont fortement commutatifs, si les mesures spectrales de $\overline{L_X}$ et $\overline{L_Y}$ commutent. En d'autres termes, ils sont dits fortement anticommutatifs si

$$\exp\left(it\overline{L_X}\right)\overline{L_Y} \subset \overline{L_Y}\exp\left(-it\overline{L_X}\right),\ t \in \mathbb{R},$$

on peut consulter [18] et [25].

Le théorème qui suit est une caractérisation de l'anticommutation des opérateurs Q_X et Q_Y.

Theorem 15. *Q_X et Q_Y sont fortement anticommutatifs si et seulement si $\overline{L_X}$ et $\overline{L_Y}$ sont fortement anticommutatifs. Dans ce cas, $\overline{L_X} \pm \overline{L_Y}$ sont des opérateurs non bornés autoadjoints et $Q_{X\pm Y} = Q_X \pm Q_Y$.*

Proof. La preuve est une conséquence directe du théorème 3.1 de [1], appliqués aux opérateurs $\overline{L_X}$ et $\overline{L_Y}$. □

Conclusion 2. *L'ensemble des champs essentiellement autoadjoints, noté $\mathcal{Q}(\Omega, g)$ sont les champs qui conservent le volume le long de leur flot. Le sous-espace $\mathcal{Q}(\Omega, g)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\Gamma(\Omega)$,*

$$\mathcal{Q}(\Omega, g) = \ker(\mathrm{div}).$$

La fermeture de l'opérateur défini par la dérivée de Lie, le long d'un champ de $\mathcal{Q}(\Omega, g)$ est un opérateur autoadjoint, non borné. Cet opérateur définit dans l'espace de Fock associé à l'espace d'Hilbert $L^2(\Omega, d\lambda)$, un opérateur de type Dirac noté Q_X, qui quantifie le champ essentiellement autoadjoint X.

4.5. **Les champs en cordes.** On a donné une étude des champs de façon analytique en introduisant la dériveé de Lie de ce champ, on étudie les champs par une approche géométrique. Dans cette section, on suppose que l'univers Ω est une variété de dimension 4, orientée. Le fibré tangent est muni d'une connexion ∇ et d'une section de Dirac γ qui vérifie l'équation relativiste quantique dans toute carte

$$Ric^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R\gamma^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta} + \Lambda\gamma^{\alpha\beta}, \tag{4.6}$$

$\gamma^{\alpha\beta}$ est le tenseur de Poisson défini par

$$\gamma^{\alpha\beta} = \frac{1}{8}\mathrm{Trace}\left(\left\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\right\}\right) = \frac{1}{4}\mathrm{Trace}\left(\gamma^\alpha\gamma^\beta\right),$$

γ^α sont les matrices de Dirac associées à γ dans cette carte.

On définit l'opérateur d'évolution sur le complexifié du fibré tangent comme la section du fibré $\Lambda^1_{\mathbb{C}}\Omega \otimes T_{\mathbb{C}}\Omega$,

$$\Phi(X + iY) = \gamma \circ \nabla(X) + i\gamma \circ \nabla(Y).$$

L'équation d'évolution des champs complexes est

$$\Phi(\Psi) = -i\frac{mc}{\hbar}\Psi, \tag{4.7}$$

où m est la densité de masse associée au champ Ψ.

Remark 30. *1)Dans une première approche on parlera de champ complexe et de masse ponctuelle pour définir la notion de pseudo-particule et de masse.*

2)La connexion et la section de Dirac sont définies et vérifient dans tout "local frame" l'équation relativiste quantique 4.6. L'opérateur $i\Phi$ est un opérateur hermitien pour une structure hermitienne donnée. L'ensemble de toutes les sections des formes hermitiennes de $T_{\mathbb{C}}\Omega$ qui rendent l'opérateur $i\Phi$ hermitien est noté $\mathcal{H}_{\Phi}$.

3)Un champ Ψ vérifie une équation d'évolution de type 4.7. La masse ponctuelle ou densité de masse associée à Ψ est la fonction m fixée par une section de $\mathcal{H}_{\Phi}$.

Definition 26. *Les champs en corde sont des champs complexes Ψ pour lesquels*

$$\dim\left(\operatorname{Vect}\left\{\operatorname{Re}\Psi, \operatorname{Im}\Psi\right\}\right) = 2,$$

et

$$\left[\operatorname{Re}\Psi, \operatorname{Im}\Psi\right] \in \operatorname{Vect}\left\{\operatorname{Re}\Psi, \operatorname{Im}\Psi\right\}.$$

Ces hypothèses permettent de définir un feuilletage de l'univers, de dimension 2. Chaque feuille représente une trajectoire possible d'une corde, dite surface d'univers, la corde est une feuille du feuilletage de S, défini par $\operatorname{Im}\Psi$. Sous les hypothèses précédentes, il existe deux fonctions réelles a et b, de classe C^{∞} sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\left[\operatorname{Re}\Psi, \operatorname{Im}\Psi\right] = a\operatorname{Re}\Psi + b\operatorname{Im}\Psi.$$

On peut associer à un champ en corde une fonction définie sur Ω à valeurs complexes, $\Theta = a + ib$.

Remark 31. $\left[\operatorname{Re}\Psi, \operatorname{Im}\Psi\right] = \mathcal{L}_{\operatorname{Re}\Psi}\operatorname{Im}\Psi$ *où $\mathcal{L}_{\operatorname{Re}\Psi}$ est la dérivée de Lie étendue aux champs réels.*

Definition 27. *1)Une supercorde de S est une réunion de cordes de S. Si cette réunion est finie, une supercorde est une "particule".*

2)La fonction Θ est la fonction d'onde associée au champ Ψ.

Soit S une surface d'univers et $\operatorname{in} : S \to \Omega$, l'inclusion de S dans Ω. $T_{\omega}\operatorname{in} : T_{\omega}S \to T_{\omega}\Omega$ est un isomorphisme de $T_{\omega}S$ sur $\operatorname{Vect}\left\{\operatorname{Re}\Psi(\omega), \operatorname{Im}\Psi(\omega)\right\}$. Par la suite, on identifie $T_{\omega}S$ et $\operatorname{Vect}\left\{\operatorname{Re}\Psi(\omega), \operatorname{Im}\Psi(\omega)\right\}$ à l'aide de cet isomorphisme. On définit les deux 1-formes λ et μ sur S par $\lambda(\omega)(u) = \alpha$ et $\mu(\omega)(u) = \beta$ pour

$$T_{\omega}\operatorname{in}(u) = \alpha\operatorname{Re}\Psi(\omega) + \beta\operatorname{Im}\Psi(\omega) \in T_{\omega}\operatorname{in}(T_{\omega}S).$$

Ces deux 1-formes définissent la 2-forme $\sigma = \lambda \wedge \mu$ sur S. On prend pour orientation de S, l'orientation définie par σ.

Definition 28. *La tension de la feuille S est*

$$\mathcal{T}(S) = \int_S \sigma, \tag{4.8}$$

La tension est une quantité positive par le choix de l'orientation de S. La corde ne peut pas occuper toutes les surfaces d'univers, l'hypothèse que l'on fait est que les trajectoires possibles S sont celles qui rendent minimale $\mathcal{T}(S)$. Il peut y avoir une infinité de surface d'univers. La trajectoire d'une corde définie par un champ en corde est une surface d'univers pour ce champ. La notion de temps peut apparaître dans le choix de la restriction de la section des formes hermitiennes de $T_{\mathbb{C}}\Omega$ à $T\Omega$. On peut représenter cette restriction comme une métrique de Lorentz ou une métrique pseudo-riemannienne de l'univers Ω. Dans le cas d'une métrique

de Lorentz, on peut définir les champs chronologiques associés à cette métrique. L'opérateur Φ est défini par la connexion de Levi-Civita de cette métrique et le tenseur de Poisson s'écrit localement comme le tenseur dual de $g_{\alpha\beta}$.

Definition 29. *Un temps relatif sur S est une C^{∞}-application $\tau : S \to \mathbb{R}$ pour laquelle $\tau\mid_{\gamma}$ est constante pour toutes les cordes de S.*

La condition nécessaire et suffisante pour que τ soit un temps relatif est que pour tout $\omega \in S$, $d_{\omega}\tau\left(\operatorname{Im}\Psi\left(\omega\right)\right) = 0$. Ces égalités sont équivalentes à l'existence d'une C^{∞}-application χ de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $d\tau = \chi\lambda$. Le temps relatif est orienté positivement si $\chi > 0$ sur $S \smallsetminus \{\chi = 0\}$. Si τ est orienté négativement, $-\tau$ est orienté positivement. Si τ_1 et τ_2 sont deux temps relatifs sur S alors $\tau_2 - \tau_1$ est un temps relatif sur S. Un temps relatif τ est un temps propre si $\chi = 1$.

Si $S \smallsetminus \{\chi = 0\}$ n'est pas connexe, un temps relatif peut être positif sur une composante connexe et négatif sur l'autre. Dans la suite un temps relatif est tel que $\{\chi = 0\}$ est vide ou une sous-variété de dimension 0.

Theorem 16. *Il y a équivalence entre la 1-forme différentielle λ est exacte et S est muni d'un temps propre, tous les temps propres τ de S sont les primitives de λ. Si τ_1 et τ_2 sont deux temps propres sur S alors $\tau_2 - \tau_1$ est constante sur S.*

Proof. La fonction χ est définie par $\chi\left(\omega\right) = d_{\omega}\tau\left(\operatorname{Re}\Psi\left(\omega\right)\right)$. Si $\chi = 1$, $d\tau = \lambda$. □

Definition 30. *Le champ en corde Ψ est exacte ou totale sur la surface d'univers S si la 1-forme λ est exacte.*

Le champ Ψ vérifie une équation de la forme 4.7, la fonction m représente la masse ponctuelle du champ Ψ. La masse de la corde γ est donnée par

$$\mathcal{M}_{\gamma} = \int_{\gamma} m\mu = \int_{\gamma} m\boldsymbol{\iota}_{\operatorname{Re}\Psi}\sigma, \tag{4.9}$$

avec $\mu = \boldsymbol{\iota}_{\operatorname{Re}\Psi}\sigma$ qui est une forme volume sur γ. Et sa tension est définie par

$$\mathcal{T}_{\gamma} = \int_{\gamma} \mu = \int_{\gamma} \boldsymbol{\iota}_{\operatorname{Re}\Psi}\sigma. \tag{4.10}$$

Remark 32. $\lambda = -\boldsymbol{\iota}_{\operatorname{Im}\Psi}\sigma$.

L'énergie est proportionnelle à la masse de la corde avec un coefficient de proportionnalité positif, noté c^2,

$$E_{\gamma} = \mathcal{M}_{\gamma}c^2.$$

Dans ce qui suit Ψ est un champ en corde **exacte** sur S. Si on impose que l'énergie de chaque corde est invariante sur S et vaut E_S, alors l'énergie d'une particule au temps t pour le temps propre τ est

$$E_t = k\left(t\right)E_S$$

où $k\left(t\right)$ est le nombre de cordes composant cette particule. Si on passe d'un temps t à $t + \Delta t$, la variation d'énergie est

$$\Delta E = \left(k\left(t + \Delta t\right) - k\left(t\right)\right)E_S = \Delta k\left(t\right)E_S.$$

Si on change de temps propre on a

$$\Delta E = \Delta k\left(t + \alpha\right)E_S,$$

où la constante α est la différence entre le nouveau et l'ancien temps propre.

Remark 33. *Pour les supercordes ayant un nombre infini de composantes, l'hypothèse d'imposer à l'énergie d'être invariante pour chaque corde de S, est caduque. Si $\gamma = \sum \gamma_\nu$ alors E_γ a une valeur finie si la série $\sum E_{\gamma_\nu}$ est une série convergente et en particulier $\lim_{\nu \to +\infty} E_{\gamma_\nu} = 0$.*

On a quantifié l'énergie en imposant une énergie constante sur chaque corde située sur la surface d'univers. Si on utilise la formule de Planck

$$E_S = h\nu$$

où ν est la fréquence d'oscillation de la corde, alors les cordes ont même fréquence d'oscillation sur S.

Les équations d'Einstein et Plank, $E_\gamma = \mathcal{M}_\gamma c^2$ et $E_\gamma = h\nu_\gamma$, permettent d'écrire

$$\mathcal{E}_\gamma = \mathcal{M}_\gamma T_\gamma = \frac{h}{c^2} \tag{4.11}$$

qui est invariant, où h est la constante de Planck et $T_\gamma = \frac{1}{\nu_\gamma}$ est la période d'oscillation de la corde γ.

On se fixe une métrique riemannienne g canonique, sur S par

$$g\left(\operatorname{Re}\Psi, \operatorname{Re}\Psi\right) = g\left(\operatorname{Im}\Psi, \operatorname{Im}\Psi\right) = 1$$

et

$$g\left(\operatorname{Re}\Psi, \operatorname{Im}\Psi\right) = g\left(\operatorname{Im}\Psi, \operatorname{Re}\Psi\right) = 0.$$

Avec cette métrique pour un temps propre, $\operatorname{Re}\Psi = \operatorname{grad}\tau$. L'excitation globale de la surface d'univers de S est une section $\mathcal{E}$ de S à valeurs dans $\operatorname{Isom}_+(TS)$ qui à chaque événement $\omega \in S$ associe une isométrie de $(T_\omega S, g(\omega))$ conservant l'orientation. La restriction de cette section à une corde γ est l'excitation de cette corde sur S. On pose $\mathbf{M}_\omega$ la matrice de $\mathcal{E}(\omega)$ dans la base $\{\operatorname{Re}\Psi(\omega), \operatorname{Im}\Psi(\omega)\}$, il existe une C^∞-application $\theta : S \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\mathbf{M}_\omega = \begin{pmatrix} \cos\theta(\omega) & -\sin\theta(\omega) \\ \sin\theta(\omega) & \cos\theta(\omega) \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Si γ est difféomorphe à $\mathbb{S}^1$ou $\mathbf{I}=[0,1]$, on prend un paramétrage par longueur d'arc $\varrho : [0,l] \to \gamma$, l'application $\theta \circ \varrho : [0,l] \to \mathbb{R}$ est prolongeable par périodicité sur $\mathbb{R}$, la période T_γ de cette fonction est la période d'excitation de la corde γ. La longueur de la corde l qui est la tension $\mathcal{T}_\gamma$ de la corde vérifie

$$\mathcal{T}_\gamma = kT_\gamma,\ k \in \mathbb{N}^*.$$

Proposition 14. *La tension de la corde γ est un multiple entier de la période T_γ.*

Remark 34. *La fréquence d'excitation de γ est $\nu_\gamma = \frac{1}{T_\gamma}$.*

Pour comprendre la notion de fréquence d'excitation d'une corde γ, on se place dans un voisinage de cette corde dans lequel il existe un temps propre τ. On choisit l'unique temps propre pour lequel $\gamma = \tau^{-1}(t_0)$ et on pose $\gamma_0 = \gamma$. Ensuite, on fait varier le temps propre de t_0 à t_1. Si on pense γ_0 comme une corde ouverte ou fermée qui évolue, sur la surface S, de $\gamma_0 = \tau^{-1}(t_0)$ à $\gamma_1 = \tau^{-1}(t_1)$ et on se fixe un événement ω_{t_0} sur γ_0, cet événement décrit une trajectoire de ω_{t_0} à $\omega_{t_1} \in \gamma_1$. On pose $\omega_t \in \gamma_t = \tau^{-1}(t)$ un paramétrage de cette courbe. Le transport parallèle

le long de cette courbe permet de définir une isométrie de $\varsigma_{\omega_t,\omega_{t_0}} : T_{\omega_{t_0}}S \to T_{\omega_t}S$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$, qui préserve l'orientation. On a

$$\varsigma_{\omega_{t_1},\omega_{t_0}} = \varsigma_{\omega_{t_1},\omega_t} \circ \varsigma_{\omega_t,\omega_{t_0}}.$$

L'événement marqué ω sur $\gamma_0 = \tau^{-1}(t_0)$ suit la trajectoire ω_t pour laquelle

$$\mathcal{E}(\omega_{t_1}) = \varsigma_{\omega_{t_1},\omega_{t_0}} \circ \mathcal{E}(\omega_0) \circ \varsigma^{-1}_{\omega_{t_1},\omega_{t_0}}, \forall t_0, t_1.$$

Si on se place sur la corde, il y a une excitation donnée en chaque événement ω par $\mathcal{E}(\omega)$ et les déplacements suivant un temps propre, de chaque événement de la corde, vérifient 4.11. On en déduit la relation de quantification d'une corde,

$$\mathcal{M}_\gamma \mathcal{T}_\gamma = k\frac{h}{c^2}, k \in \mathbb{N}^*. \tag{4.13}$$

On peut fixer l'excitation sur la surface d'univers S, en prenant pour fonction θ dans l'équation 4.12, la fonction qui vérifie $\Theta = \sqrt{a^2+b^2}\exp(i\theta)$ où Θ est l'onde associée au champ en corde Ψ et est défini par $\Theta(\omega) = a(\omega) + ib(\omega)$ avec

$$[\operatorname{Re}\Psi, \operatorname{Im}\Psi] = a\operatorname{Re}\Psi + b\operatorname{Im}\Psi.$$

Si la surface d'univers est muni d'un temps relatif τ qui n'est plus propre, on prend un temps relatif τ qui vérifie $d\tau = \chi\lambda$ avec $L_{\operatorname{Im} Z}(\chi) = 0$, pour lequel $\{\chi = 0\}$ est discret et positif sur $S \smallsetminus \{\chi = 0\}$. Les points où $\chi = 0$ correspondent aux points de séparation des cordes ou au regroupement de deux cordes. Sur $S \smallsetminus \{\chi = 0\}$, si on transforme le champ Ψ en $\Psi_\chi = \chi\operatorname{Re}\Psi + i\operatorname{Im}\Psi$ et si on se restreint à la surface $S_\chi = S \smallsetminus \{\Psi_\chi = o\}$, alors τ est un temps propre pour Ψ_χ qui est un champ défini sur S. Les 1-formes différentielles λ, μ se transforment en $\chi\lambda$ et μ, donc $\mathcal{M}_\gamma$ et $\mathcal{T}_\gamma$ sont invariantes et la tension de la surface S_χ est

$$\mathcal{T}(S_\chi) = \int_S \chi\sigma,$$

la fonction d'onde Θ_χ associée au champ Ψ_χ est $\Theta_\chi = L_{\operatorname{Im} Z}(\chi) + \chi\Theta = \chi\Theta$ sur S et $\theta_\chi = \theta$. On obtient encore une formule de quantification identique à celle donnée en 4.13.

Dans le cas le plus général, on découpe la surface $S \smallsetminus \{\Psi_\chi = 0\}$, en surfaces ouvertes connexes et on répète le procédé sur chaque composante connexe obtenue. Les événements de $\{\Psi_\chi = 0\}$ sont les points où se collent et se décollent les cordes entre elles qui évoluent dans la surface d'univers S.

La représentation géométrique des champs en corde permet de quantifier l'énergie de la corde définie par le champ. Le produit de la masse et de la tension est discrétisé dans l'équation 4.13. Il serait intéressant de regarder le comportement d'un nombre fini de champs en cordes, notamment en analysant les feuilletages de l'univers induits par ces champs. Que se passe-t-il pour deux champs en cordes dont les feuilletages sont transversaux?

La dérivée de Lie le long d'un champ X, considérée comme opérateur de l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, d\lambda)$ est essentiellement autoadjoint si la divergence de X est nulle. Pour ces champs, on a procéde à une quantification de cet opérateur en considérant l'espace de Fock $\mathcal{F}\left(L^2(\Omega, d\lambda)\right)$. On généralise l'espace d'Hilbert $L^2(\Omega, d\lambda)$ aux espaces d'Hilbert $\mathcal{H}^m(\zeta)$ où ζ est un fibré des états de l'univers Ω, l'extension de L_X aux champs $\mathcal{L}_X$ peut être assimilé à un opérateur de $\mathcal{H}^m(\zeta)$ pour $\zeta = \left(T_{\mathbb{C}}\Omega, \pi, \mathbb{C}^4\right)$. Quelles sont les propriétés de cet opérateur?

On a donc approché les champs complexes par deux procédés différents, l'un est analytique et utilise l'analyse spectrale de *Von Neumann*, l'autre est géométrique et fait appel à des procédés de *géométrie différentielle* sur les surfaces. Ces deux approches sont complémentaires l'une de l'autre mais restent insuffisantes pour l'analyse de tous les champs complexes de l'univers Ω.

5. Modélisation en feuilles de type espace et de type temps

5.1. **Champ chronologique.** On suppose que Ω est une variété Lorentzienne, connexe, orientée en temps, c'est-à-dire, qu'il existe un champ de vecteurs $T : \Omega \to T\Omega$ de genre temps $\forall \omega \in \Omega$, $g(\omega)(T(\omega), T(\omega)) < 0$. Un vecteur causal $v \in T_\omega\Omega$ est orienté vers le futur si $g(\omega)(v, T(\omega)) < 0$ et vers le passé si $g(\omega)(v, T(\omega)) > 0$ ($v \in T_\omega\Omega$ est de genre temps si $g(\omega)(v, v) < 0$, de genre lumière si $g(\omega)(v, v) = 0$, de genre espace si $g(\omega)(v, v) > 0$ et causal si $g(\omega)(v, v) \leqslant 0$). g est la métrique Lorentzienne de signature $(-, +, +, +)$.

Pour l'espace-temps de Minkowski $\left(\mathbb{R}^4, \eta\right)$ alors $\eta = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$, le champ $T = \frac{\partial}{\partial t}$ donne l'orientation du temps. Localement, si $X \in \Gamma(\Omega)$, alors en coordonnées locales $X = X^j \partial_j$, où $X^j : U \to \mathbb{R}$ est une C^∞-application et $\{\partial_j\}$ est le *"local frame"* induit par une carte.

Definition 31. *Un changement local de chronologie de T à S est une section locale θ de $T^*\Omega \otimes T\Omega$ qui vérifie les conditions suivantes*

$$\theta \otimes T = S \text{ et } \theta \in \mathrm{O}(T\Omega, g).$$

Pour une métrique de Lorentz g fixée, il n'existe pas en général de chronologie sur Ω. On peut définir des chronologies locales sur des ouverts connexes de Ω, on note $\operatorname{dom} T$ cet ouvert. On dit que la chronologie T est maximale si on ne peut pas étendre $\operatorname{dom} T$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de chronologie S telle que $\operatorname{dom} T \subsetneqq \operatorname{dom} S$ avec $T = S$ sur $\operatorname{dom} T$.

Proposition 15. *Pour tous les champs chronologiques T et S, il existe un changement local de coordonnées.*

Proof. On prend un ouvert U sur lequel $T\Omega$ est trivialisable, on se donne quatre champs A, B, C et D linéairement indépendants. On peut construire 3 champs X^1, Y^1 et Z^1 tels que $\operatorname{Vect}\left(X^1, Y^1, Z^1\right) = (\mathbb{R}T)^\perp$, par le procédé d'orthogonalisation de Graam-Schmit, on peut construire 3 champs X_1, Y_1, Z_1 formant une base orthonormale de $(\mathbb{R}T)^\perp$ pour la métrique riemannienne g_R qui est la restriction de g à $(\mathbb{R}T)^\perp$. On note θ_1, l'application qui envoie X_1 sur A, Y_1 sur B, Z_1 sur C et T sur D. De façon identique, on construit θ_2 l'application qui envoie X_2 sur A, Y_2 sur B, Z_2 sur C et S sur D, alors l'application $\theta = \theta_2^{-1} \circ \theta_1$ répond à la question car les procédés de construction sont C^∞. □

L'ensemble des champs sur l'univers Ω est noté $\Gamma(\Omega)$, les champs espaces, c'est-à-dire, les champs X qui vérifient $X(\omega) \in E_\omega$, sont notés $\Gamma_E(\Omega)$. On a une bijection naturelle $\tau : \Gamma(\Omega) \to \Gamma_E(\Omega) \times C^\infty(\Omega)$. Sur $\Gamma_E(\Omega)$, on peut définir la notion de produit vectoriel. Si X_E et Y_E sont dans $\Gamma_E(\Omega)$, on pose $X_E \wedge Y_E \in \Gamma_E(\Omega)$ avec, $X_E \wedge Y_E(\omega) = X_E(\omega) \wedge Y_E(\omega)$, le produit vectoriel sur E_ω muni du produit scalaire défini positif $g(\omega)\mid_{E_\omega}$. On peut définir une loi de composition interne sur $\Gamma_E(\Omega) \times C^\infty(\Omega)$ définie par $(X_E, \lambda) * (Y_E, \mu) = (X_E \wedge Y_E, \lambda\mu)$. La bijection τ induit une loi de composition interne sur $\Gamma(\Omega)$ appelée produit et défini par $X * Y = \tau^{-1}((X_E \wedge Y_E, \lambda\mu))$, $X = X_E - \lambda T$ et $Y = Y_E - \mu T$.

Remark 35. *Les champs de Morse sont les champs pour lesquels λ est une fonction de Morse sur Ω. Les champs de Morse sont denses pour la C^{∞}-topologie de Whitney.*

Avec trois champs de vecteurs, on peut construire un champ chronologique en remarquant que

$$X*(Y*Z)+Y*(Z*X)+Z*(X*Y)=-3\lambda\mu\nu T,$$

où $X=X_E-\lambda T$, $Y=Y_E-\mu T$ et $Z=Z_E-\nu T$, c'est l'identité de Jacobi.

Si on pose $\|X\|_{\omega}^{2}=\|X_E\|_{\omega}^{2}+\lambda^{2}(\omega)\|T\|_{\omega}^{2}$, on peut normaliser T, en prenant pour $T(\omega)$ le champ $\frac{T(\omega)}{\sqrt{-g(\omega)(T(\omega),T(\omega))}}$. Avec cette normalisation $\|T\|_{\omega}^{2}=-1$ et $\|X\|_{\omega}^{2}=\|X_E\|_{\omega}^{2}-\lambda^{2}(\omega)$ et on note simplement $\|X\|^{2}=\|X_E\|^{2}-\lambda^{2}$ si aucune confusion n'est possible. On en déduit une généralisation de l'identité de Lagrange

$$\|X*Y\|^{2}=\|X_E\|^{2}\|Y_E\|^{2}-g_E^{2}(X_E,Y_E)-(\lambda\mu)^{2},$$

où $g_E(\omega)=g(\omega)|_{E_\omega}$.

Soient deux cartes φ et ψ deux cartes telles que $\varphi(\mathbb{R}^4)\cap\psi(\mathbb{R}^4)\neq\emptyset$, l'application de changement de cartes est stable le long des feuilles si

$$\lambda:\varphi^{-1}\left(\varphi\left(\mathbb{R}^4\right)\cap\psi\left(\mathbb{R}^4\right)\right)\to\psi^{-1}\left(\varphi\left(\mathbb{R}^4\right)\cap\psi\left(\mathbb{R}^4\right)\right),$$

avec $\lambda(x,y,z,t)=(x',y',z',t')$ est de la forme $X'=\alpha(X,t)$ et $t'=\beta(t)$, avec $X=(x,y,z)$, $X'=(x',y',z')$, α est une C^{∞}-application de $\varphi^{-1}\left(\varphi\left(\mathbb{R}^4\right)\cap\psi\left(\mathbb{R}^4\right)\right)\subset\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ et β est une application C^{∞}, d'un ouvert de $\mathbb{R}$, non nécessairement connexe, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que les cartes sont stables pour le feuilletage de Minkowski. L'idée du feuilletage consiste à dire que si l'on passe d'une carte φ à une carte compatible ψ, on passe d'une feuille espace de φ à une feuille espace de ψ avec un temps qui ne dépend que du temps relativement à φ de cette feuille. On peut écrire,

$$F_t^{\varphi}\cap\varphi\left(\mathbb{R}^4\right)\cap\psi\left(\mathbb{R}^4\right)=F_s^{\psi}\cap\varphi\left(\mathbb{R}^4\right)\cap\psi\left(\mathbb{R}^4\right)$$

est équivalent à $s=\beta(t)$.

$$\begin{array}{ccc}(X,t)\in\varphi^{-1}\left(\varphi\left(\mathbb{R}^4\right)\cap\psi\left(\mathbb{R}^4\right)\right) & \overset{\lambda}{\to} & (X',t')\in\psi^{-1}\left(\varphi\left(\mathbb{R}^4\right)\cap\psi\left(\mathbb{R}^4\right)\right)\\ & \varphi\searrow\quad\swarrow\psi & \\ & \varphi\left(\mathbb{R}^4\right)\cap\psi\left(\mathbb{R}^4\right) & \end{array}$$

On a $\lambda((X,t))=(X',t')$, pour l'observateur attaché à la carte φ si son présent est t, le présent de l'observateur attaché à la carte ψ est $t'=\beta(t)$ qui ne dépend pas de la position d'espace des observateurs choisis si les cartes sont compatibles. On a

$$\begin{aligned}\lambda^{-1}(\lambda((X,t)))&=\lambda^{-1}((\alpha(X,t),\beta(t)))\\&=(\alpha_1((\alpha(X,t),\beta(t))),\beta_1(\beta(t)))=(X,t)\end{aligned}$$

et on en déduit $\beta_1=\beta^{-1}$ et

$$\alpha_1((\alpha(X,t),\beta(t)))=X,$$

en particulier,

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_1((\alpha(X,t),\beta(t)))=o_{\mathbb{R}^3}.$$

Par permutation de α_1 avec α et β_1 avec β, on a $\alpha\left(\left(\alpha_1\left(X,t\right),\beta_1\left(t\right)\right)\right)=X$ et $\beta\left(\beta_1\left(t\right)\right)=t$, l'application α_1 est entièrement définie par la relation fonctionnelle $\alpha\left(\left(\alpha_1\left(X,t\right),\beta^{-1}\left(t\right)\right)\right)=X$.

La partie espace de l'espace tangent est $\mathcal{E}\Omega=\cup_{\omega\in\Omega}\left\{\omega\right\}\times E_\omega$ et la partie temps est $\mathcal{T}\Omega=\cup_{\omega\in\Omega}\left\{\omega\right\}\times T_\omega$. Le triplet $\left(\mathcal{T}\Omega,\pi_{\mathcal{T}},\Omega\right)$ est un fibré vectoriel trivial car, $\mathcal{T}\Omega=\cup_{\omega\in\Omega}\left\{\omega\right\}\times T_\omega\rightarrow\Omega\times\mathbb{R}$, $\Phi\left(\omega,\mu T\left(\omega\right)\right)=\left(\omega,\mu\right)$ est un isomorphisme de fibré.

Lemma 4. $\begin{array}{c}\mathcal{E}\Omega\\ \downarrow\pi_{\mathcal{E}}\\ \Omega\end{array}$ *est un fibré et* $\begin{array}{c}\mathcal{T}\Omega\\ \downarrow\pi_{\mathcal{T}}\\ \Omega\end{array}$ *est le fibré trivial. De plus,* $T\Omega$ *est la somme de Whitney de ces deux fibrés,* $T\Omega=\mathcal{E}\Omega\oplus\mathcal{T}\Omega$*..*

Remarquons que sur le fibré espace

$$\begin{array}{c}\mathcal{E}\Omega\\ \downarrow\pi_{\mathcal{E}}\\ \Omega\end{array},$$

on a sur chaque fibre E_ω la restriction de $g\left(\omega\right)$ est une forme définie positive.

Pour le feuilletage chronologique, il existe une famille maximale de submersions $\left(U_i,\alpha_i\right)$, $i\in I$ où les U_i sont des ouverts de Ω et les $\alpha_i:U_i\rightarrow\mathbb{R}^3$ sont des submersions pour lesquelles,

1) $\cup_{i\in I}U_i=\Omega$,

2) si $U_i\cap U_j\neq\emptyset$, il existe un difféomorphisme α_{ij} de $\mathbb{R}^3$, vérifiant: $\alpha_i=\alpha_{ij}\circ\alpha_j$.

Les $\left(U_i,\alpha_i\right)$ sont les cartes distinguées de $\mathcal{T}$, les α_{ij} sont les changement de cartes et pour $U_i\cap U_j\cap U_k\neq\emptyset$ alors $\alpha_{ij}\circ\alpha_{jk}\circ\alpha_{ki}=\mathrm{Id}$.

On peut définir le fibré associé à l'aide des applications de transition $\omega\in U_i\cap U_j\subset\Omega\rightarrow D\alpha_{ij}\left(\omega\right)\in\mathrm{Gl}\left(\mathbb{R}^3\right)$.

On a $D\alpha_{ii}\left(\omega\right)=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, $D\alpha_{ji}\left(\omega\right)=\left(D\alpha_{ij}\right)^{-1}\left(\omega\right)$ et

$D\alpha_{ik}\left(\omega\right)=D\alpha_{ij}\left(\omega\right)\circ D\alpha_{jk}\left(\omega\right)$. Le fibré obtenu est noté,

$$\begin{array}{c}\mathcal{T}\Omega\\ \downarrow\pi_{\mathcal{T}}\\ \Omega\end{array}.$$

C'est un fibré vectoriel de fibre $\mathbb{R}^3$ et dont les feuilles sont $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^1$. On opère de façon identique avec le feuilletage espace $\mathcal{E}$. Les cartes distinguées sont $\left(V_j,\beta_j\right)$, $j\in J$ avec les $\beta_j:V_j\rightarrow\mathbb{R}$ sont des submersions pour lesquelles,

1) $\cup_{i\in J}V_j=\Omega$,

2) si $V_i\cap V_j\neq\emptyset$, il existe un difféomorphisme

$\beta_{ij}:\beta_j\left(V_i\cap V_j\right)\subset\mathbb{R}\rightarrow\beta_i\left(V_i\cap V_j\right)$, vérifiant $\beta_i=\beta_{ij}\circ\beta_j$, avec la relation des cocycles: $\beta_{ij}\circ\beta_{jk}\circ\beta_{ki}=\mathrm{Id}$.

Les applications de transition pour ce fibré vectoriel sont

$\omega\in V_i\cap V_j\subset\Omega\rightarrow D\beta_{ij}\left(\omega\right)\in\mathbb{R}^{*+}\subset\mathrm{Gl}\left(\mathbb{R}\right)$, on le note

$$\begin{array}{c}\mathcal{E}\Omega\\ \downarrow\pi_{\mathcal{E}}\\ \Omega\end{array}.$$

Les feuilles sont des sous-variétés de dimension 3 et la fibre du fibré est $\mathbb{R}$. On donne une autre représentation du fibré espace et du fibré chronologique.

Theorem 17. *Si T est stable sur Ω alors le système de Pfaff $\omega \to \tau(\omega) = E_\omega$ est complètement intégrable, pour chaque $\omega \in \Omega$, la composante connexe de l'intégrale associée à ce sytème est une variété connexe appelée l'espace associée au point ω et noté $F = \mathcal{E}_\omega$.*

Proof. On utilise le principe de sommation d'Einstein. Soit $\varphi : U \to \mathbb{R}^4$, une carte de Ω, on a:

$$\begin{array}{ccc} TU & \overset{d\varphi}{\to} & T\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \overset{\varphi}{\to} & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

et si $x = \left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) = x^i e_i$ est le système canonique de coordonnées , le champ standard $\frac{\partial}{\partial x^i} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ est défini par: $\frac{\partial}{\partial x^i}(x) = (x, e_i)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, où $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Localement dans la carte (U, φ), on définit les champs $\frac{\partial}{\partial u^i} : U \subset \Omega \to TU$,

$\frac{\partial}{\partial u^i}(u) = (d_u\varphi)^{-1} \frac{\partial}{\partial x^i}(\varphi(u)) = (d_u\varphi)^{-1}((\varphi(u), e_i))$, c'est-à-dire,

$$\begin{array}{ccc} TU & \overset{d\varphi}{\to} & T\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \\ \uparrow \frac{\partial}{\partial u^i} & & \uparrow \frac{\partial}{\partial x^i} \\ U & \overset{\varphi}{\to} & \mathbb{R}^4 \end{array},$$

$\frac{\partial}{\partial x^i} \circ \varphi = d\varphi \circ \frac{\partial}{\partial u^i}$. On pose $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$, localement si

$X \in \Gamma^\infty(T\Omega)$ alors en coordonnées locales

$X = a^i \partial_i \in T_u\Omega$, où $a^i : U \to \mathbb{R}$ est une C^∞-application.

Si $Y = b^i \partial_i$ alors $[X, Y] = c^i \partial_i$ avec, $c^i = a^j\left(\partial_j b^i\right) - b^j\left(\partial_j a^i\right)$.

On note $T = t^i \partial_i$, le champ chronologique. Il faut vérifier que si $g(X, T) = 0$ et $g(Y, T) = 0$ sur U, alors $g([X, Y], T) = 0$ sur U.

On a $g(X, T) = a^i t^j g_{ij} = 0$, de même $b^i t^j g_{ij} = 0$ avec, $g(\partial_i, \partial_j) = g_{ij}$. Ensuite, on calcule

$$\begin{aligned} g([X, Y], T) = c^i t^j g_{ij} &= \left(a^k\left(\partial_k b^j\right) - b^k\left(\partial_k a^j\right)\right) t^j g_{ij} \\ &= a^k t^j g_{ij}\left(\partial_k b^j\right) - b^k t^j g_{ij}\left(\partial_k a^j\right), \end{aligned}$$

les conditions $a^i t^j g_{ij} = 0$ et $b^i t^j g_{ij} = 0$ impliquent $\partial_k\left(a^i t^j g_{ij}\right) = 0$ et $\partial_k\left(b^i t^j g_{ij}\right) = 0$. On en déduit

$$\begin{aligned} g([X, Y], T) &= -a^k b^i \partial_k\left(t^j g_{ij}\right) + b^k a^i \partial_k\left(t^j g_{ij}\right) \\ &= a^k b^i\left(-\partial_k\left(t^j g_{ij}\right) + \partial_i\left(t^j g_{kj}\right)\right) = 0. \end{aligned}$$

Donc, τ est complètement intégrable. Si $\mathcal{E}_\omega$ est la composante connexe de l'intégrale de τ contenant ω, $\mathcal{E}_\omega$ est une sous-variété de dimension 3 de Ω. De plus, $\cup_{\omega \in \Omega} \mathcal{E}_\omega = \Omega$. □

Si on admet l'existence d'un champ chronologique stable sur l'espace-temps Ω alors deux feuilletages cohabitent, le premier est de codimension 1, c'est le feuilletage espace $\mathcal{E}$ et l'autre est de codimension 3, c'est le feuilletage chronologique $\mathcal{T}$.

Proposition 16. *Si T est stable les deux représentations des fibrés espaces et chronologiques sont équivalentes, c'est-à-dire,*

Definition 32. *Deux points ω et ϖ de l'univers Ω sont dans le même espace si et seulement si $\mathcal{E}_\omega = \mathcal{E}_\varpi$. La sous-variété $\mathcal{E}_\omega$ est la feuille d'espace contenant ω.*

Sur l'univers Ω, on note $\mathcal{E}_\omega$ la feuille contenant ω de l'intégrale du système de Pfaff $\omega \to \tau(\omega) = E_\omega \subset T_\omega\Omega$. Ce système de Pfaff définit un feuilletage de l'univers Ω, noté $\mathcal{E}$.

De façon analogue le système de Pfaff $\varsigma : \omega \to T_\omega = \mathbb{R}T(\omega)$ est complètement intégrale. On construit un feuilletage $\mathcal{T}$ dont la feuille contenant ω est notée $\mathcal{T}_\omega$. En chaque point ω de Ω, les feuilles $\mathcal{E}_\omega$ et $\mathcal{T}_\omega$ sont transversales. Chaque feuille de $\mathcal{T}$ est une section transversale du feuilletage $\mathcal{E}$ et réciproquement. Chaque feuille espace est une variété riemannienne pour $g\,|_{(\mathbb{R}T)^\perp}$.

Proposition 17. *Si $F_\mathcal{T}$ et $F_\mathcal{E}$ deux feuilles de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{E}$, telles que $F_\mathcal{T} \cap F_\mathcal{E} \neq \emptyset$, l'une des conditions suivantes est vérifiée*

1) $F_\mathcal{T} \cap F_\mathcal{E}$ est discret,

2) L'adhérence de $F_\mathcal{T} \cap F_\mathcal{E}$ dans $F_\mathcal{T}$ ou dans $F_\mathcal{E}$, contient un ensemble ouvert, on dit que $F_\mathcal{T}$ et $F_\mathcal{E}$ sont respectivement localement denses,

3) $\mathrm{Adh}\,(F_\mathcal{T} \cap F_\mathcal{E})$ est un ensemble parfait d'intérieur vide, on dit que $F_\mathcal{T}$ et $F_\mathcal{E}$ sont des feuilles exceptionnelles.

Remark 36. *Dans notre situation la transversalité des feuilles exclut les situations 2) et 3). De plus, si $F_\mathcal{T}$ est $\mathbb{S}^1$ alors $F_\mathcal{T} \cap F_\mathcal{E}$ est fini.*

Definition 33. *Un point $\omega \in \Omega$ est dit*

1) discret si $\mathcal{E}_\omega \cap \mathcal{T}_\omega$ est discret,

2) dense si l'adhérence de $\mathcal{E}_\omega \cap \mathcal{T}_\omega$ dans $\mathcal{E}_\omega$ ou dans $\mathcal{T}_\omega$ est localement dense, en précisant qu'il est dense "espace" ou "en temps" dans le premier et second cas, ou simplement dense si on a les deux situations.

3) exceptionnel si $\mathrm{Adh}\,(\mathcal{E}_\omega \cap \mathcal{T}_\omega)$ est un ensemble parfait d'intérieur vide.

Corollary 2. *Les points de l'univers Ω sont toujours discrets fini ou infini.*

Definition 34. *Un point ω est à temps cyclique si $\mathcal{T}_\omega = \mathbb{S}^1$, non cyclique si $\mathcal{T}_\omega = \mathbb{R}$.*

Dorénavant, on met sur Ω la structure de variété analytique définie par Whitney. Les feuilletages $\mathcal{E}$ et $\mathcal{T}$ deviennent analytiques.

Theorem 18. *Si tous les éléments de $\pi_1(\Omega)$ sont finis alors tous les points ω sont à temps non cycliques. Si ω est à temps cyclique alors la courbe fermée $\mathcal{T}_\omega$ définie une classe d'homotopie d'ordre infini dans $\pi_1(\Omega)$.*

Proof. C'est le théorème de Haefliger[12]. □

5.2. **Un premier modèle d'espace-temps.** Soit Λ une variété fermée, connexe, de dimension 4 et V une sous-variété compacte, sans bord, non nécessairement connexe, de codimension $\geqslant 2$. La variété $\Omega = \Lambda \setminus V$ est une variété connexe qui représente notre univers. La variété V est dite variété à l'infini et est notée $V = \Omega_\infty$. La variété Ω_∞ est une variété compacte, sans bord, de dimension 0, 1 ou 2. La dimension 0, permet de représenter Ω comme une variété fermée privée de k points. Si $k = 1$, Λ est le compactifié d'Alexandroff de Ω. Pour la dimension 1, on retire à Λ, un nombre fini k de lacets simples plongés dans Λ deux à deux disjoints. Si la dimension est 2, on retire un nombre fini k de surfaces fermées de genres $g_1, g_2, \cdots, g_k$.

On peut généraliser en supposant que Ω_∞ est une réunion finie de variétés fermées, deux à deux disjointes, de codimension $\geqslant 2$. On note dans cette situation $\mathrm{codim}\,\Omega_\infty$, la plus petite codimension de chaque composante connexe de Ω_∞.

Theorem 19. *1) Si* $\operatorname{codim}\Omega_\infty \geqslant 3$*, alors l'inclusion* $\mathrm{in} : \Omega \to \Lambda$ *induit un isomorphisme* $\mathrm{in}_* : \pi_1(\Omega,\omega) \to \pi_1(\Lambda,\omega)$ *pour tout* $\omega \in \Omega$*.*

2) Si $\operatorname{codim}\Omega_\infty = 2$*,* $\mathrm{in}_* : \pi_1(\Omega,\omega) \to \pi_1(\Lambda,\omega)$ *est surjectif pour tout* $\omega \in \Omega$*.*

Proof. C'est un théorème de Godbillon[9]. □

Remark 37. *Le goupe de Poincaré de l'univers est isomorphe au groupe fondamental d'une variété fermée sous l'hypothèse que sa structure à l'infini est formée d'un nombre fini de points.*

On suppose l'existence d'un champ chronologique stable sur Ω. Ω est une variété à deux feuilletages transversaux, notés $\mathcal{T}$ et $\mathcal{E}$ avec $\operatorname{codim}\mathcal{T} = 3$ et $\operatorname{codim}\mathcal{E} = 1$. Il y a deux types de feuilles pour ces feuilletages, les feuilles F pour lesquelles $\mathrm{Adh}_\Lambda F = F$ qui sont les feuilles compactes et les feuilles pour lesquelles $\mathrm{Adh}_\Lambda F \neq F$.

On se place dans la situation où $\Omega_\infty = \{\infty_1, \infty_2, \cdots, \infty_k\}$ alors $\mathrm{Adh}_\Lambda F = F \cup \{\infty_j, j \in J\} = F_J$ où J est un sous-ensemble de $\{1, 2, \cdots, k\}$. Les points $\infty_1, \infty_2, \cdots, \infty_k$ sont les points de contact des feuilles à l'infini. On note pour tout $J \in \mathcal{P}(\{1, 2, \cdots, k\})$,

$$\Omega_J = \cup_{\mathrm{Adh}_\Lambda F = F_J} F.$$

La famille $\{\Omega_J : J \in \mathcal{P}(\{1, 2, \cdots, k\})\}$ forment une partition de l'univers Ω. Si le système de Pfaff $\tau : \omega \to \tau(\omega) = E_\omega$, est prolongeable à l'infini, c'est-à-dire, si $\lim_{\omega\to\infty_j} \tau(\omega) = E_j$ alors toute feuille $F_\mathcal{E}$ telle que

$$\underset{\Lambda}{\mathrm{Adh}}\, F_\mathcal{E} = F_\mathcal{E} \cup \{\infty_j, j \in J\} = F_{\mathcal{E},J},$$

est une sous-variété et $T_{\infty_j} F_{\mathcal{E},J} = E_j$. On a pincé les feuilles-espace aux points à l'infini. On définit ainsi, un feuilletage pincé en un nombre fini de points. Si le système de Pfaff $\varsigma : \omega \to T_\omega$ est prolongeable à l'infini, c'est-à-dire, $\lim_{\omega\to\infty_j} \varsigma(\omega) = T_j$ alors toute feuille $F_\mathcal{T}$ telle que

$$\underset{\Lambda}{\mathrm{Adh}}\, F_\mathcal{T} = F_\mathcal{T} \cup \{\infty_j, j \in J\} = F_{\mathcal{T},J}$$

est une sous-variété homéomorphe à $\mathbb{S}^1$ ou à $[0, 1]$ avec, $T_{\infty_j} F_{\mathcal{T},J} = T_j$. Les lacets simples $F_{\mathcal{T},J}$ se coupent tangentiellement aux points ∞_j pour $j \in J$. Sans l'hypothèse de prolongement par continuité à l'infini des systèmes de Pfaff, on a un théorème de fibration de l'univers si les feuilles-espace sont compactes.

Remark 38. $\lim_{\omega\to\infty_j} \varsigma(\omega) = T_j$ *signifie qu'il existe des sections locales* X_i^j *dans une carte de* ∞_j *telles que* $\mathrm{Vect}\left\{X_i^j(\omega)\right\} = \varsigma(\omega)$ *avec* $T_j = \mathrm{Vect}\left\{X_i^j(\infty_j)\right\}$*.*

Theorem 20. *Si* $\Omega = \Omega_\emptyset$ *et* $\Omega \neq \Lambda$ *alors* Ω *est l'espace total d'un fibré de base* $\mathbb{R}$*. Si* Ω *est compacte,* Ω *est l'espace total d'un fibré de base* $\mathbb{S}^1$*.*

Proof. C'est un théorème de [19] et [20], il suffit de remarquer que toutes les feuilles espace sont compactes et que, sous cette hypothèse, Ω est l'espace total d'un fibré de base $\mathbb{S}^1$ ou $\mathbb{R}$ suivant la compacité de Ω. □

Si $\infty \in \mathrm{Adh}_\Lambda F_\mathcal{E}$, un chemin γ de Λ, tel que $\gamma(0) = \infty$ pour un point à l'infini $\infty \in \Omega_\infty$ et $\gamma(t) \in F_\mathcal{E}$ pour $t \neq 0$, est un $F_\mathcal{E}$-chemin. On note $T_\infty F_\mathcal{E}$, l'ensemble des vecteurs $\gamma'(0)$, lorsque γ parcourt l'ensemble des $F_\mathcal{E}$-chemins. En général, $T_\infty F_\mathcal{E}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $T_\infty\Lambda$. C'est un cône de sommet l'origine o_∞ de $T_\infty\Lambda$. Ce n'est pas un cône de lumière en général car il n'y a pas de prolongement

de la métrique de Lorentz aux points à l'infini. Dans le cas où Ω_∞ est formé de sous-variétés de dimension $0, 1$ et 2 en nombre fini, on dit que le feuilletage est stable à l'infini si pour $\infty \in V$, où V est une composante connexe de Ω_∞, on a $T_\infty F_{\mathcal{E}} = T_\infty V$. Si $V = \{\infty\}$, il n'y a plus d'espace en ce point, si $V = \mathbb{S}^1$ alors l'espace est à une dimension au plus sur les lacets à l'infini. Si $V = \mathbb{T}_g$, une surface de genre $g \geqslant 0$, l'espace est de dimension au plus 2. A l'extérieur des points à l'infini, les feuilles-espace sont de dimension 3.

Pour le feuilletage temps, si $V = \{\infty\}$ il n'y a plus de temps en ce point, si $V = \mathbb{S}^1$ou $\mathbb{T}_g$ alors le temps est à une dimension au plus.

On peut imaginer une structure à l'infini ayant des sous-variétés de dimension $n = 3$ ou $n = 4$. Si $n = 3$, on se restreint à la partie connexe de Ω, privée des sous-variétés de dimension 3 à l'infini, où vit le champ chronologique de notre univers. Notre univers est l'intérieur d'une variété compacte à bord, dont le bord est une variété à l'infini. Si $n = 4$, notre univers est le bord à l'infini, d'un univers de dimension 5 qui peut être lui-même le bordd'un univers de dimension 6 et ainsi de suite. On a une construction en *"gigogne"* d'une succession d'univers de dimensions supérieures. Lorsque l'on impose que les dimensions de Ω_∞ sont de dimensions inférieures ou égales à 2, cette construction en *"gigogne"* reste vraie sans que l'on soit dans l'obligation d'augmenter la dimension 4 des univers que l'on recolle par somme connexe sur les différentes structures à l'infini.

5.3. **Modélisation par chirurgie.** On suppose que le compactifié d'Alexandroff de l'univers Ω, $\Omega \cup \{\infty\}$ est une C^∞-variété fermée. Dans cette situation, on dit que l'univers est stable à l'infini. On peut généraliser cette notion de stabilité en prenant une compactification à plusieurs points ou tout autre type de compactification décrite précédemment. On se donne une fonction C^∞, $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$, qui mesure un état physique de l'univers Ω, cette fonction peut être une entropie ou une mesure physique réelle.

Definition 35. *Deux événements p et q sont dans le même état si $\Phi(p) = \Phi(q)$. On dit que les événements sont dans le même présent pour la fonction d'état Φ. L'événement p est dans le passé de l'événement q et q est dans le futur de p si $\Phi(p) < \Phi(q)$ pour la fonction d'état Φ.*

Si s est une valeur régulière de l'état Φ alors $\Phi^{-1}(s)$ est une hypersurface de Ω. Pour définir un événement de l'univers, il faut définir exactement un nombre $n = \dim \Omega$ d'états $\Phi_1, \cdots, \Phi_n$, deux à deux transversaux, $\Phi_i \pitchfork \Phi_j$ et $i \neq j$. Si $s_1, \cdots, s_n$ sont des valeurs régulières pour les états $\Phi_1, \cdots, \Phi_n$ alors le sous-espace $\cap_i \Phi_i^{-1}(s_i)$ est une sous-variété de Ω de dimension 0, c'est-à-dire, une suite de points de Ω sans point d'accumulation dans Ω, les points d'accumulation possibles dans le compactifié sont les points à l'infini. L'événement ω n'est pas entièrement localisé mais peut se situer en chaque point de $\cap_i \Phi_i^{-1}(s_i)$. C'est un *"principe d'incertitude de localisation"* pour un événement décrit par $n = \dim \Omega$ états transversaux deux à deux.

On peut approcher une fonction d'état par une fonction de Morse. Pour structurer cet univers on fait l'hypothèse que la fonction d'état Φ est une fonction de Morse sur Ω. L'existence de telles fonctions de Morse existent par le théorème de densité de Milnor pour la C^k-topologie fine de Whitney. Pour une fonction d'état de Morse, si α est une valeur d'état non dégénérée, alors $\Omega_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ est une sous-variété de dimension $n - 1$. Pour $n = 4$ les sous-espaces, dans un état non

dégénéré donné, sont des sous-variétés de dimension 3. Les tranches d'univers de ce type qui ne contiennent pas le point à l'infini dans leur adhérence relativement à $\Omega \cup \{\infty\}$, sont des variétés fermées de dimension 3 dont chaque composante connexe peut être décrite à l'aide des huit géométries de Thurston [23]. L'ensemble des points critiques est discret, ce sont les points dont la valeur d'état est irrégulière. Si on note $\Omega_{\leqslant\alpha}$, le passé de Ω_α, c'est à dire, $\Omega_{\leqslant\alpha} = \Phi^{-1}\left(]-\infty;\alpha]\right)$, le présent est le bord du passé, alors on peut reconstruire l'univers à l'aide des deux théorèmes suivants,

Theorem 21. *Si $[\alpha,\beta]$ ne contient aucun état irrégulier alors la portion d'univers $\Phi^{-1}\left([\alpha,\beta]\right)$ est difféomorphe à $\Omega_\alpha \times [\alpha,\beta]$. Le passé détermine entièrement le futur. En particulier, le présent Ω_α est difféomorphe au présent Ω_β.*

Theorem 22. *Si p est un événement critique d'indice λ, et s'il existe une petite variation $\varepsilon > 0$ d'état pour laquelle $\Omega_{\leqslant\Phi(p)+\varepsilon} \setminus \Omega_{\leqslant\Phi(p)-\varepsilon}$ ne contient que p comme point singulier, alors $\Omega_{\leqslant\Phi(p)+\varepsilon}$ est obtenue par chirurgie de type $(\lambda, n-\lambda)$ à partir du passé $\Omega_{\leqslant\Phi(p)-\varepsilon}$.*

Proof. C'est le théorème de chirurgie de Milnor-Smale [17] et [5]. □

Remark 39. *On rappelle la construction des chirurgies de type $(\lambda, n-\lambda)$. Si N est une variété de dimension n, de bord non vide $\partial N \neq \emptyset$ et φ est un plongement de $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$ dans ∂N, on pose $\chi(N,\varphi) = \frac{N \cup D^n}{\sim}$, $\cup$ est l'union disjointe de N et D^n et $\sim$ représente la relation d'équivalence suivante*

$$x \in \partial N \sim y \in \partial D^n = S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \cup D^\lambda \times S^{n-\lambda-1}$$

si et seulement si $\varphi(x) = y$. L'espace $\chi(N,\varphi)$ est une C^∞-variété obtenue par chirurgie de type $(\lambda, n-\lambda)$ à partir de la variété à bord N [14].

On peut construire des états de Morse pour lesquels chaque présent ne contient au plus qu'un événement singulier. Ainsi , pour étudier la géométrie de l'univers, par rapport à cet état, il suffit d'analyser la géométrie du passé et reconstruire par chirurgie, à partir de ce passé, le futur local de notre univers.

Si on veut décrire de façon déterministe chaque événement, on peut plonger Ω dans $\mathbb{R}^p$ avec $n \leqslant p \leqslant 2n+1$, c'est le théorème de plongement de Withney. Il suffit de décrire au plus 9 états $\{\Phi_j\}$ tels que $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_9)$ soit un plongement. Pour un déterminisme local, il suffit d'immerger l'univers dans $\mathbb{R}^p$, les théorèmes de Gromov-Smale [10] de la théorie des immersions permettent de limiter le nombre d'états suivant la nature topologique de l'univers Ω. Dans l'hypothèse non déterministe, il y a donc, un principe d'incertitude sur la localisation d'un événement.

5.4. **L'univers Ω comme $\left(\mathcal{G}, \mathbb{R}^4\right)$-variété.** Soient $\varphi, \psi : \mathbb{R}^4 \to \Omega$, deux cartes de Ω telles que $\varphi\left(\mathbb{R}^4\right) \cap \psi\left(\mathbb{R}^4\right) \neq \emptyset$, le changement de carte est donné par

$$\lambda : \varphi^{-1}\left(\varphi\left(\mathbb{R}^4\right) \cap \psi\left(\mathbb{R}^4\right)\right) \subset \mathbb{R}^4 \to \psi^{-1}\left(\varphi\left(\mathbb{R}^4\right) \cap \psi\left(\mathbb{R}^4\right)\right) \subset \mathbb{R}^4$$

où $\lambda = \psi^{-1} \circ \varphi \mid_{\varphi^{-1}(\varphi(\mathbb{R}^4) \cap \psi(\mathbb{R}^4))}$. Sur un C^∞-variété Ω, l'unique structure analytique induite par la C^∞-structure, permet de choisir des cartes analytiques $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \Omega$. Le changement de carte λ est analytique sur l'ouvert $\varphi^{-1}\left(\varphi\left(\mathbb{R}^4\right) \cap \psi\left(\mathbb{R}^4\right)\right)$.

Definition 36. *Les cartes φ et ψ sont "analytiquement compatibles" si et seulement si le changement de carte λ est la trace d'un difféomorphisme analytique Λ de $\mathbb{R}^4$.*

Remark 40. *Ce prolongement analytique est unique d'après le théorème d'unicité analytique [11].*

Un m-uplet de cartes $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m)$ est stable si φ_j et φ_{j+1} sont *"analytiquement compatibles"* pour tout $j = 1, \cdots, m-1$. Soit

$$\phi_j = \varphi_j^{-1} : U_j = \varphi_j\left(\mathbb{R}^4\right) \to \mathbb{R}^4,$$

pour $j = 1, \cdots, m$ et

$$\lambda_j = \phi_j \circ \phi_{j+1}^{-1} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_{j+1} : \phi_{j+1}\left(U_j \cap U_{j+1}\right) \to \phi_j\left(U_j \cap U_{j+1}\right)$$

alors l'ajustement de carte ϕ_1 est donné par $\Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \cdots \circ \Lambda_{m-1} \circ \phi_m$ où Λ_j est l'unique extension analytique de λ_j. Si on pose

$$\Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \cdots \circ \Lambda_{m-1},$$

alors l'ajustement de carte dans ϕ_1 est $\Lambda \circ \phi_m$ et l'ajustement dans ϕ_m est $\Lambda^{-1} \circ \phi_1$.

Dans ce qui suit on suppose que tous les changements de cartes analytiques sont les traces des éléments d'un sous-groupe $\mathcal{G}$ du groupe des isométries analytiques de l'univers de Minkowski, c'est-à-dire, Ω est une $\left(\mathcal{G}, \mathbb{R}^4\right)$-variété. Les sous-groupes $\mathcal{G}$ du groupe des isométries analytiques de l'univers de Minkowski, à savoir $\mathbb{R}^4$, muni de la métrique $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ (on normalise en prenant $c = 1$), qui opèrent transitivement sur $\mathbb{R}^4$ permettent de construire l'application développante pour un événement fixé $\omega \in \Omega$ et une carte ψ de la $\left(\mathcal{G}, \mathbb{R}^4\right)$-variété Ω avec, $\psi(o) = \omega$, $o \in \mathbb{R}^4$. Cette application est notée $D : \overset{\frown}{\Omega} \to \mathbb{R}^4$, D est un difféomorphisme si et seulement si la métrique induite sur l'univers Ω par la métrique de Minkowski fait de Ω un espace métrique complet. Dans cette situation, l'univers Ω est entièrement décrit par son groupe d'holonomie $\Gamma \subset \mathcal{G}$, qui est isomorphe à $\pi_1(\Omega)$.

Theorem 23. *Avec les hypothèses précédentes, le revêtement universel de Ω est difféomorphe à $\mathbb{R}^4$ et Ω est difféomorphe à $\Gamma \backslash \mathbb{R}^4$.*

Proof. $\mathcal{G}$ opère analytiquement et transitivement, avec stabilisateur compacte en chaque point de $\mathbb{R}^4$ muni de la métrique de Minkowski. Avec ces hypothèses, Ω est $\left(\mathcal{G}, \mathbb{R}^4\right)$-complète. Le revêtement universel de Ω est $\mathbb{R}^4$. On a le difféomorphisme de Ω sur $\Gamma \backslash \mathbb{R}^4$. □

Le choix du groupe $\mathcal{G}$ est entièrement décrit par la nature ondulatoire de l'univers. A chaque changement de cartes de φ à ψ, on définit un élément Λ du groupe structurel $\mathcal{G}$. Une onde Ψ sur l'univers Ω est une application $\Psi : \Omega \to \mathbb{C}$ qui vérifie pour toute carte $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \Omega$ la propriété $\int_{\mathbb{R}^4} |\Psi \circ \varphi|^2 \, dxdt < +\infty$, on note $\|\Psi \circ \varphi\|^2$ cette intégrale.

Soit $\Phi_\Lambda : L^2\left(\mathbb{R}^4\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^4\right)$, l'application définie par $\Phi_\Lambda(\alpha) = \alpha \circ \Lambda$, où Λ est l'unique extension du changement de carte de φ à ψ. Si on prend une onde Ψ de l'univers Ω, on a $\Phi_\Lambda(\Psi \circ \psi) = \Psi \circ \varphi$. L'application est une bijection de $L^2\left(\mathbb{R}^4\right)$, l'hypothèse que l'on fait est la suivante, qui est une hypothèse naturelle si on se réfère aux principes quantiques, Φ_Λ est une transformation de Wigner, c'est-à-dire,

$$|\langle \Phi_\Lambda \alpha, \Phi_\Lambda \beta \rangle| = |\langle \alpha, \beta \rangle|$$

pour tout α et β dans $L^2\left(\mathbb{R}^4\right)$.

Theorem 24. *Il existe une application $\theta : L^2\left(\mathbb{R}^4\right) \to \mathbb{S}^1$ et une application*

$$L : L^2\left(\mathbb{R}^4\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^4\right)$$

telles que, $\Phi_\Lambda(\alpha) = \theta(\alpha) L(\alpha)$*, avec* L *est unitaire ou* L *est antiunitaire.*

Proof. C'est le théorème de Wigner[26]. □

$\mathcal{G}$ est un groupe, donc $\mathcal{G} = \left\{\Lambda : \Phi_\Lambda = \theta \times L,\ |\theta| = 1 \text{ et } L \in \mathcal{U}\left(L^2\left(\mathbb{R}^4\right)\right)\ \right\}$. L ne peut pas être antiunitaire. Les applications de $\mathcal{G}$ sont les isométries de l'espace de Minkowski pour lesquelles l'opérateur Φ_Λ conserve le produit hermitique de $L^2\left(\mathbb{R}^4\right)$. Il faut vérifier que ce groupe $\mathcal{G}$ opère transitivement sur $\mathbb{R}^4$. Le groupe de Poincaré propre $\mathcal{L}_0 \ltimes \mathbb{R}^4$ est contenu dans le groupe $\mathcal{G}$ et $\mathcal{L}_0 \ltimes \mathbb{R}^4$ opère transitivement sur $\mathbb{R}^4$. Pour une isométrie $\Lambda \in SO(3,1) \ltimes \mathbb{R}^4$,

$$\|\Phi_\Lambda \alpha\|^2 = \int_{\mathbb{R}^4} |\alpha \circ \Lambda(x,t)|^2 \, dxdt,$$

le Jacobien est $J_\Lambda(x,t) = \left|\det \overrightarrow{\Lambda}(x,t)\right| = 1$. En particulier,

$$\|\Phi_\Lambda \alpha\|^2 = \int_{\mathbb{R}^4} |\alpha \circ \Lambda(x,t)|^2 J_\Lambda(x,t) \, dxdt = \int_{\mathbb{R}^4} |\alpha(x,t)|^2 \, dxdt = \|\alpha\|^2,$$

par changement de variable. On rappelle que le produit semi-direct est décrit par $(\Lambda, x)(\Lambda', x') = (\Lambda\Lambda', x + \Lambda x')$ et $\mathcal{L}_0$ correspond à la composante connexe de $SO(3,1)$, contenant I_4.

Remark 41. *L'univers de Poincaré-Minkowski-Einstein* ***(PME)*** *est obtenu pour le groupe de Poincaré* $\mathcal{G} = SO(3,1) \ltimes \mathbb{R}^4$.

5.5. **Une généralisation de la $\left(\mathcal{G}, \mathbb{R}^4\right)$-structure de Ω.** $\mathcal{G}$ désigne toujours un sous-groupe de difféomorphismes analytiques de $\mathbb{R}^4$. On note $\mathcal{A}$, l'atlas des cartes analytiques de l'univers Ω. Une sous-famille $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$ a la propriété de $\mathcal{G}$-extension sur $\mathbb{R}^4$, si pour tout couple de cartes $(\varphi, \psi) \in \mathcal{F}^2$, tel que $\varphi\left(\mathbb{R}^4\right) \cap \psi\left(\mathbb{R}^4\right) \neq \emptyset$, le changement de carte λ a une extension sur $\mathbb{R}^4$ appartenant à $\mathcal{G}$. Dans tout ce qui suit $\mathcal{F}$ est une famille de cartes ayant la propriété de $\mathcal{G}$-extension sur $\mathbb{R}^4$, on pose $\Omega_\mathcal{F} = \cup_{\varphi \in \mathcal{F}} \varphi\left(\mathbb{R}^4\right)$, alors $\Omega_\mathcal{F}$ est un ouvert de Ω, non nécessairement connexe, qui a la structure de $\left(\mathcal{G}, \mathbb{R}^4\right)$-variété pour l'atlas engendré par $\mathcal{F}$. La famille $\{\Omega_\mathcal{F}\}$ où $\mathcal{F}$ parcourt l'ensemble des parties $\mathcal{A}$, ayant la propriété de $\mathcal{G}$-extension sur $\mathbb{R}^4$, forme un recouvrement d'ouverts de Ω.

Les familles réduites à une carte, ont la propriété de $\mathcal{G}$-extension sur $\mathbb{R}^4$, c'est le cas trivial. Une famille $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$, ayant la propriété de $\mathcal{G}$-extension sur $\mathbb{R}^4$, est maximale si pour toute carte $\psi \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \cup \{\psi\}$ n'a pas la propriété de $\mathcal{G}$-extension sur $\mathbb{R}^4$. On suppose, par la suite, que $\mathcal{F}$ est maximale. La variété ouverte $\Omega_\mathcal{F}$ a une structure de $\left(\mathcal{H}, \mathbb{R}^4\right)$-variété, où $\mathcal{H}$ est le sous-groupe de $\mathcal{G}$, engendré par l'ensemble des $\mathcal{G}$-extensions des changements de cartes appartenant à $\mathcal{F}$.

Theorem 25. *Il existe un homomorphisme* $\Phi : \pi_1(\Omega_\mathcal{F}) \to \mathcal{H}$*, appelée l'holonomie de* $\Omega_\mathcal{F}$ *et une application continue* Φ*-équivariante(*$D\gamma = \Phi(\gamma) \circ D$ *pour* $\gamma \in \pi_1(\Omega_\mathcal{F})$*),* $D : \overset{\smile}{\Omega}_\mathcal{F} \to \mathbb{R}^4$*, appelé le développement de* $\Omega_\mathcal{F}$*, qui est un isomorphisme local.*

Le couple (Φ, D) *est unique dans le sens suivant: Pour tout isomorphisme local* $D' : \widetilde{\Omega}_\mathcal{F} \to \mathbb{R}^4$*, il existe* $h \in \mathcal{H}$ *tel que* $D' = h \circ D$*,* D' *est* Φ'*-équivariante pour l'homorphisme* Φ' *conjugué de* Φ *par* h*, c'est-à-dire,* $\Phi' : \pi_1(\Omega_\mathcal{F}) \to \mathcal{H}$ *et* $\Phi'(\gamma) = h\Phi(\gamma) h^{-1}$.

Remark 42. *On identifie le revêtement universel à* $\pi_1(\Omega_{\mathcal{F}})$ *et la projection* $\pi : \widetilde{\Omega}_{\mathcal{F}} \to \Omega_{\mathcal{F}}$*, s'identifie à* $\pi(\gamma) = \gamma_a(1)$ *avec* $\gamma = [\gamma_a]$ *et* $\gamma_a(0) = a$*. Le groupe d'holonomie est* $\Gamma = \Phi(\Omega_{\mathcal{F}})$*.*

Theorem 26. *Si* $\mathcal{H}$ *est un sous-groupe d'isomorphismes de Lorentz et* $\Omega_{\mathcal{F}}$ *est complet pour la métrique héritée de la métrique de Minkowski, alors* $\Omega_{\mathcal{F}}$ *est isomorphe à* $\Gamma\backslash\mathbb{R}^4$*.*

Proof. C'est un théorème de Thurston [23]. □

On peut représenter l'univers Ω, comme une union de sous-univers difféomorphes à $\Gamma\backslash\mathbb{R}^4$, ayant même point à l'infini dans leur compactification d'Alexandroff. Dans cette représentation l'univers est entièrement décrit par une famille de sous-groupes du groupe des isométries de l'univers de Minkowski. Cette représentation est mathématiquement intéressante mais physiquement pas satisfaisante car si on se situe dans une partie de l'univers de la forme $\Gamma\backslash\mathbb{R}^4$, on ne peut pas accéder analytiquement à une autre partie de l'univers dont le groupe d'holonomie est différent de Γ.

6. Complexification des dimensions en physique

6.1. **Complexification des fibrés hilbertiens réels.** On veut complexifié les fibrés hilbertiens réels. Un fibré hilbertien réel est un fibré

$$\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$$

dont la fibre $\mathcal{H}$ est espace de hilbert réel et la base est l'univers Ω. Chaque fibre $E_\omega(\zeta)$ est muni d'un produit scalaire

$$\langle \bullet \mid \bullet \rangle_\omega$$

pour lequel l'application

$$\omega \to \langle s(\omega) \mid t(\omega) \rangle_\omega$$

est C^∞ pour toutes sections s et t de $\Gamma(\zeta)$.

Le complexifié de ζ

$$\zeta \otimes \mathbb{C} \approx \zeta \times \zeta \approx \zeta + i\zeta$$

où le produit par un complexe est défini par

$$(\lambda + i\mu)(x, t) = (\lambda x - \mu t, \lambda t + \mu x)$$

pour toutes sections x et t de $\Gamma(\zeta)$ et toutes C^∞-applications $\lambda, \mu : \Omega \to \mathbb{R}$. L'opération de conjugaison est une section de $\mathrm{Hom}(\zeta \otimes \mathbb{C})$ définie par

$$\overline{(x, t)} = \ (x, -t), \ x \text{ et } t \in \Gamma(\zeta)$$

et l'endomorphisme de fibré définissant la structure complexe est

$$J(x, t) = (-t, x).$$

On pose

$$s = x + it,$$

où x et t sont des sections de $\Gamma(\zeta)$ par l'identification $x = (x, \mathbf{o})$ et $t = (\mathbf{o}, t)$ où $\mathbf{o}$ représente la section nulle de ζ.

Definition 37. *Une section* $s = x + it$ *de* $\Gamma(\zeta \otimes \mathbb{C})$ *est un complexification de la section réelle* x*.*

Definition 38. *Une section complexe $s \in \Gamma(\zeta \otimes \mathbb{C})$ est une φ-section sur O si*

$$\varphi \otimes t = x \text{ sur } O.$$

Cela revient à dire qu'il existe une section locale φ de $\mathrm{Hom}(\zeta)$ définie sur O telle que pour tout $\omega \in O$

$$\varphi(\omega) : E_\omega(\zeta) \to E_\omega(\zeta), \ \varphi(\omega)(t(\omega)) = x(\omega).$$

L'application est un paramétrage qui donne la variation de la section espace x par rapport à la section temps t. On peut comparer cet opérateur au paramétrage d'une courbe. Une section d-dimensionnelle sur $O \subset \Omega$ est une section locale $(s_1, s_2, \cdots, s_d)$ de $\Gamma(\zeta \otimes \mathbb{C})^d$, telle que

$$\{s_1(\omega), s_2(\omega), \cdots, s_d(\omega)\}$$

est une famille libre de $E_\omega(\zeta) \otimes \mathbb{C}$, pour tout ω appartenant à un ouvert O. Si $s \in \mathrm{Vect}\{s_1, s_2, \cdots, s_d\}$ alors

$$s = z^\mu s_\mu, \ z^\mu \in \mathbb{C}$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$s = x + it$$

avec

$$x = \mathrm{Re}(z^\mu)\mathcal{R}(s_\mu) - \mathrm{Im}(z^\mu)\mathcal{I}(s_\mu),$$

est une section espace et

$$t = \mathrm{Im}(z^\mu)\mathcal{R}(s_\mu) + \mathrm{Re}(z^\mu)\mathcal{I}(s_\mu)$$

est une section temps où

$$s_\mu = \mathcal{R}(s_\mu) + i\mathcal{I}(s_\mu).$$

Definition 39. *Soit s' une autre section de* $\mathrm{Vect}\{s_1, s_2, \cdots, s_d\}$

$$s' = x' + it',$$

un $\{\varphi, \psi\}$-déplacement sur O de s' par rapport à s est la donnée de deux sections locales φ et ψ sur O de $\mathrm{Hom}(\zeta)$ *telles que la condition suivante est réalisée*

$$x' = \mathbf{o} \implies x = \varphi \otimes t \text{ et } x = \mathbf{o} \implies x' = \psi \otimes t'$$

où $\mathbf{o}$ est la section nulle et

$$(\varphi \otimes t)(\omega) = \varphi(\omega)(t(\omega)), \ \forall \omega \in O.$$

.

On dit que les sections s' et s sont en déplacement uniforme sur O, l'une par rapport à l'autre, s'il existe un $\{\varphi, \psi\}$-déplacement sur un ouvert O de Ω, de s' par rapport à s tel que

$$\psi = -\varphi,$$

où φ est une section locale de $\mathrm{GL}(\zeta)$ définies sur l'ouvert O, c'est-à-dire que sur chaque fibre $E_\omega(\zeta)$, $\varphi(\omega) \in \mathrm{GL}(E_\omega(\zeta))$.

Remark 43. *φ est la vitesse de s' par rapport à s.*

Dans tout cette partie, on impose une condition d'analycité des déplacements uniformes, dans le sens suivant, toutes les tranformations considérées sont analytiques par rapport à la vitesse φ.

Theorem 27. *Si s et s' sont en déplacement uniforme dans un fibré ζ qui vérifie les principes de relativité sur chaque fibre de ζ, alors*

$$\left\{\begin{array}{c} x' = \left(\mathbf{1} - c^{-2}\varphi^2\right)^{-\frac{1}{2}}(x - \varphi t) \\ t' = \left(\mathbf{1} - c^{-2}\varphi^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(t - c^{-1}\varphi x\right) \end{array}\right. ,$$

où c est la norme maximale des vitesses φ et $\mathbf{1}$ est la section identique de $\mathrm{Hom}(\zeta)$.

Proof. Si on prend une famille libre de sections $\{s_1, s_2, \cdots, s_d\}$ sur un ouvert O de trivialisation de ζ, une section $s = x + it$ de $\zeta \otimes \mathbb{C}$ s'écrit

$$x = x^\mu s_\mu \text{ et } t = t^\mu s_\mu$$

on pose

$$\mathbf{x} = {}^{\mathrm{Tr}}\left(x^1, x^2, \cdots, x^d\right) \text{ et } \mathbf{t} = {}^{\mathrm{Tr}}\left(t^1, t^2, \cdots, t^d\right).$$

On veut calculer $\mathbf{x}'$ et $\mathbf{t}'$ en fonction de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{t}$, on impose que les propriétés de l'espace-temps d'Einstein s'étendent aux fibres complexifiées du fibré $\zeta \otimes \mathbb{C}$. On note encore, φ et ψ les matrices des endomorphismes φ et ψ dans $\{s_1, s_2, \cdots, s_d\}$. Si l'homogénéité de l'espace-temps reste vraie sur le complexifié de ζ, cela permet d'écrire

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{t}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix},$$

avec $\mathbf{a}_{ij} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{t}' \end{pmatrix}.$$

La première condition implique que $\mathbf{a}_{ij} \in \mathrm{GL}\left(\mathbb{R}^d\right)$ et

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{22}^{-1}\mathbf{a}_{21}\right)^{-1} & -\left(\mathbf{a}_{11} - \mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{22}^{-1}\mathbf{a}_{21}\right)^{-1}\mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{22}^{-1} \\ -\left(\mathbf{a}_{22} - \mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{11}^{-1}\mathbf{a}_{12}\right)^{-1}\mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{11}^{-1} & \left(\mathbf{a}_{22} - \mathbf{a}_{21}\mathbf{a}_{11}^{-1}\mathbf{a}_{12}\right)^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La relation

$$\left\{\begin{array}{c} \mathbf{x}' = \mathbf{a}_{11}\mathbf{x} + \mathbf{a}_{12}\mathbf{t} \\ \mathbf{t}' = \mathbf{a}_{21}\mathbf{x} + \mathbf{a}_{22}\mathbf{t} \end{array}\right. . \tag{6.1}$$

permet décrire, si $\mathbf{x}' = o$

$$\mathbf{x} = \varphi\mathbf{t} \text{ et } \left(\mathbf{a}_{11}\varphi + \mathbf{a}_{12}\right)\mathbf{t} = \mathbf{o}$$

pour tout $\mathbf{t} \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$.

$$\mathbf{a}_{12} = -\mathbf{a}_{11}\varphi \text{ et } \mathbf{x}' = \mathbf{a}_{11}(\mathbf{x} - \varphi\mathbf{t}).$$

Si $\mathbf{x} = o$ alors $\mathbf{x}' = \psi\mathbf{t}'$ et $\mathbf{x}' = -\mathbf{a}_{11}\varphi\mathbf{t}$, $\mathbf{t}' = \mathbf{a}_{22}\mathbf{t}$. On en déduit que

$$-\mathbf{a}_{11}\varphi\mathbf{t} = \psi\mathbf{a}_{22}\mathbf{t}$$

pour tout $\mathbf{t} \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ et

$$-\mathbf{a}_{11}\varphi = \psi\mathbf{a}_{22}.$$

On a

$$-\psi^{-1}\mathbf{a}_{11}\varphi = \mathbf{a}_{22}.$$

En particulier si φ commute avec $\mathbf{a}_{11}$, on a

$$-\psi^{-1}\varphi\mathbf{a}_{11} = \mathbf{a}_{22}$$

et

$$\mathbf{a}_{11} = \mathbf{a}_{22}.$$

L'hypothèse, "φ commute avec $\mathbf{a}_{11}$" est vraie car la matrice $\mathbf{a}_{11}$ ne dépend que de φ et donc, en utilisant le caractère analytique des déplacements, il existe une fonction f de classe C^∞, que l'on peut supposer développable en série entière, de rayon de convergence $R > 0$, notée $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, pour laquelle si $\|\varphi\| < R$,

$$\mathbf{a}_{11} = f(\varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi^n.$$

On pose, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{11}$ et $\mathbf{b} = -\mathbf{a}^{-1}\mathbf{a}_{12}$. Le système 6.1 s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}' = \mathbf{a}(\mathbf{x} - \varphi\mathbf{t}) \\ \mathbf{t}' = \mathbf{a}(\mathbf{t} - \mathbf{b}\mathbf{x}) \end{array} \right. .$$

Si on prend trois sections s, s' et s'' en déplacement uniforme de matrices vitesse φ de s' par rapport à s, φ' de s'' par rapport à s' et φ'' de s'' par rapport à s alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}' = \mathbf{a}(\mathbf{x} - \varphi\mathbf{t}) \\ \mathbf{t}' = \mathbf{a}(\mathbf{t} - \mathbf{b}\mathbf{x}) \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}'' = \mathbf{a}'(\mathbf{x}' - \varphi'\mathbf{t}') \\ \mathbf{t}'' = \mathbf{a}'(\mathbf{t}' - \mathbf{b}'\mathbf{x}') \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}'' = \mathbf{a}''(\mathbf{x} - \varphi''\mathbf{t}) \\ \mathbf{t}'' = \mathbf{a}''(\mathbf{t} - \mathbf{b}''\mathbf{x}) \end{array} \right. ,$$

en combinant

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x}'' = \mathbf{a}'(\mathbf{a}(\mathbf{x} - \varphi\mathbf{t}) - \varphi'\mathbf{a}(\mathbf{t} - \mathbf{b}\mathbf{x})) \\ = \mathbf{a}'\mathbf{a}\left(\left(\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\varphi'\mathbf{a}\mathbf{b}\right)\mathbf{x} - \left(\varphi + \mathbf{a}^{-1}\varphi'\mathbf{b}\right)\mathbf{t}\right) \\ \mathbf{t}'' = \mathbf{a}'(\mathbf{a}(\mathbf{t} - \mathbf{b}\mathbf{x}) - \mathbf{b}'\mathbf{a}(\mathbf{x} - \varphi\mathbf{t})) \\ = \mathbf{a}'\mathbf{a}\left(\left(\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{a}\varphi\right)\mathbf{t} - \left(\mathbf{b} + \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{a}\right)\mathbf{x}\right) \end{array} \right. .$$

Si $\left\|\mathbf{a}^{-1}\varphi'\mathbf{a}\mathbf{b}\right\| < 1$ et $\left\|\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{a}\varphi\right\| < 1$, on peut inverser

$$\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\varphi'\mathbf{a}\mathbf{b} \text{ et } \mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{a}\varphi,$$

alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}'' = \mathbf{a}'\mathbf{a}\left(\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\varphi'\mathbf{a}\mathbf{b}\right)\left(\mathbf{x} - \left(\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\varphi'\mathbf{a}\mathbf{b}\right)^{-1}\left(\varphi + \mathbf{a}^{-1}\varphi'\mathbf{b}\right)\mathbf{t}\right) \\ \mathbf{t}'' = \mathbf{a}'\mathbf{a}\left(\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{a}\varphi\right)\left(\mathbf{t} - \left(\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{a}\varphi\right)^{-1}\left(\mathbf{b} + \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{a}\right)\mathbf{x}\right) \end{array} \right. .$$

Le principe de relativité implique que

$$\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\varphi'\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{a}\varphi,$$

c'est-à-dire, $\varphi'\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b}'\mathbf{a}\varphi$. Si $\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a}$ alors $\varphi'\mathbf{b} = \mathbf{b}'\varphi$. Les matrices $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont des matrices fonctions développables en série entière de φ, elles commutent. On pose $\mathbf{k} = \mathbf{b}'(\varphi')^{-1} = \mathbf{b}^{-1}\varphi$, cette matrice est indépendante du choix des matrices vitesse φ' et φ. On peut écrire

$$\varphi'' = \left(\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\varphi'\mathbf{a}\mathbf{b}\right)^{-1}\left(\varphi + \mathbf{a}^{-1}\varphi'\mathbf{b}\right),$$

$$\mathbf{b}'' = \left(\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{a}\varphi\right)^{-1}\left(\mathbf{b} + \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{a}\right)$$

et

$$\mathbf{a}'' = \mathbf{a}'\mathbf{a}\left(\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\varphi'\mathbf{a}\mathbf{b}\right) = \mathbf{a}'\mathbf{a}\left(\mathbf{I}_d + \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}'\mathbf{a}\varphi\right)$$

et avec $\mathbf{b} = \mathbf{k}\varphi$, $\mathbf{b}' = \mathbf{k}\varphi'$ et $\mathbf{b}'' = \mathbf{k}\varphi''$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}' = \mathbf{a}_+ (\mathbf{x} - \varphi\mathbf{t}) \\ \mathbf{t}' = \mathbf{a}_+ (\mathbf{t} - \mathbf{k}\varphi\mathbf{x}) \end{array} \right. ,$$

où $\mathbf{a}_+ = \mathbf{a}(\varphi)$. La section s a pour matrice vitesse $-\varphi$ par rapport à s', on en déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} = \mathbf{a}_- (\mathbf{x}' + \varphi\mathbf{t}') \\ \mathbf{t} = \mathbf{a}_- \left(\mathbf{t}' + \mathbf{k}\varphi\mathbf{x}'\right) \end{array} \right. ,$$

avec $\mathbf{a}_- = \mathbf{a}(-\varphi)$. Si le postulat d'isotropie reste vrai cela implique que $\mathbf{a}_+ = \mathbf{a}_- = \mathbf{a}$.

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x} = \mathbf{a}(\mathbf{x}' + \varphi\mathbf{t}') = \mathbf{a}(\mathbf{a}(\mathbf{x} - \varphi\mathbf{t}) + \varphi\mathbf{a}(\mathbf{t} - \mathbf{k}\varphi\mathbf{x})) \\ = \mathbf{a}^2 \left(\mathbf{I}_d - \mathbf{a}^{-1}\varphi\mathbf{a}\mathbf{k}\varphi\right)\mathbf{x} \\ \mathbf{t} = \mathbf{a}\left(\mathbf{t}' + \mathbf{k}\varphi\mathbf{x}'\right) = \mathbf{a}(\mathbf{a}(\mathbf{t} - \mathbf{k}\varphi\mathbf{x}) + \mathbf{k}\varphi\mathbf{a}(\mathbf{x} - \varphi\mathbf{t})) \\ = \mathbf{a}^2 \left(\left(\mathbf{I}_d - \mathbf{a}^{-1}\mathbf{k}\varphi\mathbf{a}\varphi\right)\mathbf{t} - \left(\mathbf{k}\varphi - \mathbf{a}^{-1}\mathbf{k}\varphi\mathbf{a}\right)\mathbf{x}\right) \end{array} \right. .$$

On a $\mathbf{a}^2 \left(\mathbf{I}_d - \mathbf{a}^{-1}\varphi\mathbf{a}\mathbf{k}\varphi\right) = \mathbf{I}_d$, $\mathbf{k}\varphi - \mathbf{a}^{-1}\mathbf{k}\varphi\mathbf{a} = \mathbf{O}_d$ et $\mathbf{a}^2 \left(\mathbf{I}_d - \mathbf{a}^{-1}\mathbf{k}\varphi\mathbf{a}\varphi\right) = \mathbf{I}_d$. Donc,

$$\mathbf{a}^2 = (\mathbf{I}_d - \varphi\mathbf{k}\varphi)^{-1} = \left(\mathbf{I}_d - \mathbf{k}\varphi^2\right)^{-1}$$

et $\mathbf{k}\varphi = \varphi\mathbf{k}$ quelque soit $\varphi \in \mathrm{Gl}\left(\mathbb{R}^d\right)$, elle est donc de la forme $\mathbf{k} = \lambda\mathbf{I}_d$,

$$\mathbf{a}^2 = \left(\mathbf{I}_d - \lambda\varphi^2\right)^{-1} .$$

Pour que $\mathbf{I}_d - \lambda\varphi^2$soit inversible, il faut et il suffit que $\|\varphi\| < \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}$.

Si m est une matrice quelconque, on appelle racine carrée de m, une matrice n si elle existe qui vérifie $n^2 = m$ et on pose $n = m^{\frac{1}{2}}$. On en déduit

$$\mathbf{a} = \pm \left(\mathbf{I}_d - \mathbf{k}\varphi^2\right)^{-\frac{1}{2}} ,$$

or si $\varphi = \mathbf{O}_d$, $\mathbf{a} = \mathbf{I}_d$ alors $\mathbf{a} = \left(\mathbf{I}_d - \mathbf{k}\varphi^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. De plus $\lambda > 0$, sinon $\lambda = 0$, $\mathbf{a} = \mathbf{I}_d$,

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \varphi\mathbf{t} \\ \mathbf{t}' = \mathbf{t} \end{array} \right. ,$$

on retombe sur des transformations du type Galilée étendues au fibré complexe, qui sont incompatibles sur chaque fibre réelle avec les fondements de l'électromagnétisme et si $\lambda < 0$, supposons que $\varphi' = \mu'\mathbf{I}_d$, $\varphi = \mu\mathbf{I}_d$, alors $\varphi'' = \frac{\mu+\mu'}{1-|\lambda|\mu\mu'}\mathbf{I}_d$, pour $\mu > 0$, $\mu' > 0$ et $\mu\mu' < -\frac{1}{k}$, $\frac{\mu+\mu'}{1+\lambda\mu\mu'} < 0$, ce qui est impossible. Nécessairement, $\lambda > 0$, on pose $c = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, c'est la "constante" de la lumière qui est une valeur limite pour la norme des matrices vitesse.

La matrice de changement de coordonnées s'écrit dans $\mathbb{R}^{2d}$

$$\mathbf{Q} = \left(\begin{array}{cc} \left(\mathbf{I}_d - c^{-2}\varphi^2\right)^{-\frac{1}{2}} & -\left(\mathbf{I}_d - c^{-2}\varphi^2\right)^{-\frac{1}{2}}\varphi \\ -c^2\left(\mathbf{I}_d - c^{-2}\varphi^2\right)^{-\frac{1}{2}}\varphi & \left(\mathbf{I}_d - c^{-2}\varphi^2\right)^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right) .$$

Remarquons que si $f(x) = \left(1 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ avec

$$a_0 = 1 \text{ et } a_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(k + \frac{1}{2}\right), \, n \geqslant 1$$

pour $\|x\| < 1$ et

$$\mathbf{a} = \left(\mathbf{I}_d - c^{-2}\varphi^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c^{-2n}\varphi^{2n}$$

pour $\|\varphi\| < c$. De plus, la matrice $\mathbf{Q}$ existe même si φ, n'est pas inversible. Il suffit que $\|\varphi\| < c$ pour que $\mathbf{Q}$ soit définie. Si $s' = x' + it'$ et $s = x + it$ sont des sections de ζ, en déplacement uniforme, de vitesse φ telle que $\|\varphi\| < c$ alors

$$\begin{cases} x' = \left(\mathbf{1} - c^{-2}\varphi^2\right)^{-\frac{1}{2}}(x - \varphi t) \\ t' = \left(\mathbf{1} - c^{-2}\varphi^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(t - c^{-1}\varphi x\right) \end{cases},$$

où c est une constante positive pour laquelle la matrice vitesse de la section lumière est $c\mathbf{1}$ où $\mathbf{1}$ est la section identique. □

On en déduit

$$\begin{aligned} s' &= \left(\mathbf{1} - c^{-2}\varphi^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(s - \varphi\left(t + ic^{-1}x\right)\right) \\ &= \left(\mathbf{1} - c^{-2}\varphi^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(s - ic^{-1}\varphi\left(x - ict\right)\right). \end{aligned}$$

Si on normalise c à 1,

$$s' = \left(\mathbf{1} - \varphi^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(s - i\varphi\overline{s}\right).$$

La quantité de mouvement de la section s peut être définie par la section

$$\mathbf{p} = \varphi \otimes s,$$

où

$$\mathbf{p}(\omega) = (\varphi \otimes s)(\omega) = \varphi(\omega)(s(\omega)),\ \omega \in \Omega.$$

.

Remark 44. *1)Par analogie à la relativité restreinte classique, la section $\mathcal{E}$ correspondant à l'énergie d'une section s par rapport à la section s_0 s'écrit*

$$\mathcal{E} = c^2 s,$$

où $s = \left(\mathbf{1} - c^{-2}\varphi^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(s_0 - ic^{-1}\varphi\left(x_0 - ict_0\right)\right)$ et c est la norme maximale des vitesses φ.

2)On suppose que le fibré ζ hilbertien réel est un fibré relativiste, dans le sens suivant, la propriété d'homogénéité, le principe de relativité et le postulat d'isotropie sur chaque fibre réelle $E_\omega(\zeta)$ sont vérifiés et qu'ils s'étendent à la fibre complexifiée

$$E_\omega(\zeta) \otimes \mathbb{C}.$$

3)Si φ définit une structure $\pm$-presque complexe sur ζ, c'est-à-dire

$$\varphi^2 = \pm\mathbf{1},$$

$\varphi^2 = \mathbf{1}$ la structure est dite presque réelle et $\varphi^2 = -\mathbf{1}$ la structure est dite presque complexe, alors tous les changements de coordonnées analytiques dans le repère $\{s_1, s_2, \cdots, s_d\}$ de ζ, de s à s' en déplacement uniforme et de vitesse φ sont de la forme

$$\begin{cases} x' = \left(1 \mp c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}(x - \varphi t) \\ t' = \left(1 \mp c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(t - c^{-1}\varphi x\right) \end{cases}$$

et

$$s' = \left(1 \mp c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(s - ic^{-1}\varphi\left(x - ict\right)\right),$$

si c est normalisé à 1, dans le cas presque complexe on a

$$s' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(s - i\varphi\overline{s}\right)$$

où $\overline{s}$ est le conjugué de s.

6.2. **Les champs en corde du complexifié du fibré tangent.** Dans ce qui suit, on munit l'univers Ω d'une métrique riemanienne g. Le fibré $\zeta = \left(T\Omega, \pi, \Omega, \mathbb{R}^4\right)$ muni de la métrique g est un fibré hermitien réel, les sections sont les champs de Ω. Si

$$X + iT \text{ et } X' + iT'$$

sont en déplacement uniforme de vitesse V, alors

$$\begin{cases} X' = \left(\mathbf{I} - c^{-2}V^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(X - VT\right) \\ T' = \left(\mathbf{I} - c^{-2}V^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(T - c^{-1}VX\right) \end{cases}$$

où $\mathbf{I}$ est la section identique de $\mathrm{GL}\left(\zeta\right)$ et V est une section de $\mathrm{GL}\left(\zeta\right)$. La quantité de mouvement d'un champ complexe

$$Z = X + iT$$

est

$$P = Vm$$

où m est une section de ζ, dite section de masse. La quantité

$$\sqrt{g\left(m, m\right)}$$

représente la masse du champ complexe Z. Le champ Z' en déplacement uniforme de vitesse V est

$$\begin{aligned} Z' &= \left(\mathbf{I} - c^{-2}V^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(Z - ic^{-1}V\left(X - icT\right)\right) \\ &= \left(\mathbf{I} - c^{-2}V^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(Z - iV\frac{\left(1-c\right)Z + \left(1+c\right)\overline{Z}}{2c}\right). \end{aligned}$$

Un champ en corde est un champ complexe local

$$Z = X + iT$$

pour lequel

$$\mathrm{Vect}\left\{X, T\right\} = 2$$

et

$$\mathcal{L}_T\left(X\right) = \alpha X + \beta T$$

pour deux C^∞-applications α et β définies localement. La fonction d'onde associée est

$$\theta = \alpha + i\beta,$$

on peut consulter [3] pour une représentation géométrique de ces champs.

Lemma 5. *Si $Z = X + iT$ et $Z' = X' + iT$ sont des champs en corde de champ imaginaire T alors $Z'' = \left(X + X'\right) + iT$ et $Z = \lambda X + iT$ sont des champs en corde.*

Proof. On a

$$\begin{aligned}[T,\lambda X] &= \lambda\left[T,X\right]+L_T\left(\lambda\right)X\\ &= \lambda\beta T+\left(\lambda\alpha+L_T\left(\lambda\right)\right)X\end{aligned}$$

si

$$[T,X]=\alpha X+\beta T.$$

□

Remark 45. *La fonction d'onde associée au champ en corde $Z=\lambda X+iT$ est*

$$\lambda\alpha+L_T\left(\lambda\right)+i\lambda\beta=L_T\left(\lambda\right)+\lambda\left(\alpha+i\beta\right),$$

si la fonction d'onde du champ en corde $X+iT$ est ϕ alors la fonction d'onde du champ en corde $\lambda X+iT$ est

$$\psi=L_T\left(\lambda\right)+\lambda\phi,$$

où L_T est la dérivée de Lie le long du champ T.

Si $X\in\Gamma^{\infty}\left(\Omega\right)$ alors en coordonnées locales $X=X^{\mu}\partial_{\mu}$, où $X^{\mu}:V\to\mathbb{R}$ est une C^{∞}-application. Si $T=T^{\mu}\partial_{\mu}$ alors $[T,X]=L^{\nu}\partial_{\nu}$ avec,

$$L^{\nu}=T^{\mu}\left(\partial_{\mu}X^{\nu}\right)-X^{\mu}\left(\partial_{\mu}T^{\nu}\right).$$

On cherche à déterminer les champs X tels que

$$\mathcal{L}_T\left(X\right)=[T,X]=\alpha X+\beta T,$$

où α et β sont des C^{∞}-applications définies sur un ouvert $\mathcal{V}$ et T est un champ fixé non nul sur $\mathcal{V}$. Localement, on a

$$T^{\mu}\left(\partial_{\mu}X^{\nu}\right)-X^{\mu}\left(\partial_{\mu}T^{\nu}\right)=\alpha\delta_{\mu\nu}X^{\mu}+\beta\delta_{\mu\nu}T^{\mu}, \tag{6.2}$$

pour tout $\nu=0,1,2,3$.

Si $\{\partial_{\nu}\}$ est le *"local frame"* associé à la carte $\mathcal{V}$, les champs $X=X^{\nu}\partial_{\nu}$ pour lesquels

$$X+i\partial_{\sigma}$$

est un champ en corde sont les champs qui vérifient le système d'équations différentielles

$$\alpha\delta_{\sigma\nu}+\beta X^{\nu}+\partial_{\sigma}X^{\nu}=0,\ \nu=0,1,2,3.$$

Pour un champ T, le théorème de redressement permet de construire une carte φ pour laquelle le *"local frame"* associé vérifie

$$T=\partial_0 \text{ et } T\varphi\left(\partial_0\right)=\frac{\partial}{\partial t}.$$

Un champ local X s'écrit dans cette carte

$$X=X^{\mu}\partial_{\mu},$$

le champ complexe

$$X+iT$$

est un champ en corde si et seulement si il existe deux C^{∞}-applications α et β définies sur la carte φ telles que

$$\alpha\delta_{0\nu}+\beta X^{\nu}+\partial_0X^{\nu}=0,\ \nu=0,1,2,3.$$

On peut écrire ce système sous la forme

$$\beta X^0+\partial_TX^0+\alpha=0$$

$$\beta X^\nu + \partial_T X^\nu = 0,\ \nu = 1,2,3$$

avec

$$X = X^0 T + X^\nu \partial_\nu.$$

L'existence de solution s'obtient en transportant ce système dans $\mathbb{R}^4$ par l'isomorphisme de carte $T\varphi : T\mathcal{V} \to T\mathbb{R}^4$, ce système s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{X}^\nu}{\partial t} + \beta_\varphi \mathbf{X}^\nu + \alpha_\varphi \delta_{0\nu} = 0$$

avec

$$\beta_\varphi = \beta \circ \varphi^{-1},\ \alpha_\varphi = \alpha \circ \varphi^{-1} \text{ et } \mathbf{X}^\nu = X^\nu \circ \varphi^{-1}.$$

On a

$$\mathbf{X}^\nu = k_\nu \exp\left(-\int \beta_\varphi dt\right)$$

avec

$$k_\nu = -\delta_{0\nu} \int \alpha_\varphi \exp\left(-\int \beta_\varphi dt\right) dt + C_\nu$$

où C_ν est une fonction indépendante de t, elle ne dépend que de x, y, z. On en déduit le théorème suivant. Ce théorème permet de déterminer le champ en corde à partir de sa fonction d'onde.

Theorem 28. *Les champs X pour lesquels $X + iT$ est un champ en corde pour $T \neq \mathbf{o}$ dans une carte*

$$\varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^4$$

dont le "local frame" associé $\{\partial_\nu, \nu = 0,1,2,3\}$ vérifie

$$T = \partial_0$$

avec

$$T\varphi \otimes \partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}$$

et dont la fonction d'onde associée sur $\mathcal{V}$ est

$$\theta = \alpha + i\beta,$$

sont de la forme

$$X^\nu \partial_\nu$$

où

$$X^\nu = \mathbf{X}^\nu \circ \varphi$$

et

$$\mathbf{X}^\nu = k_\nu \exp\left(-\int \beta_\varphi dt\right)$$

avec

$$k_\nu = -\delta_{0\nu} \int \alpha_\varphi \exp\left(-\int \beta_\varphi dt\right) dt + C_\nu,\ C_\nu = C_\nu(x, y, z),$$

et

$$\alpha_\varphi = \alpha \circ \varphi^{-1},\ \beta_\varphi = \beta \circ \varphi^{-1}.$$

Supposons que sur l'univers Ω existe une structure $\pm$-presque complexe J, si le champ complexe

$$X + iT$$

est en déplacement uniforme par rapport à

$$X_0 + iT_0$$

alors on a

$$\left\{ \begin{array}{c} X = \left(1 \mp c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(X_0 - JT_0\right) \\ T = \left(1 \mp c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(T_0 - c^{-1} J X_0\right) \end{array} \right. .$$

Proposition 18. *Avec les hypothèses précédentes, si*

$$X_0 + iJT_0$$

est un champ en corde alors

$$X + iJT$$

est un champ en corde.

Proof. On a

$$\dim\left(\mathrm{Vect}\left\{X, JT\right\}\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left\{X_0, JT_0\right\}\right) = 2$$

et

$$\begin{aligned} [X, JT] &= \left(1 \mp c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left[X_0 - JT_0, JT_0 + c^{-1} X_0\right] \\ &= \left(1 \mp c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + c^{-1}\right) \left[X_0, JT_0\right] \\ &= \left(1 \mp c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + c^{-1}\right) \left(\alpha X_0 + \beta JT_0\right) \\ &= \left(1 \mp c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + c^{-1}\right) \left(\alpha + \beta\right) X + \left(1 \pm c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + c^{-1}\right) \left(\beta - c^{-1}\alpha\right) JT. \end{aligned}$$

□

Remark 46. *Si la fonction d'onde de $X_0 + iJT_0$ est $\alpha + i\beta$ alors la fonction d'onde de $X + iJT$ est*

$$\left(1 \mp c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + c^{-1}\right) \left(\left(\alpha + \beta\right) + i\left(\beta - c^{-1}\alpha\right)\right)$$

si le champ $X + iT$ est en déplacement uniforme le long de la structure $\pm$-complexe, de vitesse J.

6.3. **Complexification des dimensions.** L'idée de la complexification est de coupler à chaque dimension d'espace une dimension temps et à chaque dimension temps une dimension d'espace de telle façon que les couples espace-temps s'identifient à une dimension complexe, dont la partie réelle représente une dimension espace et la partie imaginaire une dimension temps. On plonge l'univers Ω dans une variété Λ, de dimension $2n$ avec $n \geqslant 4$ et on identifie Ω à son image dans Λ. En chaque événement $\omega \in \Omega$, il existe une carte U de ω dans Λ, notée Φ telle que

$$\Phi\left(\Omega \cap U\right) \subset \left\{(x, 0, y, 0, z, 0, 0, t, 0, \cdots, 0) : x, y, z, t \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n,$$

où l'identification de $\mathbb{R}^{2n}$ à $\mathbb{C}^n$ est donnée par

$$\theta\left(x_0, y_0, x_1, y_1, \cdots, x_{n-1}, y_{n-1}\right) = \left(x_0 + iy_0, x_1 + iy_1, \cdots, x_{n-1} + iy_{n-1}\right).$$

Le triplet (x, y, z) représente les dimensions spatiales et t la dimension temps, avec le plongement précédent on en déduit que x, y et z sont les parties réelles de dimensions complexes et t est la partie imaginaire d'une dimension complexe.

Supposons que la variété Λ soit munie d'une structure presque réelle J, c'est-à-dire, d'une section de $\mathrm{Hom}\,(\zeta)$ telle que

$$J^2 = \mathbf{1}$$

où

$$\zeta = (T\Lambda, \pi, \Lambda)$$

est le fibré tangent à Λ, l'espace total $T\Lambda$ se scinde en deux sous-fibrés

$$T\Lambda = T^+\Lambda \oplus T^-\Lambda$$

où $T^+\Lambda$ est le sous-fibré propre associé à la valeur propre 1 et $T^-\Lambda$ est le sous-fibré propre associé à la valeur propre -1. Les champs de Λ à valeurs dans $T^+\Lambda$, respectivement $T^-\Lambda$, sont les champs espace, respectivement les champs temps de Λ. On a

$$\dim T^+\Lambda = \dim T^-\Lambda = n.$$

Tout champ X de Λ se décompose de façon unique sous la forme

$$X = X^+ + X^-$$

où

$$X^+ = \frac{1}{2}\,(X + JX)$$

est un champ espace et

$$X^- = \frac{1}{2}\,(X - JX)$$

est un champ temps. Si J est intégrable, on peut feuilleter Λ en deux feuilletages d'espace et de temps, notés respectivement

$$\mathcal{F}^+ \text{ et } \mathcal{F}^-,$$

chaque feuille $\mathbf{F}^+ \in \mathcal{F}^+$ et $\mathbf{F}^- \in \mathcal{F}^-$ ont pour espace tangent en $\lambda \in \mathbf{F}^+ \cap \mathbf{F}^-$, respectivement, $T^+_\lambda\Lambda$ et $T^-_\lambda\Lambda$ munis de leur structure d'espace vectorielle réelle. Ces feuilles sont transversales. On munit Λ d'une métrique riemannienne g. Cette métrique riemannienne g induit une métrique pseudo-riemannienne h ayant pour forme quadratique

$$\mathbf{Q}_h\left(X^+ + X^-\right) = \mathbf{Q}_g\left(X^+\right) - \mathbf{Q}_g\left(X^-\right),$$

pour tout $X^+ \in \Gamma^\infty\,(T^+\Lambda)$ et $X^- \in \Gamma^\infty\,(T^-\Lambda)$.

Si on munit Λ d'une métrique riemannienne g pour laquelle

$$J \in \mathrm{SO}\,(T\Lambda, g)\,,\ g\,(J \otimes X, J \otimes Y) = g\,(X, Y)$$

alors $\Gamma^\infty\,(T^+\Lambda)$ et $T \in \Gamma^\infty\,(T^-\Lambda)$ sont orthogonaux pour la métrique g. Pour la pseudo-métrique h, un champ espace X vérifie $\mathbf{Q}_h\,(X) \geqslant 0$ et un champ temps $\mathbf{Q}_h\,(T) \leqslant 0$. Pour la pseudo-métrique h, les feuilles espace et les feuilles temps se coupent orthogonalement,

$$\begin{aligned} h\left(X^+, X^-\right) &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{Q}_h\left(X^+ + X^-\right) - \mathbf{Q}_h\left(X^+\right) - \mathbf{Q}_h\left(X^-\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{Q}_g\left(X^+\right) - \mathbf{Q}_g\left(X^-\right) - \mathbf{Q}_g\left(X^+\right) + \mathbf{Q}_g\left(X^-\right)\right) = 0. \end{aligned}$$

Les feuilles espace et temps se coupent orthogonalement pour la pseudo-métrique h sans l'hypothèse $J \in \mathrm{SO}\,(T\Lambda, g)$. Cette pseudo-métrique induit une métrique de Lorentz sur l'univers Ω si la dimension des feuilles espace est 3 et 1 pour les feuilles temps. On peut donc définir un champ chronologique stable local sur Ω.

Si $\omega \in \Omega \subset \Lambda$, $T_\omega\Omega$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $T_\omega\Lambda$. Le scindage

$$T_\omega\Lambda = T_\omega^+\Lambda \oplus T_\omega^-\Lambda$$

induit un scindage

$$T_\omega\Omega = T_\omega^+\Omega \oplus T_\omega^-\Omega.$$

Si $\zeta^\pm = (\cup_{\omega\in\Omega} T_\omega^\pm\Omega, \pi, \Omega)$ sont des sous-fibrés de $\zeta = (T\Omega, \pi, \Omega)$ alors ils sont complètement intégrables. Les champs $X^\pm$ et $Y^\pm$ de $\Gamma^\infty(\zeta^\pm)$ vérifient

$$\left[X^\pm, Y^\pm\right] \in \Gamma^\infty\left(\zeta^\pm\right)$$

grâce à l'intégrabilité de la structure presque réelle J. Chaque événement ω appartient à une feuille espace et une feuille temps de Ω, une feuille espace est une sous variété $\mathbf{F}^+ \subset \Omega$ telle que $T(\mathbf{F}^+) \subset T^+\Lambda$ et une feuille temps $\mathbf{F}^- \subset \Omega$ est une sous-variété de Ω vérifiant $T(\mathbf{F}^-) \subset T^-\Lambda$. On peut feuilleter en espace et en temps le voisinage d'un événement avec

$$\dim\left(\mathbf{F}^+\right) + \dim\left(\mathbf{F}^-\right) = 4.$$

Lorsque $\dim(\mathbf{F}^+) = 3$ et $\dim(\mathbf{F}^-) = 1$, on est dans l'espace relativiste d'Einstein, dans cette situation on a un champ chronologique stable T.

Definition 40. *Une structure presque complexe K sur Λ est instable pour J si*

$$K\left(T^+\Lambda\right) \subset T^-\Lambda \text{ et } K\left(T^+\Lambda\right) \subset T^-\Lambda,$$

si le crochet de Poisson vérifie

$$\{K, J\} = o$$

alors K est instable pour J. On dit que K est stable si

$$[K, J] = o$$

alors

$$K\left(T^+\Lambda\right) \subset T^+\Lambda \text{ et } K\left(T^-\Lambda\right) \subset T^-\Lambda.$$

Pour une structure presque complexe K, une condition nécessaire et suffisante pour que K induise une structure complexe sur Λ est que le tenseur de Nijenhuis

$$\mathcal{N}(X, Y) = [X, Y] + K[KX, Y] + K[X, KY] - [KX, KY]$$

soit identiquement nul, c'est le théorème de Newlander-Nirenberg [15]. On pose pour un champ X,

$$X = X^+ + X^-$$

$X^+ \in T^+\Lambda$ et $X^- \in T^-\Lambda$, pour une structure presque complexe K vérifiant

$$K\left(X^+\right) = -X^-, K\left(X^-\right) = X^+,$$

K définit une structure presque complexe instable sur Λ. On peut calculer le tenseur de Nijenhuis,

$$\mathcal{N}\left(X^+, Y^+\right) = \left[X^+, Y^+\right] - K\left[X^-, Y^+\right] - K\left[X^+, Y^-\right] - \left[X^-, Y^-\right]$$

$$\mathcal{N}\left(X^-, Y^-\right) = \left[X^-, Y^-\right] + K\left[X^+, Y^-\right] + K\left[X^+, Y^-\right] - \left[X^+, Y^+\right]$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}\left(X^+, Y^-\right) &= \left[X^+, Y^-\right] - \left[X^-, Y^-\right]^+ - \left[X^+, Y^+\right]^- + \left[X^-, Y^+\right] \\ &= \left[X^+, Y^-\right] + \left[X^-, Y^+\right]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{N}\left(X^{-},Y^{+}\right) &= \left[X^{-},Y^{+}\right]-\left[X^{+},Y^{+}\right]^{-}-\left[X^{-},Y^{-}\right]^{+}+\left[X^{+},Y^{-}\right]\\ &= \left[X^{-},Y^{+}\right]+\left[X^{+},Y^{-}\right]\end{aligned}$$

car J est intégrable, en sommant

$$\mathcal{N}\left(X,Y\right)=2\left(\left[X^{+},Y^{-}\right]+\left[X^{-},Y^{+}\right]\right)$$

que l'on peut écrire en posant

$$X^{+}=\frac{1}{2}\left(X+JX\right)\ \text{ et }\ X^{-}=\frac{1}{2}\left(X-JX\right)$$

$$\mathcal{N}\left(X,Y\right)=\frac{1}{2}\left(\left[X,Y\right]-\left[JX,JY\right]\right).$$

Si K est intégrable on a

$$\left[JX,JY\right]=\left[X,Y\right].$$

Theorem 29. *Une structure presque réelle J, qui est intégrable induit une structure holomorphe sur Λ si*

$$\left[JX,JY\right]=\left[X,Y\right], \tag{6.3}$$

pour tous les champs X et Y de Λ.

Remark 47. *1)La structure holomorphe définie est la complexification des dimensions de Λ,*

2)L'équation 6.3 est èquivalente à

$$\left[JX,Y\right]=\left[X,JY\right],$$

on dit que la structure presque réelle J sur Λ, commute dans le crochet de Lie.

On peut élargir la notion de complexification des dimensions de l'univers Ω, en le plongeant dans un univers Λ sur lequel il existe une section J de $\mathrm{Hom}\left(T\Lambda\right)$ diagonalisable, c'est-à-dire, pour laquelle il existe des C^{∞}-applications

$$\varsigma_{\nu}:\Lambda\rightarrow\mathbb{R},\nu=1,\cdots,k$$

telles que

$$\mathcal{T}^{\nu}\Lambda=\left(\cup_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Ker}\left(J\left(\lambda\right)-\varsigma_{\nu}\left(\lambda\right)Id_{T_{\lambda}\Lambda}\right),\pi_{\nu},\Lambda\right)$$

est un sous-fibré de

$$\mathcal{T}\Lambda=\left(T\Lambda,\pi,\Lambda\right)$$

avec $\mathcal{T}\Lambda$ est la somme de Whitney des $\mathcal{T}^{\nu}\Lambda$,

$$\mathcal{T}\Lambda=\oplus_{\nu=1}^{k}\mathcal{T}^{\nu}\Lambda.$$

Definition 41. *J est intégrable si pour tous champs $X,Y\in\Gamma\left(\mathcal{T}^{\nu}\Lambda\right)$ alors $\left[X,Y\right]\in\Gamma\left(\mathcal{T}^{\nu}\Lambda\right)$ pour tous les indices $\nu=1,\cdots,k$.*

On peut définir une famille de feuilletages $\{\mathcal{F}_{\nu}\}$ locaux, deux à deux transversaux de Λ qui induisent des feuilletages locaux de Ω au voisinage de ω car

$$\omega\rightarrow T_{\omega}\Omega\cap\mathcal{T}_{\omega}^{\nu}\Lambda$$

est complètement intégrable sous les hypothèses J intégrable et

$$T^{\nu}\Omega=\cup_{\omega\in\Omega}T_{\omega}\Omega\cap\mathcal{T}_{\omega}^{\nu}\Lambda$$

est un sous-fibré de $T\Omega$.

Definition 42. *Une structure presque complexe K est σ-stable s'il existe une permutation σ de $\{1,2,\cdots,k\}$ telle que*

$$K\left(\mathcal{T}^{\nu}\Lambda\right)\subset\mathcal{T}^{\sigma(\nu)}\Lambda,$$

pour tout $\nu\in\{1,2,\cdots,k\}$.

Soit K, la section des endomorphismes de $T\Lambda$ définie par

$$\left(K\circ p_{\nu}\right)\otimes X=\left(-1\right)^{\nu}p_{\sigma(\nu)}\otimes X,$$

où p_{ν} est la section des projections sur $\mathcal{T}^{\nu}\Lambda$ parallèlement à

$$\mathcal{T}^{1}\Lambda\oplus\mathcal{T}^{2}\Lambda\oplus\cdots\oplus\widehat{\mathcal{T}^{\nu}\Lambda}\oplus\ldots\oplus\mathcal{T}^{k}\Lambda.$$

La section K est une structure presque complexe si

$$\sigma\left(\nu\right)+\nu\equiv 1\pmod 2$$

pour tout $\nu\in\{1,2,\cdots,k\}$. On suppose que K est une structure presque complexe et on calcule le tenseur de Nijenhuis. Si on pose

$$X_{\nu}=p_{\nu}\otimes X$$

on a

$$\begin{aligned}\mathcal{N}\left(X_{\nu},Y_{\mu}\right)&=\left[X_{\nu},Y_{\mu}\right]+\left(-1\right)^{\nu}K\left[X_{\sigma(\nu)},Y_{\mu}\right]\\&\quad+\left(-1\right)^{\mu}K\left[X_{\nu},Y_{\sigma(\mu)}\right]+\left(-1\right)^{\nu+\mu+1}\left[X_{\sigma(\nu)},Y_{\sigma(\mu)}\right]\end{aligned}$$

en sommant

$$\begin{aligned}\mathcal{N}\left(X,Y\right)&=\sum_{\nu,\mu=1}^{k}\left[X_{\nu},Y_{\mu}\right]+\sum_{\nu,\mu=1}^{k}\left(-1\right)^{\nu}K\left[X_{\sigma(\nu)},Y_{\mu}\right]\\&\quad+\sum_{\nu,\mu=1}^{k}\left(-1\right)^{\mu}K\left[X_{\nu},Y_{\sigma(\mu)}\right]+\sum_{\nu,\mu=1}^{k}\left(-1\right)^{\nu+\mu+1}\left[X_{\sigma(\nu)},Y_{\sigma(\mu)}\right]\\&=\sum_{\nu,\mu=1}^{k}\left(\left(-1\right)^{\nu}K\left[X_{\sigma(\nu)},Y_{\mu}\right]+\left(-1\right)^{\mu}K\left[X_{\nu},Y_{\sigma(\mu)}\right]\right)\\&=K\left(\sum_{\nu,\mu=1}^{k}\left(\left(-1\right)^{\nu}\left[X_{\sigma(\nu)},Y_{\mu}\right]+\left(-1\right)^{\mu}\left[X_{\nu},Y_{\sigma(\mu)}\right]\right)\right),\end{aligned}$$

en prenant pour convention $X_{\tau}=X_{\rho}$ si $\tau\equiv\rho\pmod k$. Le tenseur de Nijenhuis est nul si et seulement si

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{k}\left(\left(-1\right)^{\nu}\left[X_{\sigma(\nu)},Y_{\mu}\right]+\left(-1\right)^{\mu}\left[X_{\nu},Y_{\sigma(\mu)}\right]\right)=o$$

en utilisant les projections p_{ν}

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{k}\left(\left(-1\right)^{\nu}\left[p_{\sigma(\nu)}\otimes X,p_{\mu}\otimes Y\right]+\left(-1\right)^{\mu}\left[p_{\nu}\otimes X,p_{\sigma(\mu)}\otimes Y\right]\right)=o,$$

on a plusieurs structures complexes sur Λ qui préservent la section des endomorphismes diagonalisables de $\mathrm{Hom}\left(T\Lambda\right)$.

Theorem 30. *Si J est une section d'endomorphismes diagonalisables de* $\mathrm{Hom}\,(T\Lambda)$ *et soit σ une permutation de $\{1, 2, \cdots, k\}$, où k est le nombre de fonctions propres de J, telle que*

$$\sigma(\nu) + \nu \equiv 1 \pmod 2$$

et J est intégrable alors J induit une structure complexe sur Λ si et seulement si le tenseur

$$\mathcal{T}(X, Y) = \sum_{\nu,\mu=1}^{k} \left((-1)^{\nu} \left[p_{\sigma(\nu)} \otimes X, p_{\mu} \otimes Y\right] + (-1)^{\mu} \left[p_{\nu} \otimes X, p_{\sigma(\mu)} \otimes Y\right]\right)$$

est identiquement nul où p_ν est la section des projections sur $\mathcal{T}^{\nu}\Lambda$ parallèlement à

$$\mathcal{T}^1\Lambda \oplus \mathcal{T}^2\Lambda \oplus \cdots \oplus \widehat{\mathcal{T}^{\nu}\Lambda} \oplus \ldots \oplus \mathcal{T}^k\Lambda.$$

Remark 48. *Ces notions peuvent s'étendre aux structures de fibré réel*

$$\zeta = (E, \pi, \Lambda, \mathcal{H})$$

dont la fibre $\mathcal{H}$ est un espace de vectoriel réel de dimension finie. On note $\mathcal{R}(\zeta)$ l'ensemble des structures presque réelles J de ζ, c'est-à-dire, les sections d'endomorphismes du fibré ζ pour lesquelles

$$J^2 = \mathbf{1}.$$

On a

$$\dim \zeta = 2n,$$

et si $s \in \zeta$

$$s_+ = \frac{1}{2}(s + J \otimes s) \in \Gamma(\mathrm{Ker}\,(J - \mathbf{1})) \text{ et } s_- = \frac{1}{2}(s - J \otimes s) \in \Gamma(\mathrm{Ker}\,(J + \mathbf{1}))$$

où $\mathbf{1}(\lambda) = \mathrm{Id}_{E_\lambda(\zeta)}$ et $\mathrm{Ker}\,(J \pm \mathbf{1})$ sont les fibrés associés aux valeurs propres ∓ 1. Chaque section s s'écrit

$$s = s_+ + s_-$$

et l'application de conjuguaison

$$\mathcal{Q} : s_+ \to s_-$$

est un isomorphisme sur chaque fibre de $E_\lambda(\mathrm{Ker}\,(J - \mathbf{1}))$ sur $E_\lambda(\mathrm{Ker}\,(J + \mathbf{1}))$.

7. Les équations de Dirac-Einstein

Si on veut définir l'espace-temps Ω, on le définit comme une variété réelle de dimension 4, munie d'une métrique Lorentzienne g pour laquelle l'équation relativiste est vérifiée . En relativité, les points de cette variété Ω décrivent l'univers des événements. En physique quantique, les particules sont définies comme des ondes $\psi(x, t)$. Le principe de quantification de l'univers Ω est de définir une géométrie qui permet de lier les notions d'événements et de particules. Dans la théorie relativiste, on identifie les particules aux événements de l'univers. Si on oublie ce procédé d'identification comme cela a été développé en théorie des cordes, les principes d'unification se simplifient. On n'identifie plus, l'univers des particules à son support qui est l'univers relativiste d'Einstein Ω. On veut quantifier, non pas l'univers Ω décrit par la physique relativiste d'Einstein, mais géométriser l'univers des états des particules décrit par la mécanique quantique. La description des particules en physique quantique est donnée par une onde

$$\psi = \psi(t, x, y, z), \tag{7.1}$$

où (x, y, z) est un point de l'espace et t représente le temps, telle que

$$\int |\psi(t, x, y, z)|^2 \, dxdydz = 1. \tag{7.2}$$

Cette présentation a le désavantage de faire intervenir l'espace-temps dans sa description. On s'intéresse aux relations liant le *"contenant"* formé par l'univers relativiste d'Einstein Ω au *"contenu"* formé par l'univers des particules. Comme en gravitation quantique à boucles, on ne veut pas augmenter la dimension de Ω comme cela est fait en théorie des cordes. Pour cela, on remarque que les équations 7.1 et 7.2, ne définissent pas un élément d'un espace de Hilbert, mais une section d'un fibré hibertien . On pose

$$\zeta = (E(\zeta), \pi_\zeta, \Omega, \mathcal{H})$$

ce fibré, Ω représente l'univers des événements, $\mathcal{H}$ est un espace hermitien séparable et l'espace total $E = E(\zeta)$ représente l'univers des états des particules, les sections de ce fibré $\Gamma^\infty(\Omega)$ représentent l'univers des particules.

7.1. **La connexion $\nabla_{E,\Omega}$ et l'équation d'évolution.** L'idée de cette section est de déterminer les relations qui lient les univers E et Ω et les équations d'évolution et d'état des sections. En physique relativiste, le fibré considéré est le fibré tangent

$$\xi_\Omega = \left(T\Omega, \pi_\Omega, \Omega, \mathbb{R}^4\right)$$

en complexifiant ce fibré, on définit une structure de fibré hermitien sur

$$\xi_\Omega \otimes \mathbb{C}$$

lorsque Ω est muni d'une métrique riemannienne g, le produit hermitien est

$$\langle X + iY \mid X' + iY' \rangle = g(X, X') + ig(Y, X') - ig(X, Y') + g(Y, Y') \tag{7.3}$$

quelque soit les champs réels X,Y, X' et Y'. La connexion de Levi-Civita ∇_g complexifiée est définie par

$$\nabla = \nabla_g + i\nabla_g,$$

on va procéder de façon analogue sur le fibré ζ. On admet l'existence d'une connexion généralisée qui permet de définir un lien entre particule et événement. Dans la suite, on note $\nabla = \nabla_{E,\Omega}$, cette connexion généralisée. On rappelle qu'une connexion généralisée est la donnée d'une C^∞-application τ

$$\tau : p \in E(\zeta) \to \tau(p) \subset T_p(E(\zeta)),$$

et d'un isomorphisme $\phi(p)$ de $\tau(p)$ sur $T_p(\Omega)$ tels que ϕ est une C^∞-application. La variété $E(\zeta)$ est hilbertienne, on peut définir le fibré tangent

$$\xi_{E(\zeta)} = \left(TE(\zeta), \pi_{E(\zeta)}, E(\zeta), \mathbb{R}^4 \times \mathcal{H}\right).$$

Cette application ϕ est C^∞ dans le sens suivant, il existe une famille libre $\{X_\mu\}$ de 4 champs de $E(\zeta)$ définis sur un ouvert de trivialisation de $\xi_{E(\zeta)}$ telle que

$$\tau(p) = \mathrm{Vect}\{X_\mu(p)\}$$

et l'application ϕ est C^∞ si pour tout champ X de $E(\zeta)$

$$\phi \otimes X, \; \phi \otimes X(p) = \phi(p)(X(p))$$

est une C^∞-application comme application de variétés de Banach [5]. On peut, ainsi, définir un sous-fibré

$$\xi_\tau(E(\zeta)) = \left(\cup_{p \in E(\zeta)} \tau(p), \pi_{E(\zeta)} \mid_{\cup_{p \in E(\zeta)} \tau(p)}, E(\zeta), \mathbb{R}^4\right)$$

et l'isomorphisme de fibré ϕ,

$$\phi : \xi_\tau (E(\zeta)) \to \xi_\Omega.$$

Pour un approfondissement de ces notions, on peut consulter [6]. Comment définir la connexion ∇?. Le fibré ζ est muni d'un produit hermitien C^∞, c'est-à-dire, que pour toutes sections s et $t \in \Gamma^\infty(\zeta)$, l'application

$$\omega \in \Omega \to \langle s(\omega) \mid t(\omega) \rangle_\omega$$

est C^∞. On s'intéresse aux produits hermitiens qui sont parallèles aux connexions [2]. Le produit scalaire hermitien $\langle \bullet \mid \bullet \rangle$ est parallèle à la connexion ∇ si et seulement si pour tout champ X de Ω et pour toutes sections s et t de $\Gamma(\zeta)$

$$X.\langle s \mid t \rangle = \langle \nabla_X s \mid t \rangle + \langle s \mid \nabla_X t \rangle, \tag{7.4}$$

où $X.\langle s \mid t \rangle$ est la dérivée de Lie le long du champ X de la C^∞-application

$$\omega \to \langle s(\omega) \mid t(\omega) \rangle_\omega .$$

Toutes les connexions considérées sont des connexions parallèles au produit hermitien. En mécanique quantique, l'évolution d'un système est donnée par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \triangle \psi + V\psi, \tag{7.5}$$

où $\triangle$ est le Laplacien et en physique relativiste l'équation d'évolution est décrite par l'équation d'Einstein. Dans le cas quantique on est sur le fibré trivial

$$\xi = \left(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}, \pi, \mathbb{R}^4, \mathbb{C}\right)$$

et dans le cas relativiste on est sur le fibré des $(2,0)$-tenseurs. On veut définir à partir de la connexion ∇, une équation d'évolution equivalente à 7.5 et à l'équation relativiste d'Einstein. L'équation 7.5 est une relation qui lie la dérivée de l'onde par rapport au temps t à un opérateur $H + V$. Peut-on définir un procédé permettant d'écrire ces équations de façon intrinsèque pour des choix convenables de fibré?. Pour cela, on doit définir l'opérateur $H + V$, la courbure et la notion de dérivée d'une section par rapport à un champ de Ω. Les deux équations précédentes nous permettent de définir l'équation d'évolution des fibrés hermitiens. Pour la dérivée, l'opérateur ∇_T est un opérateur acceptable, reste à définir le champ local T et l'opérateur H pour lequel

$$Hs = \lambda \nabla_T s.$$

Pour l'opérateur H, l'équation relativiste, nous permet de construire cet opérateur comme suit. On se fixe une section de Dirac γ de E. L'univers Ω est muni d'une métrique de Lorentz g, dont la matrice dans le local frame $\{\partial_\mu, \mu = 0,1,2,3\}$ est $(g_{\mu\nu})$ et $(g^{\mu\nu})$ est sa matrice inverse, on fait l'hypothèse

$$(\gamma^{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}),$$

Cette métrique peut être définie par la matrice de Poisson $(\gamma^{\mu\nu})^{-1}$, en faisant l'hypothèse que localement $(\gamma^{\mu\nu})$ est inversible et que $(\gamma_{\mu\nu}) = (\gamma^{\mu\nu})^{-1}$ est la matrice d'une métrique de Lorentz g_γ sur l'ouvert U, afin de pouvoir définir la notion de champ chronologique local T et d'équation d'évolution le long de ce champ. Ensuite, on définit la section H de $\operatorname{End}\Gamma(\zeta)$ par

$$H_2(s)(\omega) = \gamma_2(\omega)\left(R^\nabla s(\omega)\right)$$

notée

$$H_2 = \gamma_2 \otimes R^{\nabla}$$

où R^{∇} est la courbure de la connexion ∇ et γ_2 est l'extension de rang 2 de la section de Dirac γ. L'équation d'état est donnée par

$$H_2(s) = \lambda s,$$

où λ est une fonction propre C^{∞} définie sur une carte U de Ω et H est l'opérateur qui correspond à l'Hamiltonien défini dans l'équation de Schrödinger. L'équation d'évolution d'une section locale s définie sur U, le long d'un champ chronologique T, non nécessairement stable, d'un système soumis à aucune observation est

$$Hs = i\lambda \nabla_T s, \tag{7.6}$$

si le fibré est complexe ou

$$Hs = \lambda \nabla_T s, \tag{7.7}$$

si le fibré est réel. Le fibré

$$\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$$

est un fibré vectoriel réel ou complexe, de fibre $\mathcal{H}$, dont la base est l'univers Ω qui est une C^{∞}-variété de dimension 4, il est muni d'une connexion

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma\left(\Lambda^1 \Omega \otimes E\right),$$

que l'on peut noter

$$\nabla : \Gamma^{\infty}(\xi_{\Omega}) \times \Gamma^{\infty}(\zeta) \to \Gamma^{\infty}(\zeta), \ \nabla(X, s) = \nabla_X s,$$

où

$$\xi_{\Omega} = (T\Omega, \pi, \Omega)$$

est le fibré tangent sur Ω. On utilisera l'une ou l'autre des présentations, on peut consulter [6] pour la comparaison entre ces deux définitions. On rappelle que, si on pose $\triangle_j^k$ l'opérateur

$$\triangle_j^k = \left(\gamma_j^{\nu\sigma}\gamma_{\sigma}^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma}\gamma_{\sigma}^{\nu k}\right)\partial_{\mu}\partial_{\nu},$$

et

$$\Upsilon_{\alpha}^k = \left(\gamma_j^{\nu\sigma}\gamma_{\sigma}^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma}\gamma_{\sigma}^{\nu k}\right)\left(\partial_{\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^j - \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta}\Gamma_{\beta\nu}^j\right)$$

alors

$$\gamma_2 \otimes R^{\nabla}(s^{\alpha}e_{\alpha}) = \left(\triangle_{\tau}^k + \Upsilon_{\tau}^k\right)s^{\tau}e_k.$$

Pour un champ chronologique $T = t^{\rho}\partial_{\rho}$, les équations 7.6 et 7.7 s'écrivent localement, on obtient le système d'équations

$$\left(\triangle_{\tau}^k + \Upsilon_{\tau}^k\right)s^{\tau} = \chi\left(t^{\rho}\partial_{\rho}s^k + t^{\rho}s^{\alpha}\Gamma_{\rho\alpha}^k\right). \tag{7.8}$$

Remark 49. *Si la connexion est plate, l'équation d'évolution se ramène à l'équation triviale,ce système d'équations est*

$$t^{\rho}\partial_{\rho}s^{\tau} = 0, \ \forall \tau.$$

Dans l'écriture standard, on pose

$$\nabla e_{\alpha} = \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} d^{\nu} \otimes e_{\beta}$$

à la place de

$$\nabla e_{\alpha} = \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} d^{\nu} \otimes e_{\beta},$$

cette présentation est algébriquement plus appropriée.

7.2. **La connexion de Dirac.** L'équation d'évolution n'est pas une équation de Dirac-Einstein de rang 2 car l'équation développée de Dirac

$$\begin{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial t}-m & 0 & i\frac{\partial}{\partial z} & i\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & i\frac{\partial}{\partial t}-m & i\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y} & i\frac{\partial}{\partial z} \\ i\frac{\partial}{\partial z} & i\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y} & -i\frac{\partial}{\partial t}-m & 0 \\ i\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y} & i\frac{\partial}{\partial z} & 0 & -i\frac{\partial}{\partial t}-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.9}$$

où ψ est une section du fibré

$$\xi_D = \left(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^4, \pi, \mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4\right),$$

ne fait apparaître que des opérateurs de rang 1. Pour répondre à la question, on passe sur une équation d'état de rang 1, d'opérateur

$$H = \gamma \otimes \nabla.$$

Pour cet opérateur, il n'existe pas d'équation d'évolution, à l'exception des particules de masse nulle. Seule l'équation des états de rang 1, d'opérateur H peuvent décrire l'équation 7.9. On se restreint donc, à l'image d'une carte, où plus précisément à $\mathbb{R}^4$ et par un recouvrement localement fini, on définit la connexion sur Ω. Dans $\mathbb{R}^4$, soit

$$\left\{\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

les champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^4$ linéairement indépendants associés et

$$\{d^\nu, \nu = 0, 1, 2, 3\},$$

la base duale. L'équation de Dirac-Einstein au rang 1 est

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma}\left(\partial_\nu \psi^\beta + \psi^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta\right) = -i\lambda\psi^\sigma \text{ pour tout } \sigma = 0, 1, 2, 3. \tag{7.10}$$

Les matrices de Dirac γ^μ, $0 \leqslant \mu \leqslant 3$, sont des matrices carrées d'ordre 4 dont les coefficients sont des applications C^∞ sur $\mathbb{R}^4$, à valeurs complexes. On note

$$(D_\nu \psi)^\beta = \partial_\nu \psi^\beta + \psi^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta,$$

D_ν est la section locale de $\mathrm{End}\,(E)$ définie par, $D_\nu = \mathrm{L}_\nu + \Gamma_\nu$, où Γ_ν est la section locale de $\mathrm{End}\,(E)$ dont la matrice, dans le *"local frame"*, est $(\Gamma_\nu)_\alpha^\beta = \Gamma_{\alpha\nu}^\beta$ et L_ν est l'endomorphisme de Lie le long du champ $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ défini par,

$$\mathrm{L}_\nu\, \psi = \left(\partial_\nu \psi^0, \partial_\nu \psi^1, \partial_\nu \psi^2, \partial_\nu \psi^3\right), \ \psi = \left(\psi^0, \psi^1, \psi^2, \psi^3\right)$$

alors

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma}\,(D_\nu \psi)^\beta = -i\lambda\psi^\sigma,$$

l'équation précédente s'écrit

$$\gamma^\nu D_\nu\,(\psi) = -i\lambda\psi.$$

Utilisons l'équation 7.10 et comparons à 7.9,

$$\gamma_\beta^{\nu k}\left(\partial_\nu \psi^\beta + \psi^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta\right) + i\lambda\psi^k = 0, \ k = 0, 1, 2, 3$$

$$\gamma_\beta^{\nu k}\partial_\nu \psi^\beta + \psi^\alpha \gamma_\beta^{\nu k}\Gamma_{\alpha\nu}^\beta + i\lambda\psi^k = 0$$

$$\left(\gamma_j^{\nu k}\partial_\nu + \gamma_\beta^{\nu k}\Gamma_{j\nu}^\beta\right)\psi^j + i\lambda\psi^k = 0$$

si on prend pour $(\gamma^{\nu})_j^k = \gamma_j^{\nu k}$, on retombe sur l'équation 7.9 pour des coefficients de Christoffel $\Gamma_{j\nu}^{\beta}$ qui sont calculables comme suit. La matrice associée s'écrit

$$\begin{pmatrix} i\gamma_0^{\nu 0}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 0}\Gamma_{0\nu}^{\beta} - \lambda & i\gamma_1^{\nu 0}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 0}\Gamma_{11}^{\beta} & i\gamma_2^{\nu 0}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 0}\Gamma_{2\nu}^{\beta} & i\gamma_3^{\nu 0}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 0}\Gamma_{3\nu}^{\beta} \\ i\gamma_0^{\nu 1}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 1}\Gamma_{0\nu}^{\beta} & i\gamma_1^{\nu 1}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 1}\Gamma_{1\nu}^{\beta} - \lambda & i\gamma_2^{\nu 1}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 1}\Gamma_{2\nu}^{\beta} & i\gamma_3^{\nu 1}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 1}\Gamma_{3\nu}^{\beta} \\ i\gamma_0^{\nu 2}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 2}\Gamma_{0\nu}^{\beta} & i\gamma_1^{\nu 2}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 2}\Gamma_{1\nu}^{\beta} & i\gamma_2^{\nu 2}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 2}\Gamma_{2\nu}^{\beta} - \lambda & i\gamma_3^{\nu 2}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 2}\Gamma_{3\nu}^{\beta} \\ i\gamma_0^{\nu 3}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 3}\Gamma_{0\nu}^{\beta} & i\gamma_1^{\nu 3}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 3}\Gamma_{1\nu}^{\beta} & i\gamma_2^{\nu 3}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 3}\Gamma_{2\nu}^{\beta} & i\gamma_3^{\nu 3}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 3}\Gamma_{3\nu}^{\beta} - \lambda \end{pmatrix},$$

on en déduit que $\lambda = m$, et que les matrices γ^{ν} définies par $(\gamma^{\nu})_{\beta}^{\alpha} = \gamma_{\beta}^{\nu\alpha}$ sont les matrices de Dirac. On a

$$\begin{pmatrix} i\partial_0 + i\Gamma_{00}^0 - m & 0 & i\partial_3 - i\Gamma_{23}^2 & i\partial_1 + \partial_2 - i\Gamma_{31}^3 + \Gamma_{32}^3 \\ 0 & i\partial_0 + i\Gamma_{10}^1 - m & i\partial_1 - \partial_2 + i\Gamma_{21}^2 - \Gamma_{22}^2 & -i\partial_3 - i\Gamma_{33}^3 \\ -i\partial_3 - i\Gamma_{03}^0 & -i\partial_1 - \partial_2 - i\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^1 & -i\partial_0 - i\Gamma_{20}^2 - m & 0 \\ -i\partial_1 + \partial_2 - i\Gamma_{01}^0 - \Gamma_{02}^0 & i\partial_3 + \Gamma_{13}^1 & 0 & -i\partial_0 - i\Gamma_{30}^3 - m \end{pmatrix},$$

les relations sur les coefficients de Christoffel de la connexion de Dirac sont

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{03}^0 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{30}^3 = 0 \tag{7.11}$$

et

$$\Gamma_{32}^3 = i\Gamma_{31}^3, \Gamma_{22}^2 = i\Gamma_{21}^2, \Gamma_{12}^1 = -i\Gamma_{11}^1, \Gamma_{02}^0 = -i\Gamma_{01}^0. \tag{7.12}$$

Theorem 31. *Les symboles de Christoffel de la connexion de Dirac sur* $\mathbb{R}^4$ *vérifient*

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{03}^0 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{30}^3 = 0,$$
$$\Gamma_{32}^3 = i\Gamma_{31}^3, \Gamma_{22}^2 = i\Gamma_{21}^2, \Gamma_{12}^1 = -i\Gamma_{11}^1, \Gamma_{02}^0 = -i\Gamma_{01}^0,$$
$$\Gamma_{\mu\nu}^{\tau} = \Gamma_{\nu\mu}^{\tau}.$$

On peut construire une connexion de Dirac sur l'univers Ω, en prenant un recouvrement localement fini et une partition de l'unité $\left\{\lambda^U\right\}$ subordonnée à ce recouvrement. Si ∇_U est une connexion de Dirac induite par la carte alors

$$\nabla = \lambda^U \nabla_U$$

est une connexion définie sur l'univers Ω. Cette connexion est définie sur le fibré tangent de l'univers Ω.

Remark 50. *La connexion de Dirac est indépendante du choix de la particule de masse m, c'est donc, une connexion intrinsèque sur les champs complexes. Les équations 7.11 et 7.12 permettent de définir un grand nombre de choix possibles pour la connexion de Dirac.*

7.3. **L'équation relativiste d'Einstein.** En utilisant les équations 1.6, 1.7 et 1.8, aux $(2,0)$-tenseurs, l'équation d'évolution au rang 2 s'écrit

$$\triangle_{j_1 j_2}^{k_1 k_2} g_{k_1 k_2} + \left(\Upsilon_{j_1 j_2}^{k_1 k_2} + t^{\rho}\Gamma_{\rho j_1 j_2}^{k_1 k_2}\right) g_{k_1 k_2} = \lambda t^{\rho}\partial_{\rho} g_{j_1 j_2}, \forall (j_1, j_2)$$

où

$$\triangle_{j_1 j_2}^{k_1 k_2} = \left(\gamma_{j_1 j_2}^{\nu\sigma_1\sigma_2}\gamma_{\sigma_1\sigma_2}^{\mu k_1 k_2} - \gamma_{j_1 j_2}^{\mu\sigma_1\sigma_2}\gamma_{\sigma_1\sigma_2}^{\nu k_1 k_2}\right)\partial_\mu\partial_\nu,$$

et

$$\Upsilon_{\alpha_1\alpha_2}^{k_1 k_2} = \left(\gamma_{j_1 j_2}^{\nu\sigma_1\sigma_2}\gamma_{\sigma}^{\mu k_1 k_2} - \gamma_{j_1 j_2}^{\mu\sigma_1\sigma_2}\gamma_{\sigma_1\sigma_2}^{\nu k_1 k_2}\right)\left(\partial_\mu\Gamma_{\alpha_1\alpha_2\nu}^{j_1 j_2} - \Gamma_{\alpha_1\alpha_2\mu}^{\beta_1\beta_2}\Gamma_{\beta_1\beta_2\nu}^{j_1 j_2}\right) g_{k_1 k_2},$$

λ est une fonction propre de l'opérateur H_2 défini par

$$H_2\left(g_{j_1j_2}d^{j_1}\otimes d^{j_2}\right)=\left(\triangle_{j_1j_2}^{k_1k_2}+\Upsilon_{j_1j_2}^{k_1k_2}\right)g_{k_1k_2}d^{j_1}\otimes d^{j_2},$$

on en déduit,

Remark 51. *L'équation relativiste d'Einstein n'est pas de même nature que les équations d'évolution de rang* 1 *et* 2.

L'équation de Dirac permet de définir la connexion et l'équation d'Einstein permet de définir la section de Dirac associée à cette connexion afin de décrire les équations d'état et d'évolution. Dans le cas des champs, si on prend une section relativiste

$$\gamma\in\Gamma\left(\mathrm{Hom}\left(\wedge^1\Omega\otimes T\Omega,T\Omega\right)\right)$$

alors la métrique g_γ permet de définir sa connexion de Levi-Civita ∇_γ, l'équation d'état de Dirac est définie par

$$\gamma\otimes\nabla_\gamma(X)=\lambda X,\ X\in\Gamma^\infty(\Omega) \tag{7.13}$$

où λ est une fonction propre de $\gamma\otimes\nabla_\gamma$ associée à l'opérateur $\gamma\otimes\nabla_\gamma$.

Remark 52. *Existe-t-il une section de Dirac γ pour laquelle l'équation relativiste est vérifiée?*

On se place sur une carte de trivialisation du fibré tangent, pour le *"local frame"* associé et le *"local frame"* dual, noté $\{\partial_\mu\}$ et $\{d^\nu\}$

$$\gamma^\nu(\partial_\mu)=\gamma(d^\nu\otimes\partial_\mu)=\gamma_\beta^{\nu\sigma}\partial_\sigma,$$

la matrice dans le *"local frame"* est encore noté γ^ν avec $(\gamma^\nu)_\beta^\sigma=\gamma_\beta^{\nu\sigma}$. Le tenseur de Poisson s'écrit

$$\gamma^{\mu\nu}=\frac{1}{4}\mathrm{Trace}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right)=\frac{1}{4}\gamma_\beta^{\mu\sigma}\gamma_\sigma^{\nu\beta},$$

si la matrice $(\gamma^{\mu\nu})$ est inversible, on la note $(\gamma_{\mu\nu})$, alors

$$\gamma_{\mu\nu}=\frac{1}{4}\gamma_{\mu i}\gamma_{\nu j}\gamma_\beta^{j\sigma}\gamma_\sigma^{i\beta}=\frac{1}{4}\gamma_{\mu\sigma}^\beta\gamma_{\nu\beta}^\sigma=\frac{1}{4}\mathrm{Trace}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\right),$$

avec $\gamma_{\alpha\beta}^\sigma=\gamma_{\alpha\tau}\gamma_\beta^{\tau\sigma}$. L'équation d'Einstein

$$R_{\mu\nu}-\left(\frac{1}{2}R+\Lambda\right)\gamma_{\mu\nu}-\kappa T_{\mu\nu}=0$$

s'écrit, en posant

$$R_{\mu\nu\beta}^\alpha=\left([\nabla_\beta,\nabla_\nu]\right)_\mu^\alpha$$

$$\left([\nabla_\alpha,\nabla_\nu]\right)_\mu^\alpha+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}R+\Lambda\right)(\gamma_\mu)_\tau^\alpha(\gamma_\nu)_\alpha^\tau+\kappa T_{\mu\nu}=0,\ \kappa=\frac{8\pi G}{c^4} \tag{7.14}$$

ces équations lient la connexion ∇ de la métrique $\gamma_{\mu\nu}$ aux coefficients de γ. On définit les matrices $\mathcal{R}_{\nu\tau}$ et $\mathcal{T}_{\ \nu\tau}$ par

$$(\mathcal{R}_{\nu\tau})_\alpha^\beta=R_{\nu\alpha\tau}^\beta\ \text{ et }\ (\mathcal{T}_{\nu\tau})_\alpha^\beta=T_{\nu\alpha\tau}^\beta,$$

où $T_{\nu\alpha\tau}^\beta$ est un tenseur de type $(3,1)$ tel que le contracté est le tenseur d'énergie-impulsion

$$T_{\nu\alpha\tau}^\alpha=T_{\nu\tau} \tag{7.15}$$

alors l'équation 7.14 s'écrit

$$\text{Trace}\left(\mathcal{R}_{\nu\tau}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}R+\Lambda\right)\gamma_\nu\gamma_\tau-\kappa\mathcal{T}_{\nu\tau}\right)=0, \tag{7.16}$$

pour toute matrice $\mathcal{T}_{\nu\tau}$ de trace égale au tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. On a la propriété suivante,

Proposition 19. *La trace de la matrice*

$$\mathcal{R}_{\nu\tau}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}R+\Lambda\right)\gamma_\nu\gamma_\tau-\kappa\mathcal{T}_{\nu\tau}$$

est nulle, où

$$(\mathcal{R}_{\nu\tau})^\beta_\alpha=R^\beta_{\nu\alpha\tau}\ \textit{et}\ (\mathcal{T}_{\nu\tau})^\beta_\alpha=T^\beta_{\nu\alpha\tau}\ \textit{avec}\ (\mathcal{T}_{\nu\tau})^\alpha_\alpha=T_{\nu\tau}.$$

Remark 53. *Si on change la matrice $\mathcal{T}_{\nu\tau}$ en gardant sa trace égale à $T_{\nu\tau}$, l'équation 7.16 reste vraie.*

7.4. **Le principe de moindre action sur les fibrés d'états.** Dans le chapitre précédent on a remarqué que la nature de l'équation relativiste d'Einstein ne pouvait être déduite des équations d'état et d'évolution. On est amené à définir la notion de moindre action sur un fibré d'état réel ou complexe

$$\zeta=(E,\pi,\Omega,\mathcal{H})$$

où ζ est muni d'un produit scalaire hermitien sur chaque fibre $E_\omega(\zeta)$, noté

$$\langle\bullet\mid\bullet\rangle_\omega$$

tel que pour toutes sections s et t de $\Gamma(\zeta)$ formé des sections telle que l'application

$$\omega\in\Omega\to\langle s(\omega)\mid t(\omega)\rangle_\omega$$

est mesurable comme application de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note

$$\mathcal{L}^2(\zeta,\mu)=\left\{s\in\Gamma(\zeta):\int_\Omega\langle s(\omega)\mid s(\omega)\rangle_\omega\,\mu(\omega)<\infty\right\}$$

et si $\mathcal{O}$ est le sous-espace vectoriel formé par les sections nulles μ presque partout, l'espace $L^2(\zeta,\mu)$ est

$$L^2(\zeta,\mu)=\frac{\mathcal{L}^2(\zeta,\mu)}{\mathcal{O}}.$$

Proposition 20. *$L^2(\zeta,\mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit hermitien*

$$\langle s\mid t\rangle=\int_\Omega\langle s(\omega)\mid t(\omega)\rangle\,\mu(\omega).$$

On introduit l'espace vectoriel des sections test, défini par

$$\mathcal{D}(\zeta)=\{s\in\Gamma(\zeta):\text{supp}(s)\ \text{ est compact}\},$$

avec

$$\text{supp}(s)=\text{Adh}\{\omega:s(\omega)\neq o_\omega\}.$$

On rappelle qu'une distribution D est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\zeta)$. L'ensemble des distributions sur ζ est noté $\mathcal{D}'(\zeta)$. Pour une section $s\in\Gamma(\zeta)$, localement intégrable, c'est-à-dire, une section s telle que pour tout compact K de Ω

$$\int_K\langle s(\omega\mid s(\omega))\rangle\,\mu(\omega)<+\infty,$$

la distribution associée à la section s est,

$$D_s(t) = \langle D_s, t\rangle = \int_\Omega \langle s \mid t\rangle \mu. \tag{7.17}$$

Proposition 21. *$D_s = o$ si et seulement si $s = o$ μ-presque partout.*

On a une inclusion naturelle de $\frac{\Gamma_{\text{loc}}(\zeta)}{\mathcal{O}}$ dans $\mathcal{D}'(\zeta)$ où $\Gamma_{\text{loc}}(\zeta)$ est l'ensemble des sections localement intégrables. On a

$$L^2(\zeta, \mu) \subset \frac{\Gamma_{\text{loc}}(\zeta)}{\mathcal{O}},$$

et un plongement naturel de $L^2(\zeta, \mu)$ dans $\mathcal{D}'(\zeta)$. On identifiera $L^2(\zeta, \mu)$ et son image dans $\mathcal{D}'(\zeta)$.

Remark 54. *Si 7.17 est vérifiée, on dit que la distribution est régulière et on identifie D_s à s. Dans cette situation, on note $\langle D_s, t\rangle = \langle s \mid t\rangle_\Omega$ et on a $D_{\lambda s} = \overline{\lambda} D_s$, $\lambda \in \mathbb{C}$.*

On rappelle que pour toutes les connexions choisies, le produit scalaire hermitien $\langle \bullet \mid \bullet\rangle$ est parallèle à la connexion ∇, c'est-à-dire, que pour tout champ X de Ω et pour toutes sections s et t de $\Gamma^\infty(\zeta)$

$$X.\langle s \mid t\rangle = \langle \nabla_X s \mid t\rangle + \langle s \mid \nabla_X t\rangle,$$

où $X.\langle s \mid t\rangle$ est la dérivée de Lie le long du champ X de la C^∞-application

$$\omega \to \langle s(\omega) \mid t(\omega)\rangle_\omega.$$

Theorem 32. *Si le produit scalaire $\langle \bullet \mid \bullet\rangle$ est parallèle à la connexion ∇ alors*

$$\langle \nabla_X s, t\rangle = -\langle s \mid \operatorname{div}(X)\, t + \nabla_X t\rangle_\mu,$$

pour toute section test t et toute section $s \in \Gamma^\infty(\zeta)$.

Proof. Il suffit de vérifier que dans les hypothèses du théorème

$$I = \int_\Omega L_X(f)\,\mu = -\int_\Omega f \operatorname{div}(X)\,\mu$$

pour toute C^∞-fonction f à support compact avec $L_X(f)$ est la dérivée de Lie le long du champ X de f. On peut se ramener à une carte en utilisant une partition de l'unité associé à un recouvrement de cartes U. Dans le local frame $\{\partial_\nu\}$ associé à la carte U, de dual $\{d^\nu\}$ la forme volume μ s'écrit

$$\mu = \theta d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \wedge d^4$$

avec θ fonction de classe C^∞, non nulle, sur U. On a, si $X = X^\nu \partial_\nu$

$$I = \int_U X^\nu (\partial_\nu f)\,\theta d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \wedge d^4$$

et

$$I = \int_U \partial_\nu (X^\nu f\theta)\, d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \wedge d^4 - \int_U f\partial_\nu (X^\nu \theta)\, d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \wedge d^4.$$

La fonction f est à support compact dans U, donc

$$\int_U \partial_\nu (X^\nu f\theta)\, d^1 \wedge d^2 \wedge d^3 \wedge d^4 = 0.$$

Ensuite on écrit

$$\begin{aligned}
&\int_U f\partial_\nu\left(X^\nu\theta\right)d^1\wedge d^2\wedge d^3\wedge d^4\\
&=\int_U f\left(\theta\partial_\nu X^\nu+d\theta\left(X\right)\right)d^1\wedge d^2\wedge d^3\wedge d^4\\
&=\int_U f\left(\partial_\nu X^\nu+\frac{d\theta\left(X\right)}{\theta}\right)\mu
\end{aligned}$$

On en déduit $I=-\int_U f\operatorname{div}\left(X\right)\mu$ car $\operatorname{div}\left(X\right)=\partial_\nu X^\nu+\frac{d\theta(X)}{\theta}$ dans le local frame $\{\partial_\nu\}$. □

Ce théorème permet d'étendre la notion de dérivée covariante d'une section s localement intégrable quelconque, au sens des distributions le long du champ X, notée encore $\nabla_X s$ par

$$\nabla_X s=\nabla_X D_s,$$

où $\nabla_X s\in\mathcal{D}'\left(\zeta\right)$. On se donne une famille de champs de Ω

$$\mathcal{F}=\left\{\partial_j\right\}_{j\in\{1,\cdots,q\}},$$

et pour tout k-uplets tels que

$$\alpha=\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_k\right)\in\mathbb{N}^k \text{ et } \nu=\left(\nu_1,\cdots,\nu_k\right) \text{ avec } \nu_j\neq\nu_{j+1} \text{ et } \nu_j\in\{1,\cdots,q\}$$

on définit les opérateurs

$$\nabla_\nu^\alpha=\nabla_{\nu_1}^{\alpha_1}\circ\cdots\circ\nabla_{\nu_k}^{\alpha_k} \text{ où } \nabla_j^\alpha=\nabla_{\partial_j}\circ\cdots\circ\nabla_{\partial_j},$$

la composition se fait sur α opérateurs égaux à ∇_{∂_j}, avec $\nabla_\nu^0=Id$ et les dérivées covariantes sont prises au sens des distributions. L'espace de Sobolev $W_{\mathcal{F}}^{m,2}\left(\zeta\right)$ est le complété de

$$\left\{s\in L^2\left(\zeta,\mu\right):\nabla_\nu^\alpha s\in L^2\left(\zeta,\mu\right),\ |\alpha|\leqslant m\ \right\}$$

pour la norme

$$\|s\|_{\mathcal{F}}^{m,2}=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|\nabla_\nu^\alpha s\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

On définit une densité Lagrangienne de rang $n\geqslant 1$ par une application au moins de classe C^n

$$\mathcal{L}:L^2\left(\zeta,\mu\right)^n\to\mathbb{R},$$

si $n=\infty$ on pose

$$L^2\left(\zeta,\mu\right)^{(\infty)}=\left\{\left(s_0,\cdots,s_n,\cdots\right)\in L^2\left(\zeta,\mu\right)^\infty:\sum_{n=0}^\infty\|s_n\|_2^2<\infty\right\}.$$

On munit ζ d'une connexion ∇ pour laquelle le produit hermitien est parallèle à cette connexion, l'action le long du champ T est l'application

$$\mathcal{S}_T:W_{\{T\}}^{n,2}\left(\zeta\right)\to\mathbb{R}$$

avec

$$\mathcal{S}_T\left(s\right)=\int_\Omega\mathcal{L}\left(\nabla_n^T s\left(\omega\right)\right)\mu\left(\omega\right), \tag{7.18}$$

et

$$\nabla^T s=\left(\nabla_T^0 s,\nabla_T s,\nabla_T^2 s,\cdots,\nabla_T^{n-1}s\right)$$

la dérivée covariante $\nabla_T s$ est définie au sens des distributions pour une section $s \in W^{n,2}_{\{T\}}(\zeta)$ et $\nabla^0_T s = s$.

L'action est un opérateur sur l'espace vectoriel des sections de ζ, on note dom $(\mathcal{S}_T)$ son domaine de définition qui est formé des sections s telles que l'intégrale 7.18 est convergente. L'action de rang n est donnée par une densité

$$\mathcal{L} : L^2(\zeta, \mu)^n \to \mathbb{R},$$

et

$$\mathcal{S}_T(s) = \int_\Omega \mathcal{L}\left(\nabla^T_n s(\omega)\right) \mu(\omega),$$

avec

$$\nabla^T_n s = \left(\nabla^0_T s, \nabla^1_T s, \nabla^2_T s, \cdots, \nabla^{n-1}_T s\right) \in L^2(\zeta, \mu)^n.$$

On peut définir l'action le long d'une famille $\mathcal{F}$ de champs T_ν, en prenant pour action

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}}(s) = \int_\Omega \mathcal{L}\left(\nabla^{\mathcal{F}} s(\omega)\right) \mu(\omega)$$

avec

$$\nabla^{\mathcal{F}} s = \left(\nabla^0_{\mathcal{F}} s, \nabla^{n_1}_{\mathcal{F}} s, \nabla^{n_2}_{\mathcal{F}} s, \cdots, \nabla^{n_k - 1}_{\mathcal{F}} s\right) \in L^2(\zeta, \mu)^k,$$

$\{n_j\}$ est une suite croissante d'entiers telle que $n_0 = 0$ et les $\nabla^n_{\mathcal{F}}$ décrivent des opérateurs de la forme

$$\nabla^{p_1}_{T_{\nu_1}} \circ \cdots \circ \nabla^{p_k}_{T_{\nu_k}},\ n = p_1 + \cdots + p_k$$

avec $s = \nabla^0_{\mathcal{F}} s$.

Comment décrire l'équation de Euler-Lagrange? On cherche l'opérateur $\mathcal{L}$ qui minimise l'action sur $W^{n,2}_{\{T\}}(\zeta)$ muni du produit

$$\langle s \mid t \rangle = \int_\Omega \langle s(\omega) \mid t(\omega) \rangle_\omega \mu(\omega).$$

Les espaces

$$L^2(\zeta, \mu)^{(\infty)} \text{ et } L^2(\zeta, \mu)^n$$

sont des variétés de Banach, et pour ces structures $\mathcal{L}$ est de classe C^∞. On choisit une carte

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to U \subset \Omega$$

pour laquelle le *"local frame"*, noté $\{\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ vérifie

$$T = \partial_0 = T\varphi^{-1}\left(\frac{d}{dt}\right),$$

le théorème de redressement d'un champ donne l'existence d'une telle carte. Si ζ est de dimension finie, on peut supposer que sur U, il existe une base de sections $\{s_{0,} \cdots, s_m\}$ de

$$L^2_K(\zeta, \mu) = \left\{s \in L^2(\zeta, \mu) : \operatorname{supp}(s) \subset K \subset U\right\}$$

où K est un compacte de Ω contenu dans U. On a pour des sections

$$s \in L^2_K(\zeta, \mu) \cap W^{n,2}_{\{T\}}(\zeta) \text{ avec } s = s^\mu e_\mu$$

en utilisant le théorème du redressement d'un champ T,

$$\nabla_T s = \nabla_0 s = (\partial_0 s^\mu) e_\mu + s^\mu \Gamma^\nu_{0\mu} e_\nu = \left(\partial_0 s^\nu + s^\mu \Gamma^\nu_{0\mu}\right) e_\nu$$

$$\begin{aligned}\nabla_0^2 s &= \partial_0\left(\partial_0 s^\nu + s^\mu \Gamma_{0\mu}^\nu\right) e_\nu + \left(\partial_0 s^\nu + s^\mu \Gamma_{0\mu}^\nu\right)\Gamma_{0\nu}^\tau e_\tau \\ &= \left(\partial_0\left(\partial_0 s^\tau + s^\mu \Gamma_{0\mu}^\tau\right) + \left(\partial_0 s^\nu + s^\mu \Gamma_{0\mu}^\nu\right)\Gamma_{0\nu}^\tau\right) e_\tau,\end{aligned}$$

$\Gamma_{0\nu}^\tau$ représente les coefficients de Christoffel de la connexion ∇ donnée sur le fibré ζ. On pose,

$$\nabla_0^k s = \mathbf{S}^{k\nu}\left(s^0, \cdots, s^m\right) e_\nu$$

on obtient la récurrence

$$\mathbf{S}^{(k+1)\nu}\left(s^0, \cdots, s^m\right) = \partial_0 \mathbf{S}^{k\nu}\left(s^0, \cdots, s^m\right) + \mathbf{S}^{k\mu}\left(s^0, \cdots, s^m\right)\Gamma_{0\mu}^\nu$$

et

$$\begin{aligned}&\mathcal{K}\left(s^0, \cdots, s^m\right) \\ &= \mathcal{L}\left(\mathbf{S}^{0\nu}\left(s^0, \cdots, s^m\right) e_\nu, \mathbf{S}^{1\nu}\left(s^0, \cdots, s^m\right) e_\nu, \cdots, \mathbf{S}^{(n-1)\nu}\left(s^0, \cdots, s^m\right) e_\nu\right)\end{aligned}$$

$\mathcal{K}$ est une fonction définie sur $V \subset \mathbb{R}^{\dim(\zeta)}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$,

$$V = \left(s^0, \cdots, s^m\right)^{-1}(U).$$

On cherche les densités de Lagrange $\mathcal{L}$ pour lesquelles la matrice Hessienne de $\mathcal{K}$, notée $\operatorname{Hess}\mathcal{K}$, est définie positive sur V. On peut se ramener à une base locale, notée encore $\{e_\nu\}$ pour laquelle

$$\frac{\partial^2 \mathcal{K}\left(s^0, \cdots, s^m\right)}{\partial s^i \partial s^j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ \lambda_i^2 \text{ si } i = j \end{cases},$$

où λ_i est une C^∞-application sur U, non nulle. On en déduit que, si on pose

$$\mathbf{S}^\alpha = \mathbf{S}^{\alpha\nu}\left(s^0, \cdots, s^m\right) e_\nu$$

on a

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \mathcal{L}\left(\mathbf{S}^0, \mathbf{S}^1, \cdots, \mathbf{S}^{n-1}\right)}{\partial s^i \partial s^j} \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \mathcal{L}\left(\mathbf{S}^0, \mathbf{S}^1, \cdots, \mathbf{S}^{n-1}\right)}{\partial \mathbf{S}^\beta \partial \mathbf{S}^\alpha} \frac{\partial \mathbf{S}^\beta}{\partial s^i} \frac{\partial \mathbf{S}^\alpha}{\partial s^j} + \sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}\left(\mathbf{S}^0, \mathbf{S}^1, \cdots, \mathbf{S}^{n-1}\right)}{\partial \mathbf{S}^\alpha} \frac{\partial^2 \mathbf{S}^\alpha}{\partial s^i \partial s^j},\end{aligned}$$

et

Theorem 33. *Il existe une base locale $\{e_\nu\}$ et une famille de C^∞-applications $\{\lambda_\nu\}$, non nulles sur U, pour lesquelles la densité Lagrangienne $\mathcal{L}$ vérifie le principe de moindre action si*

$$\mathbf{S}^\alpha = \mathbf{S}^{\alpha\nu}\left(s^0, \cdots, s^m\right) e_\nu$$

alors

$$\mathbf{S}^{(k+1)\nu}\left(s^0, \cdots, s^m\right) = \partial_0 \mathbf{S}^{k\nu}\left(s^0, \cdots, s^m\right) + \mathbf{S}^{k\mu}\left(s^0, \cdots, s^m\right)\Gamma_{0\mu}^\nu,$$

$\Gamma_{0\mu}^\nu$ sont les coefficients de Christoffel de la connexion ∇ dans la base $\{e_\nu\}$ et

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \mathcal{L}\left(\mathbf{S}^0, \mathbf{S}^1, \cdots, \mathbf{S}^{n-1}\right)}{\partial \mathbf{S}^\beta \partial \mathbf{S}^\alpha} \frac{\partial \mathbf{S}^\beta}{\partial s^i} \frac{\partial \mathbf{S}^\alpha}{\partial s^j} + \sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}\left(\mathbf{S}^0, \mathbf{S}^1, \cdots, \mathbf{S}^{n-1}\right)}{\partial \mathbf{S}^\alpha} \frac{\partial^2 \mathbf{S}^\alpha}{\partial s^i \partial s^j} = \lambda_i \lambda_j \delta_{ij}. \tag{7.19}$$

Remark 55.

$$\mathbf{S}^{\alpha+1} = \partial_0 \mathbf{S}^{\alpha} + \Gamma_0 \left(\mathbf{S}^{\alpha}\right), \ \Gamma_0 \left(\mathbf{S}^{\alpha}\right) = \mathbf{S}^{\alpha\mu} \left(s^0, \cdots, s^m\right) \Gamma^{\nu}_{0\mu} e_{\nu}$$

$$\Gamma_0 \left(\mathbf{S}^{\alpha}\right) = \Gamma^{\nu}_0 \left(\mathbf{S}^{\alpha}\right) e_{\nu}$$

où Γ^{ν}_0 *est la forme différentielle*

$$\Gamma^{\nu}_0 = \Gamma^{\nu}_{0\mu} d^{\mu},$$

pour $\mathbf{S}^0 = \mathbf{S}$ *alors*

$$\mathbf{S}^1 = \partial_0 \mathbf{S} + \Gamma_0 \left(\mathbf{S}\right)$$

et

$$\mathbf{S}^2 = \partial_0^2 \mathbf{S} + \left\{\partial_0, \Gamma_0\right\} \mathbf{S} + \Gamma_0^2 \mathbf{S}.$$

La connexion d'Einstein sur le fibré des $(2,0)$-tenseurs sur Ω, d'espace total $\Lambda^2 (\Omega)$, est une connexion ∇ pour laquelle la C^{∞}-application définie pour au moins un champ T, vérifie

$$\mathcal{L} \circ \nabla_2^T (g) = K \sqrt{-\det g} R, \tag{7.20}$$

où R est la courbure scalaire de g, $\det g$ est le déterminant de la métrique Lorentzienne g et K est une constante.

Remark 56. *On est amené à faire une hypothèse plus forte si on veut calculer la connexion d'Einstein, on va supposer que pour tout champ* T*, l'équation 7.20 est vraie.*

Si le champ T est un champ chronologique de g, on dit que g est munit d'une orientation temporelle. L'équation 7.20 s'écrit

$$\mathcal{L}\left(g, \nabla_T (g), \nabla_T^2 (g)\right) = K \sqrt{-\det g} R$$

$$\mathcal{L}\left(g, \partial_T g + \Gamma_0 (g), \partial_T^2 g + \left\{\partial_T, \Gamma_T\right\} g + \Gamma_T^2 (g)\right) = K \sqrt{-\det g} R$$

l'opérateur ∂_T est défini par

$$\partial_T s = \partial_T \left(s_{\mu\nu}\right) d^{\mu\nu}$$

et Γ_T est défini par

$$\Gamma_T (s) = s_{\mu\nu} \nabla_T \left(d^{\mu} \otimes d^{\nu}\right). \tag{7.21}$$

Si on pose

$$\mathcal{K} (g) = \mathcal{L}\left(g, \partial_T g + \Gamma_0 (g), \partial_T^2 g + \left\{\partial_T, \Gamma_T\right\} g + \Gamma_T^2 (g)\right)$$

la matrice Hessienne de $\mathcal{K}$ dans la base

$$\left\{d^{\mu} \otimes d^{\nu}\right\}$$

notée

$$\mathrm{Hess}\left(\mathcal{K}\right)$$

est définie positive. On regarde l'équation 7.21, on admet que pour tout champ T,

$$\mathcal{L}\left(g, \nabla_T (g), \nabla_T^2 (g)\right)$$

minimalise l'action, les coefficients de Christoffel de la connexion ∇ dans le "local frame" sont donnés par

$$\nabla_{\partial_\tau} \left(d^{\mu} \otimes d^{\nu}\right) = \Gamma^{\mu\nu}_{\tau\alpha\beta} d^{\alpha} \otimes d^{\beta},$$

si la connexion ∇ est définie par une connexion initiale sur Ω alors en utilisant **??**

$$\Gamma^{\sigma\tau}_{\beta\gamma\nu} = -\left(\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\tau}_{\beta\nu}\right),$$

$\Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}$ représentent les symboles de la connexion initale ∇_{initial}.

Remark 57. *La connexion de Dirac, notée ∇_{dirac}, est une connexion définie sur le fibré tangent $T\Omega\otimes\mathbb{C}$. On peut faire l'hypothèse suivante, si le complexifié de la connexion ∇ définie sur le fibré d'espace total $T^{2,0}\Omega$ est définie à partir d'une connexion initale $\nabla_{initial}$ qui est une connexion définie sur le fibré tangent complexifié d'espace total $T\Omega\otimes\mathbb{C}$ alors*

$$\nabla_{dirac}=\nabla_{initial}.$$

Cette hypothèse, si elle s'avère exacte permet, en "un certain sens", de relier les théories physiques quantique et relativiste. Pour formuler cette hypothèse de façon imagée, on peut dire que le complexifié de la connexion d'Einstein est le carré tensoriel de la connexion duale de Dirac. Symboliquement,

$$\nabla_{einstein}\oplus i\nabla_{einstein}=\nabla^{*\otimes 2}_{dirac}.$$

Une fois que l'on a fait cette hypothèse, on a des sections de Dirac $\{\gamma^{\nu}\}$ associées à l'équation de Dirac 7.9. On peut étendre ces sections de Dirac sur $T^{2,0}\Omega$, elles vérifient les équations **??** et sont de la forme

$$\widetilde{\gamma}^{d}=\left(\gamma^{d}\right)^{*}\otimes\left(\gamma^{d}\right)^{*},$$

$\widetilde{\gamma}$ représente la section de Dirac étendue aux $(2,0)$-tenseurs de la section de Dirac γ. On a

$$\Gamma^{\sigma\tau}_{\beta\gamma\nu}=-\left(\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}+\Gamma^{\tau}_{\beta\nu}\right),$$

et

$$\gamma^{\mu\nu\tau}_{\rho\sigma}=\gamma^{\mu\nu}_{\rho}\gamma^{\mu\tau}_{\sigma},$$

le hamiltonien de rang 1 s'écrit

$$H_1\left(g_{\sigma\rho}d^{\sigma}\otimes d^{\rho}\right)=\gamma^{\mu\nu}_{\rho}\gamma^{\mu\tau}_{\sigma}\left(\partial_{\mu}g_{\nu\tau}-g_{\alpha\beta}\left(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}+\Gamma^{\beta}_{\mu\tau}\right)\right)d^{\sigma}\otimes d^{\rho} \tag{7.22}$$

et le Hamiltonien de rang 2 s'écrit

$$H_2\left(g_{j_1j_2}d^{j_1}\otimes d^{j_2}\right)=\left(\triangle^{k_1k_2}_{j_1j_2}+\Upsilon^{k_1k_2}_{j_1j_2}\right)g_{k_1k_2}d^{j_1}\otimes d^{j_2}$$

où

$$\begin{aligned}\triangle^{k_1k_2}_{j_1j_2}&=\left(\gamma^{\nu\sigma_1\sigma_2}_{j_1j_2}\gamma^{\mu k_1k_2}_{\sigma_1\sigma_2}-\gamma^{\mu\sigma_1\sigma_2}_{j_1j_2}\gamma^{\nu k_1k_2}_{\sigma_1\sigma_2}\right)\partial_{\mu}\partial_{\nu}\\&=\left(\gamma^{\nu\sigma_1}_{j_1}\gamma^{\nu\sigma_2}_{j_2}\gamma^{\mu k_1}_{\sigma_1}\gamma^{\mu k_2}_{\sigma_2}-\gamma^{\mu\sigma_1}_{j_1}\gamma^{\mu\sigma_2}_{j_2}\gamma^{\nu k_1}_{\sigma_1}\gamma^{\nu k_2}_{\sigma_2}\right)\partial_{\mu}\partial_{\nu}\\&=\left(\left[\gamma^{\nu\sigma_1}_{j_1}\gamma^{\mu k_1}_{\sigma_1}\right]\left[\gamma^{\nu\sigma_2}_{j_2}\gamma^{\mu k_2}_{\sigma_2}\right]-\left[\gamma^{\mu\sigma_1}_{j_1}\gamma^{\nu k_1}_{\sigma_1}\right]\left[\gamma^{\mu\sigma_2}_{j_2}\gamma^{\nu k_2}_{\sigma_2}\right]\right)\partial_{\mu}\partial_{\nu}\\&=\left(\left(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right)^{k_1}_{j_1}\left(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right)^{k_2}_{j_2}-\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right)^{k_1}_{j_1}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right)^{k_2}_{j_2}\right)\partial_{\mu}\partial_{\nu}\\&=\begin{vmatrix}\left(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right)^{k_1}_{j_1}&\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right)^{k_2}_{j_2}\\\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right)^{k_1}_{j_1}&\left(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right)^{k_2}_{j_2}\end{vmatrix}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\end{aligned}$$

$$\left(\gamma^{\nu}\right)^{\alpha}_{\beta}=\gamma^{\nu\alpha}_{\beta}$$

et

$$\Upsilon^{k_1k_2}_{\alpha_1\alpha_2}=\left(\gamma^{\nu\sigma_1}_{j_1}\gamma^{\nu\sigma_2}_{j_2}\gamma^{\mu k_1}_{\sigma_1}\gamma^{\mu k_2}_{\sigma_2}-\gamma^{\mu\sigma_1}_{j_1}\gamma^{\mu\sigma_2}_{j_2}\gamma^{\nu k_1}_{\sigma_1}\gamma^{\nu k_2}_{\sigma_2}\right)\left(\partial_{\mu}\Gamma^{j_1j_2}_{\alpha_1\alpha_2\nu}-\Gamma^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2\mu}\Gamma^{j_1j_2}_{\beta_1\beta_2\nu}\right),$$

avec

$$\Gamma^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2\mu}\Gamma^{j_1j_2}_{\beta_1\beta_2\nu}=\left(\Gamma^{\beta_1}_{\alpha_1\alpha_2}+\Gamma^{\beta_2}_{\alpha_1\mu}\right)\left(\Gamma^{j_1}_{\beta_1\beta_2}+\Gamma^{j_2}_{\beta_1\nu}\right),$$

$$\partial_{\mu}\Gamma^{j_1j_2}_{\alpha_1\alpha_2\nu}=-\partial_{\mu}\Gamma^{j_1}_{\alpha_1\alpha_2}-\partial_{\mu}\Gamma^{j_2}_{\alpha_1\nu},$$

$$\Upsilon^{k_1k_2}_{\alpha_1\alpha_2} = \begin{vmatrix} (\gamma^\nu\gamma^\mu)^{k_1}_{j_1} & (\gamma^\mu\gamma^\nu)^{k_2}_{j_2} \\ (\gamma^\mu\gamma^\nu)^{k_1}_{j_1} & (\gamma^\nu\gamma^\mu)^{k_2}_{j_2} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} -\partial_\mu\Gamma^{j_1}_{\alpha_1\alpha_2} - \partial_\mu\Gamma^{j_2}_{\alpha_1\nu} \\ \left(\Gamma^{\beta_1}_{\alpha_1\alpha_2} + \Gamma^{\beta_2}_{\alpha_1\mu}\right)\left(\Gamma^{j_1}_{\beta_1\beta_2} + \Gamma^{j_2}_{\beta_1\nu}\right) \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} & H_2\left(g_{j_1j_2}d^{j_1}\otimes d^{j_2}\right) \\ & = \begin{vmatrix} (\gamma^\nu\gamma^\mu)^{k_1}_{j_1} & (\gamma^\mu\gamma^\nu)^{k_2}_{j_2} \\ (\gamma^\mu\gamma^\nu)^{k_1}_{j_1} & (\gamma^\nu\gamma^\mu)^{k_2}_{j_2} \end{vmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} 1 - \partial_\mu\Gamma^{j_1}_{\alpha_1\alpha_2} - \partial_\mu\Gamma^{j_2}_{\alpha_1\nu} \\ + \left(\Gamma^{\beta_1}_{\alpha_1\alpha_2} + \Gamma^{\beta_2}_{\alpha_1\mu}\right)\left(\Gamma^{j_1}_{\beta_1\beta_2} + \Gamma^{j_2}_{\beta_1\nu}\right) \end{pmatrix} g_{k_1k_2}d^{j_1}\otimes d^{j_2} \\ & = H^{k_1k_2}_{j_1j_2}g_{k_1k_2}d^{j_1}\otimes d^{j_2}. \end{aligned} \tag{7.23}$$

On peut définir à l'aide de ces Halmitoniens des équations d'état et d'évolution de rang 1 et 2. Cette équation permet de définir à partir d'une connexion de Dirac, une connexion d'Einstein pour laquelle le principe de moindre action relativiste est vrai. Les sections de Dirac γ associées à la connexion ∇_{dirac} s'étendent en des sections de Dirac $\widetilde{\gamma}$ sur le fibré des $(2,0)$-tenseurs d'espace total $\Lambda^2\Omega$, les hamiltoniens de rang 1 et 2 définis par

$$H_1 = \widetilde{\gamma}\otimes\nabla^{*\otimes 2}_{\text{dirac}} \text{ et } H_2 = \widetilde{\gamma}\otimes R^{\nabla^{*\otimes 2}_{\text{dirac}}},$$

permettent de définir des équations d'évolution et d'états de rang 1 et 2.

La courbure scalaire R d'une métrique Lorentzienne g est de la forme

$$R = \frac{\mathcal{L}\left(g, \partial_T g + \Gamma_T(g), \partial^2_T g + \{\partial_T, \Gamma_T\} g + \Gamma^2_T(g)\right)}{K\sqrt{-\det g}}, K = -\frac{c^3}{4\pi G} \tag{7.24}$$

où $\mathcal{L}$ est une densité Lagrangienne de rang 2 sur le fibré des $(2,0)$-tenseurs et T est un champ local sur $U\subset\Omega$. On en déduit que pour une courbure scalaire fixée R localement sur U, l'application de $\Gamma^\infty(U)\times\mathcal{M}_{\text{Lorentz}}$ à valeurs dans $C^\infty(U,\mathbb{R})$

$$(T,g)\to\mathcal{R}(T,g) = \frac{\mathcal{L}\left(g, \partial_T g + \Gamma_T(g), \partial^2_T g + \{\partial_T, \Gamma_T\} g + \Gamma^2_T(g)\right)}{K\sqrt{-\det g}},$$

où $\mathcal{M}_{\text{Lorentz}}$ est l'ensemble des métriques de Lorentz, est constante comme fonction des champs, pour la métrique de Lorentz g fixée qui lui est associée. Les métriques de Lorentz qui vérifie le principe de moinde action, sont les métriques g telles que

$$\frac{\partial\mathcal{R}(T,g)}{\partial T} = 0.$$

Cela permet de définir les métriques de Lorentz g, de courbure scalaire R fixée dont la connexion d'Einstein est le carré tensoriel du dual de la connexion de Dirac. Si on veut que la courbure scalaire R soit constante, on est ramené au problème de Yamabe [16].

8. Conclusion

On a voulu, dans cet article, écrire de façon unitaire l'équation relativiste de Dirac et l'équation relativiste d'Einstein. On remarque que les solutions de l'équation relativiste d'Einstein sont dans les sections du fibré $T^{2,0}\Omega$ et celles de l'équation de Dirac sont dans les sections du complexifié du fibré tangent $T\Omega$, on est amené à construire la notion d'opérateurs de Dirac-Einstein de rang n et les notions d'équation

d'état et d'évolution pour ces opérateurs. Cela nous permet de déterminer une relation entre l'équation relativiste d'Einstein et l'équation relativiste de Dirac.

Si on s'intéresse à une seule particule, on a un procédé de quantification simple que l'on a appelé la (∇, γ)-quantification et dans le cas d'une infinité de particules, on a construit les fibrés de Bose-Fock et de Fermi-Fock associés au fibré des états. Cette construction permet de quantifier la connexion ∇ définie sur le fibré des états, ainsi que les endomorphismes de Dirac γ^d.

Les champs de divergence nulle et les champs en cordes permettent de quantifier les énergies. Pour étudier ces champs, on peut traiter le problème de façon analytique à l'aide de la théorie spectrale de Von Neumann pour l'opérateur défini par la dérivée de Lie le long du champ à étudier, l'autre méthode est géométrique et fait appel à la théorie des surfaces fermées. Quand on étudie la physique des particules de l'univers, une question primordiale s'impose, peut-on modéliser géométriquement cet univers. Je pense que la réponse à cette représentation est loin d'être élucidée, mais on peut imaginer plusieurs représentations locales complémentaires en étudiant l'état, par exemple, entropique de l'univers. Ainsi, on peut définir une notion de chronologie entropique indépendante de la notion de temps et qui permet de modéler l'univers par chirurgies successives. L'étude des points à l'infini de l'univers peut-être analysée en feuilletant localement l'univers, les points à l'infini sont des points de compression de ces feuilles espaces qui font disparaître la notion de temps. Pour les lacets à l'infini et les surfaces fermées à l'infini on va faire disparaître des dimensions d'espace supplémentaires.

Par la suite, je me suis intéressé à la complexification des dimensions. Cette approche a été, déjà développée par certains auteurs mais la construction proposée est nouvelle. Cette complexification permet de donner une représentation symétrique entre la notion de temps et d'espace, le temps est la partie imaginaire d'une dimension complexe et les dimensions espaces sont les parties réelles de ces dimensions complexes. Les problèmes posés par la physique m'ont permis de développer plusieurs théories mathématiques, par exemple, la notion de distribution dans les fibrés des états dont le produit hermitien est parallèle à la connexion. D'autres exemples, la notion de moindre action le long d'un champ, la quantification des fibrés hermitiens et la notion d'espace de Sobolev dans les fibrés hermitiens, etc....

References

[1] Arai A. "A class of Dirac-Type Operators on the Abstract Boson-Fermion Fock Space and Their Strong Anticommutativity", (1999).

[2] Arai A."Supersymmetric extension of quantum scalar field theory." Quantum and Non-Commutative Analysis, H. Araki. Ed. pp73-90, Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. The Netherlands, (1993)

[3] Arminjon M. , Reifler F., "Representations of the Dirac wave function in a curved spacetime", Proc. Fifth International Workshop DICE2010 : current issues in quantum mechanics and beyond, Journal of Physics: Conference Series 306 (2011), 012061.

[4] Arminjon M., Reifler F., Classical-quantum correspondence and wave packet solutions of the Dirac equation in a curved spacetime", 13th International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, (Varna, Bulgarie, 3-8 juin 2011). Journal of Geometry and Symmetry in Physics 24, 77-88 (2011).

[5] Audin M., Damian M., Théorie de Morse et homologie de Floer, CNRS Editions, 2010

[6] Dloussky G., "Variétés riemanniennes, variétés hermitiennes"(2008)

[7] Ehresmann C., Sur les variétés plongées dans une variété différentiable, C. R. Acad. Sci. Paris 226 (1948), 1879-1880.

[8] Esteban M.J., Séré E., "Les équations de Dirac-Fock". Séminaire E.D.P(1997-1998), Exposé n°5, U.M.R 7640 C.N.R.S.
[9] Godbillon C., "Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique" Hermann Paris 1985
[10] Gromov M. L. , "Stable mappings of foliations into manifolds", Izv. Akad. Nauk SSSR 33 (1969), 707-734.
[11] Hormander L. , "An introduction to complex analysis in several variables" (Third Edition, 1990)
[12] Haefliger A., "Feuilletages sur les variétés ouvertes", Topology 9 (1970), 183-194.
[13] Jonot J.L."Dirac-Weyl-Fock equation along a chronological field" hal.archives-ouvertes.fr/hal-01063612 (2014)
[14] Kobayashi S. and Nomizu K. "Foundations of Differential Geometry", vol. 1 & 2, Wiley-Interscience, 1996.
[15] Kohn J. J., "Harmonic Integrals on Strongly Pseudo-Convex Manifolds, I and II" (Annals of Math, 1963)
[16] Lee J.M and Parker T.H."The Yamabe Problem", Bulletin of A.M.S Volume 17,Number 1, 1987.
[17] Milnor J., "Morse Theory" Annals of Mathematics Studies Princeton University Press.
[18] Pederson S. "Anticommuting self-adjoint operators", J.Funct. Anal. 89 (1990)
[19] Reeb G. , "Variétés feuilletées, feuilles voisines", C. R. Acad. Sci. Paris 224 (1947), 1613-1614.
[20] Reeb G., "Stabilité des feuilles compactes à groupe de Poincaré fini", C. R. Acad. Sci. Paris 228 (1949), 47-48.
[21] Reed M. and Simon B. "Methods of Modern Mathematical Physics Vol.I: Functional Analysis", Academy Press, New York, (1975)
[22] Spring D.,"Théorie de Gromov", Cours de DEA d'Orsay (2004)
[23] Thurston W., "The geometry and topology of three-manifolds", Princeton lecture notes (1978–1981).
[24] Tumpach A.B."Varietes kaehlériennes et hyperkaéleriennes de dimension infinie" Thèse HAL archives-ouvertes. (2006)
[25] Vasilescu F.H "Anticommuting self-adjoint operators", Rev. Roum. Math. Pures Appl. 28 (1983)77-91
[26] Wigner E. P., "Gruppentheorie" (Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, Germany, 1931), pp. 251-254; Group Theory (Academic Press Inc., New York, 1959), pp. 233-236
[27] Voisin C."Géométrie différentielle" www.math.polytechnique.fr/~voisin/Articlesweb/poly2013chap123.

E-mail address: `jean-louis.jonot@ac-versailles.fr`