HAL
open science

GROUPE DE PICARD DES VARIÉTÉS DE MODULES DE FIBRÉS SEMI-STABLES SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES

J.-M. Drézet, M.S. Narasimhan

To cite this version:

J.-M. Drézet, M.S. Narasimhan. GROUPE DE PICARD DES VARIÉTÉS DE MODULES DE FIBRÉS SEMI-STABLES SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES. Inventiones Mathematicae, 1989, 97, pp.53-94. hal-01158986

HAL Id: hal-01158986

https://hal.science/hal-01158986v1

Submitted on 2 Jun 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

GROUPE DE PICARD DES VARIÉTÉS DE MODULES DE FIBRÉS SEMI-STABLES SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES

J.–M. DRÉZET ET M.S. NARASIMHAN

Sommaire

1.	Préliminaires	8
2.	Descente de fibrés vectoriels	10
3.	Groupe de Picard de $F(r,d)$ et $\mathrm{PGL}(q)$-fibrés en droites sur R^{ss}	13
4.	Étude des $\mathrm{PGL}(q)$-fibrés en droites sur $R^{(ss)}$	19
5.	Étude des $\mathrm{GL}(q)$-fibrés en droites sur R^{ss}	21
6.	Démonstration du théorème A	25
7.	Description de $\mathrm{Pic}(U(r,d))$ et $\mathrm{Pic}(U(r,L))$	25
Références		37

0 – Introduction

Soient X une courbe algébrique projective lisse de genre $g \geq 2$ sur $\mathbb{C}$, r, d des entiers, avec $r \geq 2$. On note $U(r,d)$ la variété de modules des fibrés algébriques semi-stables sur X de rang r et de degré d, $U_s(r,d)$ l'ouvert de $U(r,d)$ correspondant aux fibrés stables. On sait que $U(r,d)$ est une variété algébrique projective irréductible et normale. Si r et d ne sont pas premiers entre eux, $U(r,d)$ n'est pas lisse, sauf dans une exception : le cas ou $g=2$, $r=2$, et d est pair (cf. [17]). On supposera par la suite qu'on n'est pas dans ce cas, On a alors $\mathrm{codim}_{U(r,d)}(U(r,d)\backslash U_s(r,d)) \geq 2$, et $U(r,d)\backslash U_s(r,d)$ est le lieu des points singuliers de $U(r,d)$. Si L est un fibré en droites de degré d sur X, on note $U(r,L)$ (resp. $U_s(r,L)$) la sous-variété fermée de $U(r,d)$ (resp. $U_s(r,d)$) correspondant aux fibrés vectoriels de déterminant isomorphe a L. Le but de ce travail est l'étude de $\mathrm{Pic}(U(r,d))$ et $\mathrm{Pic}(U(r,L))$.

0.1 – Factorialité de $U(r,d)$ et $U(r,L)$

Le premier résultat est le

Théorème A : *Les variétés $U(r,d)$ et $U(r,L)$ sont localement factorielles.*

Donnons une idée de la démonstration de ce théorème. Pour toute variété algébrique Y on note $\mathrm{Cl}(Y)$ le groupe des classes d'équivalence linéaire de diviseurs de Weil de Y. On a un diagramme

commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(U(r,d)) & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{Cl}(U(r,d)) \\ \downarrow r_1 & & \downarrow r_2 \\ \mathrm{Pic}(U_s(r,d)) & \xrightarrow{\phi_s} & \mathrm{Cl}(U_s(r,d)) \end{array}$$

les flèches horizontales étant les morphismes canoniques, les verticales étant les restrictions. Le morphisme ϕ_s est bijectif car $U_s(r,d)$ est lisse, et il en est de même de r_2 car $\mathrm{codim}_{U(r,d)}(U(r,d)\backslash U_s(r,d)) \geq 2$. Nous verrons que $U(r,d)$ est localement factorielle si et seulement si ϕ est un isomorphisme, et ceci se produit si et seulement si r_1 en est un. L'injectivité de r_1 découle de la normalité de $U(r,d)$. Nous devrons donc essentiellement prouver que r_1 est surjectif.

Pour cela, on considère la construction habituelle de $U(r,d)$ comme bon quotient d'un ouvert lisse R^{ss} d'un schéma de Grothendieck par un groupe du type $\mathrm{PGL}(q)$ (cf. 1.1.4). Soient

$$\pi : R^{ss} \longrightarrow U(r,d)$$

le morphisme quotient, $R^s = \pi^{-1}(U_s(r,d))$, et $\pi_s : R^s \to U_s(r,d)$ la restriction de π. On note $\mathrm{Pic}^G(R^{ss})$ le groupe des classes d'isomorphisme de $\mathrm{PGL}(q)$-fibrés en droites sur R^{ss} (un $\mathrm{PGL}(q)$-fibré en droites sur R^{ss} étant un fibré en droites algébrique sur R^{ss} muni d'une action linéaire algébrique de $\mathrm{PGL}(q)$ au dessus de l'action de ce groupe sur R^{ss}). On définit de même $\mathrm{Pic}^G(R^s)$.

Du fait notamment que $\mathrm{PGL}(q)$ agit librement sur R^s, nous verrons qu'on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \ \simeq \ \mathrm{Pic}^G(R^s)$$

(si L est un fibré en droites sur $U_s(r,d)$, on lui associe le $\mathrm{PGL}(q)$-fibré en droites $\pi_s^*(L)$ sur R^s, et réciproquement, si L' est un $\mathrm{PGL}(q)$-fibré en droites sur R^s, il existe un bon quotient $L'/\mathrm{PGL}(q)$, qui a une structure naturelle de fibré en droites algébrique sur $U_s(r,d)$, et c'est ce fibré qui est associé à L').

Ensuite, on montre que le morphisme de restriction

$$\mathrm{Pic}^G(R^{ss}) \longrightarrow \mathrm{Pic}^G(R^s)$$

est surjectif. Partant d'un fibré en droites L sur $U_s(r,d)$ nous pouvons donc définir un $PGL(q)$-fibré en droites L' sur R^{ss} tel que $\pi_s^*(L) \simeq L'_{|R^s}$.

Pour continuer nous utiliserons un "lemme de descente" donnant des conditions suffisantes pour qu'il existe un fibré en droites $\overline{L}$ sur $U(r,d)$ tel que $\pi^*(\overline{L}) \simeq L'$. Ce lemme de descente, dans sa version finale, est dû à Kempf. Nous avions précédemment une version plus compliquée (qui nécessitait plus de vérifications sur L'), inspirée de ([1], prop. 2.3). La condition à vérifier sur L' est la suivante : pour tout point fermé y de R^{ss} tel que l'orbite de y dans R^{ss} soit fermée, le stabilisateur de y dans $\mathrm{PGL}(q)$ agit trivialement sur la fibre L'_y. Nous verrons que ceci est vrai, d'où l'existence de $\overline{L}$.

Ce fibré en droites $\overline{L}$ obtenu sur $U(r,d)$ est le prolongement voulu de L. On obtient aussi en cours de démonstration un isomorphisme

$$\mathrm{Pic}(U(r,d)) \ \simeq \ \mathrm{Pic}^G(R^{ss}) \ .$$

En ce qui concerne $U(r,L)$, il suffit de faire la même démonstration, avec $\pi^{-1}(U(r,L))$ à la place de R^{ss}.

Remarque. On voit facilement que les complétés des anneaux locaux des points singuliers de $U(r,d)$ ne sont pas nécessairement factoriels (cf. [3]).

0.2 – Description de $\mathrm{Pic}(U(r,d))$ et $\mathrm{Pic}(U(r,L))$

Nous avons deux descriptions de $\mathrm{Pic}(U(r,d))$. La première fait intervenir une généralisation aux variétés de modules de fibrés semi-stables de la notion de "diviseur théta" des jacobiens. La seconde utilise un sous-groupe du groupe de Grothendieck $K(X)$ de X.

0.2.1 – Diviseurs théta généralisés. Posons $n = \mathrm{PGCD}(r,d)$. Soit F un fibré vectoriel sur X tel que

$$\deg(F) \;=\; \frac{-d+r(g-1)}{n}\;, \quad \mathrm{rg}(F) \;=\; \frac{r}{n}\;.$$

Ces conditions entrainent que $\chi(E\otimes F)=0$ pour tout fibré vectoriel E sur X de rang r et de degré d. D'après [8], on peut trouver un tel F tel qu'il existe un fibré stable E sur X, de rang r et de degré d, tel que

$$H^0(X,E\otimes F) \;=\; H^1(X,E\otimes F) \;=\; 0\;.$$

Dans ces conditions soit Θ_F^s (resp. $\Theta_{F,L}^s$) l'ensemble des points de $U_s(r,d)$ (resp. $U_s(r,L)$) correspondant aux fibrés stables E tels que

$$H^0(X,E\otimes F) \;\neq\; 0.$$

Nous verrons que c'est une hypersurface de $U_s(r,d)$ (resp. $U_s(r,L)$). Soit Θ_F (resp. $\Theta_{F,L}$) l'adhérence de Θ_F^s (resp. $\Theta_{F,L}^s$) dans $U(r,d)$ (resp. $U(r,L)$). Les hypersurfaces Θ_F et $\Theta_{F,L}$ sont appelées *diviseurs théta.*

D'après le théorème A, le faisceau d'idéaux de Θ_F (resp. $\Theta_{F,L}$) est un fibré en droites $\mathcal{O}(\Theta_F)$ (resp. $\mathcal{O}(\Theta_{F,L})$). On peut aussi définir ces fibrés par une propriété universelle : par exemple $\mathcal{O}(\Theta_F)$ est entièrement déterminé par la propriété suivante : pour toute variété algébrique S et toute famille plate E de fibrés vectoriels semi-stables sur X , de rang r et de degré d paramétrée par S, on peut définir un "sous-schéma de saut" Z de S, dont les points fermés sont les points s tels que $H^0(E_s\otimes F)\neq 0$, et dont le faisceau d'idéaux $\mathcal{O}(Z)$ est localement libre. Alors, si $f_E : S\to U(r,d)$ est le morphisme canonique déduit de E, on a un isomorphisme

$$f_E^*(\mathcal{O}(\Theta_F)) \;\simeq\; \mathcal{O}(Z)\;.$$

On a une propriété universelle analogue pour définir $\mathcal{O}(\Theta_{F,L})$ (ces faits ne seront pas utilisés dans la suite). On démontrera le

Théorème B : (a) *Le fibré en droites $\mathcal{O}(\Theta_{F,L})$ est indépendant du choix de F.*

(b) *Le groupe $\mathrm{Pic}(U(r,L))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et est engendré par $\mathcal{O}(\Theta_{F,L})$.*

L'isomorphisme $\mathrm{Pic}(U(r,L))\simeq\mathbb{Z}$ dans le cas $n=1$ a été prouvé d'une autre façon par Seshadri (cf. [20]).

Examinons maintenant $\mathrm{Pic}(U(r,d))$. Soit $J^{(d)}$ le jacobien des fibrés en droites de degré d sur X. On a un morphisme canonique

$$\det : U(r,d) \longrightarrow J^{(d)}$$

qui permet de considérer $\mathrm{Pic}(J^{(d)})$ comme un sous-groupe de $\mathrm{Pic}(U(r,d))$. On a alors le

Théorème C : *Les inclusions* $\mathrm{Pic}(J^{(d)}) \subset \mathrm{Pic}(U(r,d))$ *et* $\mathbb{Z}.\mathcal{O}(\Theta_F) \subset \mathrm{Pic}(U(r,d))$ *induisent un isomorphisme*

$$\mathrm{Pic}(U(r,d)) \ \simeq\ \mathrm{Pic}(J^{(d)}) \oplus \mathbb{Z}\ .$$

Nous verrons dans l'autre description que nous donnons de $\mathrm{Pic}(U(r,d))$ quelle est la dépendance de $\mathcal{O}(\Theta_F)$ en F.

0.2.2 – Groupe de Grothendieck de X et $\mathrm{Pic}(U(r,d))$. Soit S une variété algébrique. Une *famille de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par S* est un fibré vectoriel E sur $S \times X$, plat sur S, tel que pour tout point fermé s de S, $E_s = E_{|\{s\}\times X}$ soit semi-stable de rang r et de degré d. On note p_S, p_X les projections $S \times X \to S$ et $S \times X \to X$ respectivement. Deux telles familles E, E' paramétrées par S sont dites *équivalentes* s'il existe un fibré en droites L sur S et un isomorphisme $E' \simeq E \otimes p_S^*(L)$.

On note $F(r,d)$ le foncteur contravariant

$$\text{Variétés algébriques} \longrightarrow \text{Ensembles}$$

associant à S l'ensemble des classes d'équivalence de familles de fibrés de $U(r,d)$ paramétrées par S. Si $f : S' \to S$ est un morphisme de variétés algébriques, et si E est une famille de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par S, l'image par $F(r,d)(f)$ de la classe de E est celle de $f^*(E)$. On sait qu'on a un morphisme canonique de foncteurs

$$F(r,d) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\bullet, U(r,d))\ .$$

Autrement dit, à toute famille E de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par S on associe un morphisme

$$f_E : S \longrightarrow U(r,d)$$

ne dépendant que de la classe d'équivalence de E.

Si Y est une variété algébrique, on note $K(Y)$ le groupe de Grothendieck de Y, et si E est un faisceau cohérent sur Y, $[E]$ désigne la classe de E dans $K(Y)$. Soient η la classe dans $K(X)$ d'un fibré vectoriel de rang r et de degré d, H le noyau du morphisme

$$\begin{aligned} K(X) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \alpha &\longmapsto \chi(\alpha \otimes \eta) \end{aligned}$$

En fait, H ne dépend que de r et d, c'est pourquoi on notera $H = H(r,d)$. La classe du fibré F considéré dans 0.2.1 est par exemple un élément de $H(r,d)$. On peut voir $\mathrm{Pic}^0(X)$ comme un sous-groupe de $H(r,d)$ (cf. 3.3), et on a

$$H(r,d) \ \simeq\ \mathrm{Pic}^0(X) \oplus \mathbb{Z}[F]\ .$$

Soient E une famille de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par une variété lisse S, et α un élément de $H(r,d)$. On définit successivement les éléments

$$\begin{aligned} E \otimes p_X^*(\alpha) \quad &\text{de} \quad K(S \times X) \ , \\ p_{S!}(E \otimes p_X^*(\alpha)) \quad &\text{de} \quad K(S) \ , \\ \gamma_E(\alpha) = \det(p_{S!}(E \otimes p_X^*(\alpha))) \quad &\text{de} \quad \mathrm{Pic}(S) \end{aligned}$$

(en fait ceci est possible même si S est seulement intègre). Il est aisé de voir que puisque α est dans $H(r,d)$, $\gamma_E(\alpha)$ ne dépend que de la classe d'équivalence de E. Les $\gamma_E(\alpha)$ dépendent fonctoriellement de E et nous verrons qu'on définit ainsi un élément de $\mathrm{Pic}(F(r,d))$, le *groupe de Picard du foncteur F(r,d)* (cf. §3).

Rappelons que $\mathrm{Pic}^0(X)$ peut être vu naturellement comme un sous-groupe de $\mathrm{Pic}(J^{(d)})$ ou $H(r,d)$, On prouvera le

Théorème D : (a) *Soit α un élément de $H(r,d)$. Il existe un unique $\mathbb{L}(\alpha)$ dans $\mathrm{Pic}(U(r,d))$ tel que pour toute variété lisse S et toute famille E de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par S, on ait*

$$\gamma_E(\alpha) \ \simeq \ f_E^*(\mathbb{L}(\alpha)) \ .$$

(b) *Le morphisme de groupes $\mathbb{L} : H(r,d) \to \mathrm{Pic}(U(r,d))$ est injectif.*

(c) *On a $\mathrm{Pic}(U(r,d)) = \mathrm{im}(\mathbb{L}) \oplus \mathrm{Pic}(J^{(d)})$, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pic}^0(X) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & H(r,d) \arrow[ddl, "\mathbb{L}"] \\ \mathrm{Pic}(J^{(d)}) \arrow[d, hook, "\det^*"] & \\ \mathrm{Pic}(U(r,d)) & \end{tikzcd}$$

et on a

$$\mathrm{im}(\mathbb{L}) \cap \mathrm{Pic}(J^{(d)}) \ = \ \mathbb{L}(\mathrm{Pic}^0(X)) \ = \ \det{}^*(\mathrm{Pic}^0(X)) \ .$$

On a une inclusion naturelle $i : \mathrm{Pic}(U(r,d)) \to \mathrm{Pic}(F(r,d))$, et on a défini un morphisme de groupes $\gamma : H(r,d) \to \mathrm{Pic}(F(r,d))$. La partie (a) du théorème D dit simplement que l'image de γ est contenue dans celle de i. Nous montrerons qu'on a en fait $\mathrm{Pic}(U(r,d)) = \mathrm{Pic}(F(r,d))$.

Pour faire le lien entre les deux descriptions, notons qu'on a

$$\mathcal{O}(\Theta_F) \ = \ \mathbb{L}(-[F]) \ .$$

On déduit de (c) que si F' est un autre fibré sur X ayant les mêmes propriétés que F, on a

$$\mathcal{O}(\Theta_{F'}) \ = \ \mathcal{O}(\Theta_F) \otimes \det{}^*(\det(F') \otimes \det(F)^{-1})$$

($\det(F') \otimes \det(F)^{-1}$ étant vu comme un élément de $\mathrm{Pic}^0(X) \subset \mathrm{Pic}(J^{(d)})$).

Donnons maintenant une idée des démonstrations des théorèmes B, C, D. On utilise une construction due à Seshadri. On peut toujours supposer d aussi grand qu'on le veut, et dans ce cas tout fibré semi-stable E de rang r et de degré d peut s'écrire comme extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow E \longrightarrow L_0 \longrightarrow 0 \ ,$$

L_0 étant un fibré en droites isomorphe à $\det(E)$. La famille de toutes ces extensions est un fibré en espaces projectifs $\mathbb{P}$ sur $J^{(d)}$ (cf. §7). Soit $\mathbb{P}^s$ l'ouvert des extensions dont le terme du milieu est stable. On peut déduire $\mathrm{Pic}(U_s(r,d))$ de $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^s)$, qui on le verra est isomorphe à $\mathrm{Pic}(\mathbb{P})$, par une étude précise du morphisme canonique $\mathbb{P}^s \to U_s(r,d)$.

0.3 – Faisceau dualisant et faisceau canonique

On peut calculer le faisceau dualisant de $U(r,d)$ ou $U(r,L)$. Soit T_U le faisceau tangent de $U(r,d)$. Puisqu'il est localement libre en dehors d'un fermé de codimension au moins 2, on peut définir son déterminant qui est un fibré en droites Δ sur $U(r,d)$. On note ω le dual de Δ. On définit de même le fibré en droites ω_L sur $U(r,L)$.

Théorème E : (a) *Soit F_0 un fibré vectoriel sur X de rang $2r$ et de degré $2(-d+r(g-1))$. Alors on a*

$$\omega \ \simeq \ \mathbb{L}([F_0]) \otimes \det{}^*(\Lambda) \ ,$$

où Λ est le fibré en droites sur $J^{(d)}$

$$\Lambda \ = \ \big(\det(p_{J!}([L])) \otimes \det(p_{J!}([L^*]))\big)^{r-1} \otimes \det(p_{J!}([L \otimes p_X^*(F_0)]))^{-1} \ ,$$

L désignant un fibré de Poincaré sur $J^{(d)} \times X$, et p_J, p_X les projections $J^{(d)} \times X \to J^{(d)}$ et $J^{(d)} \times X \to X$.

(b) *Le faisceau dualisant de $U(r,d)$ est isomorphe à ω.*

Rappelons que $n = \mathrm{PGCD}(r,d)$. On a alors 1e

Théorème F : (a) *On a $\omega_L \simeq \mathcal{O}(-2n\Theta_{F,L})$.*

(b) *Le faisceau dualisant de $U(r,L)$ est isomorphe à ω_L.*

0.4 – Résultats annexes

Soit U un ouvert non vide de $U_s(r,d)$. On appelle *fibré de Poincaré sur U* un fibré vectoriel E sur $U \times X$ tel que pour tout point fermé u de U, E_u soit stable de rang r et de degré d, et que u soit le point de $U_s(r,d)$ correspondant à E_u. Cela revient à dire que le morphisme canonique $f_E : U \to U(r,d)$ est l'inclusion. Nous donnons une autre démonstration d'un résultat de Ramanan [20] : si $n > 1$, il n'existe pas de fibré de Poincaré sur U (théorème 5.5).

Ce résultat découle de l'étude des GL(q)-fibrés en droites sur R^{ss}. Si L en est un, il existe un entier k tel qu'en tout point y de R^{ss}, l'action d'un élément t de $\mathbb{C}^* \subset \mathrm{GL}(q)$ soit la multiplication par t^k. Nous verrons que k est toujours multiple de n (proposition 5.1), et que l'existence d'un fibré de Poincaré sur U entraînerait celle d'un L pour lequel on aurait $k = 1$.

Notre méthode s'applique aussi aux variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ (et sans doute à d'autres cas aussi). Plus précisément, soient $r \geq 2$, c_1, c_2 des entiers, $M(r, c_1, c_2)$ la variété de modules des faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, $M_s(r, c_1, c_2)$ l'ouvert de $M(r, c_1, c_2)$ correspondant aux faisceaux stables. On suppose que $\dim(M(r, c_1, c_2)) > 0$. Posons

$$\chi \;=\; r - c_2 + \frac{c_1(c_1+3)}{2}$$

(c'est la caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$). Si r, c_1 et χ sont premiers entre eux, il existe un faisceau de Poincaré sur $M_s(r, c_1, c_2)$ (Maruyama [13], theorem 6.11). Dans les autres cas nous obtenons

Théorème G : *Si r, c_1 et χ ne sont pas premiers entre eux, et si U est un ouvert non vide de $M_s(r, c_1, c_2)$, il n'existe pas de faisceau de Poincaré sur U.*

0.5 – Le cas $g = 2$, $r = 2$ et d pair

Dans ce cas il existe une description explicite dc $U(r, d)$ et $U(r, L)$ permettant de prouver les théorèmes A à F (cf. [18]).

Le premier auteur remercie le National Board for Higher Mathematics pour l'avoir invité à passer quelques semaines en 1nde, durant lesquelles ce travail a été commencé. Le second auteur remercie le DFG et l'université de Kaiserslautern pour leur hospitalité pendant la réalisation de cet article.

Définitions et notations

Si $X_1, \ldots, X_p$ sont des ensembles, on notera p_{X_i} la projection $X_1 \times \cdots \times X_p \to X_i$.

Si $f : S' \to S$ est un morphisme de variétés algébriques, et F un faisceau cohérent sur $S \times X$, on posera $f^{\#}(F) = (f \times I_X)^*(F)$.

Soient G un groupe algébrique et Y une variété algébrique sur laquelle G opère algébriquement. Un G-fibré sur Y est un fibré vectoriel algébrique sur Y sur lequel G opère linéairement et algébriquement, au dessus de l'action de G sur Y.

Si $E = Y \times \mathbb{C}^r$ est un fibré trivial, l'action de G sur E triviale sur les fibres est par définition l'action produit sur $Y \times \mathbb{C}^r$, $\mathbb{C}^r$ étant muni de l'action triviale de G.

Soit E un faisceau cohérent sur une variété algébrique projective Y. S'il n'y a pas d'ambigüité, on posera

$$H^i(E) \;=\; H^i(Y, E) \quad \text{et} \quad h^i(E) \;=\; \dim_{\mathbb{C}}(H^i(Y, E))$$

pour tout entier i.

Soit m un entier tel que $m \geq 1$. On notera $m.E$ le faisceau $E \oplus \cdots \oplus E$, somme directe de m copies de E.

Soient Y une variété algébrique et H un sous-groupe de $\mathrm{Pic}(Y)$. Soit L un fibré en droites sur Y. Nous dirons pour simplifier que $\mathrm{Pic}(Y)$ est isomorphe à $H \oplus \mathbb{Z}L$ si le morphisme

$$\begin{aligned} i : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathrm{Pic}(Y) \\ m &\longrightarrow L^m \end{aligned}$$

est injectif, et si on a $\mathrm{Pic}(Y) = H \oplus \mathrm{im}(i)$.

1. Préliminaires

1.1 – Variétés de modules de fibrés semi-stables

1.1.1 – Fibrés stables et fibrés semi-stables. Soit E un fibré vectoriel non nul sur X. On pose

$$\mu(E) \;=\; \frac{\deg(E)}{\mathrm{rg}(E)} \;,$$

qu'on appelle la *pente* de E. On dit que E est *semi-stable* (resp. *stable*) si pour tout sous-fibré propre F de E on a

$$\mu(F) \;\leq\; \mu(E) \quad (\text{resp. } <) \;.$$

1.1.2 – Variétés de modules. Soient r, d des entiers, avec $r \geq 1$. On a défini dans l'Introduction les familles de fibrés semi-stables de rang r et de degré d paramétrées par une variété algébrique S, ainsi que la notion d'équivalence de telles familles, et le foncteur $F(r,d)$. La variété de modules $U(r,d)$ est définie (à isomorphisme près) par les deux propriétés suivantes :

(i) Il existe un morphisme de foncteurs :

$$\Psi : F(r,d) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\bullet, U(r,d)) \;,$$

donc à toute famille E de fibrés semi-stables sur X de rang r et de degré d paramétrée par S on associe un morphisme

$$f_E : S \longrightarrow U(r,d) \;,$$

et f_E ne dépend que de la classe d'équivalence de E.

(ii) Si M est une variété algébrique, et

$$\Psi' : F(r,d) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\bullet, M)$$

un morphisme de foncteurs, il existe un unique morphisme

$$f : U(r,d) \longrightarrow M$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} F(r,d) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "\Psi'"'] & \mathrm{Hom}(\bullet, U(r,d)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\bullet, f)"] \\ & \mathrm{Hom}(\bullet, M) \end{tikzcd}$$

La variété $U(r,d)$ est projective, normale et irréductible.

1.1.3 – Filtration de Jordan-Hölder. Soit E un fibré semi-stable sur X. Il existe une filtration de E par des sous-fibrés vectoriels

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_p = E$$

telle que pour $1 \leq i \leq p$, E_i/E_{i-1} soit stable et de même pente que E. Une telle filtration n'est pas en général unique, mais la classe d'isomorphisme du gradué $\bigoplus_{1\leq i\leq p} E_i/E_{i-1}$ l'est. La filtration précédente est une *filtration de Jordan-Hölder* de E, et on note

$$\mathrm{Gr}(E) \;=\; \bigoplus_{1\leq i\leq p} E_i/E_{i-1} \ .$$

Deux fibrés semi-stables E, E' sont dits *équivalents* si $\mathrm{Gr}(E) \simeq \mathrm{Gr}(E')$. Les points fermés de $U(r,d)$ s'identifient naturellement aux classes d'équivalence de fibrés semi-stables sur X de rang r et de degré d. En particulier, les classes d'isomorphisme de fibrés stables de rang r et de degré d sur X constituent un ouvert $U_s(r,d)$ de $U(r,d)$. Cet ouvert est non vide et lisse. Si r et d sont premiers entre eux, les notions de stabilité et de semi-stabilité sont équivalentes, donc $U(r,d) = U_s(r,d)$ est une variété lisse. Si r et d ne sont pas premiers entre eux, l'ouvert des points lisses de $U(r,d)$ est réduit à $U_s(r,d)$ sauf dans l'exception mentionnée dans l'Introduction.

1.1.4 – Construction de U(r,d). Soit $\mathcal{O}_X(1)$ un fibré en droites très ample sur X. Il existe un entier m_0 tel que pour tout entier $m \geq m_0$ et tout fibré semi-stable E de rang r et de degré d sur X, $E(m) = E \otimes \mathcal{O}_X(m)$ soit engendré par ses sections, et $h^1(E(m)) = 0$. On pose, si $m \geq m_0$,

$$q \;=\; h^0(E(m)) \;=\; d + r.\deg(\mathcal{O}_X(1))m + r(1-g) \ ,$$

et soit P le polynôme

$$d + r(1-g) + r.\deg(\mathcal{O}_X(1).T \ .$$

Soit

$$R \;=\; \mathrm{Quot}_P(\mathcal{O}_X(-m) \otimes \mathbb{C}^q) \ .$$

Rappelons que c'est la variété projective représentant le foncteur

$$\Psi_0 : \text{Variétés algébriques} \longrightarrow \text{Ensembles}$$

associant à S l'ensembles des classes d'isomorphisme de morphismes surjectifs de faisceaux sur $S \times X$

$$p_X^*(\mathcal{O}_X(-m) \otimes \mathbb{C}^q) \longrightarrow E \ ,$$

où E est plat sur S, et où pour tout point fermé s de S, E_s a pour polynôme de Hilbert P relativement à $\mathcal{O}_X(1)$ (deux tels morphismes $f : p_X^*(\mathcal{O}_X(-m) \otimes \mathbb{C}^q) \longrightarrow E$ et $f' : p_X^*(\mathcal{O}_X(-m) \otimes \mathbb{C}^q) \longrightarrow E'$ sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $\phi : E \to E'$ tel qu'on ait $f' = \phi \circ f$). Il existe un morphisme surjectif "universel"

$$\theta : p_X^*(\mathcal{O}_X(-m) \otimes \mathbb{C}^q) \longrightarrow \mathbb{F}_0$$

sur $R \times X$ (cf. [6]), On note R^{ss} (resp. R^s) l'ouvert des points y de R tels que

$$\theta_y : \mathcal{O}_X(-m) \otimes \mathbb{C}^q \longrightarrow \mathbb{F}_{0y}$$

induise un isomorphisme

$$\mathbb{C}^q \;\simeq\; H^0(\mathbb{F}_{0y}(m)) \ ,$$

et que $\mathbb{F}_{0y}$ soit semi-stable (resp. stable). C'est un ouvert lisse de R. De la restriction de $\mathbb{F}_0$ à $R^{ss} \times X$ on déduit un morphisme

$$\pi = f_{\mathbb{F}_0} : R^{ss} \longrightarrow U(r,d) \ .$$

Le groupe $\mathrm{PGL}(q)$ agit de façon naturelle sur R^{ss}, et on peut montrer que si m est assez grand, π est un bon quotient de R^{ss} par $\mathrm{PGL}(q)$, tandis que la restriction de $\pi : R^s \to U(r,d)$ est un quotient géométrique (cf. par exemple [23]). On supposera toujours dans la suite que m est assez grand pour que les propriétés précédentes soient vérifiées.

De l'action de $\mathrm{PGL}(q)$ sur R^{ss} on déduit une action de $\mathrm{GL}(q)$. Si y est un point fermé de R^{ss}, le stabilisateur de y dans $\mathrm{GL}(q)$ s'identifie naturellement au groupe des automorphismes de $\mathbb{F}_{0y}$.

2. Descente de fibrés vectoriels

Soit Y une variété algébrique intègre sur laquelle opère algébriquement un groupe algébrique réductif G. On suppose qu'il existe un bon quotient $\pi : Y \to M$ (cf. [15], [19]).

Lemme 2.1 : *Soit y un point fermé de Y. Il existe une unique orbite fermée de Y contenue dans $\overline{Gy}$. Cette orbite fermée est aussi la seule qui soit contenue dans $\pi^{-1}(\pi(y))$.*

Démonstration. Existence : Il suffit de prendre une orbite de dimension minimale dans $\overline{Gy}$.

Unicité : Soient Γ_1, Γ_2 deux orbites fermées de Y contenues dans $\pi^{-1}(\pi(y))$. Alors on a $\pi(\Gamma_1) = \pi(\Gamma_2) = \{\pi(y)\}$, donc puisque π est un bon quotient, et Γ_1, Γ_2 fermées, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ est non vide. Donc $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Ceci démontre le lemme 2.1. □

Pour tout fibré vectoriel algébrique E sur M, le fibré $\pi^*(E)$ est muni d'une structure naturelle de G-fibré vectoriel sur Y. Si F est un G-fibré vectoriel sur Y, on dit que F *descend à M* s'il existe un fibré vectoriel E sur M tel que les G-fibrés F et $\pi^*(E)$ soient isomorphes.

Lemme 2.2 : *Soit F un G-fibré vectoriel de rang r sur Y. Alors F descend à M si et seulement si pour tout point fermé m de M il existe un voisinage U de m et un G-isomorphisme*

$$F_{|\pi^{-1}(U)} \ \simeq \ r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U)} \ ,$$

l'action de G sur $r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U)}$ étant triviale sur les fibres.

Démonstration. Nécessité : On prend pour U un voisinage de m tel que $E_{|U}$ soit trivial.

Suffisance : Supposons la condition du lemme réalisée. Il existe alors un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de M tel que pour tout i dans I il existe un G-isomorphisme

$$f_i : F_{|\pi^{-1}(U_i)} \xrightarrow{\simeq} r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U_i)} \ ,$$

Posons

$$g_{ij} = f_j \circ f_i^{-1} : r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U_i\cap U_j)} \xrightarrow{\simeq} r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U_i\cap U_j)} \ .$$

Les g_{ij} sont des isomorphismes G-invariants et définissent donc des isomorphismes

$$\overline{g}_{ij} : r\mathcal{O}_{U_i \cap U_j} \longrightarrow r\mathcal{O}_{U_i \cap U_j} \ .$$

Les $\overline{g}_{ij}$ constituent une famille de cocycles définissant un fibré vectoriel E sur M tel que $\pi^*(E)$ soit isomorphe à F. Ceci démontre le lemme 2.2. □

Théorème 2.3 (Lemme de descente) : *Soit F un G-fibré vectoriel sur Y. Alors E descend à M si et seulement si pour tout point fermé y de Y tel que Gy soit fermée, le stabilisateur de y dans G agit trivialement sur F_y.*

Ce résultat est dû à Kempf. Nous en avions précédemment une version plus compliquée, limitée au cas où F est de rang 1, avec plus de conditions à vérifier sur le fibré F. Cette version s'inspirait de [1], prop. 2.3.

Démonstration. Si F descend à M, il est immédiat que le stabilisateur de tout point de Y agit trivialement sur la fibre de F en ce point.

Réciproquement, supposons que F possède la propriété du théorème 2.3. Soit y un point fermé de Y. D'après le lemme 2.2, il faut montrer qu'il existe un ouvert U de M contenant $\pi(y)$ et un isomorphisme

$$s : r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U)} \xrightarrow{\simeq} F_{|\pi^{-1}(U)}$$

G-invariant, c'est à dire tel que pour tout point y' de $\pi^{-1}(U)$ et tous v dans $r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U),y'}$, g dans G, on ait $s(gv) = gs(v)$. Il revient au même de trouver r sections G-invariantes

$$s_i : \mathcal{O}_{\pi^{-1}(U)} \longrightarrow F_{|\pi^{-1}(U)}$$

qui engendrent $F_{|\pi^{-1}(U)}$. Soit $C = Gz$ l'unique orbite fermée de Y contenue dans $\pi^{-1}(\pi(y))$. Montrons qu'il existe r sections G-invariantes

$$\sigma_i : \mathcal{O}_C \longrightarrow F_C$$

engendrant $F_{|C}$: soient $u_1, \ldots, u_r$ une base de F_z, et G_z le stabilisateur de z dans G. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
g \arrow[d, mapsto] & G \arrow[r, "g \mapsto gu_i"] \arrow[d] & F_{|C} \arrow[d, "\text{projection}"] \\
gz & C \arrow[r, equal] & C
\end{tikzcd}$$

Puisque G_z agit trivialement sur F_z on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
G/G_z \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi"] & F_{|C} \arrow[d] \\
C \arrow[r, equal] & C
\end{tikzcd}$$

Le morphisme ϕ est un isomorphisme. On en déduit

$$\psi \circ \phi^{-1} : C \longrightarrow F_{|C}$$

qui définit la section G-invariante σ_i de $F_{|C}$. Il est immédiat que ces sections engendrent $F_{|C}$.

Soit V un ouvert affine de M contenant $\pi(y)$. Puisque π est un bon quotient, $\pi^{-1}(V)$ est un ouvert affine de Y, qui contient C. On considère l'action de G sur $H^0(\pi^{-1}(V), F) : (g, s) \to g.s$, où $g.s(y') = gs(g^{-1}y')$ pour tout y' dans $\pi^{-1}(V)$. Les éléments G-invariants de $H^0(\pi^{-1}(V), F)$ sont précisément les sections G-invariantes de $F_{|\pi^{-1}(V)}$.

Montrons qu'il existe un opérateur de Reynolds

$$R : H^0(\pi^{-1}(V), F) \longrightarrow H^0(\pi^{-1}(V), F)^G$$

bien que $H^0(\pi^{-1}(V), F)$ ne soit pas de dimension finie. Pour cela il suffit de vérifier que dans $H^0(\pi^{-1}(V), F)$, chaque G-orbite est contenue dans un sous-espace vectoriel de dimension finie. Pour cela, on considère un ouvert dense affine V_0 de $\pi^{-1}(V)$ sur lequel F est trivial. Soit $s \in H^0(\pi^{-1}(V), F)$. Le morphisme

$$G \times V_0 \longrightarrow F_{|V_0} \simeq r\mathcal{O}_{V_0}$$

$$(g, v_0) \longmapsto gs(g^{-1}v_0)$$

peut être vu comme une fonction régulière

$$f : G \times V_0 \longrightarrow \mathbb{C}^r \ .$$

Puisque $\mathbb{C}[G \times V_0] \simeq \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[V_0]$, on peut mettre f sous la forme

$$f \ = \sum_{1 \leq i \leq p} \phi_i \otimes \psi_i \ ,$$

où pour $1 \leq i \leq p$, $\phi_i : G \to \mathbb{C}$, $\psi_i : V_0 \to \mathbb{C}^r$ sont des morphismes. Alors $G.s_{|V_0}$ est contenu dans le sous-espace vectoriel de $H^0(V_0, F)$ engendré par $\psi_1, \ldots, \psi_p$, et Gs est contenu dans l'intersection de ce sous-espace avec $H^0(\pi^{-1}(V), F)$. On a donc prouvé l'existence de R.

On a de même un opérateur de Reynolds

$$R' : H^0(C, F) \longrightarrow H^0(C, F)^G \ .$$

Soit $\alpha : r\mathcal{O}_C \to F_{|C}$ un isomorphisme G-invariant, dont l'existence a été prouvée précédemment. Soient

$$\alpha_i : \mathcal{O}_C \longrightarrow F_{|C} \ , \quad 1 \leq i \leq r \ ,$$

les restrictions de α aux facteurs directs de $r\mathcal{O}_C$. Puisque $\pi^{-1}(C)$ est une sous-variété fermée de la variété affine $\pi^{-1}(V)$, α_i admet un prolongement

$$\overline{\alpha}_i : \mathcal{O}_{\pi^{-1}(V)} \longrightarrow F_{|\pi^{-1}(V)} \ ,$$

qui est une section non nécessairement G-invariante. Mais $R(\overline{\alpha}_i)$ l'est, et $R(\overline{\alpha}_i)_{|C} = \alpha_i$ par fonctorialité de l'opérateur de Reynolds. On pose

$$\overline{\alpha} \ = \ (R(\overline{\alpha}_1), \ldots, R(\overline{\alpha}_p)) : r\mathcal{O}_{\pi^{-1}(V)} \longrightarrow F_{|\pi^{-1}(V)} \ ,$$

qui est un morphisme G-invariant qui prolonge α.

Il reste à prouver que l'ouvert W de $\pi^{-1}(V)$ des points au dessus desquels $\overline{\alpha}$ est un isomorphisme contient un ouvert de la forme $\pi^{-1}(U)$, U étant un ouvert de M contenant $\pi(y)$. Les fermés $\pi^{-1}(V) \backslash W$ et C de $\pi^{-1}(V)$ sont G-invariants et disjoints, donc puisque la restriction

de $\pi : \pi^{-1}(V) \to V$ est un bon quotient, $\pi(\pi^{-1}(V)\backslash W)$ et $\pi(C) = \{\pi(y)\}$ sont des fermés disjoints de V. Il suffit de prendre

$$U \;=\; V\backslash\pi(\pi^{-1}(V)\backslash W)\ .$$

Ceci achève la démonstration du théorème 2.3. □

Remarque : Le fibré vectoriel E sur M tel que les G-fibrés vectoriels $\pi^*(E)$ et F soient isomorphes est unique à isomorphisme près, car il découle aisément du lemme 2.2 que la projection $\pi^*(E) \to E$ est un bon quotient par $\mathrm{PGL}(q)$. On a donc $E = F/\,\mathrm{PGL}(q)$.

3. Groupe de Picard de $F(r,d)$ et $\mathrm{PGL}(q)$-fibrés en droites sur R^{ss}

3.1 – Définitions

Définition 1. Un *fibré en droites L sur $F(r,d)$* est défini par la donnée de

(i) Pour toute famille F de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par une variété lisse S, d'un fibré en droites L_F sur S, ne dépendant que de la classe d'équivalence de F.

(ii) Pour tout morphisme $f : S' \to S$ de variétés lisses, d'un isomorphisme

$$\alpha_F^L(f) : L_{f\#(F)} \xrightarrow{\simeq} f^*(L_F)$$

ne dépendant que de la classe d'équivalence de F, tel que si $g : S'' \to S'$ est un autre morphisme de variétés lisses, on ait

$$\alpha_F^L(f \circ g) \;=\; \alpha_{f\#(F)}^L(g) \circ g^*(\alpha_F^L(f))\ ,$$

(en particulier $\alpha_F^L(I_S) = I_{L_F}$).

Définition 2. Soient L, L' des fibrés en droites sur $F(r,d)$. Un *isomorphisme* $L \simeq L'$ est la donnée, pour toute famille F de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par une variété lisse S, d'un isomorphisme

$$\sigma_F : L_F \xrightarrow{\simeq} L'_F$$

ne dépendant que de la classe d'équivalence de F, tel que si $f : S' \to S$ est un morphisme de variétés lisses, on ait

$$\sigma_{f\#(F)} \;=\; \alpha_F^{L'}(f) \circ f^*(\sigma_F) \circ \alpha_F^L(f)^{-1}\ .$$

Définition 3. Les classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur $F(r,d)$ constituent de façon évidente un groupe commutatif, appelé *groupe de Picard de $F(r,d)$*, et noté $\mathrm{Pic}(F(r,d))$.

Soit L_0 un fibré en droites sur $U(r,d)$. On en déduit un fibré en droites L sur $F(r,d)$ défini par $L_F = f_F^*(L_0)$, pour toute famille F de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par une variété lisse, les $\alpha_F^L(f)$ étant définis de manière évidente. On obtient ainsi un morphisme de groupes

$$i : \mathrm{Pic}(U(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(F(r,d))\ .$$

Définition 4. On dit qu'un élément de $Pic(F(r,d))$ *provient de* $\mathrm{Pic}(U(r,d))$ s'il est dans l'image de i.

3.2 – Groupe de Picard de $F(r,d)$ et $\mathrm{PGL}(q)$-fibrés en droites sur R^{ss} et R^s

Soit

$$\eta : R^{ss} \times \mathrm{PGL}(q) \longrightarrow R^{ss} \times \mathrm{PGL}(q)$$
$$(y,g) \longmapsto (gy,g)$$

Lemme 3.1 : *Les familles* $\eta^{\#}(p^{\#}_{R^{ss}}(\mathbb{F}_0))$ *et* $p^{\#}_{R^{ss}}(\mathbb{F}_0)$ *de fibrés de* $U(r,d)$ *paramétrées par* $R^{ss} \times \mathrm{PGL}(q)$ *sont équivalentes.*

Démonstration. Il est clair que pour tout point y de R^{ss} et tout $g \in \mathrm{PGL}(q)$, on a un isomorphisme

$$\eta^{\#}(p^{\#}_{R^{ss}}(\mathbb{F}_0))_{|(y,g)\times X} \simeq p^{\#}_{R^{ss}}(\mathbb{F}_0)_{|(y,g)\times X} .$$

Il en découle. par simplicité des fibrés stables, que

$$p_{(R^{ss}\times \mathrm{PGL}(q))*}\big(\mathcal{H}om(\eta^{\#}(p^{\#}_{R^{ss}}(\mathbb{F}_0)), p^{\#}_{R^{ss}}(\mathbb{F}_0)\big)_{|R^s\times \mathrm{PGL}(q)}$$

est un fibré en droites L sur $R^s \times \mathrm{PGL}(q)$. On a donc un isomorphisme

$$p^{\#}_{R^{ss}}(\mathbb{F}_0)_{|R^s\times \mathrm{PGL}(q)\times X} \simeq p^*_{R^s}(L) \otimes \eta^{\#}(p^{\#}_{R^{ss}}(\mathbb{F}_0))_{|R^s\times \mathrm{PGL}(q)\times X} .$$

Puisque R^{ss} est lisse, L se prolonge en un fibré en droites sur $R^{ss} \times \mathrm{PGL}(q)$, aussi noté L. Puisque $\mathrm{codim}_{R^{ss}}(R^{ss}\backslash R^s) \geq 2$, l'isomorphisme précédent se prolonge à $R^{ss} \times \mathrm{PGL}(q) \times X$. Ceci démontre le lemme 3.1. □

Soit L un fibré en droites sur $F(r,d)$. On déduit du lemme 3.1 un isomorphisme

$$\eta^*(p^*_{R^{ss}}(L_{\mathbb{F}_0})) \simeq p^*_{R^{ss}}(L_{\mathbb{F}_0}) .$$

Cet isomorphisme définit une structure de $\mathrm{PGL}(q)$-fibré en droites sur $L_{\mathbb{F}_0}$ (cela découle de la définition 1 (ii)).

On note $\mathrm{Pic}^G(R^{ss})$ le groupe des classes d'isomorphisme de $\mathrm{PGL}(q)$-fibrés en droites sur R^{ss}. On a donc obtenu un morphisme de groupes

$$\mathrm{Pic}(F(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Pic}^G(R^{ss}) .$$

Lemme 3.2 : *Le morphisme d'oubli* $\mathrm{Pic}^G(R^{ss}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(R^{ss})$ *est injectif.*

Démonstration. Soit L un $\mathrm{PGL}(q)$-fibré en droites, trivial comme fibré en droites. Il faut montrer qu'il est aussi trivial comme $\mathrm{PGL}(q)$-fibré. Fixons un isomorphisme $L \simeq \mathcal{O}_{R^{ss}}$. Montrons que l'action de $\mathrm{PGL}(q)$ sur L est triviale. Une action de $\mathrm{PGL}(q)$ sur $R^{ss} \times \mathbb{C}$ provient d'un "morphisme croisé", c'est à dire d'un morphisme

$$\chi : \mathrm{PGL}(q) \times R^{ss} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

tel que

$$(*) \qquad \chi(gg', y) \;=\; \chi(g, g'y)\chi(g', y)$$

pour tous g, g' dans $\mathrm{PGL}(q)$ et y dans R^{ss} (on a alors $g.(y,t) = (gy, \chi(g,y)t)$). Les seules fonctions régulières inversibles sur PGL(q) sont les constantes, donc $\chi(g,y)$ est une fonction de y seulement : $\chi(g,y) = \chi_0(y)$. La relation (*) s'écrit alors

$$\chi_0(y) \;=\; \chi_0(g'y)\chi_0(y) \ ,$$

d'où $\chi_0 = 1$, et $\chi = 1$. L'action de $\mathrm{PGL}(q)$ sur L est donc bien triviale. Ceci démontre le lemme 3.2. □

Proposition 3.3 : *Le morphisme de groupes*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(F(r,d)) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(R^{ss}) \\ L & \longmapsto & L_{\mathbb{F}_0} \end{array}$$

est injectif.

Démonstration. Soit L un fibré en droites sur $F(r,d)$ tel que $L_{\mathbb{F}_0} \simeq \mathcal{O}_{R^{ss}}$. Soient S une variété lisse, et F une famille de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par S. Montrons qu'on a un isomorphisme canonique

$$u_F : L_F \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_S \ .$$

Le faisceau cohérent $W = p_{S*}(F \otimes p_X^*(\mathcal{O}_X(m)))$ est localement libre de rang q. Soient $z \in S$ et U_z un voisinage de z tel qu'on ait une trivialisation

$$\beta_z : W_{|U_z} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_{U_z} \otimes \mathbb{C}^q \ .$$

On a un morphisme canonique surjectif

$$p_S^*(W) \otimes p_X^*(\mathcal{O}_X(-m)) \longrightarrow F \ ,$$

et en utilisant la trivialisation β_z, on obtient un morphisme surjectif

$$p_X^*(\mathcal{O}_X(-m) \otimes \mathbb{C}^q) \longrightarrow F_{U_z \times X} \ .$$

On en déduit un morphisme

$$f_z : U_z \longrightarrow R^{ss} \ ,$$

et un isomorphisme $f_z^{\#}(\mathbb{F}_0) \simeq F_{|U_z \times X}$. On obtient alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} L_{F|U_z} \simeq L_{(F_{|U_z \times X})} \arrow[r, "\alpha^L_{(F_{|U_z \times X})}"] \arrow[ddr, "\lambda_z"] & f_z^*(L_{\mathbb{F}_0}) \arrow[d, "\simeq"] \\ & f_z^*(\mathcal{O}_{R^{ss}}) \arrow[d, equal] \\ & \mathcal{O}_{U_z} \end{tikzcd}$$

On va montrer que λ_z est indépendant de la trivialisation β_z. Supposons qu'on ait une autre trivialisation

$$\beta'_z : W_{|U_z} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_{U_z} \otimes \mathbb{C}^q \ .$$

On en déduit $f'_z : U_z \to R^{ss}$ et $\lambda'_z : L_{F|U_z} \to \mathcal{O}_{U_z}$. La trivialisation β'_z est la multiplication de β_z et d'un morphisme $\epsilon : U_z \to \mathrm{PGL}(q)$: pour tout $y \in U_z$ on a

$$\beta'_{z,y} \ = \ \epsilon(y) \circ \beta_{z,y} \ .$$

Il en découle que $f'_z(y) = \epsilon(y).f_z(y)$. On a, pour tout $t \in L_{F,y}$, $\lambda'_z(t) = \epsilon(y).\lambda_z(t)$, (où $\lambda_z(t)$, $\lambda'_z(t)$ sont vus respectivement comme éléments de $L_{\mathbb{F}_0,f_z(y)}$, $L_{\mathbb{F}_0,f'_z(y)}$). Comme l'action de $\mathrm{PGL}(q)$ sur $L_{\mathbb{F}_0}$ est triviale d'après le lemme 3.2, on a $\lambda'_z(t) = \lambda_z(t)$ (comme nombres complexes). Il en découle que les isomorphismes λ_z se recollent et en définissent un

$$u_F : L_F \longrightarrow \mathcal{O}_S \ .$$

Il reste à voir que ces isomorphismes sont compatibles avec les α_F^L, c'est à dire que si $f : S' \to S$ est un morphisme de variétés lisses, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
L_{f^\#(F)} \arrow[r, "u_{f^\#(F)}"] \arrow[d, "\alpha_F^L(f)"] & \mathcal{O}_{S'} \arrow[d, "\simeq"] \\
f^*(L_F) \arrow[r, "f^*(u_F)"] & f^*(\mathcal{O}_S)
\end{tikzcd}$$

Pour cela, il suffit de montrer que tout point de S possède un voisinage U tel que ce qui précède soit vrai si on remplace S, S' par U, $f^{-1}(U)$ respectivement, et F par sa restriction à U. On choisit $U = U_z$, avec les notations précédentes. Si

$$W' \ = \ p_{S'*}(f^\#(F) \otimes p_X^*(\mathcal{O}_X(m))) \ ,$$

on déduit de β_z une trivialisation de $W'_{|f^{-1}(U)}$ et un morphisme $\lambda' : f^{-1}(U) \to R^{ss}$ tel qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(U) \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "f"] & R^{ss} \arrow[d, equal] \\
U \arrow[r, "\lambda"] & R^{ss}
\end{tikzcd}$$

d'où, d'après la définition de u_F, $u_{f^\#(F)}$ un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
L_{f^\#(F)|f^{-1}(U)} \arrow[r, "u_{f^\#(F)|f^{-1}(U)}"] \arrow[d, "\alpha_F^L(f)_{|f^{-1}(U)}"] & \mathcal{O}_{f^{-1}(U)} \arrow[d, equal] \\
f^*(L_{F|f^{-1}(U)}) \arrow[r, "f^*(u_{F|f^{-1}(U)})"] & \mathcal{O}_{f^{-1}(U)}
\end{tikzcd}$$

Ceci démontre la proposition 33. □

Corollaire 3.4 : *Le morphisme de groupes*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Pic}(F(r,d)) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(R^s) \\
L & \longmapsto & L_{\mathbb{F}_0|R^s}
\end{array}$$

est injectif.

Démonstration. Cela découle immédiatement de la proposition 3.3 et du fait que $\mathrm{codim}_{R^{ss}}(R^{ss}\backslash R^s) \geq 2$. □

Rappelons (cf. §2) que si L est un $\mathrm{PGL}(q)$-fibré en droites sur R^{ss}, on dit que L descend à $U(r,d)$ s'il existe un fibré en droites L_0 sur $U(r,d)$ tel que les $\mathrm{PGL}(q)$-fibrés L et $\pi^*(L_0)$ soient isomorphes. Voici une autre conséquence immédiate de la proposition 3.3 :

Corollaire 3.5 : *Soit L un élément de $\mathrm{Pic}(F(r,d))$. Alors L provient de $\mathrm{Pic}(U(r,d))$ si et seulement si $L_{\mathbb{F}_0}$ descend à $U(r,d)$. Si L_0 est l'unique élément de $\mathrm{Pic}(U(r,d))$ tel que $L_{\mathbb{F}_0} \simeq \pi^*(L_0)$, on a $L = i(L_0)$.*

3.3 – Exemples fondamentaux d'éléments de $\mathrm{Pic}(F(r,d))$

Soit $K(X)$ le groupe de Grothendieck de X. On sait que le morphisme de groupes

$$\begin{aligned} K(X) &\longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z} \\ \alpha &\longmapsto (\det(\alpha), \mathrm{rg}(\alpha)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. On note comme dans l'Introduction $H(r,d)$ le sous-groupe de $K(X)$ constitué des α tels que $\chi([E]\otimes\alpha) = 0$, pour un fibré E de rang r et de degré d sur X. Cela signifie que

$$rg(\alpha)d + \deg(\alpha)r + \mathrm{rg}(\alpha)r(1-g) \ = \ 0 \ .$$

En particulier, $H(r,d)$ contient tous les α de rang et degré nuls. Ceux-ci constituent un sous-groupe Z de $K(X)$, isomorphe à $\mathrm{Pic}^{(0)}(X)$, l'isomorphisme étant

$$\begin{aligned} \mathrm{Pic}^{(0)}(X) &\longrightarrow Z \\ L &\longmapsto [L_0 \otimes L] - [L_0] \ , \end{aligned}$$

(L_0 étant un fibré en droites sur X fixé, l'isomorphisme ci-dessus est indépendant du choix de L_0).

Soit $\alpha \in H(r,d)$. On va en déduire un élément $\gamma(\alpha)$ de $\mathrm{Pic}(F(r,d))$. Si S est une variété algébrique lisse, et F une famille de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par S, on aura

$$\gamma(\alpha)_F \ = \ \det(p_{S!}(F \otimes p_X^*(\alpha))) \ .$$

Vérifions tout de suite que $\gamma(\alpha)_F$ ne dépend que de la classe d'équivalence de F. Soit L un fibré en droites sur S. Alors on a

$$\gamma(\alpha)_{F\otimes p_S^*(L)} \ = \ \gamma(\alpha)_F \otimes L^{\chi(F_s\otimes\alpha)} \ ,$$

(s étant un point fermé quelconque de S). Puisque $\alpha \in H(r,d)$, on a $\chi(F_s \otimes \alpha) = 0$. donc $\gamma(\alpha)_{F\otimes p_S^*(L)} = \gamma(\alpha)_F$.

On ne peut pas déduire de α un fibré en droites sur $F(r,d)$, mais un élément de $\mathrm{Pic}(F(r,d))$. Pour obtenir un fibré en droites L sur $F(r,d)$, on considère une représentation de α sous la forme

$$\alpha \;=\; [E_1]-[E_2]\ ,$$

E_1, E_2 étant des fibrés vectoriels sur X. On pose

$$L_F \;=\; \det(p_{S!}(F\otimes p_X^*(E_1)))\otimes\det(p_{S!}(F\otimes p_X^*(E_2)))^{-1}\ .$$

Les $\alpha_F^L(f)$ sont définis de manière évidente, et il est aisé de voir que pour des choix différents de E_1, E_2 (donnant le même α), on obtient un fibré en droites sur $F(r,d)$ isomorphe à L. Par définition $\gamma(\alpha)$ est la classe d'isomorphisme de L.

Remarque : Avec les notations précédentes, supposons S seulement intègre. Alors il est facile de voir que $p_{S!}(F\otimes p_X^*(\alpha))$ est contenu dans le sous-groupe de $K(S)$ engendré par les classes des faisceaux localement libres. En utilisant ce fait, on peut donner une définition de $\gamma(\alpha)_F$ dans ce cas aussi. Nous nous sommes limités au cas des variétés lisses pour alléger l'exposé.

Exemple : Le cas $r=1$. Les définitions précédentes s'appliquent aussi dans le cas où $r=1$. Pour tout $\alpha\in Z$, $\gamma(\alpha)$ provient de $\mathrm{Pic}(U(1,d))=\mathrm{Pic}(J^{(d)})$, et on peut ainsi considérer $Z=\mathrm{Pic}^{(0)}(X)$ comme un sous-groupe de $\mathrm{Pic}(J^{(d)})$ (cf. [12]).

3.4 – Effets de la torsion par un fibré en droites

Soient k un entier et L_0 un fibré en droites sur X de degré k. On a un isomorphisme

$$U(r,d)\xrightarrow{\phi}U(r,d+kr)$$

associant à la classe d'équivalence de E celle de $E\otimes L_0$. Pour tout fibré en droites L de degré d sur X, cet isomorphisme en induit un

$$U(r,L)\longrightarrow U(r,L\otimes L_0^r)\ .$$

L'isomorphisme ϕ est compatible avec un isomorphisme évident de foncteurs

$$F(r,d)\longrightarrow F(r,d+kr)\ .$$

On a un automorphisme de groupes

$$\begin{aligned} K(X) &\longrightarrow K(X)\\ \alpha &\longmapsto \alpha\otimes[L_0^{-1}]\ , \end{aligned}$$

induisant un isomorphisme $H(r,d)\to H(r,d+kr)$. Il est immédiat qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H(r,d) & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{Pic}(F(r,d)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(r,d+kr) & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{Pic}(F(r,d+kr))\ . \end{array}$$

Il en découle que pour prouver tous les résultats de l'Introduction, on peut supposer d arbitrairement grand.

4. Étude des PGL(q)-fibrés en droites sur $R^{(ss)}$

Le résultat suivant permet, à l'aide du lemme de descente (§2), de prouver que tout PGL(q)-fibré en droites sur R^{ss} descend à $U(r,d)$:

Proposition 4.1 : *Soient L un* PGL(q)*-fibré en droites sur R^{ss}, et y un point fermé de R^{ss} tel que l'orbite* PGL(q)y *soit fermée. Alors le stabilisateur de y dans* PGL(q) *agit trivialement sur L_y.*

Lemme 4.2 : *Soit y un point fermé de R^{ss}. Alors l'orbite* PGL(q)y *est fermée si et seulement si le fibré $\mathbb{F}_{0y}$ est isomorphe à une somme directe de fibrés stables.*

Démonstration. Soit $y \in R^{ss}$ tel qu'on ait une suite exacte

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \mathbb{F}_{0y} \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0 \ ,$$

E_1. E_2 étant des fibrés vectoriels de pente $\dfrac{d}{r}$. En utilisant des extensions de E_2 par E_1 on construit une famille $\mathcal{E}$ de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par $\mathbb{C}$ telle que $\mathcal{E}_t = \mathbb{F}_{0y}$ si $t \neq 0$, et $\mathcal{E}_0 = E_1 \oplus E_2$. On en déduit que dans $\overline{\mathrm{PGL}(q)y}$ il existe un point z tel que $\mathbb{F}_{0z} \simeq E_1 \oplus E_2$.

En raisonnant par récurrence on montre que dans l'adhérence de toute orbite il existe un point z tel que $\mathbb{F}_{0z}$ soit isomorphe a une somme directe de fibrés stables. Le lemme 4.2 en découle aisément. □

Démontrons maintenant la proposition 4.1. Soit y un point de R^{ss} tel que PGL(q)y soit fermée. D'après le lemme 4.1, $\mathbb{F}_{0y}$ est isomorphe à une somme directe de fibrés stables :

$$\mathbb{F}_{0y} \ \simeq \ m_1 E_1 \oplus \cdots \oplus m_p E_p \ ,$$

où pour $1 \leq i \leq p$, m_i est un entier, $m_i \geq 1$, E_i un fibré stable, et E_i n'est pas isomorphe à E_j si $i \neq j$.

Pour tout point y' de R^{ss}, on note $G_{y'}$ le stabilisateur de y' dans GL(q). Alors G_y est isomorphe à $\mathrm{GL}(m_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(m_p)$. L'action de G_y sur L_y est de la forme

$$\begin{aligned} G_y \times L_y &\longrightarrow L_y \\ (g,u) &\longmapsto \lambda(g)u \ , \end{aligned}$$

λ étant un caractère de G_y défini par des entiers $n_1, \ldots, n_p$ tels que

$$(*) \qquad m_1 n_1 + \cdots + m_p n_p \ = \ 0 \ ;$$

si $g = (g_1, \ldots, g_p) \in G_y = \mathrm{GL}(m_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(m_p)$, on a

$$\lambda(g) \ = \ \prod_{1 \leq i \leq p} \det(g_i)^{n_i} \ ,$$

(l'équation (*) découle du fait que le sous-groupe des homothéties de GL(q) agit trivialement sur L). Si $p = 1$, c'est à dire si $\mathbb{F}_{0y} \simeq m_1 E_1$, alors la proposition 4.1 est vraie, car le caractère λ est trivial.

Il suffit de prouver l'assertion suivante : il existe une variété algébrique intègre R_0 et un morphisme $\phi : R_0 \to R^{ss}$ tels que :

(i) L'image de ϕ contient y.

(ii) L'image de ϕ contient un point y_0 tel qu'on ait un isomorphisme $\mathbb{F}_{0y_0} \simeq nE$, E étant un fibré stable.

(iii) Pour tout point y' de l'image de ϕ, on a $G_y \subset G_{y'}$.

En effet, supposons cela vérifié. Alors les propriétés (i), (ii), (iii) sont encore vraies si on remplace l'image de ϕ par son adhérence S qui est une sous-variété irréductible de R^{ss}, sur laquelle G_y agit trivialement. A priori, l'action de G_y sur $L_{|S}$ s'écrit

$$\begin{aligned} G_y \times L_{|S} &\longrightarrow L_{|S} \\ (g,u) &\longmapsto \lambda_{\alpha(u)}(g)u \ , \end{aligned}$$

où $\alpha : L_{|S} \to S$ est la projection, et pour tout $s \in S$, λ_s est un caractère de G_y.

Montrons que pour $s \in S$, on a $\lambda_s = \lambda$. Soit $g \in G_y$. En prenant des trivialisations locales de $L_{|S}$, on voit que

$$\begin{aligned} \Psi : G_y \times L_{|S} &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ (g,u) &\longmapsto \lambda_{\alpha(u)}(g) \end{aligned}$$

est un morphisme. Puisque le groupe des caractères de G_y est dénombrable, pour tout $g \in G_y$ la restriction de Ψ

$$\begin{aligned} \Psi : L_{|S} &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ u &\longmapsto \lambda_{\alpha(u)}(g) \end{aligned}$$

prend une quantité dénombrable de valeurs, donc est constante. Le caractère λ_s ne dépend donc pas du point s de S, donc $\lambda_s = \lambda$.

On a vu que G_{y_0} agit trivialement sur L_{y_0}, donc il en est de même de G_y d'après (iii). Donc λ est trivial, et G_y agit trivialement sur L_y, ce qui démontre la proposition 4.1.

Il reste à trouver le morphisme $\phi : R_0 \to R^{ss}$. Un tel morphisme équivaut à la donnée d'un morphisme surjectif de faisceaux sur $R_0 \times X$:

$$p_X^*(\mathcal{O}(-m)) \otimes \mathbb{C}^q \xrightarrow{\theta'} \mathbb{E} \ ,$$

où $\mathbb{E}$ est une famille de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par R_0, tel qu'en tout point fermé z de R_0, θ'_z induise un isomorphisme $\mathbb{C}^q \simeq H^0(X, \mathbb{E}_z(m))$. La condition (iii) équivaut à la suivante : pour tout $g \in G_y$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} p_X^*(\mathcal{O}(-m)) \otimes \mathbb{C}^q & \xrightarrow{\theta'} & \mathbb{E} \\ \downarrow g & & \downarrow \simeq \\ p_X^*(\mathcal{O}(-m)) \otimes \mathbb{C}^q & \xrightarrow{\theta'} & \mathbb{E} \end{array}$$

(g étant vu comme élément de $\mathrm{GL}(q)$).

On considère, pour $1 \leq i \leq p$, l'ouvert R_i^{ss} du schéma de Grothendieck correspondant à E_i,

$$\theta_i : p_X^*(\mathcal{O}(-m)) \otimes \mathbb{C}^{q_i} \longrightarrow \mathbb{F}_{0i}$$

le morphisme surjectif universel sur $R_i^{ss} \times Y$. Fixons des isomorphismes

$$\mathbb{C}^{q_i} \ \simeq \ H^0(E_i(m)) \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq p \ .$$

Alors du point y on déduit un isomorphisme

$$\mathbb{C}^q \ \simeq \bigoplus_{1 \leq i \leq p} (\mathbb{C}^{q_i})^{m_i} \ \simeq \bigoplus_{1 \leq i \leq p} \mathbb{C}^{m_i} \otimes \mathbb{C}^{q_i} \ .$$

On prend maintenant $R_0 = R_1^{ss} \times \cdots \times R_p^{ss}$, et θ' est la composée

$$p_X^*(\mathcal{O}(-m)) \otimes \mathbb{C}^q \simeq \bigoplus_{1 \leq i \leq p} p_X^*(\mathcal{O}(-m)) \otimes (\mathbb{C}^{q_i})^{m_i} \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq p} \left(p^{\#}_{R_i^{ss}}(\mathbb{F}_{0i})\right)^{m_i} \ ,$$

le second morphisme étant un produit des θ_i. Il est immédiat que θ' vérifie bien les conditions requises. La proposition 4.1 est donc démontrée. □

Corollaire 4.3 : *Le morphisme canonique*

$$i : \mathrm{Pic}(U(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(F(r,d))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Cela découle immédiatement du corollaire 3.5, de la proposition 4.1 et du lemme de descente (théorème 2.3). □

5. Étude des GL(q)-fibrés en droites sur R^{ss}

Rappelons que $n = \mathrm{PGCD}(r,d)$, et qu'un GL(q)-fibré en droites sur R^s est un fibré en droites algébrique sur R^s muni d'une action algébrique linéaire de GL(q) au dessus de l'action de PGL(q) sur R^s.

Soit L un GL(q)-fibré en droites sur R^s. Alors il existe un entier p tel que pour tout $y \in R^s$ et tout $t \in \mathbb{C}^* \subset \mathrm{GL}(q)$, l'action de t sur L_y soit la multiplication par t^p. On posera

$$e(L) \ = \ p \ .$$

Si $e(L) = 0$, L est en fait un PGL(q)-fibré en droites sur R^s.

Proposition 5.1 : *Soit p un entier. Alors il existe un* GL(q)*-fibré en droites L sur R^s tel que $e(L) = p$ si et seulement si p est multiple de n.*

Démonstration. Soit p un multiple de n : $p = kn$. Montrons l'existence d'un GL(q)-fibré en droites L sur R^s tel que $e(L) = p$. Il suffit de traiter le cas où $k = 1$, c'est à dire $p = n$, car si L_0 est un GL(q)-fibré en droites sur R^s tel que $e(L_0) = n$, i1 suffit de prendre $L = L_0^k$.

Considérons l'action de GL(q) sur $\mathbb{F}_0$. L'action d'un scalaire t sur une fibre de $\mathbb{F}_0$ est la multiplication par t. Il en est donc de même en ce qui concerne les GL(q)-fibrés sur R^s

$$E_1 \ = \ p_{R^s *}(\mathbb{F}_0 \otimes p_X^*(\mathcal{O}_X(m))) \ , \quad E_2 \ = \ p_{R^s *}(\mathbb{F}_0 \otimes p_X^*(\mathcal{O}_X(m) \otimes \Lambda)) \ ,$$

(Λ étant un fibré en droites de degré 1 sur X). On a

$$\mathrm{rg}(E_1) \ = \ d + r(1 - g + \deg(\mathcal{O}_X(1))m) \ , \quad \mathrm{rg}(E_2) \ = \ \mathrm{rg}(E_1) + r \ ,$$

donc $\mathrm{PGCD}(\mathrm{rg}(E_1), \mathrm{rg}(E_2)) = n$. Il existe donc des entiers a, b tels que

$$\mathrm{rg}(E_1)a + \mathrm{rg}(E_2)b \ = \ n \ .$$

et il suffit de prendre

$$L_0 \ = \ \det(E_1)^a \otimes \det(E_2)^b \ .$$

Réciproquement, soit L un $\mathrm{GL}(q)$-fibré en droites sur R^s. Il faut prouver que $e(L)$ est multiple de n.

Lemme 5.2 : *Tout* $\mathrm{GL}(q)$*-fibré en droites sur* R^{ss} *peut être prolongé en un* $\mathrm{GL}(q)$*-fibré en droites sur* R^{ss}*.*

Il en découle que tout $\mathrm{PGL}(q)$-fibré en droites sur R^s peut aussi être prolongé en un $\mathrm{PGL}(q)$-fibré en droites sur R^{ss} (nous utiliserons ce résultat pour démontrer le théorème A dans le §6).

Démonstration. Soit L un $\mathrm{GL}(q)$-fibré en droites sur R^s. Puisque R^{ss} est lisse, le fibré en droites L se prolonge en un fibré en droites sur R^{ss}, aussi noté L. Il faut montrer que la structure de $\mathrm{GL}(q)$-fibré sur L peut aussi être prolongée. Il suffit de montrer que le morphisme

$$\phi : \mathrm{GL}(q) \times L_{|R^s} \longrightarrow L_{|R^s}$$

(définissant l'action de $\mathrm{GL}(q)$) peut être prolongé en un morphisme $\mathrm{GL}(q) \times L \to L$, car les propriétés que doit vérifier ce morphisme pour qu'il définisse une structure de $\mathrm{GL}(q)$-fibré sur L découleront de celles de ϕ par continuité. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert affine de $U(r,d)$. Alors $(\pi^{-1}(U_i))_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert affine $\mathrm{PGL}(q)$-invariant de R^{ss}. Il suffit de prouver que le morphisme

$$\phi_i : \mathrm{GL}(q) \times L_{|R^s\cap\pi^{-1}(U_i)} \to L_{|R^s\cap\pi^{-1}(U_i)}$$

restriction de ϕ peut être prolongé en un morphisme

$$\mathrm{GL}(q) \times L_{|\pi^{-1}(U_i)} \to L_{|\pi^{-1}(U_i)}$$

car tous ces morphismes se recolleront. Du morphisme ϕ_i on déduit le morphisme d'anneaux

$$\mathbb{C}[L_{|R^s\cap\pi^{-1}(U_i)}] \longrightarrow \mathbb{C}[\mathrm{GL}(q) \times L_{|R^s\cap\pi^{-1}(U_i)}] \ .$$

Puisque $\mathrm{codim}_{R^{ss}}(R^{ss}\backslash R^s) \geq 2$, on a

$$\mathbb{C}[L_{|R^s\cap\pi^{-1}(U_i)}] \ = \ \mathbb{C}[L_{|\pi^{-1}(U_i)}], \quad \mathbb{C}[\mathrm{GL}(q) \times L_{|R^s\cap\pi^{-1}(U_i)}] \ \simeq \ \mathbb{C}[\mathrm{GL}(q) \times L_{|\pi^{-1}(U_i)}] \ .$$

On a donc un morphisme

$$\mathbb{C}[L_{|\pi^{-1}(U_i)}] \longrightarrow \mathbb{C}[\mathrm{GL}(q) \times L_{|\pi^{-1}(U_i)}] \ .$$

Puisque les variétés $L_{|\pi^{-1}(U_i)}$ et $GL(q) \times L_{|\pi^{-1}(U_i)}$ sont affines, de ce morphisme d'anneaux on déduit un morphisme

$$\mathrm{GL}(q) \times L_{|\pi^{-1}(U_i)} \longrightarrow L_{|\pi^{-1}(U_i)} \ ,$$

qui est le prolongement recherche de ϕ_i. Ceci achève la démonstration du lemme 5.2. $\square$

Reprenons maintenant la démonstration de la proposition 5.1. Soit $y \in R^{ss}$ tel que $\mathbb{F}_{0y}$ soit isomorphe à la somme directe de n copies d'un fibré stable : $\mathbb{F}_0 \simeq nE$. Rappelons qu'on note L l'extension à R^{ss} du $\mathrm{GL}(q)$-fibré en droites L sur R^s. Alors le stabilisateur G_y de y dans $\mathrm{GL}(q)$ s'identifie à $\mathrm{GL}(n)$. Par conséquent, de l'action de $\mathrm{GL}(q)$ sur L on déduit une action de $\mathrm{GL}(n)$ sur L_y, qui est de la forme

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(n) \times L_y &\longrightarrow L_y \\ (\sigma, u) &\longmapsto \det(\sigma)^a u \ , \end{aligned}$$

avec a entier : L'action du sous-groupe des homothéties est donc

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times L_y &\longrightarrow L_y \\ (t, u) &\longmapsto t^{an} u \ , \end{aligned}$$

On a donc $e(L) = an$, ce qui démontre la proposition 5.1. □

La proposition 5.1 sera utilisée dans le §7, mais on en donne ici d'autres conséquences. Les résultats qui suivent dans ce chapitre ne sont pas utilisés dans les démonstrations des théorèmes A à F.

5.1 – Fibrés universels

Soit U un ouvert non vide de $U_s(r,d)$. Rappelons qu'un fibré de Poincaré sur U est une famille E de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par U telle que le morphisme canonique $f_E : U \to U(r,d)$ soit l'inclusion $U \subset U(r,d)$.

Lemme 5.3 : *Il existe un fibré de Poincaré sur U si et seulement s'il en existe un sur $U_s(r,d)$.*

Démonstration. Il faut montrer que s'il existe un fibré de Poincaré sur U il en existe aussi un sur $U_s(r,d)$. On définit de façon évidente la notion de "fibré projectif universel" sur U : c'est un morphisme lisse

$$\phi : W \longrightarrow U \times X$$

tel que pour tout $u \in U$, $\phi^{-1}(\{u\} \times X)$ soit un fibré en espaces projectifs sur X :
$\phi^{-1}(\{u\} \times X) = \mathbb{P}(E)$ (droites de E), E étant un fibré stable de rang r et de degré d sur X dont le point associé de $U(r,d)$ soit u.

Il existe un fibré projectif universel sur $U_s(r,d)$: c'est $\mathbb{P}(\mathbb{F}_0)/\mathrm{PGL}(q) = \mathbb{P}_0$.

Soit V un fibré de Poincaré sur U. Alors, puisque tout fibré stable sur X est simple,

$$\Lambda \ = \ p_{\pi^{-1}(U)*}(\mathcal{H}om(\mathbb{F}_0, \pi^{\#}(V)))$$

est un fibré en droites sur $\pi^{-1}(U)$. Il en découle un isomorphisme

$$\Lambda \otimes \mathbb{F}_{0|\pi^{-1}(U)\times X} \ \simeq \ \pi^{\#}(V) \ ,$$

d'où un isomorphisme

$$\mathbb{P}(V) \ \simeq \ \mathbb{P}_{0|U} \ ,$$

c'est a dire que $\mathbb{P}_{0|U}$ est banal. Mais la banalité d'un fibré projectif est un problème birationnel (cf. [9]). Donc si $\mathbb{P}_{0|U}$ est banal, il en est de même de $\mathbb{P}_0$, c'est à dire qu'il existe un fibré de Poincaré sur $U_s(r,d)$. Ceci démontre le lemme 5.3. □

Lemme 5.4 : *Les assertions suivantes sant équivalentes :*

(i) Il existe un $\mathrm{GL}(q)$*-fibré en droites* L *sur* R^s *tel que* $e(L)=1$.

(ii) Il existe un fibré de Poincaré sur $U_s(r,d)$.

Démonstration. Supposons que L existe. Il suffit de prendre pour fibré de Poincaré le quotient $\big(\mathbb{F}_0 \otimes p_X^*(L^{-1})\big)/\,\mathrm{PGL}(q)$.

Réciproquement, si V est un fibré de Poincaré sur $U_s(r,d)$, $L = p_{R^s*}(\mathcal{H}om(\pi^{\#}(V),\mathbb{F}_0)$ est un $\mathrm{GL}(q)$-fibré en droites et $e(L)=1$. □

De la proposition 5.1 et des deux lemmes précédents on déduit le

Théorème 5.5 : *Si* r *et* d *ne sont pas premiers entre eux, et si* U *est un ouvert non vide de* $U_s(r,d)$*, il n'existe pas de fibré de Poincaré sur* U.

C'est le résultat de Ramanan [20].

Remarque : Cette démonstration ne marche pas si $g=2$, $r=2$ et d est pair, car alors $\mathrm{codim}_{R^{ss}}(R^{ss}\backslash R^s)=1$. Mais dans ce cas on dispose d'une description très précise de $U(r,d)$ permettant de faire une démonstration directe du théorème 5.5 (cf. [18]).

5.2 – Faisceaux de Poincaré sur les variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$

La démonstration du théorème G suit pas à pas celle du théorème 5.5, compte tenu des deux faits suivants :

- $M(r,c_1,c_2)$ s'obtient aussi comme quotient d'un ouvert lisse irréductible d'un schéma de Grothendieck par un groupe du type $\mathrm{PGL}(q)$ (cf. [13]).
- Le nombre maximal de termes d'une somme directe de faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ qui est un faisceau semi-stable de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 est exactement $\mathrm{PGCD}(r,c_1,\chi)$.

Évidemment, ce qui précède n'est valable que si

$$\mathrm{codim}_{M(r,c_1,c_2)}(M(r,c_1,c_2)\backslash M_s(r,c_1,c_2)) \;\geq\; 2\ .$$

Dans le cas constraire, on peut montrer que $M(r,c_1,c_2)$ s'identifie à $\mathbb{P}_5$ (espace des coniques de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$), $M_s(r,c_1,c_2)$ étant l'ouvert des coniques non dégénérées (cf. [2]). Sans entrer dans les détails, disons que pour montrer qu'il n'existe pas de fibré de Poincaré sur $M_s(r,c_1,c_2)$, on utilise le fait qu'il n'existe pas de section de la projection

$$\mathbb{P}_5 \times \mathbb{P}_2 \;\supset\; Q \longrightarrow \mathbb{P}_5\ ,$$

Q étant la conique universelle.

6. Démonstration du théorème A

On veut prouver que $U(r,d)$ et $U(r,L)$ sont localement factorielles. On ne traitera que le cas de $U(r,d)$, celui de $U(r,L)$ étant analogue.

D'après [7], proposition 6.2 et [14], p. 141, $U(r,d)$ est localement factorielle si et seulement si tout diviseur de $U(r,d)$ est localement principal, c'est à dire si et seulement si l'idéal de toute hypersurface de $U(r,d)$ est localement libre.

Cette condition équivaut à la suivante, $U(r,d)$ étant normale : le morphisme canonique

$$\mathrm{Pic}(U(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Cl}(U(r,d))$$

est un isomorphisme.

Nous avons vu dans l'Introduction qu'il suffisait de montrer que le morphisme de restriction

$$\mathrm{Pic}(U(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(U_s(r,d))$$

est surjectif. Soit L un fibré en droites sur $U_s(r,d)$. Alors $\pi_s^*(L)$ est un $\mathrm{PGL}(q)$-fibré en droites sur R^s. D'après le lemme 5.2, ce $\mathrm{PGL}(q)$-fibré en droites s'étend en un $\mathrm{PGL}(q)$-fibré en droites $\overline{L'}$ sur R^{ss}. D'après la proposition 4.1, $\overline{L'}$ vérifie les hypothèses du lemme de descente (théorème 2.3). Il existe donc un fibré en droites $\overline{L}$ sur $U(r,d)$ tel que les $\mathrm{PGL}(q)$-fibrés en droites $\overline{L'}$ et $\pi^*(\overline{L})$ soient isomorphes. On a alors

$$\overline{L}_{|R^s} \;=\; L'/\,\mathrm{PGL}(q) \;=\; L\ ,$$

donc $\overline{L}$ est l'extension voulue de L.

Le théorème A est donc démontré.

7. Description de $\mathrm{Pic}(U(r,d))$ et $\mathrm{Pic}(U(r,L))$

7.1 – Fibrés engendrés par leurs sections

Lemme 7.1 : *Soit E un fibré vectoriel de rang r sur X, engendré par ses sections globales. Alors il existe un sous-espace vectoriel H de $H^0(E)$ de dimension $r-1$, tel que la restriction $H \otimes \mathcal{O}_X \to E$ du morphisme canonique d'évaluation soit un morphisme injectif de fibrés vectoriels.*

Démonstration. Soit $x \in X$. Alors 1e morphisme canonique $H^0(E) \to E_x$ est surjectif. Il en découle que le sous-espace vectoriel de $H^0(E)$ des sections qui s'annulent en x est de codimension r. Par conséquent la sous-variété homogène de $H^0(E)$ constitutée des sections s'annulant en au moins un point de X est de codimension $r-1$, Le lemme 7.1 en découle immédiatement. □

Il existe un entier k_0 tel que pour tout entier $k \geq k_0$, tout fibré semi-stable de rang r et de degré $d+kr$ soit engendré par ses sections (cf. [23]). D'après 3.4, on peut donc supposer que tout fibré semi-stable de rang r et de degré d est engendré par ses sections. Soit E un tel fibré. On a donc d'après le lemme 7.1 une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow E \longrightarrow \det(E) \longrightarrow 0\ .$$

7.2 – Construction d'une grande famille de fibrés stables

Soient $J^{(d)}$ la jacobienne des fibrés en droites de degré d sur X, et D un fibré de Poincaré sur $J^{(d)} \times X$. Posons

$$V \;=\; R^1 p_{J*}(D^* \otimes \mathbb{C}^{r-1}) \;.$$

C'est un fibré vectoriel sur $J^{(d)}$ de rang $(r-1)(g-1+d)$. Soit $\mathbb{P}$ le fibré en espaces projectifs associé à V. D'après [23], App. II, prop. 2, il existe un fibré vectoriel $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{P} \times X$ et une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O} \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \pi_0^{\#}(D) \otimes p_{\mathbb{P}}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)) \longrightarrow 0$$

(π_0 désignant la projection $\mathbb{P} \to J^{(d)}$) telle que pour tout $y \in \mathbb{P}$, si $\alpha = \pi_0(y)$, la restriction de (*) à $\{y\} \times X$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathbb{E}_y \longrightarrow D_\alpha \otimes y \longrightarrow 0$$

soit associée à l'inclusion

$$y \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1(D_\alpha, \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C}^{r-1}) \;=\; V_\alpha \;,$$

(vue comme élément de $\mathrm{Ext}^1(D_\alpha \otimes y, \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C}^{r-1})$).

On notera $\mathbb{P}_s$ l'ouvert de $\mathbb{P}$ constitué des points y tels que $\mathbb{E}_y$ soit stable. La restriction de $\mathbb{E}$ à $\mathbb{P}_s \times X$, aussi notée $\mathbb{E}$, est une famille de fibrés stables de rang r et de degré d sur X. D'après le lemme 7.1, le morphisme canonique $f_{\mathbb{E}} : \mathbb{P}_s \to U_s(r,d)$ est surjectif.

7.3 – Autre construction de la même famille

7.3.1 – Soit $\mathbb{F}_0$ le fibré canonique sur $R^s \times X$ (cf. 1.1). Alors le faisceau $F_0 = p_{R^s *}(\mathbb{F}_0)$ est localement libre de rang $k = d + r(1-g)$. Soit Gr_0 le fibré en grassmanniennes des sous-espaces de dimension $r-1$ de F_0.

Il existe un bon quotient $\mathrm{Gr}_0 / \mathrm{PGL}(q)$: on considère pour cela l'action de $\mathrm{GL}(q)$ sur R^s. Le groupe $\mathrm{GL}(q)$ agit canoniquement sur $\mathbb{F}_0$, donc sur F_0 et $\wedge^{r-1} F_0$. La projection $\wedge^{r-1} F_0 \to R^s$ est un $\mathrm{GL}(q)$-morphisme affine. Il en découle d'après Ramanathan ([21], lemma 4.1) qu'il existe un bon quotient $\wedge^{r-1} F_0 / \mathrm{GL}(q)$. Par conséquent il existe un bon quotient $\mathrm{Gr}_0 / \mathrm{PGL}(q)$. C'est un quotient géométrique. On notera $\Gamma_0 = \mathrm{Gr}_0 / \mathrm{PGL}(q)$.

Soit $p_0 : \Gamma_0 \to U_s(r,d)$ le morphisme déduit de la projection $\mathrm{Gr}_0 \to R^s$. Soit $y \in R^s$. Alors il existe un isomorphisme canonique

$$p_0^{-1}(\pi(y)) \;\simeq\; \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(\mathbb{F}_{0y})) \;.$$

On note $\pi_{\mathrm{Gr}} : \mathrm{Gr}_0 \to \Gamma_0$ le morphisme quotient.

7.3.2 – Groupe de Picard de Γ_0. Soient Q_{Gr} le fibré quotient canonique relatif sur Gr_0 (si $y \in R^{ss}$, et $H \subset H^0(\mathbb{F}_{0y})$ est de dimension $r-1$, on a $Q_{\mathrm{Gr},H} = H^0(\mathbb{F}_{0y})/H$), et $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}(1) = \wedge^{k-r+1} Q_{\mathrm{Gr}}$. On sait que

$$\mathrm{Pic}(\mathrm{Gr}_0) \;\simeq \mathrm{Pic}(R^s) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}(1) \;.$$

Le fibré $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}(1)$ est muni de l'action canonique de $\mathrm{GL}(q)$, et on a

$$e(\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}(1)) \;=\; k - r + 1$$

(notation analogue à celle du du §5).

Proposition 7.2 : (a) *Il existe un fibré en droites sur Γ_0, noté $\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)$, tel qu'on ait, pour tout $y \in R^s$*

$$\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)_{|p_0^{-1}(\pi(y))} \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(\mathbb{F}_{0y}))}(n) \ .$$

(b) *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Pic}(\Gamma_0) \simeq \mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n) \ .$$

Démonstration. Construisons d'abord $\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)$. Le fibré F_0 est de rang $k = d + r(1-g)$, et si $x \in X$, $\mathbb{F}_{0x} = \mathbb{F}_{0|R^s \times \{x\}}$ est de rang r. On a $\mathrm{PGCD}(r.k) = n$, donc il existe des entiers a, b tels que

$$ak + br = -n(k-1+r) \ .$$

Donc, si $L = \det(F_0)^a \otimes \det(\mathbb{F}_{0x})^b$. on a $e(L) = -n(k-1+r)$. Par conséquent on a

$$e(L \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(n)) = 0 \ ,$$

et $L \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(n)$ est en fait muni d'une action de $\mathrm{PGL}(q)$. Puisque π_{Gr} est un quotient géométrique, il existe un fibré en droites $\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)$ sur Γ_0 tel que

$$\pi_{\mathrm{Gr}}^*(\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)) \simeq L \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(n) \ .$$

Il est immédiat que $\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)$ possède bien la propriété requise. Ceci démontre **(a)**.

Prouvons **(b)**. Si L est un fibré en droites sur $U_s(r,d)$, on a $p_{0*}(p_0^*(L)) \simeq L$, donc $p_0^* : \mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \to \mathrm{Pic}(\Gamma_0)$ est injectif. On en déduit avec **(a)** un morphisme injectif

$$\mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{O}_{\Gamma_0}(n) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\Gamma_0) \ .$$

Il reste à montrer qu'il est surjectif. Soit Δ un fibré en droites sur Γ_0. Alors, puisque $\mathrm{Pic}(\mathrm{Gr}_0) \simeq \mathrm{Pic}(R^s) \oplus \mathbb{Z}\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(1)$, il existe un entier m et un fibré en droites Λ' sur R^s tels que

$$\pi_{\mathrm{Gr}}^*(\Delta) \simeq p_1^*(\Lambda') \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(-m) \ ,$$

p_1 désignant la projection $\mathrm{Gr}_0 \to R^s$. Le fibré Λ' est muni d'une action de $\mathrm{GL}(q)$, et on a

$$e(\Lambda') = m(k-r+1) \ .$$

D'après la proposition 5.1, $e(\Lambda')$ est un multiple de n, et comme n et $k-r+1$ sont premiers entre eux, n divise m : posons $m = -an$. Alors $\pi_{\mathrm{Gr}}^*(\Delta \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)^a) = p_1^*(\Lambda'')$, Λ'' étant un fibré en droites sur R^s avec $e(\Lambda'') = 0$. Il en découle que Λ'' provient de $U_s(r,d)$. Donc $\Delta \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)^a$ aussi. Ceci prouve **(b)** et achève la démonstration de la proposition 7.2. □

7.3.3 – Soit Gr_0' l'ouvert de Gr_0 constitué des points H tels que le morphisme canonique de fibrés vectoriels $\mathcal{O}_X \times H \to \mathbb{F}_{0y}$ soit injectif (y désignant l'image de H dans R^{ss}). C'est un ouvert $\mathrm{PGL}(q)$-invariant, et $\Gamma_0' = \pi_{\mathrm{Gr}}(\mathrm{Gr}_0')$ est un ouvert de Γ_0.

Lemme 7.3 : *Pour tout point y de R^{ss}, $p_0^{-1}(\pi(y)) \cap (\Gamma_0 \backslash \Gamma_0')$ est une hypersurface irréductible de $p_0^{-1}(\pi(y))$.*

Démonstration. Cela signifie la chose suivante : si E est un fibré stable de rang r et de degré d sur X, la sous-variété fermée Y de $\mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))$ constituée des sous-espaces H tels que le morphisme de fibrés vectoriels $\mathcal{O}_X \otimes H \to E$ soit non injectif est une hypersurface irréductible.

Soit W la sous-variété fermée de $X \times \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))$ constituée des couples (x, H) tels que l'évaluation en $x : H \to E_x$ ne soit pas injective. Si $p_G : X \times \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E)) \to \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))$ est la projection, on a $p_G(W) = Y$. Il suffit donc de prouver que W est irréductible de codimension 2, et que les fibres de $p_G : W \to Y$ au dessus d'un point général de Y sont finies. Pour démontrer la première assertion. on remarque que pour tout $x \in X$, $p_X^{-1}(x)$ est une sous-variété fermée irréductible de $\mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))$ qui est de codimension 2 : elle est constituée des sous-espaces H tels que

$$H \cap \ker(H^0(E) \to E_x) \neq \{0\} .$$

Il reste à prouver qu'il existe un point H de Y tel que $\mathcal{O}_x \otimes H \to E$ soit non injectif en seulement un nombre fini de points de X. Pour cela, on choisit un point x de X et un sous-espace vectoriel H de dimension $r-1$ de $H^0(E)$ tel que la restriction de l'évaluation $H \to E_x$ soit injective (cela est possible car $H^0(E) \to E_x$ est surjective). Ceci démontre le lemme 7.3. □

Corollaire 7.4 : *La sous-variété fermée* $\Gamma_0 \backslash \Gamma_0'$ *de* Γ_0 *est une hypersurface irréductible.*

Démonstration. La restriction de $p_0 : \Gamma_0 \backslash \Gamma_0' \to U_s(r, d)$ est surjective, et ses fibres sont d'après le lemme 7.3 irréductibles et de même dimension. Il en découle d'après [24] (théorème 8, p. 61) que $\Gamma_0 \backslash \Gamma_0'$ est irréductible. Il est immédiat que c'est une hypersurface. □

Lemme 7.5 : *Le faisceau d'idéaux de* $\Gamma_0 \backslash \Gamma_0'$ *est de la forme* $p_0^*(\Lambda) \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)^{-d/n}$, *avec* $\Lambda \in \mathrm{Pic}(U_s(r, d))$.

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout fibré stable E de rang r et de degré d sur X, l'hypersurface Y de $\mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))$ constituée des sous-espaces H tels que le morphisme de fibrés $\mathcal{O}_x \otimes H \to E$ soit non injectif est de degré d. Pour cela, considérons le morphisme canonique de fibrés vectoriels sur X

$$\Phi : p_G^*(U) \longrightarrow p_X^*(E) ,$$

U désignant le sous-fibré universel de $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))} \otimes H^0(E)$, p_G la projection $X \times \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E)) \to \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))$. Soit W la sous-variété de $X \times \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))$ constituée des couples (x, H) tels que l'évaluation $H \to E_x$ ne soit pas injective. Alors W est le lieu des points ou Φ n'est pas injectif. D'après la formule de Porteous (cf. [4]), $c_2(p_X^*(E) - p_G^*(U))$ est un multiple entier de $[W]$ dans $A^2(X \times \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))$. On a

$$c_2(p_X^*(E) - p_G^*(U)) \;=\; \alpha_1^2 - \alpha_2 - \alpha_1 \det(E) ,$$

α_1, α_2 étant respectivement la première et la seconde classe de Chern de U. Puisque $c_2(p_X^*(E) - p_G^*(U))$ n'est pas divisible dans $A^2(X \times \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))$, on a

$$[W] \;=\; \alpha_1^2 - \alpha_2 - \alpha_1 \det(E) .$$

On a alors dans $A^1(X \times \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(E))$

$$[Y] \;=\; p_G^*([W]) \;= -\deg(E)\alpha_1$$

donc Y est de degré d. Ceci démontre le lemme 7.5. $\square$

Proposition 7.6 : *On a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\Gamma_0') \longrightarrow \mathbb{Z}/(d/n)\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ .$$

Démonstration. Montrons d'abord que $\Phi = p_0^* : \mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \to \mathrm{Pic}(\Gamma_0')$ est injectif. Soit L_0 un fibré en droites sur $U_s(r,d)$ tel que $p_0^*(L_0)$ soit trivial sur Γ_0'. On a une suite exacte de groupes

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathrm{Pic}(\Gamma_0) \xrightarrow{\text{restriction}} \mathrm{Pic}(\Gamma_0') \longrightarrow 0$$

([7], proposition II.6.5), le morphisme i associant à m la puissance m-iême du faisceau d'idéaux de $\Gamma_0 \backslash \Gamma_0'$. Il en découle qu'on a, dans $\mathrm{Pic}(\Gamma_0)$,

$$p_0^*(L_0) \ \simeq \ p_0^*(\Lambda^m) \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)^{-dm/n} \ ,$$

avec m entier, $p_0^*(\Lambda) \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_0}(n)^{-d/n}$ étant le faisceau d'idéaux de $\Gamma_0 \backslash \Gamma_0'$, d'après 1e lemme 7.5. D'après la proposition 7.2(b), on a $m = 0$, d'où $p_0^*(L_0) \simeq \mathcal{O}_{\Gamma_0}$, et on en déduit, toujours à l'aide de la même proposition, que L_0 est trivial. Donc Φ est injectif.

On a un diagramme commutatif de groupes, avec lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathbb{Z} \arrow[r, equal] \arrow[d, "i"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "j"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \arrow[r, "p_0^*"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Pic}(\Gamma_0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \arrow[r, "\Phi"] & \mathrm{Pic}(\Gamma_0') \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

La première ligne exacte découle de la proposition 7.2(b) et j est la multiplication par d/n. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pic}(\Gamma_0')/\,\mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \ &= \ \mathrm{Pic}(\Gamma_0)/i(\mathbb{Z})/\,\mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \\
&= \ \mathrm{Pic}(\Gamma_0)/(i(\mathbb{Z}) + \mathrm{Pic}(U_s(r,d))) \\
&= \ \mathbb{Z}/j(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/(d/n)\mathbb{Z} \ .
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 7.6. $\square$

7.3.4 – Soit U_{Gr} le sous-fibré universel relatif sur Gr_0. Pour tout $y \in R^{ss}$ et tout $H \in \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(\mathbb{F}_{0y}))$, on a $U_{\mathrm{Gr},H} = H$. Soit

$$T \ = \ \mathcal{H}om(\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0} \otimes \mathbb{C}^{r-1}, U_{\mathrm{Gr}}) \ ,$$

fibré vectoriel sur Gr_0 muni d'une action évidente de $\mathrm{GL}(q)$. On pose

$$\mathbb{T} \;=\; T/\,\mathrm{GL}(q) \;=\mathbb{P}(T)/\,\mathrm{PGL}(q)\ , \qquad T' \;=\; \mathcal{I}som(\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}\otimes\mathbb{C}^{r-1}, U_{\mathrm{Gr}})\ .$$

Lemme 7.7 : *Il existe sur* $\mathbb{T}$ *une structure de fibré en espaces projectifs localement trivial sur* Γ_0.

Démonstration. Si $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(1) = \Lambda^{r-1}U_{\mathrm{Gr}}$, muni de l'action de $\mathrm{GL}(q)$ déduite de celle de $\mathrm{GL}(q)$ sur U_{Gr}, on a $e(\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(1)) = r-1$. D'autre part, il existe d'après la proposition 5.1 un fibré en droites L sur Gr_0, provenant de R^{ss}, tel que $e(L) = n$. Puisque $r-1$ et n sont premiers entre eux, il existe des entiers a, b tels que $an + b(r-1) = 1$. Alors, si $L_0 = L^a \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}_0}(b)$, on a $e(L_0) = 1$. Il en découle que $T \otimes L_0^{-1}$ est en fait muni d'une action de $\mathrm{PGL}(q)$. Le quotient $(T \otimes L_0^{-1})/\,\mathrm{PGL}(q)$ est un fibré vectoriel sur Γ_0 dont le fibré en espaces projectifs associé est $\mathbb{T}$. Ceci démontre le lemme 7.7. □

Soit $p'_0 : \mathbb{T} \to \Gamma_0$ le morphisme canonique. Pour tout $y \in R^{ss}$ et tout $H \in p_0^{-1}(\pi(y)) = \mathrm{Gr}^{r-1}(H^0(\mathbb{F}_{0y}))$, on a ${p'_0}^{-1}(H) = \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{r-1}, H))$. Soit $\mathbb{T}'$ l'ouvert de $\mathbb{T}$ des points au dessus de Γ'_0, correspondant aux isomorphismes. On a

$${p'_0}^{-1}(H) \cap \mathbb{T}' \;=\; \mathbb{P}(\mathrm{Isom}(\mathbb{C}^{r-1}, H))\ .$$

Proposition 7.8 : *On a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(\Gamma'_0) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathbb{T}') \longrightarrow \mathbb{Z}/(r-1)\mathbb{Z} \longrightarrow 0\ .$$

Démonstration. La démonstration est analogue a celle de la proposition 7.6, compte tenu du fait que le faisceau d'ideaux de $\mathbb{T}\backslash\mathbb{T}'$ est de la forme $\mathcal{O}_{\mathbb{T}}(r-1) \otimes \phi^*(L)$, L étant un fibré en droites sur Γ'_0 et $\phi : \mathbb{T}' \to \Gamma'_0$ la projection. □

7.3.5 – Conclusion

Proposition 7.9 : (Seshadri) *On a un isomorphisme* $\mathbb{P}^s \simeq \mathbb{T}'$.

Démonstration. Soit $y \in \mathbb{P}^s$. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C}^{r-1} \xrightarrow{\ i\ } \mathbb{E}_y \longrightarrow D_\alpha \otimes y \longrightarrow 0\ ,$$

avec $\alpha = \pi_0(y)$ (cf. 7.2). De $\mathbb{E}_y$ on déduit un point z de $U_s(r,d)$, de $\mathrm{im}(H^0(i)) \subset H^0(\mathbb{E}_y)$ un point H de Γ'_0 au dessus de z, puis de l'isomorphisme $\mathbb{C}^{r-1} \simeq \mathrm{im}(H^0(i))$ déduit de i un point de $\mathbb{T}'$ au dessus de H. Pour montrer qu'on définit ainsi un morphisme $\Phi : \mathbb{P}^s \to \mathbb{T}'$, on considère pour tout $y \in \mathbb{P}^s$ un isomorphisme sur un voisinage U de y :

$$\mathcal{O}_U \otimes \mathbb{C}^q \;\simeq\; p_{P^s *}(\mathbb{E} \otimes p_X^*(\mathcal{O}_X(m)))$$

permettant de factoriser $\Phi_{|U}$ à travers T.

L'isomorphisme réciproque est défini de la façon suivante : soient $y \in R^{ss}$, $\gamma \in T$ au dessus de y. On en déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathbb{F}_{0y} \longrightarrow \det(\mathbb{F}_{0y}) \longrightarrow 0 \ .$$

Si α est le point de $J^{(d)}$ correspondant à $\det(\mathbb{F}_{0y})$, la suite exacte précédente définit un point de $\mathbb{P}^s$ au dessus de α. On obtient ainsi un morphisme $\mathrm{GL}(q)$-invariant $T' \to \mathbb{P}^s$ qui donne par passage au quotient un morphisme $\mathbb{T}' \to \mathbb{P}^s$ inverse de Φ. Ceci démontre la proposition 7.9. $\square$

Remarques : 1 – Soient L un fibré en droites de degré d sur X,

$$\mathbb{P}_L \ = \ \pi_0^{-1}(L) \ , \qquad \mathbb{P}_L^s \ = \ \mathbb{P}_L \cap \mathbb{P}^s \ ,$$

Γ'_{0L}, $\mathbb{T}'_L$ les sous-variétés fermées de Γ'_0, $\mathbb{T}'$ respectivement, images réciproques de $U_s(r,L)$. L'isomorphisme Φ en induit un $\mathbb{P}_L^s \simeq \mathbb{T}'_L$, et on a des suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(U_s(r,L)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\Gamma'_{0L}) \longrightarrow \mathbb{Z}/(d/n)\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ ,$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(\Gamma'_{0L}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathbb{P}_L^s) \longrightarrow \mathbb{Z}/(r-1)\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ .$$

Remarquons que $\mathbb{P}_L$ est un espace projectif.

2 – Soit $p_1 : \mathrm{Gr}'_0 \to R^s$ la projection. On a vu dans le lemme 7.7 qu'il existe un $\mathrm{GL}(q)$-fibré en droites L sur Gr'_0 tel que $e(L) = 1$. Alors $V = p_1^{\#}(\mathbb{F}_{0|R^s \times X}) \otimes L^{-1}$ est en fait un $\mathrm{PGL}(q)$-fibré vectoriel sur $\mathrm{Gr}'_0 \times X$. Le quotient $\mathbb{E}' = V/\,\mathrm{PGL}(q)$ est une famille de fibrés de $U(r,d)$ paramétrée par Γ'_0. Le morphisme canonique $f_{\mathbb{E}'} : \Gamma'_0 \to U(r,d)$ n'est autre que la restriction de p_0, défini en 7.3.1. Si $p' : \mathbb{P}^s = \mathbb{T}' \to \Gamma'_0$ est la projection, il existe un fibré en droites L_0 sur $\mathbb{P}^s$ et un isomorphisme $p'^*(\mathbb{E}') \otimes L_0 \simeq \mathbb{E}$ (cela découle aisément de la simplicité des fibrés stables).

7.4 – Applications à l'étude de $\mathrm{Pic}(U(r,d))$ et $\mathrm{Pic}(Ur,L))$

7.4.1 – Étude de l'image de $\mathrm{Pic}(J^{(d)})$ *dans* $\mathrm{Pic}(U_s(r,d)$. Soit $L_0 \in \mathrm{Pic}^{(0)}(X)$, qu'on peut voir comme un élément de $\mathrm{Pic}^{(0)}(J^{(d)})$, ou de $Z \subset H(r,d)$ (cf. §3). Soit $\det : U(r,d) \to J^{(d)}$ le morphisme canonique. On a défini dans le §3 un morphisme de groupes

$$\gamma : H(r,d) \longrightarrow \mathrm{Pic}(F(r,d)) = \mathrm{Pic}(U(r,d)) \ .$$

Proposition 7.10 : *On a* $\gamma(L_0) = \det^*(L_0)$.

Lemme 7.11 : *Le morphisme*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(F(r,d)) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^s) \\ L & \longmapsto & L_{\mathbb{E}} \end{array}$$

est injectif.

Démonstration. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}' = \mathbb{P}^s & \xrightarrow{f_{\mathbb{E}}} & U_s(r,d) \\ \uparrow{\scriptstyle \pi'} & & \uparrow{\scriptstyle \pi} \\ T' & \xrightarrow{p} & R^{ss}, \end{array}$$

π' étant le morphisme quotient, et p la projection canonique. Si $L \in \mathrm{Pic}(F(r,d))$ est tel que $L_{\mathbb{E}}$ soit trivial, $\pi'^*(L_{\mathbb{E}}) = L_{\pi'^*(\mathbb{E})}$ l'est aussi. Mais d'après la remarque 2 de 7.3.4, la famille $\pi'^*(\mathbb{E})$ est équivalente à $p^*(\mathbb{F}_{0|R^s\times X})$. Donc

$$L_{p^*(\mathbb{F}_{0|R^s\times X})} \;=\; p^*\big(L_{\mathbb{F}_{0|R^s\times X}}\big)$$

est aussi trivial. Le morphisme

$$p^* : \mathrm{Pic}(R^{ss}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(T')$$

est injectif : la démonstration est analogue à celle de l'injectivité de $\mathrm{Pic}(U_s(r,d)) \to \mathrm{Pic}(\Gamma'_0)$ dans la proposition 7.6. Il en découle que $L_{\mathbb{F}_{0|R^s\times X}}$ est trivial. D'après le corollaire 3.4, L est aussi trivial. Ceci démontre le lemme 7.11. □

Pour démontrer la proposition 7.10 il suffit donc de prouver que

$$\gamma(L_0)_{\mathbb{E}} \;\simeq\; f_{\mathbb{E}}^*(\det{}^*(L_0)) \ .$$

Soit L_1 un fibré en droites de degré 0 sur X. L'élément de Z correspondant à L_0 est $[L_0 \otimes L_1] - [L_1]$, et l'élément de $\mathrm{Pic}^{(0)}(J^{(d)})$ correspondant à L_0 est aussi celui provenant de l'élément précédent de Z (cf. 3.3). D'autre part, le morphisme composé

$$\mathbb{P}^s \longrightarrow U_s(r,d) \xrightarrow{\det} J^{(d)}$$

est celui qui est défini par la famille $\det(\mathbb{E})$ de fibrés en droites de degré d sur X. Il suffit donc de prouver le résultat suivant : pour tout fibré en droites L_1 de degré 0 sur X, on a un isomorphisme

$$(*) \qquad \det\big(p_{\mathbb{P}^{s*}}(\mathbb{E}\otimes p_X^*(L_1))\big) \;\simeq\; \det\big(p_{\mathbb{P}^{s*}}(\det(\mathbb{E})\otimes p_X^*(L_1))\big)$$

et

$$R^1p_{\mathbb{P}^{s*}}(\mathbb{E}\otimes p_X^*(L_1)) \;=\; R^1p_{\mathbb{P}^{s*}}(\det(\mathbb{E})\otimes p_X^*(L_1)) \;=\; 0 \ .$$

Les égalités précédentes sont vérifiées car d est positif. Il reste donc à prouver l'isomorphisme (*). D'après la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s\times X}\otimes\mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \pi_0^{\#}(D)\otimes p_{\mathbb{P}^s}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)) \longrightarrow 0 \ ,$$

on a

$$\det(\mathbb{E}) \;\simeq\; \pi_0^{\#}(D)\otimes p_{\mathbb{P}^s}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)) \ .$$

On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s\times X}\otimes\mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \det(\mathbb{E}) \longrightarrow 0 \ ,$$

et l'isomorphisme (*) en découle immédiatement. Ceci démontre la proposition 7.10. □

7.4.2 – Démonstration du théorème B. Soient

$$r' \;=\; \frac{r}{n} \ , \qquad d' \;=\; \frac{-d+r(g-1)}{n} \ .$$

Il existe d'après [8], §4.6, un fibré vectoriel F sur X de rang r' et de degré d' tel qu'il existe un fibré stable de rang r et de degré d tel que

$$h^0(E \otimes F) \ = \ 0 \ .$$

On note comme dans l'Introduction $\Theta^s_{F,L}$ le sous-ensemble de $U_s(r,L)$ constitué des points correspondants aux fibrés stables E tels que $h^0(E \otimes F) \neq 0$.

Lemme 7.12 : *Le groupe* $\mathrm{Pic}(U(r,L))$ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}$.

Démonstration. Puisque $\mathrm{codim}_{U(r,L)}(U(r,L)\backslash U_s(r,L)) \geq 2$, et que $U(r,L)$ est localement factorielle. il suffit de montrer que $\mathrm{Pic}(U_s(r,L)) \simeq \mathbb{Z}$. Le groupe de Picard de $\mathbb{P}^s_L$ est un quotient de $\mathbb{Z}$, car $\mathbb{P}^s_L$ est un ouvert d'un espace projectif. Puisque $\mathrm{codim}_{U(r,L)}(U(r,L)\backslash U_s(r,L)) \geq 2$, $\mathrm{Pic}(U_s(r,L))$ possède au moins un élément qui n'est pas d'ordre fini, et comme $\mathrm{Pic}(U_s(r,L)) \subset \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^s_L)$ d'après la remarque 1 de 7.3.5, on a $\mathrm{Pic}(U_s(r,L)) \simeq \mathbb{Z} \simeq \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^s_L)$, ce qui démontre le lemme 7.12. □

Proposition 7.13 : *L'image de* $\mathrm{Pic}(U_s(r,L))$ *dans* $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^s_L) \simeq \mathbb{Z}$ *est le sous-groupe* $(r-1)\dfrac{d}{n}\mathbb{Z}$.

Démonstration. On a d'après 7.3.5 des suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(U_s(r,L)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\Gamma'_{0L}) \longrightarrow \mathbb{Z}/\frac{d}{n}\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ ,$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(\Gamma'_{0L}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^s_L) \longrightarrow \mathbb{Z}/(r-1)\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ ,$$

d'où une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/(r-1)\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^s_L)/\,\mathrm{Pic}(U_s(r,L)) \longrightarrow \mathbb{Z}/\frac{d}{n}\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ .$$

On en déduit que $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^s_L)/\,\mathrm{Pic}(U_s(r,L))$ possède $(r-1)\dfrac{d}{n}$ éléments, ce qui démontre la proposition 7.13. □

D'après le corollaire 4.3, le morphisme canonique

$$i : \mathrm{Pic}(U(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(F(r,d))$$

est un isomorphisme. Posons

$$\mathbb{L} : i^{-1} \circ \gamma : H(r,d) \longrightarrow \mathrm{Pic}(U(r,d))$$

(cf. §3). On note $\mathbb{E}_L$ la restriction de $\mathbb{E}$ à $\mathbb{P}^s_L \times X$, et pour tout entier m on pose $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s_L}(m) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_L}(m)_{|\mathbb{P}^s_L}$.

Lemme 7.14 : *On a* $\gamma([F])_{\mathbb{E}_L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s_L}\left(-(r-1)\dfrac{d}{n}\right)$.

Démonstration. Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s_L \times X} \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathbb{E}_L \longrightarrow p^*_{\mathbb{P}^s_L}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s_L}(-1)) \otimes L \longrightarrow 0 \ .$$

On en déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s_L} \otimes H^0(\mathbb{C}^{r-1} \otimes F) \longrightarrow p_{\mathbb{P}^s_L *}(\mathbb{E}_L \otimes F) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s_L}(-1) \otimes H^0(F \otimes L) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s_L} \otimes H^1(\mathbb{C}^{r-1} \otimes F) \longrightarrow R^1 p_{\mathbb{P}^s_L *}(\mathbb{E}_L \otimes F) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s_L}(-1) \otimes H^1(F \otimes L) \longrightarrow 0 \ ,$$

et l'isomorphisme

$$\det(p_{\mathbb{P}^s_L !}(\mathbb{E}_L \otimes F)) \ \simeq \ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s_L}(-\chi(F \otimes L)) \ .$$

Le lemme 7.14 découle du fait que $\chi(F \otimes L) = (r-1)\dfrac{d}{n}$. □

Pour démontrer le théorème B il reste à prouver $\Theta^s_{F,L}$ est une hypersurface de $U_s(r,L)$ et que

$$\mathcal{O}(-\Theta^s_{F,L}) \ \simeq \ \mathbb{L}([F])_{|U_s(r,L)} \ .$$

Considérons le morphisme

$$\alpha : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s_L}(-1) \otimes H^0(F \otimes L) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s_L} \otimes H^1(\mathbb{C}^{r-1} \otimes F)$$

du lemme 7.14. Puisque $p_{\mathbb{P}^s_L *}(\mathbb{E}_L \otimes F)$ est de torsion, α est un morphisme génériquement bijectif, dont le schéma des zéros est exactement $f^{-1}_{\mathbb{E}_L}(\Theta^s_{F,L})$. Il en découle que $f^{-1}_{\mathbb{E}_L}(\Theta^s_{F,L})$ est une hypersurface de $\mathbb{P}^s_L$. Les fibres de $f_{\mathbb{E}_L}$ étant de dimension constante, $\Theta^s_{F,L}$ est bien une hypersurface de $U_s(r,L)$.

Le fibré $\gamma(-[F])_{\mathbb{E}_L}$ est isomorphe au faisceau d'idéaux du schéma des zéros de α, et engendre l'image de $\mathrm{Pic}(U_s(r,d))$ dans $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^s_L)$ d'après la proposition 7.13. Le fibré $\mathcal{O}(f^{-1}_{\mathbb{E}_L}(\Theta^s_{F,L}))$ est une puissance de $\gamma([F])_{\mathbb{E}_L}$. On doit donc avoir en fait

$$\mathcal{O}(f^{-1}_{\mathbb{E}_L}(\Theta^s_{F,L})) \ = \ \gamma(-[F])_{\mathbb{E}_L} \ ,$$

d'où

$$\mathcal{O}(-\Theta^s_{F,L}) \ = \ \mathbb{L}([F])_{|U_s(r,L)} \ .$$

Ceci achève la démonstration du théorème B.

7.4.3 – Démonstration du théorème C. On démontre d'abord de la même façon que pour $U(r,L)$ que l'image de $\mathrm{Pic}(U_s(r,d))$ dans $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^s)$ est le sous-groupe engendré par $\mathrm{Pic}(J^{(d)})$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}\left((r-1)\dfrac{d}{n}\right)$. Ensuite, comme dans les démonstrations précédentes, on montre que

$$f^*_{\mathbb{E}}(\mathcal{O}(-\Theta^s_F)) \ = \ \gamma([F])_{\mathbb{E}} \ ,$$

et que ce fibré se met sous la forme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}\left((r-1)\dfrac{d}{n}\right) \otimes L$, le fibré L provenant de $\mathrm{Pic}(J^{(d)})$. Compte tenu du théorème A, le théorème C en découle immédiatement. On obtient aussi que

$$\mathbb{L}([F]) \ = \ \mathcal{O}(-\Theta_F) \ ,$$

ce qui montre comme indiqué dans l'Introduction que si F' est un fibré vectoriel sur X analogue à F, on a

$$\mathcal{O}(\Theta_{F'}) \ = \ \mathcal{O}(\Theta_F) \otimes \det{}^* \left(det(F') \otimes \det(F)^{-1}\right) \ ,$$

($\det(F') \otimes \det(F)^{-1}$ étant vu comme un élément de $\mathrm{Pic}(J^{(d)})$).

7.4.4 – Démonstration du théorème D. Remarquons que

$$H(r,d) \;=\; Z + \mathbb{Z}[F] \ ,$$

Z désignant le sous-groupe de $H(r,d)$ isomorphe à $\mathrm{Pic}^{(0)}(X)$ (cf. §3). La partie **(a)** du théorème D découle immédiatement du corollaire 4.3.

Prouvons **(b)**. Il suffit de montrer que la restriction de

$$\mathbb{L} : H(r,d) \longrightarrow \mathrm{Pic}(U(r,d))$$

à Z est injective. En effet, la composée

$$H(r,d) \xrightarrow{\mathbb{L}} \mathrm{Pic}(U(r,d)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(U(r,L))$$

est triviale sur Z et injective sur $\mathbb{Z}[F]$ d'après 7.4.2. Donc si la restriction de $\mathbb{L}$ a Z est injective, il en est de même de $\mathbb{L}$. D'après la proposition 7.10, il suffit, pour prouver l'injectivité de $\mathbb{L}_{|Z}$, de prouver celle de

$$\det{}^* : \mathrm{Pic}^{(0)}(X) \subset \mathrm{Pic}(J^{(d)}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(U(r,L)) \ .$$

Si L_0 est un fibré en droites sur $J^{(d)}$, on a, les fibres de $\det : U(r,d) \to J^{(d)}$ étant projectives et irréductibles

$$\det{}_*(\det{}^*(L_0)) \;\simeq L_0 \ ,$$

donc $\det^*$ est injective. Ceci prouve **(b)**.

Du théorème C et de l'égalité $\mathbb{L}([F]) = \mathcal{O}(-\Theta_F)$ on déduit

$$\mathrm{Pic}(U(r,d)) \;=\; \mathrm{im}(\mathbb{L}) + \mathrm{Pic}(J^{(d)}) \ .$$

L'égalité

$$\mathrm{im}(\mathbb{L}) \cap \mathrm{Pic}(J^{(d)}) \;=\; \mathrm{Pic}^{(0)}(X)$$

est encore une conséquence du théorème C et de la proposition 7.10. Le théorème D est donc démontré.

7.5 – Faisceau canonique et faisceau dualisant

On démontre ici les théorèmes E et F. On ne démontrera que le théorème E, l'autre étant analogue. Prouvons d'abord **(a)**. On note T_U le fibré tangent de $U_s(r,d)$. On a un isomorphisme

$$f_{\mathbb{E}}^*(T_U) \;\simeq\; R^1 p_{\mathbb{P}^s *}(\mathbb{E}^* \otimes \mathbb{E}) \ ,$$

et il suffit de calculer le déterminant de ce dernier faisceau dans $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^s)$. On a une suite exacte

$$(**) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s \times X} \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \pi_0^{\#}(D) \otimes p_{\mathbb{P}^s}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(-1)) \longrightarrow 0 \ ,$$

d'où une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(-1) \otimes p_{\mathbb{P}^s *}(\mathbb{E}^* \otimes \pi_0^{\#}(D)) \longrightarrow R^1 p_{\mathbb{P}^s *}(\mathbb{E}^* \otimes \mathbb{C}^{r-1}) \longrightarrow R^1 p_{\mathbb{P}^s *}(\mathbb{E}^* \otimes \mathbb{E}) \longrightarrow 0$$

(car $d \gg 0$). Il en découle que

$$\det(R^1 p_{\mathbb{P}^s *}(\mathbb{E}^* \otimes \mathbb{E})) \;\simeq\; \det(R^1 p_{\mathbb{P}^s *}(\mathbb{E}^*))^{r-1} \otimes \det(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(-1) \otimes p_{\mathbb{P}^s *}(\mathbb{E}^* \otimes \pi_0^{\#}(D)))^{-1} \ .$$

En utilisant la suite exacte duale de (**) on trouve la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s} \otimes \mathbb{C}^{r-1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(1) \otimes R^1 p_{\mathbb{P}^s *}(\pi_0^{\#}(D^*)) \longrightarrow R^1 p_{\mathbb{P}^s *}(\mathbb{E}^*) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s} \otimes \mathbb{C}^{(r-1)g} \longrightarrow 0 \ ,$$

d'où un isomorphisme

$$\det(R^1 p_{\mathbb{P}^s *}(\mathbb{E}^*)) \ \simeq\ \det(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(1) \otimes R^1 p_{\mathbb{P}^s *}(\pi_0^{\#}(D^*))) \ .$$

De même, en utilisant la suite exacte duale de (**) on trouve l'isomorphisme

$$\det(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(-1) \otimes p_{\mathbb{P}^s *}(\mathbb{E}^* \otimes \pi_0^{\#}(D))) \ \simeq\ \det(p_{\mathbb{P}^s *}(\pi_0^{\#}(D)) \otimes \mathbb{C}^{r-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(-1)) \ .$$

Si L est un fibré en droites de degré d sur X, on a

$$h^0(L) \ =\ \chi(L) \ =\ d+1-g \ , \qquad h^1(L^*) \ =\ \chi(L^*) \ =\ d+g-1 \ ,$$

donc

$$\det(R^1 p_{\mathbb{P}^s *}(\mathbb{E}^*)) \ \simeq\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(d+g-1) \otimes \det(R^1 p_{\mathbb{P}^s *}(\pi_0^{\#}(D))) \ ,$$

et

$$\det(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(-1) \otimes p_{\mathbb{P}^s *}(\mathbb{E}^* \otimes \pi_0^{\#}(D))) \ \simeq\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}((r-1)(g-d-1)) \otimes \det(p_{\mathbb{P}^s *}(\pi_0^{\#}(D)))^{r-1} \ .$$

Finalement, on a

$$\det(R^1 p_{\mathbb{P}^s *}(\mathbb{E}^* \otimes \mathbb{E})) \ \simeq\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(2(r-1)d) \otimes \Delta^{r-1} \ ,$$

avec

$$\Delta \ =\ \det(p_{\mathbb{P}^s *}(\pi_0^{\#}(D^*))) \otimes \det(p_{\mathbb{P}^s *}(\pi_0^{\#}(D)))^{-1} \ .$$

Soit F_0 un fibré vectoriel de rang $2r$ et de degré $2(-d+r(g-1))$. En utilisant la suite exacte (**) on voit que

$$\gamma([F_0])_{\mathbb{E}} \ \simeq\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(-2d(r-1)) \otimes \det{}^*(p_{J^{(d)}*}(D \otimes p_X^*(F_0))) \ ,$$

d'où

$$\det(R^1 p_{\mathbb{P}^s *}(\mathbb{E}^* \otimes \mathbb{E})) \ \simeq\ \gamma([F_0])_{\mathbb{E}}^{-1} \otimes \det{}^*(p_{J^{(d)}*}(D \otimes p_X^*(F_0))) \otimes \Delta^{r-1} \ ,$$

ce qui démontre **(a)** (la formulation du théorème E est légèrement différente pour être valable même si on n'a pas $d \gg 0$).

Prouvons **(b)**. D'après [22] le faisceau dualisant d'une variété normale est divisoriel, c'est à dire qu'il provient d'un diviseur de Weil de cette variété. Le faisceau dualisant de $U(r,d)$ est donc divisoriel. Mais cette variété est localement factorielle, donc tout diviseur de Weil de $U(r,d)$ est de Cartier, et par conséquent le faisceau dualisant de $U(r,d)$ est localement libre. Il est isomorphe à ω, puisqu'il coïncide avec ω sur $U_s(r,d)$ et que $\operatorname{codim}_{U(r,d)}(U(r,d) \backslash U_s(r,d) \geq 2$. Ceci achève la démonstration du théorème E.

Remarque – Voici une autre démonstration du fait que le faisceau dualisant de $U(r,d)$ est localement libre : du fait que R^{ss} est lisse, $U(r,d)$ est une variété de Cohen-Macaulay (cela découle du théorème de Hochster-Roberts ([15], p. 153, [10, 11]). Et une variété de Cohen-Macaulay localement factorielle est de Gorenstein, c'est à dire que son faisceau dualisant est inversible (cf. [16]).

Références

[1] Drézet, J.-M. *Groupe de Picard des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Ann. Inst. Fourier 38 (1988), 105-168.

[2] Drézet. J.-M. *Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semi-stables sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Journ. Reine angew. Math. 380 (1987), 14-58.

[3] Drézet, J.-M. *Groupe de Picard des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur* $\mathbb{P}_2$. Singularities, Representations of Algebras and Vector Bundles (Proc. Lambrecht 1985) LN 1273 Springer (1987), 337-362.

[4] Fulton, W. *Intersection theory.* Erg. der Math. und ihre Grenzg. Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1984).

[5] Gieseker. D. *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface.* Ann. Math. 106 (1977), 45-60.

[6] Grothendieck, A. *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV - Les schémas de Hilbert.* Séminaire Bourbaki 221, (1960/61).

[7] Hartshorne R. *Algebraic geometry.* Grad. Texts in Math. Vol. 52. Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1977).

[8] Hirschowitz A. *Problèmes de Brill-Noether en rang supérieur.* C. R. Acad. Sci. Paris 307 (1988), 153-156.

[9] Hirschowitz. A., Narasimhan, M.S. *Fibrés de t'Hooft spéciaux et applications.* Enumerative geometry and classical algebraic geometry, Progr. Math. 24, Birkhäuser, Boston (1982), 143-164.

[10] Hochster M., Roberts J. *Rings of invariants of reductive groups and on regular rings are Cohen-Macaulay.* Adv. Math. 13, 115 (1974), 115-175.

[11] Kempf, G. *The Hochster-Roberts theorem in invariant theory.* Mich. Math. J. 26 (1979), 19-32.

[12] Lang. S. *Abelian varieties.* New-York, Interscience Publ. 1959.

[13] Maruyama. M. *Moduli of stable sheaves II.* Math. Kyoto Univ. 18,3 (1978), 557-614.

[14] Matsumura. H *Commutative algebra.* New York, W.A. Benjamin Co. (1970).

[15] Mumford, D., Fogarty, J. *Geometric invariant theory.* Erg. der Math. und ihre Grenzg. Berlin-Heidelberg-New York. Springer (1984).

[16] Murthy, M.P. *A note on factorial rings.* Arch. Math. 15 (1964), 418-420.

[17] Narasimhan, M.S., Ramanan. S. *Moduli of vector bundles on a compact Riemann surface.* Ann. Math. 89 (1969), 14-51.

[18] Narasimhan, M.S., Ramanan. S. *Vector bundles on curves.* Proc. of Bombay Coll. of Algebraic Geometry. Oxford Univ. Press (1969), 335-346.

[19] Newstead, P.E. *Introduction to moduli problems and orbit spaces.* TIFR Lect. Notes 51 (I978).

[20] Ramanan, S. *The moduli spaces or vector bundles on an algebraic curve.* Math. Ann 200 (1973), 69-84.

[21] Ramanathan, A. *Stable principal bundles on a compact Riemann surface, construction of moduli space.* Ph.D. Thesis. Univ. of Bombay (1976).

[22] Reid, M. *Canonical 3-folds.* Journées de Géométrie Algébrique d'Angers (1979), 273-310.

[23] Seshadri, C.S. *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques.* Astérisque 96 (1982).

[24] Shafarevich, I.R. *Basic algebraic Geometry.* Grundl. Bd 213. Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1974).

Note : Ce texte reproduit l'article

Drézet, J.-M., Narasimhan, M.S. *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques.* Invent. Math. 97 (1989), 53-94.

J.-M. Drézet – Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France

M.S. Narasimhan – Centre for Applicable Mathematics, Tata Institute of Fundamental Research, Bangalore, India