HAL
open science

Réduction de modèle adaptée à la dynamique basse et moyenne fréquence des structures complexes

Olivier Ezvan, Anas Batou, Christian Soize

To cite this version:

Olivier Ezvan, Anas Batou, Christian Soize. Réduction de modèle adaptée à la dynamique basse et moyenne fréquence des structures complexes. CSMA 2015, 12ème Colloque National en Calcul des Structures, May 2015, Giens (Var), France. pp.1-4. hal-01158258

HAL Id: hal-01158258

https://hal.science/hal-01158258

Submitted on 30 May 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2015
12e Colloque National en Calcul des Structures
18-22 Mai 2015, Presqu'île de Giens (Var)

Réduction de modèle adaptée à la dynamique basse et moyenne fréquence des structures complexes

O. Ezvan[1], A. Batou[1], C. Soize[1]

[1] *Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi-Echelle, MSME UMR 8208 CNRS*
{olivier.ezvan,anas.batou,christian.soize}@univ-paris-est.fr

Résumé — Dans ce travail, on s'intéresse à la construction de modèles réduits prédictifs adaptés aux structures complexes pour lesquelles on trouve de nombreux modes locaux entrelacés avec des modes globaux dès les basses fréquences (BF), induisant une forte densité modale et conduisant à des modèles réduits de dimension élevée avec la méthode classique d'analyse modale. Nous proposons pour cette situation une nouvelle approche de construction du modèle réduit basée sur l'extraction d'une base des déplacements globaux.
Mots clés — dynamique des structures, réduction de modèle, basse et moyenne fréquence.

1 Introduction

En dynamique linéaire, la bande des basses fréquences (BF) est classiquement caractérisée par des réponses en fréquence (FRF) qui exhibent des pics de résonance bien séparés et qui sont associés à des déformées globales de grande longueur d'onde de la structure. À l'opposé, la bande des hautes fréquences (HF), pour laquelle les FRF ont des variations moins marquées, présente une grande densité modale constante, associée à de nombreux modes élastiques de petite longueur d'onde. La bande intermédiaire dite des moyennes fréquences (MF) n'existe que pour les structures complexes [8]. La méthode d'analyse modale [1, 7, 5] consiste à projeter les équations de la dynamique sur les modes élastiques associés aux premières fréquences propres. Puisqu'en général la bande BF présente peu de modes, l'analyse modale classique y est donc une méthode efficace pour construire un modèle réduit prédictif de petite dimension. Dans ce travail, on s'intéresse aux structures complexes pour lesquelles la densité modale peut être élevée, dès la bande BF, en raison de la présence de nombreux modes élastiques locaux entrelacés avec des modes élastiques globaux. Cette particularité s'explique par l'existence d'éléments structuraux souples, tels que des panneaux, qui sont attachés à une structure maîtresse rigide. Dès lors, ces éléments structuraux souples sont à l'origine de modes élastiques dominés par des déplacements locaux. De plus, dans les structures complexes, il y a de petites hétérogénéités géométriques, bien que ne constituant pas des sous-structures souples bien identifiées, qui sont également à l'origine de nombreux modes locaux. Récemment, des recherches [9, 2, 3] ont été menées pour répondre à cette problématique, dont l'un des objectifs majeurs est de réduire la dimension du modèle réduit. La présente contribution fait état des derniers développements méthodologiques effectués, qui constituent un cadre général pour la construction d'un modèle réduit adapté aux structures complexes pour les bandes BF et MF et dont la dimension réduite dépend de la précision souhaitée. La stratégie repose sur l'introduction d'un filtrage des déplacements locaux pour construire un modèle réduit de déplacements globaux associés à la structure maîtresse. La méthodologie consiste à construire un sous-espace de déplacements globaux de l'espace admissible des déplacements. La base de ce sous-espace des déplacements globaux est alors engendré par les vecteurs propres associés aux premières valeurs propres d'un nouveau problème aux valeurs propres généralisé (PVPG) dont la matrice de rigidité est inchangée et pour lequel la matrice de masse est celle d'une énergie cinétique construite avec une cinématique réduite. Cette cinématique réduite correspond à un sous-espace d'approximation adapté au filtrage des déplacements locaux. Une étude de convergence du modèle réduit des déplacements globaux construit, en fonction de l'espace d'approximation pour l'énergie cinétique, permet de trouver un compromis entre précision et dimension. La méthodologie est appliquée à un modèle éléments finis (EF, voir par exemple [4]) de la structure d'une voiture pour laquelle les modes locaux apparaissent dès les très basses fréquences.

2 Théorie

2.1 Contexte

On s'intéresse au calcul de la réponse en fréquence d'une structure linéaire fixée, dans la bande d'analyse $\mathcal{B} = [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$, avec $\omega_{\min} > 0$. Dans le contexte de la méthode des EF, le déplacement $\mathbb{U}(\omega)$ des m degrés de liberté (DDL) est la solution, pour tout ω dans $\mathcal{B}$, de l'équation matricielle,

$$(-\omega^2[\mathbb{M}] + i\omega[\mathbb{D}] + [\mathbb{K}])\,\mathbb{U}(\omega) = \mathbb{F}(\omega),$$

où $[\mathbb{M}]$, $[\mathbb{D}]$ et $[\mathbb{K}]$ sont les matrices de masse, d'amortissement et de raideur et où $\mathbb{F}(\omega)$ est le vecteur des forces extérieures. Les n premiers modes élastiques $\boldsymbol{\phi}_\alpha$, qui sont associés aux n plus petites valeurs propres $\lambda_\alpha = \omega_\alpha^2$, sont les solutions du PVPG,

$$[\mathbb{K}]\boldsymbol{\phi}_\alpha = \lambda_\alpha[\mathbb{M}]\boldsymbol{\phi}_\alpha,$$

pour obtenir la matrice $[\Phi] = [\boldsymbol{\phi}_1 \ldots \boldsymbol{\phi}_n]$ qui constitue, dans le cadre de la méthode d'analyse modale, une base de réduction donnée telle que l'approximation $\mathbb{U}^{\text{elas}}(\omega)$ du déplacement $\mathbb{U}(\omega)$ s'écrive, pour $\omega \in \mathcal{B}$,

$$\mathbb{U}^{\text{elas}}(\omega) = \sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha(\omega)\boldsymbol{\phi}_\alpha = [\Phi]\,\mathbf{q}(\omega),$$

où le vecteur des coordonnées généralisées $\mathbf{q}(\omega)$ est la solution de l'équation matricielle de dimension $n \ll m$,

$$(-\omega^2[\mathrm{M}] + i\omega[\mathrm{D}] + [\mathrm{K}])\,\mathbf{q}(\omega) = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\omega),$$

avec $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\omega) = [\Phi]^\top\mathbb{F}(\omega)$, et où, pour $\mathrm{A} = \mathrm{M}, \mathrm{D}, \mathrm{K}$, on a $[\mathrm{A}] = [\Phi]^\top[\mathbb{A}][\Phi]$.

2.2 Méthodologie

Dans le cas des structures complexes auxquelles on s'intéresse, la dimension n du modèle réduit construit avec les modes élastiques peut être très élevée (potentiellement des milliers de modes en BF), de sorte qu'une méthodologie adaptée est requise. On propose alors une méthode générale pour construire un modèle réduit de déplacements globaux, de petite dimension. On introduit tout d'abord un sous-espace $\mathcal{A}_g$ de faible dimension relatif à une cinématique réduite du déplacement. Afin de filtrer les modes élastiques locaux, le PVPG classique est modifié en remplaçant la matrice de masse par la matrice de masse associée à la cinématique réduite de $\mathcal{A}_g$, tandis que la matrice de raideur est laissée inchangée.

2.2.1 Approximation de l'énergie cinétique pour la construction d'une base du sous-espace des déplacements globaux

Soit $\mathcal{A}_g$ un sous-espace de $\mathbb{R}^m$ de dimension d_g, dont une base peut être définie par les colonnes d'une matrice $[\mathbb{B}^g]$ de dimension $(m \times d_g)$. Pour tout vecteur $\boldsymbol{V}$ réel, le vecteur global $\boldsymbol{V}^{\mathcal{A}_g}$ dans $\mathcal{A}_g$ associé est obtenu en minimisant l'énergie cinétique (résiduelle) de la différence $\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}^{\mathcal{A}_g}$, c'est-à-dire que $\boldsymbol{V}^{\mathcal{A}_g}$ est la projection orthogonale, pour le produit scalaire $<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>_{\mathbb{M}} = \boldsymbol{y}^\top[\mathbb{M}]\boldsymbol{x}$, de $\boldsymbol{V}$ sur le sous-espace $\mathcal{A}_g$. Ainsi, le projeté $\boldsymbol{V}^{\mathcal{A}_g}$ s'écrit $\boldsymbol{V}^{\mathcal{A}_g} = [\mathbb{P}_{\mathcal{A}_g}]\boldsymbol{V}$, où la matrice de projection $[\mathbb{P}_{\mathcal{A}_g}]$ de rang d_g s'écrit

$$[\mathbb{P}_{\mathcal{A}_g}] = [\mathbb{B}^g]\left([\mathbb{B}^g]^\top[\mathbb{M}][\mathbb{B}^g]\right)^{-1}[\mathbb{B}^g]^\top[\mathbb{M}].$$

L'énergie cinétique $E_k(\boldsymbol{V}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{V}^\top[\mathbb{M}]\boldsymbol{V}$ est donc approximée par l'énergie cinétique $E_k^{\mathcal{A}_g}(\boldsymbol{V})$ donnée par $E_k^{\mathcal{A}_g}(\boldsymbol{V}) = E_k(\boldsymbol{V}^{\mathcal{A}_g})$, ce qui revient ainsi à substituer $[\mathbb{M}]$ par la matrice de masse $[\mathbb{M}_{\mathcal{A}_g}]$, associée à la cinématique réduite des déplacements globaux de $\mathcal{A}_g$, qui s'écrit

$$[\mathbb{M}_{\mathcal{A}_g}] = [\mathbb{P}_{\mathcal{A}_g}]^\top[\mathbb{M}][\mathbb{P}_{\mathcal{A}_g}].$$

La matrice $(m \times m)$ réelle $[\mathbb{M}_{\mathcal{A}_g}]$ est symétrique semi-définie positive et de rang d_g, et est généralement pleine. Toutefois l'implémentation de la méthode ne demandera pas son assemblage.

2.2.2 Modèle réduit construit par projection sur les vecteurs propres globaux

Les n_g premiers vecteurs propres globaux $\boldsymbol{\phi}_\alpha^g$, avec $n_g \leqslant d_g$, qui sont associés aux n_g plus petites valeurs propres λ_α^g, sont les solutions du problème aux valeurs propres généralisé suivant,

$$[\mathbb{K}]\boldsymbol{\phi}_\alpha^g = \lambda_\alpha^g [\mathbb{M}_{\mathcal{A}_g}]\boldsymbol{\phi}_\alpha^g . \tag{1}$$

La matrice $[\Phi^g] = [\boldsymbol{\phi}_1^g \dots \boldsymbol{\phi}_{n_g}^g]$ définit une base de réduction constituée de vecteurs aux déplacements globaux. On peut alors définir une approximation $\mathbb{U}^{\text{glob}}(\omega)$ de $\mathbb{U}(\omega)$ telle que, pour tout ω dans $\mathcal{B}$,

$$\mathbb{U}^{\text{glob}}(\omega) = \sum_{\alpha=1}^{n_g} q_\alpha^g(\omega)\boldsymbol{\phi}_\alpha^g = [\Phi^g]\mathbf{q}^g(\omega),$$

où le vecteur $\mathbf{q}^g(\omega)$ des coordonnées généralisées globales est la solution de l'équation matricielle de dimension $n_g \ll m$,

$$(-\omega^2[\mathrm{M}^{gg}] + i\omega[\mathrm{D}^{gg}] + [\mathrm{K}^{gg}])\mathbf{q}^g(\omega) = \boldsymbol{\mathcal{F}}^g(\omega),$$

avec $\boldsymbol{\mathcal{F}}^g(\omega) = [\Phi^g]^\top \mathbb{F}(\omega)$, et où, pour $\mathrm{A} = \mathrm{M}, \mathrm{D}, \mathrm{K}$, on a $[\mathrm{A}^{gg}] = [\Phi^g]^\top [\mathbb{A}][\Phi^g]$.

Remarque En approximant les solutions $\boldsymbol{\phi}_\alpha^g$ du PVPG défini par l'Eq. (1) dans la base des n modes élastiques, c'est-à-dire en écrivant $\boldsymbol{\phi}_\alpha^g = [\Phi]\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_\alpha^g$, où les $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_\alpha^g$ sont des coordonnées généralisées, la méthode peut être implémentée sans utiliser la matrice de rigidité $[\mathbb{K}]$. Cette approche est donc moins intrusive vis-à-vis des codes de calculs commerciaux. De plus, une analyse de convergence du modèle réduit des déplacements globaux, construit en fonction de l'espace $\mathcal{A}_g$, peut être réalisée avec un coût négligeable.

3 Application à un modèle d'automobile

On utilise la méthodologie proposée pour construire un modèle réduit de déplacements globaux pour la structure d'une automobile, dont le modèle EF comporte $m = 1\,462\,698$ DOF. On peut identifier sur la Figure 1 des parties souples (le toit, le plancher) ainsi que des hétérogénéités structurales (mises en évidence par le niveau de gris) qui sont toutes deux responsables de la présence de nombreux modes élastiques locaux. En effet, dans la bande d'analyse $\mathcal{B} = 2\pi \times]0, 500] rad/s$ il y a 1 048 modes élastiques, et le modèle réduit classique est convergé pour $n = 1\,457$.

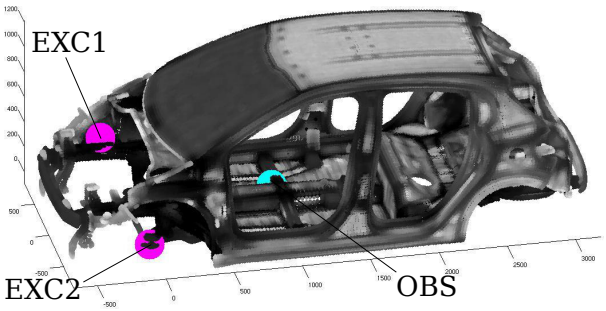

FIGURE 1 – Modèle EF, avec position des points d'excitation EXC1 et EXC2, et du point d'observation OBS.

Dans le cadre de la méthode proposée, le modèle réduit des déplacements globaux est entièrement défini par le choix du sous-espace $\mathcal{A}_g$ et de l'ordre de troncature n_g. Pour cette application, $\mathcal{A}_g$ est engendré par des vecteurs de déplacements globaux dont la variation spatiale suit une fonction polynomiale dont le degré $\mathcal{D}$ permet le contrôle du filtrage. La convergence du modèle réduit est analysée en fonction du degré $\mathcal{D}$, avec n_g choisit de telle sorte que toutes les fréquences propres soient dans un intervalle qui recouvre $\mathcal{B}$ d'environ 5 %. La Figure 2 montre les FRF obtenues au point d'observation OBS pour des modèles réduits des déplacements globaux construits pour des degrés $\mathcal{D} = 5$, $\mathcal{D} = 10$, $\mathcal{D} = 15$ et $\mathcal{D} = 20$, sous l'excitation de forces et moments unitaires appliqués aux points EXC1 et EXC2, points

dont les positions sont données à la Figure 1. La dimension n_g obtenue pour chaque modèle réduit est $n_g = 168$, $n_g = 355$, $n_g = 479$ et $n_g = 624$. On constate que l'écart avec la référence diminue à mesure que la dimension n_g augmente. L'écart est plus important en moyenne fréquence mais il est connu que les fluctuations statistiques expérimentales observées (liées à la variabilité des systèmes réels) sont généralement importantes dans cette bande [6].

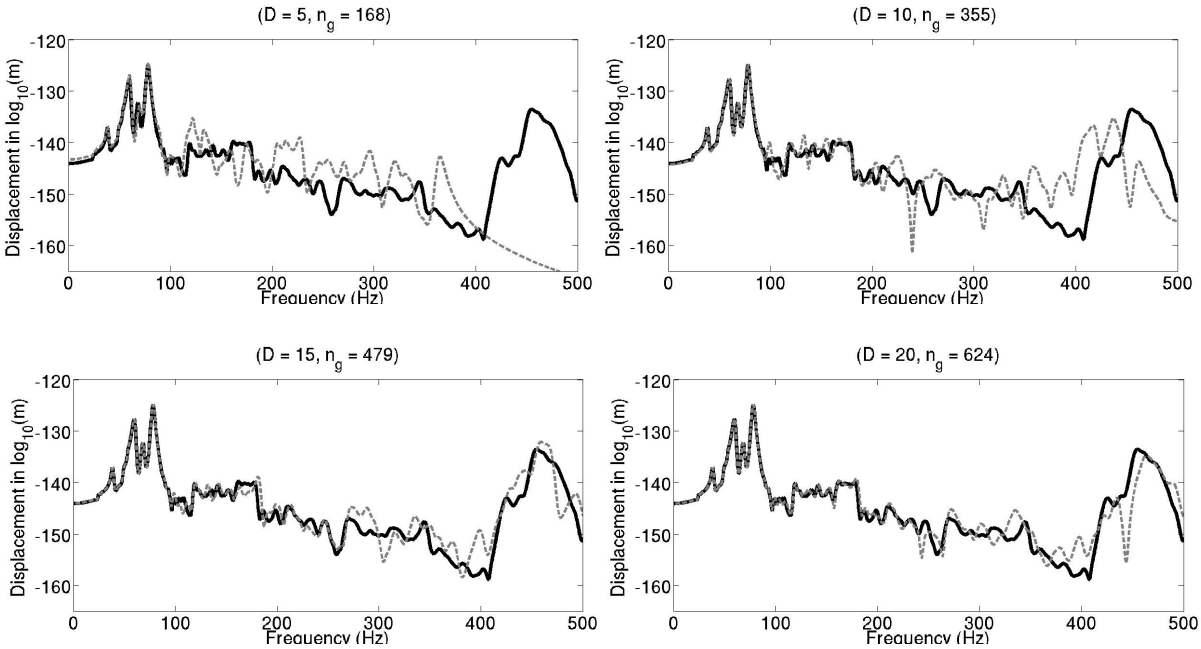

FIGURE 2 – FRF (modules en échelle log), pour chaque degré $\mathcal{D}$ des approximations : référence convergée $\mathbb{U}_{obs}^{\text{elas}}$ (trait continu noir), réponse approchée $\mathbb{U}_{obs}^{\text{glob}}$ (trait en pointillés gris).

4 Conclusions

Une méthodologie générale et non-intrusive a été présentée pour construire un modèle numérique réduit adapté à la prévision des déplacements globaux (sur les parties raides de la structure) pour des structures complexes qui présentent de nombreux modes élastiques locaux entrelacés avec des modes élastiques globaux, dès les basses fréquences. Une analyse de convergence par rapport au sous-espace d'approximation permet d'ajuster, à moindre coût, le compromis entre précision et dimension.

Références

[1] J.H. Argyris, H.P. Mlejnek. *Dynamics of Structures*, North Holland, 1991.

[2] A. Arnoux, A. Batou, C. Soize, L. Gagliardini. *Stochastic reduced order computational model of structures having numerous local elastic modes in low frequency dynamics*, Journal of Sound and Vibration, 332, 3667-3680, 2013.

[3] A. Arnoux, C. Soize, A. Batou, L. Gagliardini. *Reduced-order computational model for low-frequency dynamics of automobiles*, Advances in Mechanical Engineering, Article ID 310362, 1-12, 2013.

[4] K.J. Bathe, E.L. Wilson. *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice-Hall, 1976.

[5] R.R. Craig, A.J. Kurdila. *Fundamentals of Structural Dynamics*, Wiley, 2011.

[6] J.-F. Durand, C. Soize, L. Gagliardini. *Structural-acoustic modeling of automotive vehicles in presence of uncertainties and experimental identification and validation*, The Journal of the Acoustical Society of America, 124, 1513-1525, 2008.

[7] R. Ohayon, C. Soize. *Structural Acoustics and Vibration*, Academic Press, 1998.

[8] R. Ohayon, C. Soize. *Advanced Computational Vibroacoustics : Reduced-Order Models and Uncertainty Quantification*, Cambridge University Press, 2014.

[9] C. Soize, A. Batou. *Stochastic reduced-order model in low-frequency dynamics in presence of numerous local elastic modes*, Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME, 78, 061003-1 to 9, 2011.