



**HAL**  
open science

# Homogénéisation par sommation variationnelle Application au cas des matériaux à gradient de propriétés

Azdine Nait- Ali, N Blal

► **To cite this version:**

Azdine Nait- Ali, N Blal. Homogénéisation par sommation variationnelle Application au cas des matériaux à gradient de propriétés. CSMA 2015, May 2015, GIENS, France. hal-01154521v1

**HAL Id: hal-01154521**

**<https://hal.science/hal-01154521v1>**

Submitted on 22 May 2015 (v1), last revised 21 Jul 2015 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Homogénéisation par sommation variationnelle

## Application au cas des matériaux à gradient de propriétés

A. Naitali<sup>1</sup>, N. Blal<sup>2</sup>

1 ISAE-Ensm, Institut Pprime -UPR CNRS 3346 - DPMM ENSMA  
- Téléport 2, 1er avenue Clément Ader BP 40109 F86961 FUTUROSCOPE CHASSENEUIL Cedex FRANCE  
2 Université de Lyon, INSA-Lyon, LaMCoS UMR5259, F-69621, France, [nawfal.blal@insa-lyon.fr](mailto:nawfal.blal@insa-lyon.fr)

---

**Résumé** — Dans cette note, on propose un modèle homogénéisé pour le comportement effectif des matériaux à gradient de propriétés. Le principe de l'étude se base sur un schéma d'homogénéisation en deux étapes. Dans un premier temps, le modèle 3D est décomposé en plusieurs couches 2D hétérogènes. Le comportement de chaque couche est estimé à l'aide d'un modèle micromécanique (e.g. estimation de type Hashin-Shtrikman). Ensuite le comportement effectif du milieu 3D est reconstruit avec une méthode basée sur une sommation variationnelle. Le résultat obtenu est appliquée pour l'homogénéisation d'une plaque mince à gradient de porosité.

---

## 1 Introduction

Les matériaux à gradient de propriétés touchent divers domaines d'application : aéronautique, électronique, biomécanique, etc. Vu leur aspect hétérogène, la modélisation numérique de ces matériaux restent compliquées et coûteuse et nécessite le développement de techniques permettant d'accélérer les coûts de calculs. Le recours aux approches micromécaniques s'avère à la fois simple et efficace ; non seulement ces approches permettent de modéliser le comportement macroscopique de ces milieux, mais ils permettent aussi de comprendre l'effet de l'évolution microstructurale sur le comportement global. Dans ce cadre, on cherche à modéliser le comportement effectif d'un milieu 3D à gradient de propriétés en se basant sur l'idée de l'homogénéisation d'un système multicouches. En effet, le modèle 3D peut être considéré comme une superposition de plusieurs couches ayant chacune un niveau donné de propriétés. Estimer le comportement effectif de chaque couche permettra ensuite de reconstruire le comportement effectif du milieu 3D étudié. Ainsi un schéma d'homogénéisation à deux étapes est proposé :

1/ dans un premier temps, on découpe le milieu 3D en couches minces hétérogènes et l'on estime leurs comportements effectifs à l'aide de l'estimation Hashin-Shtrikman [4] par exemple, 2/ ensuite, on reconstruit le comportement effectif du milieu 3D avec une sommation variationnelle [3] des énergies 2D.

Le schéma proposé est ensuite appliqué au cas d'une plaque mince avec un gradient de porosité.

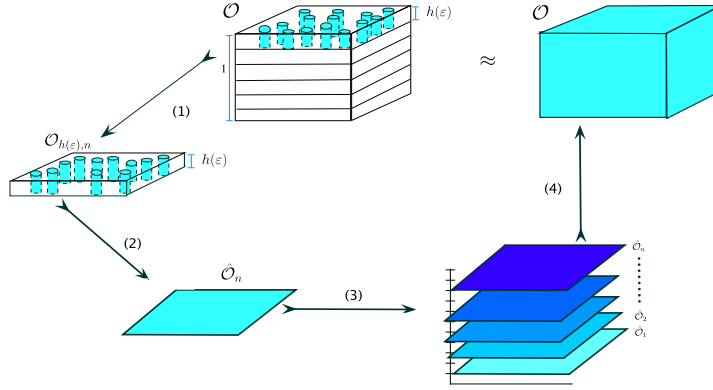


FIGURE 1 – principe de l'approche

## 2 Sommation variationnelle

Cette sommation est une méthode variationnelle pour la reconstruction d'un modèle volumétrique 3D à partir de modèles surfacique 2D obtenus, par exemple, par réduction de dimension (e.g. théorie des plaques). Cette méthode peut être utilisé lorsque un paramètre matériaux ou morphologique varie continûment suivant une direction privilégiée (ici, on choisit la direction  $e_3$ ). Ainsi, on considère un milieu  $\mathcal{O}$  à gradient de propriétés suivant un axe donné :  $\mathcal{O} = \hat{\mathcal{O}} \times (-H/2, H/2)$ . Par changement de variables, la géométrie peut être redéfinie par  $\mathcal{O} := \hat{\mathcal{O}} \times (0, 1)$ . La technique décrite dans ce travail permet d'obtenir un matériau équivalent ayant un comportement effectif "conservant" le changement de propriété suivant la direction  $e_3$ .

Considérons par exemple le cas de la Figure 1 où la densité des fibre ainsi que leur distribution varient de manière continue suivant la direction  $e_3$ , on découpe le milieu  $\mathcal{O}$  en  $n$  tranches minces dont le comportement est décrit par une loi obtenue par réduction de dimension (voir [2, 1]). Cet découpage peut être justifié dans certains cas de matériaux à géométrie complexe (voir [1] par exemple). En 'sommant' ensuite les plaques obtenues et après passage à la limite vers l'infini, i.e. en prenant des plaques de plus en plus fines, on obtiendra par  $\Gamma$ -convergence un modèle 3D Homogène tenant compte au mieux le gradient de propriétés initiale.

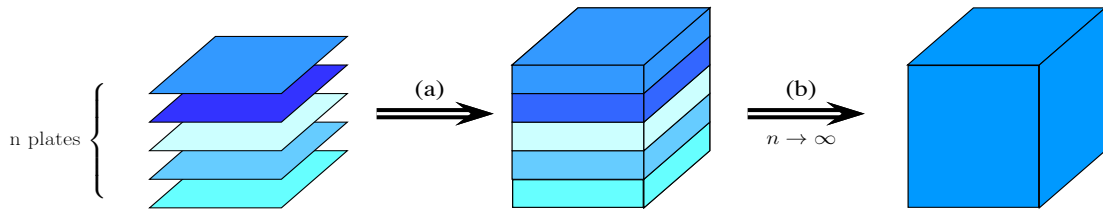


FIGURE 2 – Illustration de la stratégie de reconstruction : step (a) matériau stratifié, step (b) passage à la limite et matériau homogénéisé.

Soit  $\psi_0(\frac{k}{n}, \cdot)$  la densité d'énergie élastique de la plaque  $\frac{k}{n}$  dépendant du gradient de déplacement  $\nabla u$  et de la position  $\hat{x} = (x_1, x_2)$  dans le plan moyen  $\hat{\mathcal{O}}$ . Cette énergie ne dépend plus de la position suivant l'axe  $x_3$  car elle a été obtenue par réduction de dimension mais plutôt de l'épaisseur de la plaque  $1/n$ . L'énergie potentielle associée à l'ensemble des  $n$  plaques est

$$E_n(u) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left( \int_{\hat{\mathcal{O}}} \psi_0\left(\frac{k}{n}, \nabla u\left(\hat{x}, \frac{k}{n}\right)\right) d\hat{x} - \int_{\hat{\mathcal{O}}} L\left(\hat{x}, \frac{k}{n}\right) \cdot u\left(\hat{x}, \frac{k}{n}\right) d\hat{x} \right) \text{ si } u \in \text{Step}_{3,n}(\mathcal{O}) \quad (1)$$

où  $L$  est le chargement subit par chacune des plaques, l'ensemble  $\text{Step}_{3,n}(\mathcal{O})$  représente les fonctions continues par morceau :

$$u \in \text{Step}_{3,n}(\mathcal{O}) \Leftrightarrow u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} u\left(\hat{x}, \frac{k}{n}\right) 1_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}(x_3) \quad \text{avec } (\hat{x}, x_3) \in \hat{\mathcal{O}} \times (0, 1).$$

Notons que la connexion entre les plaques peut être prise en compte par des conditions aux limites complémentaires dans chacune des plaques (voir [1, 2]), ce qui ne rajoute pas de difficulté à la méthode (voir [3]).

L'énergie construite dans (1) correspond à une énergie globale associée au modèle discret. Une régularisation énergétique s'avère indispensable pour obtenir le modèle limite variationnelle. Dans la figure 2 étape (a), on obtient un matériau multicouches et, sera alors homogénéisé avec une approche variationnelle. Pour obtenir une formulation continue, il est commode de construire une expression "continue par morceau" de l'énergie  $E_n$  comme une somme de Riemann, illustré par le passage (a) dans la figure 2. En effet,

$$\tilde{\psi}_0^n(x_3, s) := \psi_0\left(\frac{k}{n}, s\right) \quad \text{and} \quad \tilde{L}^n(x) := L\left(\hat{x}, \frac{k}{n}\right) \quad \text{si } x_3 \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[,$$

l'énergie  $E_n$  s'écrit

$$E_n(u) = \int_{\mathcal{O}} \tilde{\psi}_0^n(x_3, \nabla u) dx - \int_{\mathcal{O}} \tilde{L}^n(x) \cdot u(x) dx \quad \text{si } u \in \text{Step}_{3,n}(\mathcal{O})$$

La densité d'énergie  $s \mapsto \psi_0(\cdot, s)$  doit être convexe vérifier la propriété de Lipschitz :

$$|\psi_0(x_3, s) - \psi_0(x_3, s')| \leq \ell |s - s'| (1 + |s|^{p-1} + |s'|^{p-1}), \quad (2)$$

pour tout  $(s, s') \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  où  $\ell$  est une constante positive variant dans la direction  $x_3$ . Il est facile de voir que  $\tilde{\psi}_0^n$  vérifie la condition de croissance suivante pour  $p > 1$  suivant  $x_3$  : il existe deux constante positives  $\alpha$  et  $\beta$  ne dépendant pas de  $n$ , de sorte que pour tout  $s$  de  $\mathbb{R}^3$

$$\alpha |s|^p \leq \tilde{\psi}_0^n(x_3, s) \leq \beta (1 + |s|^p). \quad (3)$$

pour tout  $x_3$  fixé sur  $(0, 1)$ .

Cette séquence de fonctionnelles d'énergie  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\Gamma$ -converges au sens faible pour  $E_0$  dans  $L^p$  définie par

$$E_0(u) := \int_{\mathcal{O}} \psi_0(x_3, \nabla u) dx - \int_{\mathcal{O}} L(x) \cdot u(x) dx. \quad (4)$$

D'un point de vue mécanique, cette limite de sommation variationnelle nous permet d'estimer le comportement effectif du milieu considéré en gardant le gradient de propriétés le long d'une direction privilégiée.

### 3 Application : cas d'une plaque à gradient de porosités

On considère une plaque poreuse, notée  $\mathcal{O}$ , avec un gradient de porosité qui évolue de manière continue suivant  $e_3$ . D'un point de vue micromécanique, la plaque  $\mathcal{O}$  est un bi-phasé avec une matrice isotrope (module de Young  $E$  et coefficient de Poisson  $\nu$ ) et une répartition aléatoires d'inclusions vides de porosité  $\phi(x_3)$ . Dans l'objectif de dériver le comportement effectif de cette plaque en tenant compte du gradient des porosités, l'approche basée sur la sommation variationnelle est adoptée. Le milieu  $\mathcal{O}$  est découpé en  $n$  sous plaques  $\hat{\mathcal{O}}$ , de même épaisseur  $\varepsilon$ , et dont le comportement est décrit à travers le potentiel 2D suivant (en se limitant à une plaque de type Kirchhof) :

$$\psi_k = \frac{1}{2} \mathbf{d} \mathbf{A}_k \mathbf{d} + \varepsilon^2 \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa} \mathbf{D}_k \boldsymbol{\kappa}, \quad (5)$$

où  $\mathbf{d}$  (resp.  $\boldsymbol{\kappa}$ ) sont les déformations dans le plan porté par les deux directions  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  dues aux effets membrane (resp. flexion) et  $\mathbf{A}_k$  (resp.  $\mathbf{D}_k$ ) les tenseurs d'ordre deux du comportement de la plaque  $k$  écrit pour un problème 2D. On obtient ainsi une plaque stratifié avec  $n$  plis hétérogènes. D'après le résultat variationnel (4), l'énergie macroscopique de la plaque homogénéisée est :

$$\psi_0 = \frac{1}{|\mathcal{O}|} \int_{\mathcal{O}} \left( \frac{1}{2} \mathbf{d} \mathbf{A}(x_3) \mathbf{d} + x_3^2 \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa} \mathbf{D}(x_3) \boldsymbol{\kappa} \right) dV \quad (6)$$

Remarquons à ce stade que la sommation variationnelle, conduisant à (6), permet de retrouver le même résultat que celui issu de la théorie des stratifiés. L'estimation de ces propriétés est obtenue par une homogénéisation en deux étapes :

1/ tout d'abord, comme chaque pli  $k$  est un milieu poreux (matrice  $(E, \nu)$  + porosité  $\phi_k$ ), les propriétés locales  $\mathbf{A}_k$  et  $\mathbf{D}_k$  sont estimés à l'aide des méthodes variationnelles de Hashin-Shtrikman ([4]),

2/ ensuite, le comportement de plaque stratifiée est obtenu en homogénéisant les différents plis suivant 6.

Ce résultat sera confronté au calculs par éléments fini réalisé avec le logiciel CASTEM. Dans un premiers temps nous retrouverons le résultat issu de la théorie des stratifiés, puis dans le cas le cas d'un gradient de propriété variant suivant une direction de manière continu, l'apport de la sommation variationnelle sera mis en exergue.

## Références

- [1] G. Michaille, A. Nait Ali, S. Pagano. *Two-Dimensional Deterministic Model of a Thin Body with Randomly Distributed High-Conductivity Fibers* Appl Math Res Express (2013).
- [2] JF Barbadjian, G.A Francfort *Spatial heterogeneity in 3D-2D dimensional reduction* ESIAM control Optimisation and Calculus of Variation (2005);11(1) :139-160.
- [3] A. Nait-Ali. *Volumic method for the variational sum of a 2D discrete model* Comptes Rendus Mécanique, Volume 342, Issue 12, December 2014, Pages 726-731
- [4] Hashin, Z., Shtrikman, S., 1963. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11, 127–140.