



**HAL**  
open science

# La simulation Monte Carlo pour l'étude des propriétés structurelles d'un système linéaire et leur fiabilité

Samia Maza, Manal Dakil

► **To cite this version:**

Samia Maza, Manal Dakil. La simulation Monte Carlo pour l'étude des propriétés structurelles d'un système linéaire et leur fiabilité. 11ème Congrès International Pluridisciplinaire en Qualité, Sécurité de Fonctionnement et Développement Durable, QUALITA 2015, Mar 2015, Nancy, France. hal-01149797

**HAL Id: hal-01149797**

**<https://hal.science/hal-01149797>**

Submitted on 7 May 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# La simulation Monte Carlo pour l'étude des propriétés structurelles d'un système linéaire et leur fiabilité

Samia MAZA, Manal DAKIL

Université de Lorraine

Centre de Recherche en Automatique de Nancy-CRAN UMR 7039

2 avenue de la Forêt de Haye, 54500 Vandoeuvre lès Nancy

samia.maza@univ-lorraine.fr

**Abstract**—Les propriétés structurelles telles que la commandabilité et l'observabilité sont très importantes pour les systèmes automatisés. Par exemple, un système possédant la propriété de commandabilité garantie la possibilité de le contrôler afin que le système asservi qui en résulte puisse remplir la mission pour laquelle il a été conçu. Ces propriétés dépendent de la structure du système et de ses composants. Or ces derniers peuvent être sujets aux défaillances qui feraient perdre le système ses propriétés de départ, ce qui pourrait altérer la fonction du système. Cet article propose d'utiliser la simulation Monte Carlo pour étudier les propriétés structurelles de commandabilité/observabilité d'un système linéaire représenté par un modèle structurel. L'approche proposée permet d'une part d'identifier les composants essentiels pour la satisfaction de la propriété structurelle et d'autre part, d'évaluer la fiabilité de celle-ci.

**Index Terms**—Commandabilité, Observabilité, Défaillances, Fiabilité, Simulation Monte Carlo.

## I. INTRODUCTION

La commandabilité et l'observabilité sont des propriétés structurelles essentielles en automatique. Elles sont nécessaires pour pouvoir commander et/ou superviser/diagnostiquer un système. A ce titre, l'étude de ces propriétés a fait l'objet d'un grand nombre de travaux fondamentaux en automatique [1][2]. Beaucoup de ces études sont basées sur des critères algébriques permettant la vérification de ces propriétés pour des systèmes décrits par des équations d'état et d'autres se basent sur des critères graphiques.

Les propriétés précédentes dépendent de la structure du système indépendamment des valeurs numériques des matrices du système. En pratique, ces paramètres ne sont pas toujours connus avec précision ou pas encore dimensionnés si le système est en phase de conception. Ainsi, il peut être judicieux d'utiliser une représentation générique de ces systèmes en définissant des matrices avec des zéros et des paramètres non nuls mais pas fixés numériquement. Une telle représentation est connue sous le nom de modèle structurel.

Cet article s'intéresse aux systèmes linéaires décrits par un modèle structurel d'état. Pour ce type de modèles structurels, l'utilisation de représentations graphiques pour étudier les

propriétés structurelles du système s'avère très judicieuse car simple et intuitive [3]. On retrouve dans la littérature d'automatique beaucoup d'articles qui portent sur l'utilisation de la théorie des graphes pour l'étude des propriétés structurelles pour les systèmes linéaires et non linéaires [4][5][6]. Dans les modèles linéaires structurés, le système est représenté par un modèle d'état dont les matrices contiennent des paramètres nuls et d'autres non nuls. Ces derniers sont naturellement liés aux composants physiques du système. Dans la littérature, plusieurs approches sont proposées pour étudier ces modèles structurés et les propriétés structurelles comme la commandabilité et l'observabilité [5][6]. Néanmoins, il y a peu de travaux qui étudient de façon probabiliste, l'impact des paramètres du modèle structurel et des composants physiques liés à ces paramètres sur ces propriétés en incluant les aspects sûreté de fonctionnement. En effet, les propriétés précédentes étant basées sur l'existence de composants comme les actionneurs ou les capteurs, leur satisfaction dépend clairement de la capacité de ces éléments à accomplir correctement leur mission et donc de leur état de bon fonctionnement. Si un de ces composants est défaillant, sa fonction ne sera pas réalisée ce qui pourrait entraîner la perte de la propriété structurelle si ce composant s'avère nécessaire pour celle-ci. Ainsi, la probabilité de défaillance des composants n'étant pas nulle, celle de la perte des propriétés structurelles non plus.

Dans [7], on propose une approche combinant l'étude des propriétés structurelles par la théorie des graphes et la fiabilité des systèmes afin d'évaluer la fiabilité de la propriété de commandabilité. Cette étude concerne les systèmes représentés par un modèle linéaire structurel. La fiabilité de la commandabilité est ainsi basée sur celle des actionneurs du système qui sont supposés les seuls à être sujets aux défaillances. Dans [8] cette étude, basée sur les graphes, est généralisée à la défaillance des composants internes du système autres que les actionneurs/capteurs (c.à.d le procédé lui-même). Cette approche est également étendue à l'étude des systèmes bilinéaires dans [9].

Cet article présente une alternative à l'outil des graphes et en utilisant simplement le critère algébrique de la commandabilité/observabilité pour les modèles structurels. Combiné à la méthode Monte Carlo et une simulation type

«événements discrets», l'évaluation de ce critère algébrique va permettre d'étudier ces propriétés. L'approche proposée ici permet d'une part, de donner une estimation numérique de la fiabilité de ces propriétés structurelles, et d'autre part d'identifier les composants ayant le plus d'impact sur celles-ci qui seront qualifiés d'essentiels.

Seuls les systèmes linéaires sont considérés dans ce papier ainsi que leur propriété de commandabilité/observabilité.

Ce papier est organisé comme ceci :

La section 2 rappelle brièvement les critères algébriques et graphiques pour les propriétés de commandabilité et d'observabilité des systèmes linéaires structurés.

La section 3 discute la fiabilité des propriétés structurelles étudiées selon le critère algébrique, tout en rappelant brièvement les résultats obtenus par l'approche graphique.

Le principe d'application de la simulation événementielle et de la méthode Monte Carlo à l'évaluation algébrique des propriétés de commandabilité/observabilité ainsi que leur fiabilité sera détaillé à la section 4.

L'étude en simulation d'un système décrit par un modèle linéaire structurel sera donnée en section 5.

La section 6 conclura le papier.

## II. RAPPELS SUR LES PROPRIÉTÉS DE COMMANDABILITÉ ET D'OBSERVABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Soit un système linéaire décrit par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B u(t) & (a) \\ y(t) = Cx(t) & (b) \end{cases} \quad (1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $y \in \mathbb{R}^h$  sont respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie du système.  $A, B$  et  $C$  sont respectivement les matrices d'état, d'entrée et de sortie avec les dimensions appropriées.

Un système est dit commandable si pour tout état initial  $x_0$  ( $x_0=x(t_0)$ ) et tout état final désiré  $x_f$ , il existe un temps fini  $t_f$  et une commande  $u(t)$  qui, appliquée sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$ , amène le système de son état initial  $x_0$  à l'état final  $x_f$  ( $x_f=x(t_f)$ ) [10].

La condition nécessaire et suffisante pour la commandabilité est donnée par le critère de *Kalman* suivant :

Un système est commandable si et seulement si

$$\text{rang}\left[\begin{matrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{matrix}\right] = n \quad (2)$$

La matrice  $Com = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$  est appelée la matrice de commandabilité,  $n$  étant la dimension du vecteur d'état.

Ainsi, la propriété de la commandabilité dépend bien de la structure du système puisque sa satisfaction est liée aux matrices  $A$  et  $B$  du système.

Un système est dit observable si quel que soit l'état initial  $x_0$ , il existe un temps fini  $t_f$  tel que la connaissance de la sortie  $y$  sur  $[t_0, t_f]$  permet de calculer  $x_0$  (et donc  $x(t)$ ) [10].

Comme précédemment, le critère de *Kalman* donne la condition nécessaire et suffisante pour l'observabilité :

$$\text{rang}\left[\begin{matrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{matrix}\right]^T = n \quad (3)$$

La suite du papier se focalisera sur la commandabilité mais le même raisonnement peut s'appliquer à l'observabilité puisque ces deux propriétés sont duales.

Pour les systèmes représentés par des modèles structurels, les matrices  $A, B$  et  $C$  sont paramétrées ; c.à.d que leurs éléments sont soit nuls soit non nuls  $\alpha_i$ , où  $i$  désigne un élément quelconque de la matrice  $A$  ou  $B$  ou  $C$  qu'on notera  $A_{\alpha_i}, B_{\alpha_i}$  et  $C_{\alpha_i}$  respectivement, afin de rappeler cette dépendance paramétrique. De tels modèles structurels permettent de faire une étude générique même lorsque le système ou ses paramètres ne sont pas connus avec précision. En effet, seule l'occurrence des paramètres (c.à.d qu'ils sont non nuls) est prise en considération (voir §1).

Lorsque les valeurs numériques de tous les paramètres  $\alpha_i$  sont fixées numériquement, alors on obtient une réalisation admissible du modèle structurel. Les propriétés de commandabilité et d'observabilité sont génériquement vraies si elles sont vraies pour toutes les réalisations du modèle structurel [6][7]. Autrement dit, les critères (2) et (3) sont vérifiés pour toutes les réalisations.

Comme expliqué dans l'introduction, plusieurs travaux se basent sur une représentation graphique du système et la définition d'un ensemble de conditions graphiques nécessaires et/ou suffisantes pour la commandabilité. Par exemple dans [5], le modèle structurel est représenté par un graphe dont les sommets modélisent les variables d'état, d'entrée et de sortie du système et les arcs représentent un lien entre deux variables. Ce lien s'exprime dans le modèle d'état par un paramètre  $\alpha_i$  non nul. A partir de là, deux conditions nécessaires et suffisantes pour la commandabilité et l'observabilité sont fournies en se basant sur l'existence de chemins dans des graphes dérivés:

- Une condition sur la connectivité (*CCI*) et ;
- Une condition sur le couplage maximal (*CC2*).

Ces conditions sont relatives à l'entrée du système dans le cas de la commandabilité et à sa sortie dans le cas de l'observabilité. Le lecteur peut consulter [5][6][7] pour plus de détails sur l'approche graphique.

## III. FIABILITÉ DES PROPRIÉTÉS STRUCTURELLES

La modélisation physique d'un système et la mise en équation des relations de cause à effet de celui-ci permet d'établir son modèle d'état. Dans ce modèle d'état, les paramètres  $\alpha_i$ , des matrices précédentes et les arcs correspondants dans le graphe associé dépendent des composants physiques du procédé lui-même (matrice  $A$ ), de ses actionneurs (matrice  $B$ ) et de ses capteurs (matrice  $C$ ). Ainsi, la

défaillance d'un de ces composants physiques peut avoir un impact sur les propriétés de commandabilité ou d'observabilité et leur satisfaction.

En effet, si on prend par exemple la représentation graphique du modèle structurel du système, la défaillance d'un ou de plusieurs composants du système pourrait provoquer une rupture dans le graphe associé. Ceci pourrait conduire à la violation des conditions graphiques précédentes [7][8].

Dans [7], la fiabilité de la commandabilité a été définie comme étant *la probabilité que cette propriété soit satisfaite*. Cette redéfinition de la fiabilité se justifie par le fait que la commandabilité soit une propriété essentielle pour qu'un système automatisé (en boucle fermée donc) puisse réaliser sa mission correctement. Ainsi, l'extension de la définition de la fiabilité au sens classique à celle des propriétés structurelles paraissait naturelle. Dans [7], les conditions graphiques sur la commandabilité (Cf. §2) sont employées pour calculer l'ensemble des actionneurs nécessaires et suffisants pour que le système soit commandable. Connaissant les taux de défaillance de ces actionneurs, la probabilité de satisfaction d'une condition nécessaire  $P(CC1)$  ou  $P(CC2)$  est alors calculée aisément. La fiabilité de la commandabilité, notée  $F(Trb)$ , s'exprime comme étant la probabilité de satisfaction simultanée des deux conditions ( $CC1$ ) et ( $CC2$ ) qui peut être exprimée par la relation :  $F(Trb) = P(CC1 \wedge CC2)$ , où  $\wedge$  représente l'opérateur logique « ET ». Dans [7], seuls les actionneurs sont supposés sujets aux défaillances. Le cas général et plus réaliste de défaillance sur l'ensemble des composants du système est étudié dans [8], où de nouveaux graphes ont été définis. Les conditions de couplage et de connectivité précédentes sont ainsi redéfinies sur la base de ces nouveaux graphes. Ces conditions donnent maintenant l'ensemble des composants nécessaires et suffisants à la commandabilité à partir duquel le calcul de la fiabilité de la commandabilité se fait comme dans [7].

Dans ce papier, on s'intéresse au critère algébrique pour la commandabilité.

L'impact de la perte d'un ou plusieurs composants du système suite à une défaillance sera modélisé ici par la remise à zéro du paramètre  $\alpha_i$  supporté par ces composants dans la matrice  $A_\alpha$  ou  $B_\alpha$ . Pour l'approche graphique, cela se traduit par la perte de l'arc associé à ces composants dans les graphes permettant d'étudier les conditions ( $CC1$ ) et ( $CC2$ ) [8].

Ainsi, on définit la fiabilité de la commandabilité comme étant la probabilité que l'équation 2 soit vraie, c.à.d :

$$P(\text{rang}(Com_\alpha) = n) \quad (4)$$

où  $Com_\alpha = [B_\alpha \ A_\alpha B_\alpha \dots A_\alpha^n B_\alpha]$  est la matrice de commandabilité générique dépendant des paramètres  $\alpha_i$ .

Le même raisonnement s'applique pour l'évaluation de la fiabilité de la propriété d'observabilité donnée ci-après :

$$P(\text{rang}(Obs_\alpha) = n) \quad (5)$$

Où  $Obs_\alpha = [C_\alpha^T \ A_\alpha^T C_\alpha^T \dots (A_\alpha^T)^n C_\alpha^T]^T$  est la matrice d'observabilité générique.

La section suivante va expliquer comment calculer cette probabilité par la simulation Monte Carlo lorsque les composants du système sont sujets à des défaillances.

#### IV. LA SIMULATION MONTE CARLO POUR L'ÉVALUATION DES PROPRIÉTÉS STRUCTURELLES ET DE LEURS FIABILITÉ

*Principe :*

Il existe plusieurs méthodes et outils pour l'évaluation des paramètres de sûreté de fonctionnement parmi lesquels on retrouve la simulation Monte Carlo [11].

La méthode de Monte Carlo est une méthode d'approximation, au sens statistique du terme, qui utilise le hasard pour résoudre des problèmes centrés sur le calcul d'une valeur numérique. Elle a beaucoup de domaines d'applications, tels que les finances, la sismologie, l'ingénierie physique ou encore les sciences sociales.

La méthode Monte Carlo est particulièrement adaptée pour la simulation à événements discrets, notamment lorsque ceux-ci sont aléatoires. Le principe d'utilisation de la simulation MC en sûreté de fonctionnement consiste à simuler un grand nombre de fois le comportement dynamique des composants d'un système, afin d'évaluer ses caractéristiques de fonctionnement [12]. Une simulation d'un scénario possible est dite histoire. Plus le nombre d'histoires simulées est grand, meilleure sera la précision des résultats.

Dans cette section, on ne s'intéressera pas directement aux défaillances des composants physiques mais plutôt à leurs conséquences, à savoir la mise à zéro des paramètres  $\alpha_i$  associés dans les matrices d'état, d'entrée ou de sortie du système (c.à.d  $A_\alpha$ ,  $B_\alpha$  ou  $C_\alpha$ ).

Pour cela, on va supposer l'existence d'une application  $\varphi$  de l'ensemble des réels  $\mathbb{R}$  vers l'ensemble des sous ensembles des composants définie comme ceci :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\rightarrow 2^\Theta \\ \alpha_i &\rightarrow E_i = \varphi(\alpha_i) \end{aligned} \quad (6)$$

où  $\Theta$  est l'ensemble des composants physiques du système.  $E_i$  est le sous ensemble de composants sur lequel repose l'existence du paramètre  $\alpha_i$  dans le modèle et dont la défaillance, selon une certaine expression logique, impliquerait que  $\alpha_i=0$ .

Cette expression logique sera représentée par la fonction  $\psi$  définie comme suit :

$$\begin{aligned} \psi : 2^\Theta &\rightarrow \{0, 1\} \\ E_i &\rightarrow \psi(E_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_i = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Ainsi, la fonction  $\varphi$  définira pour chaque paramètre  $\alpha_i$  l'ensemble  $E_i$  des composants qui le supporte. La connaissance de la fonction  $\psi$  et des taux de défaillances des composants dans  $E_i$  permettrait d'avoir la probabilité que  $\alpha_i$  s'annule.

*Exemple* : Soit  $\zeta_j$  l'évènement « défaillance du composant  $c_j$  » avec  $c_j \in \Theta$  ( $j$  quelconque). Posons par exemple  $E_1 = \{c_1, c_2, c_3\}$  comme l'ensemble des composants support du paramètre  $\alpha_1$  et  $\psi(E_1) = \zeta_1 \wedge (\zeta_2 \vee \zeta_3)$ . En supposant que ces évènements sont indépendants, alors la probabilité que le paramètre  $\alpha_1$  s'annule peut être calculée :  $P[\alpha_1 = 0] = P(\psi(E_1)) = P_1.(P_2 + P_3 - P_2.P_3)$  où  $P_j = P(\zeta_j)$  est la probabilité de défaillance du composant  $c_j$  ( $j=1, 2, 3$ ).

L'établissement des fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  devra se faire dans une étape d'analyse préliminaire du système qui ne fait pas l'objet de la présente étude. Dans ce papier, on s'intéresse uniquement aux paramètres  $\alpha_i$  et leur passage à zéro.

La méthode de Monte Carlo sera utilisée pour générer des évènements  $e_j$  de façon aléatoire (Fig. 1). Un évènement  $e_j$  correspond à l'annulation du paramètre  $\alpha_j$  dans une des matrices du modèle structurel du système, suite à des défaillances de composants comme expliqué plus haut. Chaque évènement sera caractérisé par une probabilité d'occurrence qui est supposée connue.

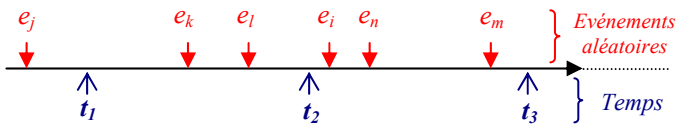


Fig. 1. Principe de la simulation d'une histoire  $h$  par la méthode MC pour l'évaluation de la fiabilité de la commandabilité à un instant  $t_i$ .

La fiabilité,  $R(t)$ , de la propriété de la commandabilité évaluée à instant  $t_i$  (Fig. 1) est définie par la probabilité que cette propriété soit satisfaite par le système à l'instant  $t_i$  sachant qu'elle l'était également avant  $t_i$ , c.à.d  $R(t_i) = P(\text{le système est commandable sur } [0, t_i])$ . Elle est évaluée en simulation comme suit.

Soient  $N_h$  le nombre d'histoires simulées et  $T_h$  la durée d'une histoire. Pour calculer  $R(t_i)$ , le rang de la matrice de commandabilité doit être évalué à l'instant  $t_i$  et ce à chaque histoire simulée. Cette matrice de commandabilité sera notée  $Com_\alpha^t$ . Soit  $N_{Com}^t$  le nombre de fois où le système est commandable à l'instant  $t_i$ , c.à.d  $[rang(Com_\alpha^t) = n]$  et ce sur les  $N_h$  histoires simulées. Alors la fiabilité de la commandabilité est donnée par :

$$R(t_i) = \frac{N_{Com}^t}{N_h} \quad (8)$$

Pour calculer la fiabilité moyenne et l'écart type sur celle-ci, au lieu de faire une seule simulation Monte Carlo de  $N_h$  histoires, il est nécessaire de faire une série de  $N_s$  simulations. Autrement dit,  $N_s$  fois une simulation de Monte Carlo de  $N_h$  histoires, soit au total :  $N_s \times N_h$  histoires simulées. Si  $R_k(t_i)$  est la fiabilité estimée sur une  $k^{i\text{ème}}$  simulation MC de  $N_h$  histoires et calculée selon l'équation 8, alors la fiabilité moyenne, notée  $R_{moy}(t_i)$ , et l'écart type sur son calcul, noté  $\sigma_{t_i}$ , peuvent être évalués comme suit :

$$\begin{cases} R_{moy}(t_i) = \frac{\sum_{k=1}^{N_s} R_k(t_i)}{N_s} \\ \sigma_{t_i} = \sqrt{\frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} (R_k(t_i) - R_{moy}(t_i))^2} \end{cases} \quad (9)$$

*Principe de l'algorithme d'évaluation de la fiabilité de la propriété:*

#### Début

- Initialisations des différentes variables :  $T_h, N_h, N_s, t, T_{ech}$  avec  $T_{ech}$  est la période d'évaluation de la fiabilité.
- Définition des matrices  $A_\alpha, B_\alpha$

**Pour** chaque instant d'évaluation  $t$  ( $t \leq T_h$ ) {

**Pour** chaque série de simulations MC  $j$  ( $j \leq N_s$ ) {

**Pour** chaque histoire  $i$  de la simulation MC ( $i \leq N_h$ ) {

- Tirage aléatoire des dates d'occurrence des évènements  $e_k$  ;
- Re-calcul des matrices  $A_\alpha^t, B_\alpha^t, Com_\alpha^t$  obtenues à l'instant d'évaluation  $t$  par l'annulation des paramètres  $\alpha_k$  dont les évènements  $e_k$  ont eu lieu avant  $t$ .
- Calcul formel de  $rang(Com_\alpha^t)$

**Si**  $rang(Com_\alpha^t) = n$  {

$$N_{Com}^t = N_{Com}^t + 1 \}$$

        Histoire suivante  $i = i + 1$  }

$$R_j(t) = \frac{N_{Com}^t}{N_h} \text{ est la fiabilité de la série } j$$

    Série suivante  $j = j + 1$  }

Calcul de  $R_{moy}(t)$  et  $\sigma_{t_i}$  selon Eq. 9

Instant suivant  $t = t + T_{ech}$  }

**Fin**

### Complexité algorithmique :

Soient  $n$  la dimension du système et  $m$  le nombre d'entrées de celui-ci. La complexité de l'algorithme de simulations Monte Carlo pour l'évaluation de la fiabilité de la commandabilité est polynomiale et est de  $o(N_h \times N_s \times N_t \times (n+m))$  où  $N_t$  est le nombre de durées de missions pour lesquelles l'algorithme évaluera la fiabilité de la commandabilité avec  $N_t = \frac{T_h}{T_{ech}}$ , autrement dit, le nombre d'instants d'évaluation.

### V. ETUDE DE CAS

Cette section s'intéresse à la commandabilité du système linéaire structuré à 10 états et 4 entrées de commande, décrit par les matrices structurales suivantes :

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & 0 & 0 & \alpha_5 & \alpha_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{13} & 0 & \alpha_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{17} & 0 & \alpha_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{19} & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{21} & 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{25} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_7 & 0 \\ \alpha_{10} & 0 & 0 & \alpha_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Avec :  $\alpha_j \in \mathbb{R}$  ( $j = \overline{1, 25}$ ).

La représentation graphique de modèle d'état est donnée à la Fig. 2, où chaque arc reliant deux sommets représente un paramètre non nul  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1, \dots, 25}$ ) des matrices :  $A_\alpha$  et  $B_\alpha$ . Par exemple les paramètres  $\alpha_2$  et  $\alpha_7$  sont représentés dans ce graphe par les deux arcs  $(u_3, x_1)$  et  $(u_3, x_2)$  respectivement.

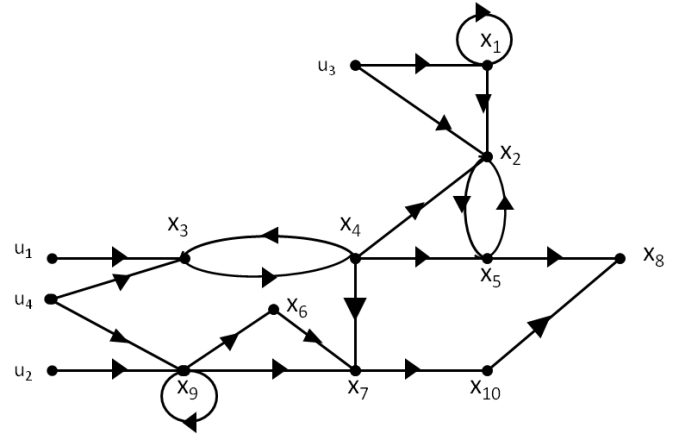


Fig. 2. Graphe associé au modèle structuré étudié.

Une série de simulations Monte Carlo est conduite sur 30000 histoires  $h$  (avec  $N_h = 300$  et  $N_s = 100$ ) d'une durée  $T_h = 1400$  u.t (unités de temps). Le logiciel *Matlab* et son module de calcul formel est utilisé pour calculer le rang de la matrice de commandabilité  $Com_\alpha$  définie dans la section 3. Plusieurs simulations Monte Carlo sont réalisées afin d'évaluer la fiabilité à différents instants.

Pour pouvoir étudier l'influence de chaque facteur  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1, 25}$ ) sur la commandabilité, tous ces paramètres sont supposés avoir une égale probabilité de défaillir (au sens passer à la valeur zéro). Les événements associés  $e_i$  ( $i = \overline{1, 25}$ ) auront donc une égale probabilité d'occurrence et seront générés de façon aléatoire à chaque histoire simulée comme expliqué au paragraphe précédent. Ici, il est supposé que les dates d'occurrence de ces événements suivent une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  avec :  $\lambda = \frac{1}{5000} u.t^{-1}$ .

Le taux de contribution de chaque élément  $\alpha_i$  à la perte de la commandabilité, noté  $\tau_{\alpha_i}$ , sera également évalué par la simulation afin d'identifier les éléments essentiels à cette propriété structurale.

Pour cela, à chaque histoire simulée les événements  $e_i$  ayant eu lieu seront enregistrés et leur nombre d'occurrences au fil des histoires simulées, noté  $N_{e_i}$ , sera évalué.

Le nombre d'occurrences de  $e_i$  où il y a eu perte de la commandabilité, noté  $N_{e_i}^{NC}$ , est également calculé. Ainsi, à la fin d'une simulation MC, le taux de contribution d'un élément  $\alpha_i$  peut être calculé comme ceci :  $\tau_{\alpha_i} = 100 \times \frac{N_{e_i}^{NC}}{N_{e_i}}$ .

#### A. Etude de la commandabilité par rapport aux actionneurs

On fait l'hypothèse que seuls les éléments  $\alpha_k$  de la matrice  $B_\alpha$  sont susceptibles de s'annuler.

### A.1. Les éléments essentiels pour la commandabilité :

La simulation MC indique que l'actionneur nécessaire à cette propriété est l'élément  $B_{\alpha}(1,3)=\alpha_2$  car sa perte engendre systématiquement la perte de la commandabilité.

En effet, la mesure du taux de contribution de chaque élément de la matrice  $B_{\alpha}$  dans la perte de la commandabilité indique que  $\alpha_2$  y contribue à 100%, contrairement aux autres éléments, et ce très tôt au cours du temps de mission du système (ici dès l'instant  $t=50 u.t$ ).

La table 1 montre les taux de contribution des paramètres de  $B_{\alpha}$  à la perte de la commandabilité pour six instants différents  $T_i$  entre 0 et  $T_h=1400 u.t$ .

A chaque fois qu'il y a eu occurrence de l'événement  $e_2$ , impliquant l'annulation du paramètre  $\alpha_2$ , il y a eu perte de la propriété de commandabilité. Contrairement aux autres événements  $\{e_7, e_{10}, e_{11}, e_{23}, e_{24}\}$  dont certaines occurrences ont eu lieu sans que le système ne devienne non commandable.

TABLE I. TAUX DE CONTRIBUTION DE CHAQUE ELEMENT DE  $B_{\alpha}$  A LA PERTE DE LA COMMANDABILITE

Paramètres Instants	$\alpha_2$	$\alpha_7$	$\alpha_{10}$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{23}$	$\alpha_{24}$
50 u.t	100%	0%	0,8%	1,3%	1,1%	0%
200 u.t	100%	3,5%	8,1%	7,2%	9,2%	8,1%
400 u.t	100%	7,8%	15,1%	14,4%	16%	15,9%
800 u.t	100%	19,3%	27,8%	29,9%	28,1%	29%
1000 u.t	100%	22,9%	34,7%	35%	34,1%	36,4%
1400 u.t	100%	34,5%	46,8%	46,9%	46,4%	47,2%

A noter que, même si seuls six instants sont représentés dans la table 1, les résultats de simulations ont été relevés pour les instants compris entre 0 et 1400 u.t avec un pas d'échantillonnage  $T_{ech}$  de 50 u.t et pour toutes ces valeurs, la contribution de  $\alpha_2$  est toujours de 100%.

Ces résultats de simulation montrent que sur toutes les histoires où il y a eu perte de la commandabilité,  $\alpha_2$  était toujours nul contrairement aux autres paramètres. Autrement dit, à chaque fois que cet élément est hors service, le système devient non commandable. Cet élément  $\alpha_2$  est donc nécessaire à la commandabilité et par conséquent, les composants physiques qui lui sont associés aussi.

Ce résultat de simulation est confirmé par le calcul théorique exact selon la méthode graphique proposée dans [7] et qui est basée en partie sur le graphe de (Fig. 2). En effet, sur le graphe de (Fig. 2) on peut voir que l'annulation du paramètre  $\alpha_2$  entraîne une rupture de l'arc  $(u_3, x_1)$  ce qui est à pour effet d'isoler le sommet  $x_1$  qui devient non commandable.

### A.2. La fiabilité de la commandabilité :

La fiabilité de cette propriété est définie par l'équation 5. La simulation MC a permis d'estimer cette fiabilité ainsi que

l'écart type sur son calcul comme expliqué à la section précédente. Les résultats de simulation sont reportés en (Fig. 3)

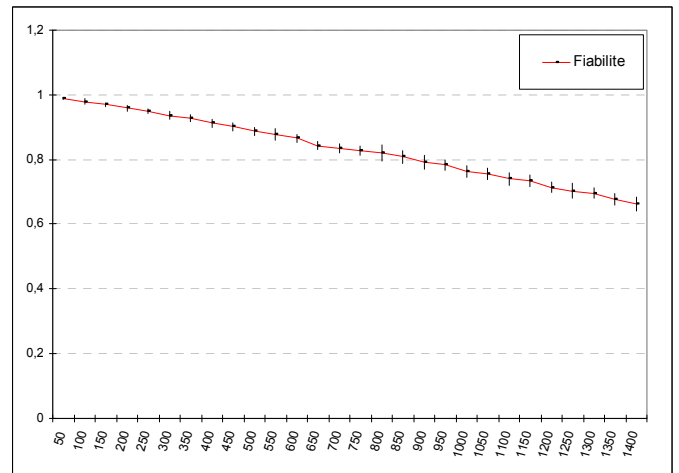


Fig. 3. Evolution dans le temps de la fiabilité de la commandabilité  $R_{moy}(t)$  et de son écart type  $\sigma_t$  lorsque les actionneurs sont sujets aux défaillances.

La probabilité de maintien de la propriété de commandabilité diminue avec le temps ce qui est normal puisque la probabilité de défaillance des éléments physiques qui la supportent augmente.

L'identification des éléments clés pour la commandabilité, qu'on pourrait qualifier ici de coupe minimale [11], permet d'envisager des actions de renforcement ou de fiabilisation de celui-ci dès la phase de conception, en employant des composants physiques hautement fiables ou encore des composants en redondance. Cela permet également d'identifier les composants sur lesquels on pourrait concentrer l'effort de surveillance et de maintenance préventive. La surveillance permettra de tolérer les défauts si des redondances matérielles sont prévues par exemple.

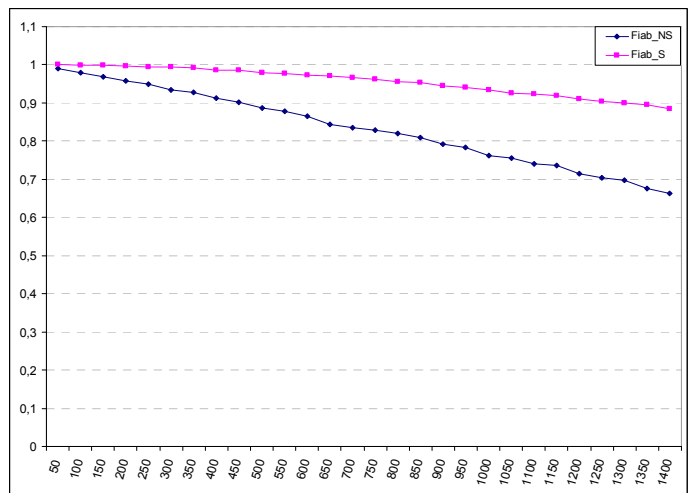


Fig. 4. Comparaison entre la fiabilité de la commandabilité lorsque tout les actionneurs sont sujets aux défaillances ( $Fiab_{NS}$ ) et lorsque l'élément clé  $\alpha_2$  est sécurisé ( $Fiab_S$ ).

La Figure 4 montre les résultats de simulation lorsque l'élément  $\alpha_2$  est rendu très fiable (ici  $\alpha_2$  ne s'annule pas).

Ces résultats montrent une nette amélioration de la fiabilité suite à la fiabilisation de son élément essentiel  $\alpha_2$  comme expliqué précédemment. Par exemple à l'instant  $t=1400$ , l'amélioration est d'environ 25%.

La courbe de fiabilité «  $Fiab\_S$  » de la Figure 4 décroît plus lentement dans le temps. Cette décroissance s'explique par le fait que, contrairement à  $\alpha_2$ , les autres actionneurs qui sont associés aux paramètres de la matrice  $B_\alpha$  peuvent tomber en panne. A cet effet, les résultats de simulation montrent que dans ce cas, les taux de contribution à la perte de la commandabilité de ces éléments sont assez similaires à tout instant. On pourrait penser d'une certaine manière que c'est la perte simultanée de l'ensemble de ces éléments, à l'exception de  $\alpha_2$ , qui conduit à la perte de la commandabilité.

### B. Etude de la commandabilité par rapport au système entier

Tous les éléments  $\alpha_k$  des matrices  $A_\alpha$  et  $B_\alpha$  sont maintenant susceptibles de s'annuler.

#### B.1. Les éléments nécessaires pour la commandabilité :

Comme précédemment, la simulation Monté Carlo permet de trouver les éléments dont la défaillance conduit systématiquement à la perte de commandabilité.

Ces résultats montrent que les éléments nécessaires à la commandabilité sont :  $\alpha_{12}, \alpha_{15}, \alpha_{25}$  et  $\alpha_2$ . En effet, le taux de contribution de chacun de ces éléments à la perte de commandabilité est de 100% et ce à n'importe quel instant.

Ce résultat est également confirmé par le calcul exact selon l'approche graphique (Fig. 2) [8].

#### B.2. La fiabilité de la commandabilité :

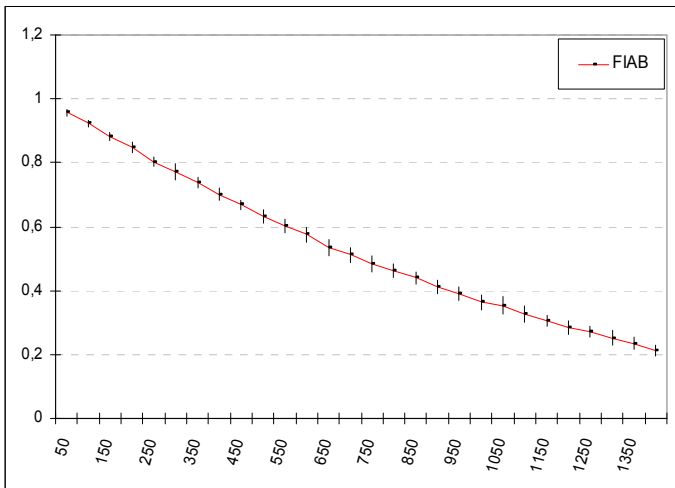


Fig. 5. Evolution dans le temps de la fiabilité de la commandabilité  $R_{moy}(t)$  et de son écart type  $\sigma_t$ , lorsque tout les composants du système sont sujets aux défaillances.

La fiabilité de la commandabilité au fil du temps est reportée sur la Figure 5.

Là aussi on constate une décroissance de la fiabilité en fonction du temps. Par contre, cette décroissance est beaucoup plus rapide que celle de la Figure 3. Ceci est logique puisqu'il y a tous les éléments de  $A_\alpha$  qui peuvent également s'annuler, en plus des éléments de  $B_\alpha$ , suite à des défaillances dans les autres composants du système (c.à.d défaillance dans les éléments internes du procédé).

De même que précédemment, on supposera que les éléments de la coupe minimale, c.à.d  $\{\alpha_{12}, \alpha_{15}, \alpha_{25}$  et  $\alpha_2\}$ , sont tous rendus fiables et on étudie l'impact d'une telle action sur la fiabilité de la commandabilité. La nouvelle fiabilité est donnée à la Figure 6.

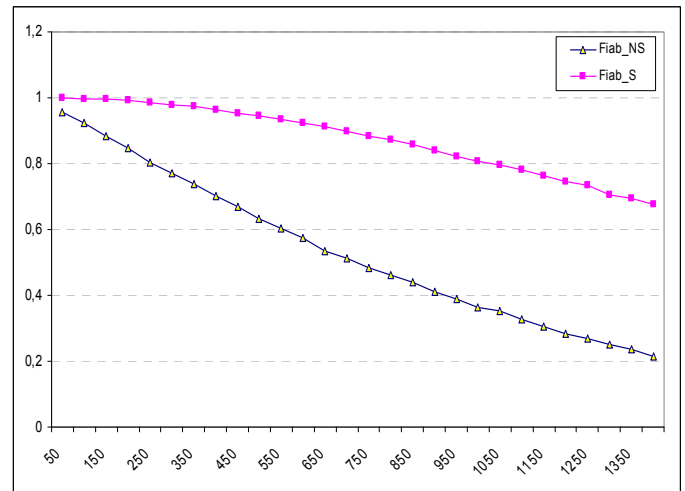


Fig. 6. Comparaison entre la fiabilité de la commandabilité lorsque tous les composants sont sujets aux défaillances ( $Fiab\_NS$ ) et lorsque les éléments essentiels sont fiables ( $Fiab\_S$ ).

On fait le même constat que précédemment, à savoir que si des procédures de fiabilisation des éléments essentiels à la commandabilité sont envisagées, alors cela améliore nettement la fiabilité de cette propriété. Par exemple en fin de mission à l'instant  $t=1400$  u.t, cette amélioration est d'environ 70%. A noter que la courbe ( $Fiab\_S$ ) de la figure 6, ne représente que la borne supérieure de la fiabilité qui sera atteinte lorsqu'il y a fiabilisation des composants essentiels. En effet, cette courbe représente le cas où les paramètres essentiels  $\alpha_i$  sont supposés ne jamais s'annuler, ce qui est un cas idéal mais non réaliste.

La décroissance de la fiabilité «  $Fiab\_S$  » peut s'expliquer là aussi par la perte simultanée de tous les autres éléments des matrices  $A_\alpha$  et  $B_\alpha$ .

## VI. CONCLUSION

Cet article propose d'utiliser la simulation Monte Carlo pour étudier les propriétés structurelles d'un système linéaire représenté par un modèle structurel.

Dans le domaine de l'automatique, plusieurs approches sont proposées pour étudier la commandabilité et



l'observabilité sur de tels modèles et les conditions nécessaires et suffisantes pour leur satisfaction [5][6]. Néanmoins, il y a peu de travaux qui étudient l'impact des paramètres du modèle structurel et des composants physiques qui leurs sont liés sur ces propriétés de façon probabiliste en incluant les aspects sûreté de fonctionnement. En effet, comme démontré dans [7][8][9] la défaillance de certains composants physiques du système aura un impact aussi bien sur la structure fiabiliste du système que les matrices de son modèle d'état et par voie de conséquence les propriétés structurelles de celui-ci.

L'approche proposée dans ce papier se base sur la méthode Monte Carlo qui est très utilisée dans le domaine de la sûreté de fonctionnement. Cette approche a permis d'étudier d'une part les éléments essentiels à la satisfaction de la propriété de commandabilité et d'autre part la fiabilité de celle-ci.

La méthode de simulation proposée est simple et utilise le critère algébrique de la commandabilité (observabilité) pour évaluer cette fiabilité. Pour cela, des événements aléatoires sont générés pour simuler la défaillance de certains composants du système et qui se traduit par l'annulation de certains paramètres dans le modèle structurel de celui-ci.

L'approche proposée ici a l'intérêt de faire une étude conjointe avec un seul et même algorithme, en permettant :

- 1- L'identification des paramètres et donc des composants essentiels pour la commandabilité, qui relève du domaine de l'automatique
- 2- L'évaluation de la fiabilité de la propriété de commandabilité, qui relève du domaine de la sûreté de fonctionnement.

La possibilité d'identifier les éléments essentiels à la satisfaction de la propriété de commandabilité permet d'envisager des procédures de fiabilisation dès la phase de conception en choisissant des composants physiques hautement fiables et/ou des procédures de tolérance aux fautes comme la redondance matérielle, la surveillance et la maintenance concentrées sur ces composants (notamment en préventif).

Dans ce papier, l'impact de telles actions a été étudié en montrant que la fiabilité de la commandabilité est nettement améliorée lorsqu'un effort est fait sur le choix des éléments essentiels.

L'autre intérêt de l'algorithme proposé est sa complexité polynomiale.

Une des perspectives de ce travail est d'étudier d'autres facteurs de la sûreté de fonctionnement comme la disponibilité,

en supposant que les composants soient réparables. Egalement la prise en compte des procédures de tolérance aux fautes comme le diagnostic, la maintenance et la reconfiguration en cas de redondance matérielle.

## REFERENCES

- [1] R.E. Kalman, P.L. Falb, M.A. Arbib, "Topics on Mathematical System Theory", McGraw-Hill, New York, 1981.
- [2] D.G. Luenberger, "An introduction to observers", IEEE Transactions on Automatic Control, 16:569-603, 1971.
- [3] C-T. Lin, "Structural controllability", IEEE Transactions on Automatic Control, 46(9), pp. 1451 – 1455, 2001.
- [4] J-M. Dion, C. Commault, and J. W. van der Woude, "Generic properties and control of linear structured systems: a survey", Automatica, 39(7), pp.1125–1144, 2003.
- [5] T. Boukhobza, F. Hamelin, D. Sauter, "Observability of structured linear systems in descriptor form: a graph-theoretic approach", Automatica, 42 (4), pp.629-635, 2006.
- [6] T. Boukhobza, F. Hamelin, and S. Martinez-Martinez, "State and input observability for structured linear systems: a graph-theoretic approach", Automatica, 43(7), pp.1204–1210, 2007.
- [7] S. Maza, C. Simon, and T. Boukhobza, "Impact of the actuator failures on the structural controllability of linear systems: a graph theoretical approach", IET Control Theory and Applications, Institution of Engineering and Technology (IET), 2012, 6 (3), pp.412-419.
- [8] M. Dakil, C. Simon, and T. Boukhobza, "Connectivity condition for structural properties using a graph theoretical approach: Probabilistic reliability assessment", 5th Symposium on System Structure and Control, IFAC Joint Conference SSSC, TDS, FDA, Grenoble, France, pp. 72-77, Feb 2013.
- [9] M. Dakil, C. Simon, and T. Boukhobza, "Reliability and availability analysis of the structural observability of bilinear systems: A graph-theoretical approach", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability, SAGE Publications (UK and US), no. 228, Vol. 3, pp.218-229, 2014.
- [10] R. Husson et al. « Automatique - Du cahier des charges à la réalisation de systèmes », Dunod, 2007.
- [11] A. Villemeur, "Reliability, availability, maintainability and safety assessment methods and techniques", Chichester-Wiley, 1992.
- [12] Gilles Lasnier, Sûreté de fonctionnement des équipements et calculs de fiabilité, Lavoisier 2011, Paris.