



HAL
open science

Approche probabiliste pour l'analyse des tolérances des produits hyperstatiques – application à une pompe

Antoine Dumas, Nicolas Gayton, Jean Yves Dantan, Thierry Yalamas,
Arnaud Fournier

► To cite this version:

Antoine Dumas, Nicolas Gayton, Jean Yves Dantan, Thierry Yalamas, Arnaud Fournier. Approche probabiliste pour l'analyse des tolérances des produits hyperstatiques – application à une pompe. QUALITA' 2015, Mar 2015, Nancy, France. hal-01149792

HAL Id: hal-01149792

<https://hal.science/hal-01149792v1>

Submitted on 7 May 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Approche probabiliste pour l'analyse des tolérances des produits hyperstatiques – application à une pompe

Antoine DUMAS, Thierry YALAMAS

Phimeca SA
Paris, France
yalamas@phimeca.com

Jean-Yves DANTAN

LCFC – Arts et Métiers ParisTech Campus de Metz
Metz, France
jean-yves.dantan@ensam.eu

Nicolas GAYTON

Clermont Université, IFMA, UMR 6602, Institut Pascal
Clermont Ferrand, France
nicolas.gayton@ifma.fr

Arnaud FOURNIER

Pierburg Pump Technology France
Yutz, France
Arnaud.Fournier@fr.kspg.com

Résumé—L'analyse des tolérances des mécanismes a pour but d'évaluer la qualité du produit lors de sa phase de conception. La technique consiste à déterminer si, dans une production de grandes séries, le taux de rebuts des mécanismes défectueux est acceptable. Deux conditions doivent être vérifiées: une condition d'assemblage et une condition fonctionnelle. La méthode existante se base sur le couplage de la simulation de Monte Carlo avec un algorithme d'optimisation qui est très coûteuse en temps de calcul. De ce fait, nous proposons une méthode plus efficace basée sur des approches probabilistes. Ces travaux ont permis le développement d'une nouvelle méthode de résolution basée sur la méthode de fiabilité système FORM (First Order Reliability Method) système. Cette méthode permet de traiter uniquement le problème fonctionnel. Ces performances sont illustrées sur un cas industriel : une pompe à débit variable.

Analyse des tolérances, optimisation Produit / Process, approche probabiliste, FORM système

I. INTRODUCTION

Les imperfections inhérentes aux procédés et aux processus de fabrication entraînent une dégradation des caractéristiques du produit, et donc de la qualité du produit. L'objectif de l'activité de tolérancement est de définir les limites acceptables des variations géométriques des composants permettant d'assurer un certain niveau de qualité ou de robustesse à un coût optimal.

L'analyse des tolérances consiste à analyser l'impact des variations admissibles sur les exigences et ainsi vérifier que les tolérances allouées sur chaque composant permettent d'avoir un produit vérifiant ses exigences et contraintes de conception.

L'analyse des tolérances est un élément clé lors de la conception d'un produit car elle permet :

- d'améliorer la qualité du produit,
- de diminuer les coûts de fabrication,
- de réduire les rebuts en production.

En tant qu'outils d'aide à la décision, l'analyse des tolérances doit fournir une information la plus juste possible.

Les techniques utilisées pour calculer le niveau de qualité doivent mettre en œuvre des modélisations caractérisant le plus fidèlement possible le comportement du mécanisme et utiliser des méthodes d'analyse fournissant des résultats précis le plus en accord avec la réalité.

A partir des besoins industriels formulés lors de la définition du projet ANR AHTOLA [1], nous pouvons formaliser les exigences :

- Évaluer des taux de non-conformité (TNC) à partir d'une modélisation probabiliste des imperfections de fabrication comme le tolérancement inertiel et d'une analyse au pire des cas des configurations des jeux entre pièces.
- Ne pas simplifier les modèles de comportement ou si nécessaire en estimant l'impact de cette simplification sur la précision des résultats.
- Effectuer l'analyse dans des temps de calcul raisonnable étant donné que l'analyse des tolérances est pratiquée lors de plusieurs étapes du développement du produit : lors de la conception jusqu'à la production pour la validation ou la détermination du réglage du système de production. Nous nous restreignons à l'utilisation d'ordinateurs de bureau d'études.

En complément de ces objectifs, l'analyse des tolérances est sujette à trois problématiques [1], [2] :

- Modéliser les écarts géométriques inhérents aux processus de fabrication (usure des outils, variabilité des opérateurs,...) et modéliser les jeux entre les pièces du mécanisme.
- Construire un modèle mathématique qui permet de simuler le comportement du mécanisme en prenant en compte les écarts et les jeux.
- Développer des méthodes d'analyse pour évaluer le niveau de qualité du mécanisme.

Par rapport à ces trois problématiques, il est possible de distinguer deux approches d'analyse des tolérances :

l'accumulation des tolérances et l'accumulation des déplacements. Ces deux approches utilisent le même type de paramétrage géométrique mais se basent sur une méthode d'analyse différente. Les deux techniques ont le même objectif qui est d'évaluer la qualité du mécanisme pour des tolérances données [2] :

- L'accumulation des tolérances se base sur la manipulation de domaines. Elle utilise principalement la méthode du pire des cas définissant les tolérances pour garantir une probabilité de rebut égale à zéro. Cependant, la méthode statistique commence également à être utilisée.
- L'accumulation des déplacements se base sur la définition de contraintes sur les paramètres géométriques. Elle utilise la méthode statistique ayant pour but de calculer le niveau de qualité des mécanismes via des probabilités de rebut.

Nombreux travaux ont été réalisés sur l'analyse des tolérances d'assemblage mécanique, ils ont essentiellement étudié les assemblages pour lesquels les «response function» sont définies explicitement $Y=f(X)$ et continues dans un intervalle donné. Par contre, pour les mécanismes hyperstatiques, il n'est pas toujours possible de trouver une fonction explicite continue.

Deux principaux travaux se sont focalisés sur le développement d'approche d'analyse statistique des tolérances des mécanismes hyperstatiques :

- les travaux de J. Qureshi [2], transforment les définitions des conditions d'assemblage et fonctionnelle en un problème d'optimisation à résoudre. La résolution du problème permet de répondre aux deux conditions. La probabilité de non-respect des conditions est calculée en couplant un algorithme d'optimisation avec une simulation de Monte Carlo,
- les travaux de P. Beaucaire [3] ont développé une nouvelle formulation pour l'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques basée sur l'accumulation des déplacements. La formulation permet de définir le problème comme un problème d'estimation d'une probabilité système. Le but est de considérer une condition fonctionnelle pour chaque configuration isostatique possible du mécanisme en vérifiant si le mécanisme est toujours montable. La formulation proposée devient cependant inutilisable pour des études de mécanismes très complexes car le nombre d'événements de la probabilité système à considérer devient très grand.

Dans cet article, nous proposons une autre formulation permettant de traiter des problèmes de taille industrielle avec des temps de calcul raisonnable, basée sur la formulation duale du problème d'optimisation proposée par J. Qureshi qui permet de définir une formulation système de la probabilité de défaillance.

La section 2 détaille la formulation mathématique du problème proposé par J. Qureshi. A partir de cette formulation, la section 3 explicite la méthode de résolution proposée par J.

Qureshi et la méthode proposée basée sur la formulation duale de Lagrange.

II. FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

La façon « la plus simple » pour analyser les tolérances est de simuler les influences des déviations sur le comportement géométrique du mécanisme. Ce modèle de comportement géométrique doit modéliser les écarts des surfaces de chaque pièce (écart de situation et écart intrinsèque) et les déplacements relatifs entre pièces selon les variations des jeux (les jeux et conditions fonctionnelles). Le comportement géométrique est modélisé dans trois ensembles de paramètres :

- les écarts de situation qui décrivent les déviations angulaires et linéaires des éléments de la géométrie de substitution, par rapport à la géométrie nominale.
- les écarts intrinsèques qui caractérisent les variations de forme des éléments géométriques. Ils représentent les variations des paramètres intrinsèques des éléments de substitution, comme la variation du diamètre d'un cylindre, par exemple.
- les jeux qui décrivent les déplacements relatifs entre les surfaces de substitution qui sont nominalelement en contact.

Les écarts sont modélisés par des variables notées : $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, et les jeux par des variables notés : $g = \{g_1, \dots, g_m\}$.

La formulation mathématique de l'analyse de tolérance est basée sur une expression du comportement géométrique du mécanisme qui traduit deux phénomènes [2]:

- La composition des déplacements dans les boucles topologiques. Elle permet de lier entre eux les paramètres du mécanisme (écarts géométriques et jeux). Elle décrit l'assemblage des pièces entre elles avec ou sans jeux. L'ensemble des équations de compatibilité forme un système d'équations linéaires : $C_c(x, g) = 0$
- La non interpénétration de matière ou les déplacements bloqués au niveau des liaisons. Les contraintes d'interface définissent des limites au comportement du mécanisme : $C_i(x, g) \leq 0$ et $C_{i^*}(x, g) = 0$ Elles caractérisent la non interpénétration ou association entre des surfaces de substitution.

Un troisième ensemble de conditions est l'ensemble des conditions fonctionnelles : $C_f(x, g) \geq 0$ Une condition fonctionnelle limite l'orientation et/ou la position relative de deux surfaces qui représentent un intérêt fonctionnel.

Les méthodes d'analyse doivent donc utiliser une formalisation mathématique la plus représentative de la réalité qui vise à modéliser deux notions : celle de la montabilité du mécanisme et celle de sa fonctionnalité [4].

Condition d'assemblage : « *Il existe une configuration admissible des jeux du mécanisme telle que les équations de compatibilité et les contraintes d'interface soient respectées* ».

Condition de fonctionnement : « *Pour toutes les configurations admissibles du mécanisme, les conditions d'assemblage et la ou les contraintes fonctionnelles doivent être respectées* ».

La formulation mathématique de la condition d'assemblage se traduit par l'optimisation : minimiser une contrainte d'interface sous toutes les contraintes caractérisant le modèle de comportement y compris la contrainte d'interface à minimiser. Cette formulation est un artifice. Le résultat de la minimisation n'a pas d'importance, seule l'existence ou non d'une solution importe. Une solution signifie qu'il existe bien une configuration des jeux telle que les contraintes soient respectées :

$$R_a(\mathbf{x}) = \min_{\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^p} C_i^1(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \quad \text{sous} \quad C_i^{(k)}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \leq 0 \quad \forall k = \{1, \dots, N_{C_i}\} \quad (1)$$

où N_{C_i} est le nombre de contraintes d'interface et $\tilde{\mathbf{g}}$ est le vecteur \mathbf{g} qui traduit la prise en compte des équations de compatibilité [5]. Soit l'événement $E_a(\mathbf{x})$ suivant : « Pour un vecteur \mathbf{x} donné, il n'existe pas de vecteur jeux $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^p$ tel que $R_a(\mathbf{x})$ ait une solution ». Basée sur cet événement, l'expression de la probabilité de défaillance d'assemblage, P_{da} , est donnée dans l'équation (2).

$$P_{da} = \text{Prob}(E_a(\mathbf{X}(\omega))) \quad (2)$$

Pour la formulation de condition de fonctionnement, il n'est pas envisageable de considérer toutes les configurations admissibles du mécanisme et, pour toutes, vérifier si la condition fonctionnelle est respectée ou non. Il est plus aisé de trouver la configuration du mécanisme qui fournit la pire valeur de la caractéristique fonctionnelle. Si cette pire valeur de la caractéristique fonctionnelle indique que le mécanisme est fonctionnel alors il le sera pour toutes les autres configurations admissibles. Pour un ensemble d'écartés géométriques \mathbf{x} donné, cela revient à chercher le pire des cas de la condition fonctionnelle en minimisant sa valeur de sorte que toutes les contraintes du modèle de comportement soient respectées. La formulation du problème d'optimisation sous contraintes est donnée dans l'équation (3).

$$R_f(\mathbf{x}) = \min_{\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^p} C_f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \quad \text{sous} \quad C_i^{(k)}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \leq 0 \quad \forall k = \{1, \dots, N_{C_i}\} \quad (3)$$

L'expression de la formulation de la probabilité de défaillance fonctionnelle, P_{df} , est donnée dans l'équation (4).

$$P_{df} = \text{Prob}(R_f(\mathbf{X}(\omega)) \leq 0) \quad (4)$$

Dans la suite, nous nous focaliserons sur les méthodes d'estimation de cette dernière probabilité : P_{df} .

III. MÉTHODES DE RÉOLUTION

La formulation globale du problème d'optimisation proposée dans la section précédente a pour avantage d'être facile à coupler à une méthode de simulation pour calculer la probabilité de défaillance fonctionnelle.

La première méthode de résolution utilisée est la simulation de Monte Carlo couplée avec un algorithme d'optimisation, elle est détaillée dans la partie A. La seconde méthode est la méthode de résolution du problème sous forme système est décrite dans la partie B. La méthode FORM système est utilisée pour calculer la probabilité système.

A. Monté Carlo + Optimisation

Les deux formulations P_{da} et P_{df} sont tout à fait adaptées pour l'utilisation de méthodes de simulation telle que Monte Carlo. La technique initialement proposée par Dantan et Qureshi [4] consiste à coupler la simulation de Monte Carlo avec un algorithme d'optimisation. Afin de simplifier le problème d'optimisation et d'éviter des problèmes de non satisfaction de contraintes observés par Qureshi et al. [2], les équations non-linéaires définissant le problème d'optimisation sont linéarisées. Cela permet d'utiliser un algorithme d'optimisation linéaire comme l'algorithme du simplexe. L'impact de la linéarisation sur la précision des résultats a été discuté dans [6].

La simulation de Monte Carlo couplée à cet algorithme d'optimisation est très simple à mettre en œuvre. Un nombre N_{MC} de réalisations des variables aléatoires est tiré aléatoirement puis, pour chaque tirage, l'algorithme d'optimisation permet de déterminer si le mécanisme est fonctionnel. Il y a donc N_{MC} appels à l'algorithme d'optimisation. La probabilité de défaillance est estimée grâce à l'utilisation de la fonction indicatrice :

$$\tilde{P}_{df} = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x}^{(i)}) \quad \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } R_f(\mathbf{x}) \leq 0 \\ 0 & \text{si } R_f(\mathbf{x}) > 0 \text{ ou s'il n'y a pas de solution} \end{cases} \quad (5)$$

Les performances de cette méthode seront discutées sur l'exemple.

B. Approche système

La formulation système proposée se base sur une propriété de la programmation linéaire permettant d'écrire un problème d'optimisation primal sous sa forme duale.

Il est possible de définir la condition fonctionnelle comme une combinaison linéaire de plusieurs composantes jeux. Les contraintes d'interfaces sont pour la plupart également des fonctions linéaires des jeux. Certaines contraintes sont cependant non linéaires mais une procédure de linéarisation est appliquée à ces contraintes dont l'impact a été discuté dans [6]. D'après ces hypothèses, le problème d'optimisation appartient à la catégorie de la programmation linéaire. De plus, la condition fonctionnelle C_f est supposée différentiable partout. Soit $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble de réalisations des variables aléatoires \mathbf{X} , il est possible de définir le Lagrangien associé au problème d'optimisation :

$$L(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}, \boldsymbol{\lambda}) = C_f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) + \sum_{k=1}^{N_{C_i}} \lambda_k C_i^{(k)}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \quad (6)$$

où λ est le vecteur des N_{Ci} multiplicateurs de Lagrange.

Dans le cas présent, $\tilde{\mathbf{g}}^*$ est une solution optimale du problème d'optimisation si et seulement si il existe $\lambda^* \geq 0$ tel que $(\tilde{\mathbf{g}}^*, \lambda^*)$ est un point-selle de la fonction de Lagrange. En particulier, le problème d'optimisation est soluble si et seulement si L possède des points-selle, et si c'est le cas, alors le problème d'optimisation et son dual de Lagrange sont solubles avec des valeurs optimales égales.

Soit le programme linéaire suivant, représentatif d'un problème d'analyse des tolérances, écrit sous forme matricielle (Equation 7) :

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^p} \quad & C_f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \tilde{\mathbf{g}} + c_0 \\ \text{sous} \quad & C_i^{(k)}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) = \mathbf{d}_k^T \mathbf{x} - \mathbf{e}_k^T \tilde{\mathbf{g}} + c_k \leq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

pour $k = \{1, \dots, N_{Ci}\}$ et pour $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^p$. Le Lagrangien est défini par :

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}, \boldsymbol{\lambda}) &= C_f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) + \sum_{k=1}^{N_{Ci}} \lambda_k C_i^{(k)}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{g}}) \\ &= \left[\mathbf{b} - \sum_{k=1}^{N_{Ci}} \lambda_k \mathbf{e}_k \right]^T \tilde{\mathbf{g}} + \sum_{k=1}^{N_{Ci}} \lambda_k (\mathbf{d}_k^T \mathbf{x} + c_k) + \mathbf{a}^T \mathbf{x} + c_0 \end{aligned} \quad (8)$$

Le dual de Lagrange s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{N_{Ci}}} \quad & C_{f,dual}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = ([\mathbf{d}]^T \mathbf{x} + \mathbf{c})^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{a}^T \mathbf{x} + c_0 \\ \text{sous} \quad & \sum_{k=1}^{N_{Ci}} \lambda_k \mathbf{e}_k = \mathbf{b} \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

La forme duale est intéressante parce que la fonction-objectif n'est plus fonction des jeux. Les contraintes d'optimisation sont maintenant constituées de p équations d'égalité à satisfaire et les multiplicateurs de Lagrange doivent être positifs. Le nombre de contraintes d'interface N_{Ci} étant très grand par rapport à la dimension p de $\tilde{\mathbf{g}}$, le problème dual d'optimisation est sous-contraint : il y a plus de multiplicateurs de Lagrange λ que de contraintes d'égalité. Afin de trouver les valeurs admissibles des multiplicateurs de Lagrange satisfaisant les contraintes, toutes les combinaisons possibles doivent être testées. En réalité, il faut avoir autant de λ différents de zéro qu'il y a de jeux à trouver. Il y a alors N_{as} solutions possibles au problème de maximisation qui peut donc s'écrire de la façon suivante :

$$C_{f,dual}^*(\mathbf{x}) = \max \left(C_{f,dual}^{(s_1)}(\mathbf{x}), \dots, C_{f,dual}^{(s_{N_{as}})}(\mathbf{x}) \right) \quad (10)$$

Les valeurs optimales des problèmes primal et dual sont égales, i.e. les deux expressions des conditions fonctionnelles sont égales :

$$C_f^*(\mathbf{x}) = C_{f,dual}^*(\mathbf{x}) = \max \left(C_f^{(s_1)}(\mathbf{x}), \dots, C_f^{(s_{N_{as}})}(\mathbf{x}) \right) \quad (11)$$

L'objectif final est de déterminer la probabilité de défaillance fonctionnelle, il s'agit de calculer la probabilité que le résultat de l'optimisation soit inférieur à zéro. La probabilité s'écrit finalement de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P_{df} &= \text{Prob} \left(\max \left(C_f^{(s_1)}(\mathbf{X}), \dots, C_f^{(s_{N_{as}})}(\mathbf{X}) \right) \leq 0 \right) \\ &= \text{Prob} \left(\left\{ C_f^{(s_1)}(\mathbf{X}) \leq 0 \right\} \cap \dots \cap \left\{ C_f^{(s_{N_{as}})}(\mathbf{X}) \leq 0 \right\} \right) \\ &= \text{Prob} \left(\bigcap_{i=1}^{N_{as}} C_f^{(s_i)}(\mathbf{X}) \leq 0 \right) \end{aligned} \quad (12)$$

Dans cette expression, le nombre d'intersections d'événements est égal à N_{as} . C'est le nombre de combinaisons admissibles satisfaisant les contraintes d'optimisation du problème d'optimisation dual. Ces combinaisons peuvent être trouvées en calculant les valeurs des multiplicateurs de Lagrange dans les N_s cas possibles et en sélectionnant uniquement les cas admissibles. Cette opération peut être effectuée seulement si un petit nombre de cas à tester existe (quelques centaines au maximum). Cependant, pour les mécanismes complexes ayant des contraintes linéarisées, le nombre de cas N_s peut excéder plusieurs dizaines de milliers. De plus, certaines combinaisons admissibles peuvent ne pas avoir d'influence sur la valeur de la probabilité de défaillance. Pour ces deux raisons, trouver et prendre en compte les N_{as} combinaisons admissibles n'est pas envisageable. C'est pourquoi un algorithme de recherche est requis pour sélectionner un nombre N_{ds} de combinaisons de contraintes dominantes parmi les N_{as} admissibles. La probabilité de défaillance est donc approximée :

$$P_{df} \approx \text{Prob} \left(\bigcap_{i=1}^{N_{ds}} C_f^{(s_i)}(\mathbf{X}) \leq 0 \right) \quad (13)$$

L'algorithme de sélection des combinaisons dominantes utilisé est proposé par Kim et al. [7]. C'est un algorithme de recherche sélectif basé sur une simulation avec une opération de recherche de type algorithme génétique. Une fois les combinaisons dominantes sélectionnées, le nombre d'événements est considérablement réduit, il est possible de calculer la probabilité en appliquant la méthode FORM système. En appliquant la méthode FORM système, cette probabilité s'exprime alors de la façon suivante :

$$P_{df} \approx \Phi_{N_{ds}}(-\boldsymbol{\beta}; [\boldsymbol{\rho}]) \quad (14)$$

où $\Phi_{N_{ds}}$ est la fonction de répartition de la loi multivariée normale, $\boldsymbol{\beta}^{(si)}$ est l'indice de fiabilité associé à la condition fonctionnelle $C_f^{(si)}$ et $[\boldsymbol{\rho}]$ est la matrice des coefficients de corrélation des états-limites.

Sélectionner un nombre trop faible de combinaisons dominantes peut entraîner une mauvaise approximation de la probabilité. Comme il s'agit du calcul d'une probabilité d'intersection d'événements, un manque de combinaisons dominantes entraîne le calcul d'une probabilité qui est surestimée. Le résultat reste donc conservatif.

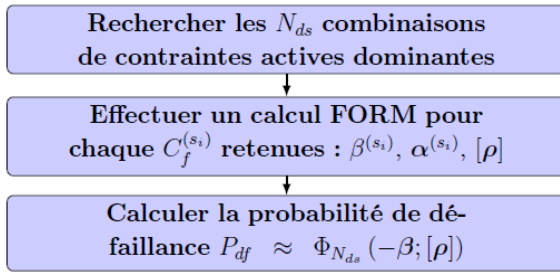


Fig. 1. Schéma de la procédure de résolution du problème sous forme système.

La section suivante se focalise sur la comparaison de ces deux méthodes sur une application industrielle.

IV. APPLICATION

Cette application consiste à vérifier la fonctionnalité d'une pompe à débit variable de la société Pierburg Pump Technology France. Le mécanisme est composé d'un bâti (1), d'un disque de contrôle (2) et de neuf ailettes. Le disque de contrôle permet de gérer l'ouverture des ailettes. En effet, le disque peut tourner autour de son axe, la rotation entraîne un mouvement des ailettes grâce à un petit ergot situé sur la partie basse de l'ailette. L'ergot se déplace dans un trou oblong du disque de contrôle. L'espacement entre les ailettes est plus ou moins grand, ce qui modifie le débit la pompe.

L'exigence fonctionnelle de la pompe porte sur la position relative des ailettes entre elles, et cela quelle que soit la position du disque de contrôle. L'expression réelle de cette exigence étant confidentielle, elle est supposée fonction de l'angle relatif des ailettes entre elles. Afin de simplifier l'étude, uniquement deux ailettes sont considérées dans le mécanisme ainsi qu'un seul réglage du disque de contrôle.

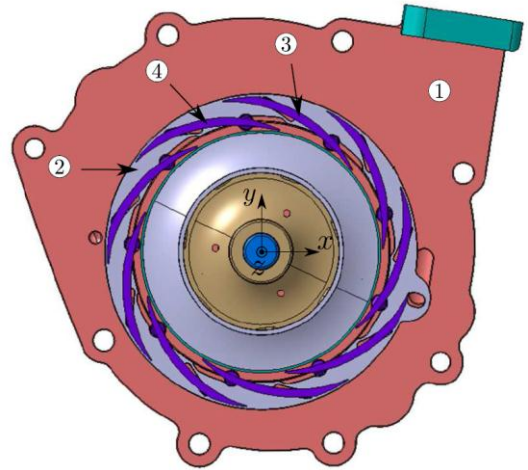
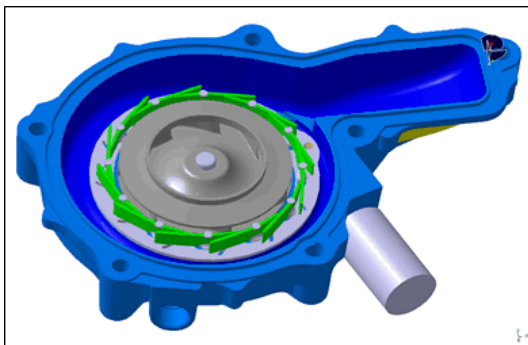


Fig. 2. Modèle CAO de la pompe considérée

Les résultats pour la résolution sont présentés dans le tableau 1. Les paramètres de résolution sont :

- le nombre de linéarisations des contraintes quadratiques fixé à $N_d = 36$ avec une stratégie circonscrite car c'est la stratégie qui fournit un résultat conservatif.
- le nombre de tirages pour la méthode MCO fixé à $N_{MC} = 10^7$,
- le nombre de combinaisons dominantes à sélectionner pour la méthode FORM système fixé à $N_{ds} = \{10, 50, 100\}$ afin de voir l'impact sur la précision de la probabilité.

Le nombre de linéarisations N_d est fixé à une seule valeur pour cette étude car le but est de comparer l'efficacité des méthodes MCO et système. En se basant sur l'étude de l'impact de N_d sur la probabilité de défaillance, le choix de $N_d = 36$ permet d'avoir un résultat suffisamment précis pour que la comparaison des méthodes soit pertinente.

TABLE I. RESULTATS DES ANALYSES DE LA POMPE

FORM système			
P_{df} (ppm)	N_{ds}	$N_{optim.}$	Temps
108	10	9200	4.6 min
86	50	9281	7.3 min
84	100	9341	10 min
MCO			
P_{df} (ppm)	95%IC (ppm)	Temps	
83	2.9	5.3 j	

Les résultats montrent que la méthode FORM système permet d'obtenir une estimation de la probabilité très proche de celle obtenue par la méthode de référence MCO. Le temps de calcul par la méthode FORM système est considérablement réduit, environ une dizaine de minutes, alors qu'il faut plus de cinq jours avec la méthode MCO. L'utilisation de cette

méthode est très pénalisante du fait d'avoir deux problèmes d'optimisation à résoudre à chaque itération.

Avec la méthode FORM système, le nombre d'appels à l'algorithme d'optimisation est inférieur à 10000, soit environ 5000 optimisations pour trouver les combinaisons dominantes associées à chaque condition fonctionnelle.

Le choix du nombre de combinaisons dominantes N_{ds} impacte la précision de la probabilité de défaillance. Il ne faut donc pas en sélectionner un trop faible nombre. Ce nombre dépend du nombre de linéarisations des contraintes quadratiques. Plus le nombre de linéarisations est élevé, plus il faut sélectionner de combinaisons dominantes. Le choix de la valeur de N_{ds} est important.

Cette application confirme que la méthode proposée permet un gain de temps conséquent pour évaluer la probabilité de défaillance fonctionnelle tout en fournissant un résultat précis.

V. CONCLUSION

L'objectif de ces travaux dans le contexte du projet AHTOLA est de développer des méthodes probabilistes pour l'analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques. Ces méthodes doivent pouvoir traiter des systèmes complexes et calculer le niveau de qualité des produits via un indicateur qui est le taux de non-conformité (i.e. probabilité de défaillance). Le but est d'avoir une modélisation probabiliste des défauts de fabrication afin de pouvoir calculer cet indicateur par des méthodes probabilistes. Les jeux sont cependant non aléatoires afin de correspondre au mieux à la réalité. La pire des configurations des jeux entre les pièces doit être déterminée pour calculer la valeur des jeux. L'évaluation du taux de non-conformité doit s'effectuer dans un temps de calcul convenable et réalisable sur des ordinateurs présents dans les bureaux d'études.

Des travaux de recherche antérieurs ont mis au point une formulation basée sur l'utilisation d'un problème d'optimisation à résoudre [2]. Le but est, pour des écarts géométriques fixés, de minimiser la condition fonctionnelle de façon à trouver la valeur des jeux correspondant au pire des cas. De plus, si le problème d'optimisation n'a pas de solution alors cela signifie que le mécanisme n'est pas montable pour ces écarts géométriques donnés. La méthode de résolution proposée par Qureshi et al. [2] consiste à coupler une simulation de Monte Carlo avec un algorithme d'optimisation. Cette méthode est cependant très coûteuse en temps de calcul.

Dans ces travaux, une nouvelle formulation système est proposée. Cette formulation transforme l'expression initiale de la probabilité en une probabilité d'intersection d'événements, où chaque événement est lié à la condition fonctionnelle d'une configuration dominante. Une procédure de résolution système est proposée pour calculer la probabilité de défaillance fonctionnelle. La première étape de la procédure consiste à déterminer les configurations dominantes parmi toutes les configurations possibles. Pour cela, un algorithme de recherche sélectif issu d'un algorithme proposé par Kim et al. [7] est utilisé. Lorsque les configurations dominantes sont trouvées, la probabilité est calculée par la méthode FORM système très rapidement. En pratique, cette méthode de résolution est très

efficace. Elle permet de calculer en quelques minutes la probabilité de défaillance de l'ordre de quelques ppm alors que la méthode de référence MCO nécessite plusieurs jours. L'inconvénient de la méthode système est qu'elle nécessite d'avoir un modèle de comportement linéaire afin de pouvoir transformer la formulation initiale en formulation système. Par ailleurs, le nombre de configurations dominantes à sélectionner dépend du mécanisme étudié. Sélectionner un trop faible nombre de configurations engendrera une erreur d'approximation sur la probabilité mais la probabilité sera toutefois conservative. Au contraire, sélectionner un trop grand nombre de configurations entraîne un temps de calcul plus important.

Enfin la densité de linéarisation impacte également la précision de la probabilité de défaillance. Il peut être nécessaire d'effectuer plusieurs calculs avec des densités de linéarisation différentes pour garantir une précision suffisante de la probabilité. Toutefois, le temps de calcul étant réduit à quelques minutes, vérifier la précision en faisant plusieurs calculs avec la méthode système est moins contraignant que si elle était effectuée avec la méthode MCO.

REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient vivement l'Agence Nationale de la Recherche et les pôles de compétitivité ViaMeca et Materialia pour le support qu'ils accordent à ce projet dans le cadre du thème « Modèles Numériques ».

REFERENCES

- [1] A. Dumas, "Développement de méthodes probabilistes pour l'analyse des tolérances des systèmes mécaniques sur-construits", Thèse soutenue à l'ENSAM de Metz le 10 Décembre 2014.
- [2] J. Qureshi, J.Y. Dantan, V. Sabri, P. Beaucaire, et N. Gayton. "A statistical tolerance analysis approach for over-constrained mechanism based on optimization and monte carlo simulation". *Computer Aided Design*, 44 :132–142, 2012.
- [3] P. Beaucaire, N. Gayton, E. Duc, et J.-Y. Dantan. "Statistical tolerance analysis of overconstrained mechanisms with gaps using system reliability methods". *Computer-Aided Design*, 45 :1547–1555, 2013.
- [4] J.Y. Dantan et J. Qureshi. "Worse case and statistical tolerance analysis based on quantified constraint satisfaction problems and monte carlo simulation". *Computer Aided Design*, 41(1) :1–12, 2009.
- [5] E. Ballot. « Lois de comportement géométrique des mécanismes pour le tolérancement ». Thèse, Cachan, École Normale Supérieure, 1995.
- [6] A. Dumas, J.-Y. Dantan, et N. Gayton. "Impact of a behavior model linearization strategy on the tolerance analysis of over-constrained mechanisms". *Computer-Aided Design*, in press 2014.
- [7] D.-S. Kim, S.-Y. Ok, J. Son, et H.-M Koh. "System reliability analysis using dominant failure modes identified by selective searching technique". *Reliability Engineering and System Safety*, 119 :316–331, 2013.