



**HAL**  
open science

# Fiabilité de la solvabilité du problème de rejet de perturbations des systèmes linéaires : Approche graphique

Manal Dakil, Christophe Simon, Taha Boukhobza

## ► To cite this version:

Manal Dakil, Christophe Simon, Taha Boukhobza. Fiabilité de la solvabilité du problème de rejet de perturbations des systèmes linéaires : Approche graphique. 11ème Congrès International Pluridisciplinaire en Qualité, Sûreté de Fonctionnement et Développement Durable, QUALITA 2015, Mar 2015, Nancy, France. hal-01149788

**HAL Id: hal-01149788**

**<https://hal.science/hal-01149788>**

Submitted on 7 May 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Fiabilité de la solvabilité du problème de rejet de perturbations des systèmes linéaires : Approche graphique

Manal Dakil, Christophe Simon et Taha Boukhobza

Université de Lorraine, Centre de Recherche en Automatique de Nancy, UMR 7039, Vandoeuvre-lès-Nancy, F-54506, France

CNRS, Centre de Recherche en Automatique de Nancy, UMR 7039, Vandoeuvre-lès-Nancy, F-54506, France

Email: {manal.dakil, christophe.simon, taha.boukhobza}@univ-lorraine.fr

**Résumé**—L’objectif de cet article est d’étudier l’impact des défaillances des composants sur l’existence structurelle de solution à un problème de commande important pour un système continu: le rejet de perturbations. Cet article propose une méthode basée sur une approche graphique pour étudier la fiabilité de la capacité structurelle d’un système à rejeter certaines perturbations externes. Seule la structure du système est considérée connue. La solvabilité du problème de rejet de perturbation est formulée comme une expression booléenne basée sur l’état de fonctionnement du composant du système. La fiabilité de cette propriété est ensuite calculée sachant la fiabilité des composants du système. L’approche graphique ne considérant que la connaissance de la structure du système, l’étude peut s’effectuer dès les premières phases du cycle de vie du système.

**Mots-clés:** Rejet de perturbations, fiabilité, système linéaire, approche graphique.

## I. INTRODUCTION

Dans de nombreuses applications, le rejet de perturbations est l’un des principaux objectifs de commande pour un système. En effet, certaines caractéristiques de commande doivent être vérifiées sur les sorties du système quelles soient les perturbations ou les défauts externes. Il est utile de s’intéresser à ces caractéristiques dès la phase de conception du système.

En effet, la conception est une étape très importante dans l’ingénierie des systèmes. Elle correspond au processus de définition de l’architecture, des composants, des interfaces et des données d’un système afin de satisfaire les exigences du client. Pendant cette phase, les paramètres du système ne sont pas numériquement fixés. L’analyse structurelle d’un système sans la connaissance de ses paramètres est possible en considérant des modèles génériques développés à partir des lois physiques du système. Les propriétés d’un système sont traitées dans de nombreux travaux [1], [14], [17] en utilisant les formalisations géométriques et algébriques qui nécessitent la connaissance des valeurs

numériques des paramètres. Puisque ces derniers ne sont pas toujours disponibles, il est intéressant d’utiliser un “modèle structuré” défini par des matrices qui contiennent des paramètres nuls et/ou des paramètres non nuls, libres et déterminés à partir des lois physiques du système. De nombreuses études sur les systèmes structurés sont liés à l’approche graphique pour analyser certaines propriétés du système tels que la commandabilité, l’observabilité ou la solvabilité de plusieurs problèmes classiques de commande comme le rejet de perturbations (voir [2], [9], [12], [13]). Le problème de rejet de perturbations par retour d’état a été abordé dans [3], [15] pour établir les conditions de la solvabilité de ce problème. Plus récemment, dans [4], [8], les auteurs classent les différents capteurs du système en fonction de leur importance pour la solvabilité de ce problème.

Par ailleurs, la sûreté de fonctionnement des systèmes consiste à étudier la fiabilité, la disponibilité, la maintenabilité et la sécurité (FMDS). Dans cet article, nous considérons un paramètre important de la sûreté de fonctionnement : la fiabilité. La fiabilité d’un système correspond à la probabilité que ce dernier réponde à ses objectifs pendant la durée de sa mission [10]. Elle est exprimée en fonction de la fiabilité des composants du système. la fiabilité est liée à l’occurrence de certains événements indésirables (défaillances) sur les composants du système ainsi que leur influence sur le fonctionnement de tout le système. La relation qui exprime la dépendance entre l’état de fonctionnement du système (marche ou panne) et l’état de fonctionnement de ses composants (bon fonctionnement ou défaillance) peut prendre des formes diverses, et notamment une équation booléenne.

Afin de pouvoir mener une étude jointe d’analyse structurelle par approche graphique et de sûreté de fonctionnement, nous nous intéressons à la relation entre les arcs du graphe représentant le système et les composants physiques du système.

Les arcs sont naturellement liées aux composants du système. Ces composants peuvent être des capteurs et actionneurs, ou des composants internes (tuyaux, ressorts, poulies, roulements, etc) selon le type de système (hydraulique, mécanique, etc)

[7]. Ainsi, la validité des propriétés structurelles du système comme la capacité à rejeter des perturbations peut être liée aux défaillances des composants physiques du système.

La première contribution de cet article correspond à exprimer les conditions graphiques de la solvabilité du problème de rejet de perturbations comme une expression booléenne basée sur les états de validité des arcs puis les états de fonctionnement des composants. La deuxième contribution consiste à calculer la fiabilité de cette propriété structurelle sachant la fiabilité des composants du système.

Cet article est organisé comme suit. Dans la Section II, l'énoncé du problème est présenté. La Section III est consacrée à quelques définitions relatives à l'approche graphique. Les principaux résultats concernant l'analyse structurelle du problème de rejet de perturbations sont exposés dans la Section IV. L'évaluation de la fiabilité est développée dans la Section V. La Section VI est consacrée à une étude de cas avant une brève conclusion.

## II. ENONCÉ DU PROBLÈME

Dans cet article, nous considérons un système linéaire structuré (SLS) de la forme suivante:

$$\Sigma_{\Lambda} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Eq \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1)$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $u = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$ ,  $y = (y_1, \dots, y_p)^T \in \mathbb{R}^p$  et  $q = (q_1, \dots, q_d)^T \in \mathbb{R}^d$  sont respectivement les vecteurs d'état, d'entrée, de sortie et de perturbation.  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $E \in \mathbb{R}^{n \times d}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  et  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$  sont des matrices de dimensions appropriées. Elles ne contiennent que des paramètres nuls et/ou des paramètres libres notés  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h$  supposés indépendants.

Pour le calcul de la fiabilité de la solvabilité du problème de rejet de perturbations, cette étude est réalisée en deux étapes. La première étape consiste à associer cette propriété structurelle à une expression booléenne basée sur l'état de validité des arcs dans la représentation graphique du système puis basée sur l'état de fonctionnement des composants du système. Cette expression booléenne est égale à "vrai" lorsque le problème de rejet de perturbations est solvable et égale à "faux" dans le cas contraire. La deuxième étape consiste à évaluer la fiabilité de la solvabilité du problème de rejet de perturbations en fonction de la fiabilité des composants du système.

## III. REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES DES SLS

### A. Graphe orienté pour les SLS

Dans cette section, nous exposons la représentation graphique d'un SLS noté  $\Sigma_{\Lambda}$ . Le graphe orienté associé à ce SLS est noté  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ . Il est constitué d'un ensemble de sommets  $\mathcal{V}$  et d'un ensemble d'arcs  $\mathcal{E}$ . Plus précisément, l'ensemble des sommets est défini

par  $\mathcal{V} = \mathbf{X} \cup \mathbf{U} \cup \mathbf{Q} \cup \mathbf{Y}$ , où  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ ,  $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ ,  $\mathbf{Q} = \{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_d\}$  et  $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p\}$  sont des ensembles de sommets correspondant respectivement aux variables d'état, d'entrée, de perturbations et de sortie. L'ensemble des arcs est  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_A \cup \mathcal{E}_B \cup \mathcal{E}_C \cup \mathcal{E}_D \cup \mathcal{E}_E$ , avec  $\mathcal{E}_A = \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i) | A(i, j) \neq 0\}$ ,  $\mathcal{E}_B = \{(\mathbf{u}_j, \mathbf{x}_i) | B(i, j) \neq 0\}$ ,  $\mathcal{E}_C = \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_i) | C(i, j) \neq 0\}$ ,  $\mathcal{E}_D = \{(\mathbf{u}_j, \mathbf{y}_i) | D(i, j) \neq 0\}$  et  $\mathcal{E}_E = \{(\mathbf{q}_j, \mathbf{x}_i) | E(i, j) \neq 0\}$ . La notation  $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$  indique un arc orienté du sommet  $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}$  vers le sommet  $\mathbf{v}_j \in \mathcal{V}$  signifiant que les variations de  $\mathbf{v}_i$  influent sur  $\mathbf{v}_j$ .

*Exemple 1:* Considérons le SLS ayant la forme donnée par l'équation (1) et défini par:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & 0 & 0 & \lambda_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \lambda_6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \lambda_7 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \lambda_8 \\ \lambda_9 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{11} & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système est associé à la représentation graphique de la Figure (1). Pour ce système, nous avons

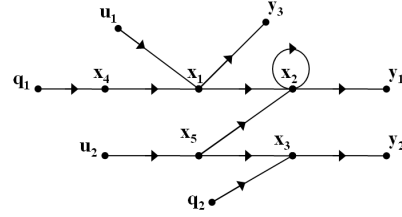


Figure 1. Représentation graphique associée à l'exemple 1

$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5\}$ ,  $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ ,  $\mathbf{Q} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$  et  $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$

### B. Définitions et notations

- Un chemin  $p$  qui couvre les sommets  $\mathbf{v}_{r_0}, \dots, \mathbf{v}_{r_i}$  est noté  $p = \mathbf{v}_{r_0} \rightarrow \mathbf{v}_{r_1}, \dots, \rightarrow \mathbf{v}_{r_i}$  où pour  $j = 0, 1, \dots, i-1$ ,  $(\mathbf{v}_{r_j}, \mathbf{v}_{r_{j+1}}) \in \mathcal{E}$ . Le sommet  $\mathbf{v}_{r_i}$  est appelé le sommet feuille du chemin  $p$ .
- Le nombre d'arcs dans un chemin  $p$  est appelé la longueur de ce chemin et est noté  $\ell(p)$ .  $\Psi(p)$  représente l'ensemble des sommets couverts par  $p$ .  $\Upsilon(p)$  est l'ensemble des arcs dans  $\mathcal{E}$  couverts par le chemin  $p$ .
- Soient  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  deux sous-ensembles de sommets de  $\mathcal{V}$ . Un chemin  $p$  est dit "chemin  $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$ " si son sommet de début est dans  $\mathcal{V}_1$  et son sommet de fin est dans  $\mathcal{V}_2$ . De plus, si les seuls sommets de  $p$  appartenant à  $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$  sont ses sommets de début et de fin, alors  $p$  est dit "chemin direct  $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$ ".
- Un chemin est dit "simple" s'il ne passe pas plus d'une fois par un même sommet.
- $Pred(\mathcal{V}_1)$  est l'ensemble de prédécesseurs de  $\forall \mathbf{v}_j \in \mathcal{V}_1$ . Pour tout  $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}_1$  il existe un chemin  $\{\mathbf{v}_i\} - \{\mathbf{v}_j\}$ .

- $card(\mathcal{V}_1)$  caractérise la cardinalité de l'ensemble  $\mathcal{V}_1$  i.e. le nombre des éléments dans cet ensemble  $\mathcal{V}_1$ .
- Un ensemble de  $k$  chemins disjoints  $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$  forme un lien  $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$ . Les liens consistant en un nombre maximal de chemins sont dits liens maximaux. La taille d'un lien est le nombre de ses chemins.
- $\rho(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$  représente le nombre de chemins dans un lien  $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$  maximal ou autrement dit le nombre maximal de chemins disjoints partant de  $\mathcal{V}_1$  et arrivant à  $\mathcal{V}_2$ .
- $\mathbf{IP}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_0)$  représente l'ensemble des chemins simples  $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$  couvrant uniquement des sommets de l'ensemble  $\mathcal{V}_0$ .
- $\gamma(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$  caractérise le nombre minimal de sommets couverts par un lien  $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$  maximal.
- Nous considérons que tous les chemins et tous les arcs sont associés à des valeurs booléennes qui correspondent à leur état de validité. Un chemin  $p_t$  est associé à une valeur booléenne  $\mathbf{p}_t$  et un arc  $e_k = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$  est associé à une valeur booléenne  $\mathbf{e}_k$ . Quand un chemin  $p_t$  (resp. un arc  $e_k$ ) est valide, la variable booléenne  $\mathbf{p}_t$  (resp.  $\mathbf{e}_k$ ) vaut "vrai" et elle vaut "faux" dans le cas contraire. Ainsi,  $\mathbf{p}_t = \bigwedge_{e_k \in \mathcal{Y}(p_t)} \mathbf{e}_k$  et  $\bar{\mathbf{p}}_t = \bigvee_{e_k \in \mathcal{Y}(p_t)} \bar{\mathbf{e}}_k$ .

#### IV. PRINCIPAUX RÉSULTATS

D'abord, rappelons les conditions graphiques nécessaires et suffisantes assurant la solvabilité du problème de rejet de perturbations pour un SLS [5], [9].

*Théorème 1:* Considérons un SLS  $\Sigma$  représenté par son graphe associé  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ . Le problème de rejet de perturbations est solvable si et seulement si:

- cond.1**  $\rho(\mathbf{Q} \cup \mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$  (condition de lien);
- cond.2**  $\gamma(\mathbf{Q} \cup \mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \gamma(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$  (condition de distance).

Dans cet article, nous considérons que le rang générique de la fonction de transfert  $T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  est égal au nombre de sortie  $card(\mathbf{Y})$  et, la condition de lien correspond à  $\rho(\mathbf{Q} \cup \mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = card(\mathbf{Y})$ .

L'objectif de cette étude est de caractériser la vérification de ces deux conditions par deux expressions booléennes basées sur l'état de validité des arcs puis sur l'état de fonctionnement des composants du système associés à ces arcs. Ensuite, l'évaluation de la fiabilité de la solvabilité du problème de rejet de perturbations peut être effectuée.

##### A. Condition de lien

La condition de lien dépend d'un lien maximal  $\mathbf{Q} \cup \mathbf{U} - \mathbf{Y}$  où il n'y a pas de chemins perturbations-sorties  $\mathbf{Q} - \mathbf{Y}$ . De plus, sachant que  $\rho(\mathbf{Q} \cup \mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = card(\mathbf{Y})$ , chaque sommet  $\mathbf{y}_i$  de sortie doit être relié à au moins une entrée  $\mathbf{u}_i$  en utilisant des chemins disjoints. La condition de lien peut être exprimée par une expression booléenne qui est égale à "vrai" lorsque la condition de lien est vérifiée et égale à "faux" sinon. Pour obtenir cette expression booléenne

représentant la validité de la condition de lien, nous définissons pour chaque  $\mathbf{u}_i \in \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{y}_j \in \mathbf{Y}$ , et tout ensemble de sommets  $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$  l'expression suivante:

$$\mathcal{L}(\{\mathbf{u}_i\}, \{\mathbf{y}_j\}, \mathcal{V}_0) = \bigvee_{p_k \in \mathbf{IP}(\{\mathbf{u}_i\}, \{\mathbf{y}_j\}, \mathcal{V}_0)} \mathbf{p}_k \quad (2)$$

Dans l'équation (2),  $\mathcal{L}$  représente le lien entre deux ensembles  $\{\mathbf{u}_i\}$  et  $\{\mathbf{y}_j\}$  contenant un seul élément en utilisant les sommets de  $\mathcal{V}_0$ . Pour chaque ensemble  $\mathbf{V}_u \subseteq \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}_y \subseteq \mathbf{Y}$ , nous avons:

$$\left\{ \begin{array}{l} i. \quad \mathcal{L}(\mathbf{V}_u, \emptyset, \mathcal{V}_0) = 1, \quad \mathcal{L}(\emptyset, \mathbf{V}_y, \mathcal{V}_0) = 0 \\ ii. \quad \mathcal{L}(\mathbf{V}_u, \{\mathbf{y}_j\}, \mathcal{V}_0) = \bigvee_{\mathbf{u}_i \in \mathbf{V}_u} \mathcal{L}(\{\mathbf{u}_i\}, \{\mathbf{y}_j\}, \mathcal{V}_0) \\ iii. \quad \mathcal{L}(\mathbf{V}_u, \mathbf{V}_y \cup \{\mathbf{y}_j\}, \mathcal{V}_0) = \bigvee_{\mathbf{u}_i \in \text{Pred}(\{\mathbf{y}_j\}) \cap \mathbf{V}_u} \mathcal{L}(\{\mathbf{u}_i\}, \mathbf{V}_y \cup \{\mathbf{y}_j\}, \mathcal{V}_0) \\ \bigvee_{p \in \mathbf{IP}(\{\mathbf{u}_i\}, \{\mathbf{y}_j\}, \mathcal{V}_0)} (p \wedge \mathcal{L}(\mathbf{V}_u \setminus \{\mathbf{u}_i\}, \mathbf{V}_y \cup \{\mathbf{y}_j\}, \mathcal{V}_0 \setminus \Psi(p))) \end{array} \right. \quad (3)$$

Les ensembles  $\mathbf{V}_u$  et  $\mathbf{V}_y$  sont non-vides, mais l'expression booléenne  $\mathcal{L}$  peuvent admettre des ensembles vides en tant que paramètres. Dans l'équation (3), l'expression  $\mathcal{L}$  est calculée:

- entre l'ensemble d'entrée  $\mathbf{V}_u$  et une sortie  $\{\mathbf{y}_j\}$ , et
- entre l'ensemble d'entrée  $\mathbf{V}_u$  et l'ensemble de sortie  $\mathbf{V}_y \cup \{\mathbf{y}_j\}$ .

Nous remarquons que par construction, la fonction  $\mathcal{L}$  est récursive mais pas cyclique. En effet, la fonction  $\mathcal{L}$  s'appelle elle même, mais avec des arguments sous forme de sous-ensembles dont la cardinalité diminue strictement à chaque appel de fonction.

Nous pouvons maintenant énoncer le premier résultat de cet article:

*Proposition 1:* Considérons un SLS représenté par son graphe orienté  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ . La condition de lien du Théorème 1 est vérifiée si et seulement si l'expression booléenne  $\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}, \mathbf{U} \cup \mathbf{X} \cup \mathbf{Y})$  donnée par l'équation (3) est égale à "vrai".

*Exemple 2:* Considérons le SLS associé au graphe orienté donné à la Figure 1. Pour ce système, nous nous intéressons aux chemins dans la Table I.

$p_1$	:	$\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{y}_1$
$p_2$	:	$\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{y}_3$
$p_3$	:	$\mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{y}_2$
$p_4$	:	$\mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{y}_1$
$p'_1$	:	$\mathbf{q}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{y}_2$
$p'_2$	:	$\mathbf{q}_1 \rightarrow \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{y}_1$
$p'_3$	:	$\mathbf{q}_1 \rightarrow \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{y}_3$

Table I  
CHEMINS DU GRAPHE DE LA FIGURE 1

Calculons l'expression booléenne  $\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}, \mathcal{V})$  associée à la condition de lien entre les ensembles  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{Y}$ :

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}, \mathcal{V}) = \left( \mathbf{p}_1 \wedge \mathcal{L}(\{\mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}, \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1\}) \right) \bigvee \left( \mathbf{p}_2 \wedge \mathcal{L}(\{\mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_3\}, \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_3\}) \right) \quad (4)$$

Tout calcul fait, la condition de lien entre les éléments de  $\mathbf{U}$  et les éléments de  $\mathbf{Y}$  est donnée par :

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}, \mathcal{V}) = (\mathfrak{p}_1 \vee \mathfrak{p}_2) \wedge \mathfrak{p}_3 \quad (5)$$

### B. Condition de distance

Le problème de rejet des perturbations nécessite, comme présenté dans le Théorème 1, la vérification des conditions de lien et de distance. Ainsi, quand la condition de lien n'est pas vérifiée, la problème de rejet de perturbations n'est pas solvable. De plus, quand la condition de lien n'est pas vérifiée, cela signifie que les variables de sortie ne sont pas connectés aux entrées en utilisant  $card(\mathbf{Y})$  chemins disjoints *i.e.* chaque sortie  $\mathbf{y}_j$  n'est pas relié par un chemin  $p$  à une entrée  $\mathbf{u}_i$  qui ne peut agir que sur  $\mathbf{y}_j$ . Dans ce cas, il n'est pas nécessaire d'étudier la condition de distance sur les chemins  $p$  qui ne satisfont pas la condition de lien.

Pour cette raison, nous étudions dans cet article la condition de distance en considérant que la condition de lien entre  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{Y}$  est préalablement vérifiée.

À partir de la définition de la condition de distance, nous nous intéressons à la validité des chemins  $V_1 - V_2$  de longueur inférieure ou égale à celle des chemins  $V_3 \setminus V_1 - V_2$ . Les chemins reliant  $V_3 \setminus V_1$  à  $V_2$  plus courts que ceux reliant  $V_1$  à  $V_2$  sont groupés dans un ensemble de chemins noté  $P_{(V_1, V_2, V_3)}$  tel que:

$$P_{(V_1, V_2, V_3)} = \left\{ p' = V_3 \setminus V_1 - V_2 \mid \exists p \in \mathbf{IP}(V_1, V_2, \mathcal{V}) \text{ ayant le même sommet feuille, avec } \ell(p') < \ell(p) \right\}$$

La condition de distance est vérifiée quand il n'y a pas de chemin dans  $P_{(V_1, V_2, V_3)}$  *i.e.* il n'existe que des chemins  $V_1 - V_2$  plus courts que les chemins  $V_3 \setminus V_1 - V_2$ . Pour chaque  $\mathbf{u}_i \in \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{y}_j \in \mathbf{Y}$ ,  $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$  et  $P_0 \subseteq P_{(V_1, V_2, V_3)}$  nous définissons :  $L_d(\{\mathbf{u}_i\}, \{\mathbf{y}_j\}, \mathcal{V}_0, P_0) = \{p \in \mathbf{IP}(\{\mathbf{u}_i\}, \{\mathbf{y}_j\}, \mathcal{V}_0) \mid \forall \{\mathbf{y}_j\}\text{-topped path } p' \in P_0, \ell(p) < \ell(p')\}$ .

Pour tout  $\mathbf{u}_i \in \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{y}_j \in \mathbf{Y}$ , et les ensembles  $\mathbf{V}_u \subseteq \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}_y \subseteq \mathbf{Y}$ ,  $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$ ,  $P_0 \subseteq P_{(V_1, V_2, V_3)}$  et  $p_0 \in P_{(V_1, V_2, V_3)}$ , nous définissons:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \mathcal{D}^l(\mathbf{V}_u, \emptyset, \mathcal{V}_0, P_0) = 1, \quad \mathcal{D}^l(\emptyset, \mathbf{V}_y, \mathcal{V}_0, P_0) = 0 \\ \bullet \mathcal{D}^l(\{\mathbf{u}_i\}, \{\mathbf{y}_j\}, \mathcal{V}_0, P_0) = \bigvee_{p_k \in L_d(\{\mathbf{u}_i\}, \{\mathbf{y}_j\}, \mathcal{V}_0, P_0)} p_k \\ \bullet \mathcal{D}^l(\mathbf{V}_u, \{\mathbf{y}_j\}, \mathcal{V}_0, P_0) = \bigvee_{\mathbf{u}_i \in \mathbf{V}_u} \mathcal{D}^l(\{\mathbf{u}_i\}, \{\mathbf{y}_j\}, \mathcal{V}_0, P_0) \\ \bullet \mathcal{D}^l(\mathbf{V}_u, \mathbf{V}_y \cup \{\mathbf{y}_j\}, \mathcal{V}_0, P_0) = \bigvee_{\mathbf{u}_i \in Pred(\{\mathbf{y}_j\}) \cap \mathbf{V}_u} \left( \bigvee_{p_k \in L_d(\{\mathbf{u}_i\}, \{\mathbf{y}_j\}, \mathcal{V}_0, P_0)} \left( p_k \wedge \mathcal{D}^l(\mathbf{V}_u \setminus \{\mathbf{u}_i\}, \mathbf{V}_y, \mathcal{V}_0, P_0) \right) \right) \end{array} \right. \quad (6)$$

$\mathcal{D}^l(\mathbf{V}_u, \mathbf{V}_y, \mathcal{V}_0, P_0)$  est donc égale à  $\mathcal{L}(\mathbf{V}_u, \mathbf{V}_y, \mathcal{V}_0)$  en considérant les chemins dans  $L_d(\{\mathbf{u}_i\}, \{\mathbf{y}_j\}, \mathcal{V}_0, P_0)$  au lieu des chemins dans  $\mathbf{IP}(\{\mathbf{u}_i\}, \{\mathbf{y}_j\}, \mathcal{V}_0)$  pour chaque lien  $\{\mathbf{u}_i\}$ - $\{\mathbf{y}_j\}$ .

Nous avons donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \mathcal{D}(\mathbf{V}_u, \mathbf{V}_y, \mathcal{V}_0, \emptyset) = \mathcal{L}(\mathbf{V}_u, \mathbf{V}_y, \mathcal{V}_0) \\ \bullet \mathcal{D}(\mathbf{V}_u, \mathbf{V}_y, \mathcal{V}_0, P_0 \cup \{p_0\}) = \left( p_0 \wedge \bigwedge_{p_i \in P_0} p_i \wedge \mathcal{D}^l(\mathbf{V}_u, \mathbf{V}_y, \mathcal{V}_0, P_0 \cup \{p_0\}) \right) \\ \vee \left( \bigvee_{p_i \in P_0} (\bar{p}_i \wedge \mathcal{D}(\mathbf{V}_u, \mathbf{V}_y, \mathcal{V}_0, P_0 \cup \{p_0\} \setminus \{p_i\})) \right) \vee \\ (\bar{p}_0 \wedge \mathcal{D}(\mathbf{V}_u, \mathbf{V}_y, \mathcal{V}_0, P_0)). \end{array} \right. \quad (7)$$

Nos pouvons maintenant énoncer le deuxième résultat de cet article:

**Proposition 2:** Considérons un SLS représenté par son graphe orienté  $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ . La condition du distance du Théorème 1 est vérifiée si et seulement si l'expression booléenne  $\mathcal{D}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}, \mathbf{Q}, P_{(V_1, V_2, V_3)})$  donnée par l'équation (7) est égale à "vrai".

**Exemple 3:** Considérons le SLS associé au graphe orienté donné à la Figure 1. Pour ce système, la condition de lien est supposée vérifiée *i.e.*  $\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}, \mathcal{V}) = (\mathfrak{p}_1 \vee \mathfrak{p}_2) \wedge \mathfrak{p}_3 = \text{"vrai"}$ . En considérant les chemins de la Table I, nous avons:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{(V_1, V_2, V_3)} = \{p'_1\} \\ L_d(\{\mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{y}_1\}, \mathcal{V}, \{p'_1\}) = p_1 \\ L_d(\{\mathbf{u}_1\}, \{\mathbf{y}_3\}, \mathcal{V}, \{p'_1\}) = p_2 \\ L_d(\{\mathbf{u}_2\}, \{\mathbf{y}_2\}, \mathcal{V}, \{p'_1\}) = \emptyset \end{array} \right.$$

Ainsi, l'expression  $\mathcal{D}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}, \mathbf{Q}, P_{(V_1, V_2, V_3)})$  est donnée par:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(U, Y, Q, \{p'_1\}) &= (\bar{p}'_1 \wedge \mathcal{D}(U, Y, Q, \emptyset)) \vee \\ &\quad \left( p'_1 \wedge \mathcal{D}^l(U, Y, Q, P_{(V_1, V_2, V_3)}) \right) \\ &= (\mathfrak{p}_1 \vee \mathfrak{p}_2) \wedge \mathfrak{p}_3 \wedge \bar{p}'_1 \end{aligned} \quad (8)$$

## V. FIABILITÉ DE LA SOLVABILITÉ DU PROBLÈME DE REJET DE PERTURBATIONS D'UN SLS

Pour calculer la fiabilité d'une propriété structurelle, il faut mettre en relation les arcs du graphe exprimant les relations causales entre les variables du système et, les composants supports de ces relations.

### A. Association arc-composants $\varphi$

Une association  $\varphi$  est utilisée pour assurer le lien entre les paramètres des matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $E$  et  $D$  (représentés par les arcs dans le graphe orienté  $\mathcal{G}$ ) et, les composants du système. Cette association  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}(C)$  est définie de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}(C)$  où  $\mathcal{E}$  est un ensemble d'états de validation des arcs  $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$  et  $\mathcal{F}(C)$  est un ensemble d'expressions booléennes basées sur les défaillances des composants du système.

Par exemple, l'état de validité d'un arc  $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$  peut être associée à l'expression  $\bar{c}_1 \wedge (\bar{c}_2 \vee \bar{c}_3) \wedge \bar{c}_4$  *i.e.* l'arc  $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$  est valide quand ni  $c_1$  ni  $c_4$  ni l'un des deux composants  $c_2$  ou

$c_3$  ne sont défailants. Cette fonction  $\varphi$  est utile pour associer à chaque état d'arc une expression booléenne basée sur les défaillances des composants du système. Dans certains cas, aucune défaillance n'est affectée à un état d'arc (par exemple dans le cas de la dérivation, l'arc est toujours valide *i.e.*  $\varphi(arc) = 1$ ).

### B. Niveau de tolérance aux défaillances (NTD)

A partir de cette expression booléenne obtenue en utilisant l'association  $\varphi$ , il est possible de définir le niveau de tolérance aux défaillances (NTD) qui correspond au nombre minimal de défaillances tolérables sur les composants du système [6]. Cet indice est basé sur la notion de "coupes". Une coupe est un ensemble de composants dont la défaillance peut rendre l'expression booléenne égale à "faux". Une coupe minimale est une coupe qui ne contient aucune autre coupe. Chaque coupe minimale dans l'expression booléenne est noté  $CM_i$ . L'indice NTD correspondant à l'expression booléenne obtenue est donné par:

$$NTD = \min(\text{card}(CM_i)) - 1$$

Grâce à cet indice NTD, il est possible d'avoir le nombre de défaillances tout en gardant la propriété étudiée vérifiée.

### C. Classement des composants

L'expression booléenne basée sur les défaillances des composants correspondant à la solvabilité du problème de rejet de perturbations peut contenir plusieurs coupe minimales. En utilisant ces dernières, les composants du système peuvent être classés en essentiels, utiles et inutiles. un composant qui correspond à une coupe minimale d'ordre 1 est essentiel. Un composant qui correspond à une coupe minimale d'ordre supérieur à 1 est utile. Un composant qui n'est pas considéré dans l'expression booléenne est inutile.

### D. Calcul de fiabilité

La fiabilité est un paramètre important de la sûreté de fonctionnement utilisé pour l'étude des défaillances d'un système afin d'améliorer son fonctionnement. Elle est définie par l'aptitude d'un système à rester opérationnel pendant un intervalle de temps donné  $[0, T]$  et sous certaines conditions. La fiabilité noté  $R(t)$  peut être exprimée par la probabilité  $P$  qu'une défaillance survienne après le temps de mission du système étudié, *i.e.*  $R(t) = P(t > T)$  [16].

Les propriétés structurelles ainsi que la fiabilité des systèmes dépendent de la structure du système et de ses composants. Dans cet article, la définition de fiabilité est étendue pour couvrir la solvabilité du problème de rejet de perturbations d'un SLS. Nous faisons l'hypothèse d'état binaire des composants et du système qui est une hypothèse classique de la fiabilité. Elle considère qu'un système ou un composant peut avoir deux états de fonctionnement possibles: l'état de bon fonctionnement "*Up*", et l'état de défaillance "*Down*". Ainsi, l'état de validité de la propriété étudiée peut être exprimé en fonction de l'état de fonctionnement des

composants du système.

Pour un SLS noté  $\Sigma$  ayant  $c_i$  composants (internes, capteurs ou actionneurs) pour  $i = 1, \dots, N$ , si les défaillances sur les composants  $c_i$  sont indépendantes *i.e.* qu'ils peuvent tomber en panne indépendamment les uns des autres, alors la fiabilité  $R_\Sigma(t)$  est donnée par l'équation (9) où  $C_i$  représente la défaillance du composant  $c_i$ . Afin de simplifier l'écriture, nous notons  $R_\Sigma(t) = P_\Sigma(t > T) = P(\Sigma|t)$ .

$$P(\Sigma|t) = \begin{cases} \prod_{i=1}^N P(\overline{C}_i|t) & \text{for the relation } \wedge \\ 1 - \prod_{i=1}^N (1 - P(\overline{C}_i|t)) & \text{for the relation } \vee \end{cases} \quad (9)$$

Chaque composant  $c_i$  possède un taux de défaillance noté  $\lambda_{c_i}$ . Sans perte de généralité, nous considérons dans cet article que la fiabilité des composants suit une loi exponentielle où le taux de défaillance  $\lambda_{c_i}$  est constant [10]. Cette fiabilité est donnée par l'équation (10).

$$P(\overline{C}_i|t) = R_{c_i}(t) = e^{-\lambda_{c_i}t} \quad (10)$$

Dans le même esprit que [7], [11], la définition de la fiabilité est étendue pour couvrir la propriété structurelles de solvabilité du problème de rejet de perturbations.

## VI. ETUDE DE CAS

Afin d'illustrer les résultats fournis dans la Section IV, considérons le SLS associé au graphe orienté donné à la Figure 1. Pour ce système et selon les équations 2 et 3 correspondant respectivement aux conditions de lien et de distance, le problème de rejet de perturbations est solvable si l'expression  $Rej$  suivante est égale à "*vrai*" :

$$Rej = (\mathbf{p}_1 \vee \mathbf{p}_2) \wedge \mathbf{p}_3 \wedge \overline{\mathbf{p}}'_1$$

Cette expression est reformulée en fonction des états de validité des arcs dans l'équation (11) en utilisant les expressions

$$\mathbf{p}_t = \bigwedge_{e_k \in \Upsilon(p_t)} \mathbf{e}_k \text{ et } \overline{\mathbf{p}}_t = \bigvee_{e_k \in \Upsilon(p_t)} \overline{\mathbf{e}}_k.$$

$$Rej = (\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1) \wedge (\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_5) \wedge (\mathbf{x}_5, \mathbf{x}_3) \wedge (\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_2) \wedge \overline{(\mathbf{q}_2, \mathbf{x}_3)} \wedge \left( (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_3) \vee ((\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \wedge (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)) \right) \quad (11)$$

L'association  $\varphi$ , qui affecte à chaque arc dans le graphe orienté une fonction booléenne  $\mathcal{F}(C)$ , est définie pour le système étudié par la table suivante:

avec  $\overline{C}_i$  représente la défaillance du composants  $c_i$ .

En utilisant l'association  $\varphi$  donnée par la Table II, la solvabilité du problème de rejet de perturbations peut être réécrite en fonction des défaillances des composants. Cette expression est notée  $Rej_\varphi$  et donnée par:

$$Rej_\varphi = \overline{C}_1 \wedge \overline{C}_2 \wedge \overline{C}_3 \wedge C_8 \wedge (\overline{C}_4 \vee \overline{C}_5) \wedge (\overline{C}_6 \vee \overline{C}_7) \quad (12)$$

Arc	$\varphi(\text{Arc})$	Arc	$\varphi(\text{Arc})$
$(\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1)$	$\overline{C_1}$	$(\mathbf{q}_2, \mathbf{x}_3)$	$\overline{C_8}$
$(\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_5)$	$\overline{C_2}$	$(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_3)$	$\overline{C_4}$
$(\mathbf{x}_5, \mathbf{x}_3)$	$\overline{C_6 \vee C_7}$	$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$	"1"
$(\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_2)$	$\overline{C_3}$	$(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)$	$\overline{C_5}$

Table II  
L'ASSOCIATION  $\varphi$

A partir de l'expression booléenne  $Rej_\varphi$ , le paramètre NTD (cf. sous-section V-B) est donné par  $NTD = 0$  puisque  $Rej_\varphi$  contient des coupes minimales d'ordre 1. Pour le classement des composants du système,  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  sont essentiels,  $c_4$ ,  $c_5$ ,  $c_6$  et  $c_7$  sont utiles et tous les composants qui ne sont pas impliqués dans l'expression sont inutiles.

La fiabilité de la solvabilité du problème de rejet de perturbations peut être calculée en utilisant l'équation (9). Ainsi, la fiabilité  $R_{Rej_\varphi}$  de cette propriété structurelle. Elle est donnée comme suit:

$$R_{Rej_\varphi} = R_{C_1}(t) \cdot R_{C_2}(t) \cdot R_{C_3}(t) \cdot (1 - R_{C_8}(t)) \cdot \frac{[1 - (1 - R_{C_4}(t)) \cdot (1 - R_{C_5}(t))]}{[1 - (1 - R_{C_6}(t)) \cdot (1 - R_{C_7}(t))]} \quad (13)$$

Nous considérons pour le calcul de  $R_{Rej_\varphi}$  que à chaque composant  $c_i$  de ce système correspond un taux de défaillances suivants:

$\lambda_1$	$6 \cdot 10^{-5}$	$\lambda_5$	$10^{-3}$	$\lambda_3$	$2 \cdot 10^{-5}$	$\lambda_7$	$2 \cdot 10^{-3}$
$\lambda_2$	$4 \cdot 10^{-5}$	$\lambda_6$	$2 \cdot 10^{-3}$	$\lambda_4$	$2 \cdot 10^{-3}$	$\lambda_8$	$4 \cdot 10^{-1}$

Table III  
TAUX DE DÉFAILLANCES  $\lambda_i$

La Figure 2 montre l'évolution de la fiabilité de la solvabilité du problème de rejet de perturbations. A partir de cette figure, nous remarquons que le système étudié perd probablement sa capacité à rejeter les perturbations après 3000 heures de fonctionnement. Ainsi, il est nécessaire de prévoir des actions de maintenance au niveau des composants de ce système afin d'améliorer la fiabilité  $R_{Rej_\varphi}$ .

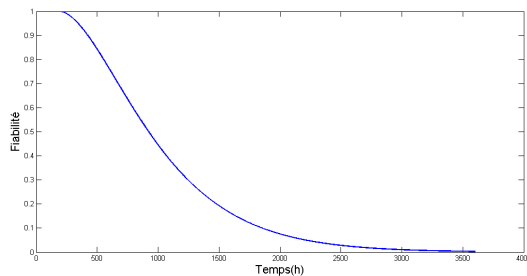


Figure 2. Fiabilité de la solvabilité du problème de rejet de perturbations

## VII. CONCLUSION

En utilisant une approche d'analyse structurelle, nous évaluons d'abord l'expression booléenne de la capacité d'un système à rejeter les perturbations externes en fonction de l'état de fonctionnement des composants du système. L'expression obtenue est ensuite utilisée pour calculer la fiabilité de cette capacité à rejeter les perturbations sachant la fiabilité des composants du système.

Cette étude peut être utile pour assurer un niveau de performance exigée par le client et aussi pour planifier des actions de maintenance dans le cas où ce niveau de performances n'est pas respecté. L'analyse proposée est basée sur une approche graphique qui correspond à des algorithmes ayant une complexité polynomiale, ceci rend notre méthode adaptée à des systèmes de grande taille.

Pour les futurs travaux, il serait intéressant de traiter les autres paramètres de la sûreté de fonctionnement (disponibilité, maintenabilité et sécurité).

## REFERENCES

- [1] G. Basile and G. Marro. *Controlled and conditioned invariants in linear system theory*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1992.
- [2] M. Blanke, M. Kinnaert, J. Lunze, and M. Staroswiecki. *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2006.
- [3] C. Commault, J. M. Dion, and M. Benahcene. Output feedback disturbance decoupling. Graph interpretation for structured systems. *Automatica*, 29(6):1463–1472, 1993.
- [4] C. Commault, J. M. Dion, and T.H. Do. Sensor location and classification for the disturbance rejection by measurement feedback problem. *Automatica*, 47(12):2584–2594, 2011.
- [5] C. Commault, J. M. Dion, and V. Hovelaque. A geometric approach for structured systems: Application to disturbance decoupling. *Automatica*, 33(3):403–409, 1997.
- [6] B. Conrard, V. Cocquemot, and S. Mili. Fault-tolerant system design in multiple operating modes using a structural model. *European Safety & Reliability Conference, Troyes, France*, September 2011.
- [7] M. Dakil. *Développement d'une méthodologie conjointe d'analyse structurelle et de sûreté de fonctionnement des propriétés d'un système complexe*. Thèse de doctorat, Université de Lorraine, 2014.
- [8] J-M. Dion, C. Commault, and D. H. Trinh. Sensor classification for the disturbance rejection by measurement feedback problem. *In proceedings of the IFAC World Congress, Seoul, Korea*, 2008.
- [9] J. M. Dion, C. Commault, and J. van der Woude. Generic properties and control of linear structured systems: a survey. *Automatica*, 39(7): 1125–1144, 2003.
- [10] A. Kaufmann, D. Grouchko, and R. Cruon. *Modèles mathématiques pour l'étude de la fiabilité des systèmes*. Masson et Cie éditeurs, Paris, 1975.
- [11] S. Maza, C. Simon, and T. Boukhobza. The impact of actuator failures on the structural controllability of linear systems : A graph theoretical approach. *I.E.T. Control Theory & Applications*, 6(3): 412–419, 2012.
- [12] K. Murota. *System Analysis by Graphs and Matroids*. Springer-Verlag, New York, U.S.A., 1987.
- [13] K. J. Reinschke. *Multivariable Control. A Graph Theoretic Approach*. Springer-Verlag, New York, U.S.A., 1988.
- [14] J. M. Schumacher. Compensator synthesis using (c,a,b) pairs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-25:1133–1138, 1980.
- [15] J. van der Woude. Graph theoretic methods for the computation of disturbance decoupling feedback matrices for structured system. *Linear algebra and its applications*, 196:119–162, 1994.
- [16] A. Villemeur. *Reliability, availability, maintainability and safety assessment: methods and techniques*. Wiley; Volume 1 by A. Cartier & M.C. Lartisien, 1992.
- [17] W. M. Wonham. *Linear Multivariable Control: a Geometric Approach, 2nd edition*. Springer Verlag, 1979.