



**HAL**  
open science

## Arbres couvrants presque disjoints

Nicolas Gastineau, Benoit Darties, Olivier Togni

► **To cite this version:**

Nicolas Gastineau, Benoit Darties, Olivier Togni. Arbres couvrants presque disjoints. ALGOTEL 2015 - 17èmes Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques des Télécommunications, Jun 2015, Beaune, France. hal-01148458

**HAL Id: hal-01148458**

**<https://hal.science/hal-01148458>**

Submitted on 4 May 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Arbres couvrants presque disjoints

Nicolas Gastineau<sup>1</sup>, Benoit Darties<sup>1</sup>, Olivier Togni<sup>1</sup>

<sup>1</sup>LE2I, UMR CNRS 6306, Université de Bourgogne, 9 Rue Alain Savary, 21 000 Dijon, France

---

Dans un réseau, la recherche de plusieurs arbres couvrants avec des propriétés intéressantes a amené à l'introduction de plusieurs notions : les arbres couvrants arête-disjoints, les arbres indépendants enracinés en un sommet et les arbres complètement indépendants. Afin de généraliser ces notions, nous introduisons la notion d'arbres couvrants  $(i, j)$ -disjoints, où  $i$  et  $j$  sont respectivement le nombre maximum de nœuds internes et d'arêtes communs aux arbres couvrants. Nous montrons que déterminer s'il existe deux arbres couvrants  $(i, j)$ -disjoints dans un graphe  $G$  est un problème NP-complet pour  $i$  et  $j$  quelconques, et nous déterminons les valeurs minimales de  $i$  et  $j$  qui garantissent l'existence de deux arbres couvrants  $(i, j)$ -disjoints dans certaines grilles.

**Keywords:** Arbres couvrants, Arbres couvrants arête-disjoints, Arbres couvrants indépendants, Arbres couvrants complètement indépendants, Ensembles dominants connexes.

---

## 1 Introduction

Les arbres couvrants sont une structure fortement utilisée dans de nombreuses opérations réseau (protocoles de routage, mécanismes d'évitement de boucles de niveau 2, ...). La notion d'*arbres couvrants complètement indépendants* (CIST- *Completely Independent Spanning Trees*) a été introduite par T. Hasunuma [Has01] en complément aux travaux antérieurs sur les arbres couvrants indépendants, et trouve de nombreuses applications dans des problèmes de diffusion, de répartition de charge du trafic, ou encore de robustesse aux pannes. Soit  $G$  un graphe non orienté représentant un réseau avec  $V(G)$  l'ensemble de ses sommets (nœuds du réseau) et  $E(G)$  celui de ses arêtes (liens du réseau). Pour un arbre  $T$ , on appelle *feuilles* de  $T$  les sommets de degré 1 et *sommets internes* de  $T$ , noté  $IN(T)$ , les sommets de degré au moins 2 dans  $T$ . Deux arbres  $T_1$  et  $T_2$  sont dits *sommet-disjoints* s'ils ne partagent aucun sommet interne entre eux - cad.  $IN(T_1) \cap IN(T_2) = \emptyset$  - et sont dits *arête-disjoint* s'ils ne partagent aucune arête entre eux. Soit un ensemble  $T_1, \dots, T_r$  d'arbres couvrants de  $G$ , on note  $E(T_i)$  les arêtes de  $T_i$  et  $P_{T_i}(x, y)$  l'unique chemin reliant  $x$  à  $y$  dans  $T_i$ , avec  $1 \leq i \leq r$  et  $x, y \in V(G)$ . Les arbres de cet ensemble sont dits *complètement indépendants* s'ils sont deux à deux sommet-disjoints et arête-disjoints. Pour un ensemble  $T_1, \dots, T_r$  d'arbres couvrants de  $G$  non nécessairement sommet-disjoints ou arête-disjoints, on note  $IN(T_1, \dots, T_r)$  l'ensemble des sommets qui sont internes dans au moins deux arbres et  $E(T_1, \dots, T_r)$  l'ensemble des arêtes qui appartiennent à au moins deux arbres. Finalement, les arbres couvrants  $T_1, \dots, T_r$  sont dits  $(i, j)$ -disjoints si  $|IN(T_1, \dots, T_r)| \leq i$  et  $|E(T_1, \dots, T_r)| \leq j$ .

Les arbres couvrants complètement indépendants ont été étudiés pour certaines classes de graphes, comme les graphes représentatifs des arêtes de graphes [Has01], les graphes planaires maximaux [Has02], les produits cartésiens de deux cycles ou grilles toriques [HM12], ainsi que les graphes complets, les graphes complets bipartis et tripartis [PTCY13]. Le problème de décision consistant à déterminer l'existence de deux CIST sur un graphe  $G$  est NP-Complet [Has02]. Récemment, des conditions nécessaires pour garantir l'existence de deux arbres complètement indépendants ont été déterminées [Ara14, FHL14].

Dans ce papier, nous énonçons tout d'abord certaines propriétés intéressantes des arbres  $(i, j)$ -disjoints pour certaines valeurs de  $i$  et  $j$ , et généralisons quelques résultats sur ces structures. Nous montrons ensuite que déterminer s'il existe deux arbres couvrants  $(i, j)$ -disjoints dans un graphe  $G$  est un problème NP-complet. Enfin, nous nous intéressons à l'existence d'arbres couvrants  $(i, j)$ -disjoints dans les grilles cylindriques et carrées.

## 2 Propriétés de quelques arbres couvrants $(i, j)$ -disjoints

Par  $*$ , on entend un entier arbitrairement grand. Notons déjà que les arbres couvrants  $(*, 0)$ -disjoints sont simplement les arbres couvrants arête-disjoints. De plus, les arbres couvrants  $(0, 0)$ -disjoints sont les CIST. Les arbres couvrants  $(0, *)$ -disjoints constituent une famille peu étudiée et incluant les CIST, avec comme extension qu'une arête peut-être commune à deux arbres à condition qu'une de ses extrémité soit feuille dans le premier arbre, et que l'autre extrémité soit feuille dans le second. Une définition alternative est la suivante : il existe  $r$  arbres couvrants  $(0, *)$ -disjoints dans un graphe  $G$  ssi il existe  $r$  ensembles dominants connexes disjoints dans  $G$ . De façon plus générale, il existe  $r$  arbres couvrants  $(i, *)$ -disjoints dans un graphe  $G$  ssi il existe  $r$  ensembles dominants connexes  $D_1, \dots, D_r$ , avec  $|\cup_{1 \leq i < j \leq r} D_i \cap D_j| \leq i$ , dans  $G$ .

Il a été conjecturé dans [Has02] que pour tout graphe  $2r$ -connexe, il existe  $r$  CIST. Certains contre-exemples explicités dans [FHL14, Pé12] réfutent cette conjecture. Les contre-exemples donnés par Péterfalvi sont construits à partir d'une clique pour laquelle on rajoute pour chaque  $k$ -uplet un sommet qu'on relie à ce  $k$ -uplet. Péterfalvi a prouvé [Pé12] qu'il n'existe pas deux ensembles dominants connexes disjoints dans de tels graphes. Il n'existe donc pas deux arbres couvrants  $(0, *)$ -disjoints dans de tels graphes. De plus, en adaptant la preuve de Péterfalvi, on peut prouver qu'il n'existe pas deux arbres couvrants  $(i, *)$ -disjoints dans de tels graphes.

Nous considérons tout d'abord les arbres  $(0, *)$ -disjoints que nous appelons *arbres sommet-disjoints* et établissons les propositions suivantes :

**Proposition 1.** *Soit  $T_1, \dots, T_r$  un ensemble d'arbres couvrants d'un graphe  $G$ . Les arbres  $T_1, \dots, T_r$  sont sommet-disjoints ssi pour toute paire de sommets  $(u, v)$  et toute paire d'arbres  $(T_a, T_b)$ , les trois conditions suivantes sont vraies :*

- i)  $V(P_{T_a}(u, v)) \cap V(P_{T_b}(u, v)) = \{u, v\}$ ;
- ii)  $E(P_{T_a}(u, v)) \cap E(P_{T_b}(u, v)) = \emptyset$ , si  $u$  et  $v$  ne sont pas voisins dans  $G$ ;
- iii)  $E(P_{T_a}(u, v)) \cap E(P_{T_b}(u, v)) \subseteq \{uv\}$ , si  $u$  et  $v$  sont voisins dans  $G$ .

*Démonstration.* i) Par définition  $T_a$  et  $T_b$  n'ont pas de sommets internes en commun, donc les chemins entre  $u$  et  $v$  ne peuvent pas avoir de sommets en commun, hormis  $u$  et  $v$ .

ii) Si les sommets  $u$  et  $v$  ne sont pas voisins alors  $P_{T_a}(u, v)$  et  $P_{T_b}(u, v)$  sont de longueur au moins 2 et comme ils ne possèdent pas de sommets internes en commun, ils ne possèdent pas d'arêtes en commun.

iii) Si les sommets  $u$  et  $v$  sont voisins, l'arête  $uv$  ne peut appartenir qu'à au plus deux arbres, un premier arbre dans lequel  $u$  est un sommet interne et  $v$  est feuille et un deuxième arbre dans lequel  $v$  est un sommet interne et  $u$  est feuille. Dans le cas où un chemin parmi  $P_{T_a}(u, v)$  et  $P_{T_b}(u, v)$  est de longueur au moins 2, les chemins ne peuvent pas avoir d'arêtes en commun.  $\square$

De la même façon qu'Araki [Ara14], la notion de partition en ensembles dominants connexes permet d'avoir une borne supérieure sur le nombre minimum d'arête minimum pour pouvoir avoir  $r$  arbres sommet-disjoints.

**Proposition 2.** *Soit  $G$  un graphe. Si  $G$  contient  $r$  arbres couvrants sommet-disjoints, alors  $G$  possède au moins  $|V(G)| - r + |V(G)|(r - 1)/2$  arêtes.*

*Démonstration.* Il faut au moins  $|V(G)| - r$  arêtes pour avoir une partition de  $G$  en  $r$  ensembles connexes et il faut que, par définition, chaque sommet soit adjacent à un sommet de chacun des  $r - 1$  ensembles connexes restants.  $\square$

Soient  $A_1$  et  $A_2$  des sous-ensembles de sommets disjoints inclus dans  $V(G)$ . On note  $B(A_1, A_2)$  le graphe biparti induit par les arêtes avec une extrémité dans  $A$  et une autre extrémité dans  $B$ , c'est à dire  $V(B(A_1, A_2)) = V(A_1) \cup V(A_2)$  et  $E(A_1, A_2) = \{uv \in E(G) | u \in V(A_1), v \in V(A_2)\}$ . De la même façon, nous introduisons la notion de partition  $(0, \ell)$ -disjointe. Une partition  $(0, \ell)$ -disjointe est une partition de  $V(G)$  en  $r$  ensembles  $V_1, \dots, V_r$  telle que pour chaque paire d'entier  $(i, j)$ , avec  $1 \leq i < j \leq r$ , on a :

- i)  $G[V_a]$  est connexe pour  $1 \leq a \leq r$ ;
- ii)  $B(V_i, V_j)$  ne contient pas de sommet isolé;

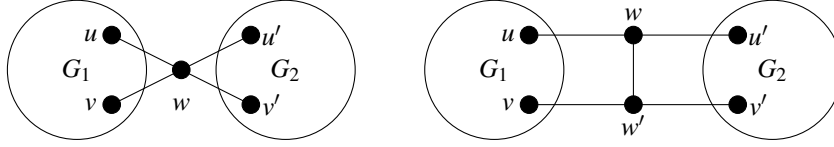


FIGURE 1: Les opérations i) et ii) à partir de deux graphes.

iii)  $\sum_{1 \leq i < j \leq r} c_{i,j} \leq \ell$ , où  $c_{i,j}$  est le nombre de composantes connexes de  $B(V_i, V_j)$  qui sont des arbres.

**Proposition 3.** Soit  $G$  un graphe. Il existe  $r$  arbres couvrants  $(0, \ell)$ -disjoints dans  $G$  ssi il existe une partition  $(0, \ell)$ -disjointe de  $G$  en  $r$  ensembles.

*Démonstration.* Supposons qu'il existe un ensemble  $T_1, \dots, T_r$  de  $r$  arbres couvrants  $(0, \ell)$ -disjoints dans  $G$ . On peut facilement former une partition  $(0, \ell)$ -disjointe de  $G$  à partir des ensembles  $IN(T_1), \dots, IN(T_r)$  en prenant  $V_i = IN(T_i)$ , pour  $1 \leq i \leq r$ . Pour cette partition,  $B(V_i, V_j)$  ne contient pas de sommet isolé, pour  $1 \leq i < j \leq r$  car chacun des arbres est couvrant. De plus, on a  $\sum_{1 \leq i < j \leq r} c_{i,j} \leq \ell$ , puisqu'on aurait une composante connexe qui est un arbre et qui n'a aucune arête dans  $E(T_1, \dots, T_r)$ . Supposons qu'il existe une partition  $(0, \ell)$ -disjointe de  $G$  en  $r$  ensembles. Puisque  $G[V_i]$  est connexe pour chaque  $i$ , avec  $1 \leq i \leq r$ , on peut former un arbre  $T_i$  qui couvre  $V_i$ . Pour chaque composante connexe contenue dans  $B(V_i, V_j)$  qui est un arbre, avec  $1 \leq i < j \leq r$ , on ajoute une arête dans  $E(T_1, \dots, T_r)$ . Ensuite, pour chaque composante connexe de  $B(V_i, V_j)$ , avec  $1 \leq i < j \leq r$ , on partage les arêtes restantes entre  $T_i$  et  $T_j$  de façon équitable. Les arbres obtenus sont couvrants  $(0, \ell)$ -disjoints dans  $G$ .  $\square$

Dans la suite, nous appellerons arbres couvrants  $1$ -enracinés des arbres couvrants  $(1, *)$ -disjoints. Remarquons que cette définition n'est pas équivalente à celle des arbres couvrants *indépendants* enracinés en un sommet  $r$  que l'on trouve couramment dans la littérature : en effet, le fait que pour tout sommet  $u$  on a  $V(P_{T_i}(u, r)) \cap V(P_{T_j}(u, r)) = \{u, r\}$  n'implique pas que pour toute paire de sommets  $(u, v)$  on a  $V(P_{T_i}(u, v)) \cap V(P_{T_j}(u, v)) = \{u, r, v\}$ .

### 3 Un problème NP-complet pour tout couple $(i, j)$

Soit  $G$  un graphe et soient  $u$  et  $v$  deux sommets dans  $V(G)$ . Le problème qui consiste à déterminer s'il existe deux arbres  $T_1$  et  $T_2$   $(0, 0)$ -disjoints (cad. 2 CIST) avec  $u \in T_1$  et  $v \in T_2$  dans  $G$  est NP-complet [Has02]. Nous proposons le théorème 1 qui généralise ce résultat pour tout  $(i, j)$ .

**Théorème 1.** Déterminer, pour un graphe  $G$  et deux entiers  $i$  et  $j$ , s'il existe deux arbres couvrants  $(i, j)$ -disjoints est un problème NP-complet.

*Démonstration.* Nous proposons une réduction à partir du problème NP-difficile d'existence de 2 CIST dans  $G$ . Nous introduisons les deux opérations suivantes :

- i) l'opération i) est une opération entre deux copies  $G_1$  et  $G_2$  d'un même graphe qui consiste à prendre les deux sommets  $u$  et  $v$  dans  $V(G_1)$  et deux sommets  $u'$  et  $v'$  dans  $V(G_2)$  qui correspondent aux copies de  $u$  et  $v$  dans  $G_2$ , à ajouter un sommet  $w$  et à ajouter toutes les arêtes entre  $\{u, v, u', v'\}$  et  $w$  ;
- ii) l'opération ii) est une opération entre deux copies  $G_1$  et  $G_2$  d'un même graphe qui consiste à prendre les deux sommets  $u$  et  $v$  dans  $V(G_1)$  et deux sommets  $u'$  et  $v'$  dans  $V(G_2)$  qui correspondent aux copies de  $u$  et  $v$  dans  $G_2$ , à ajouter deux sommets  $w$  et  $w'$  et à ajouter les arêtes  $uw, u'w, vw', v'w'$  et  $ww'$ .

Ces opérations sont illustrées dans la Figure 1.

Soient  $G_{-i}, \dots, G_j$  des copies du graphe  $G$ . Un graphe  $G'$  est construit à partir de  $G$  comme suit :

- on fait une opération i) entre  $G_k$  et  $G_{k+1}$  quand  $-i \leq k < 0$  ;
- on fait une opération ii) entre  $G_k$  et  $G_{k+1}$  quand  $0 \leq k < j$ .

Ce problème est clairement dans NP. Il suffit ensuite de prouver qu'il existe deux CIST dans  $G$  ssi il existe deux arbres couvrants  $(i, j)$ -disjoints dans  $G'$  pour obtenir que le problème est NP-difficile.  $\square$

## 4 Arbres couvrants $(i, j)$ -disjoints dans les grilles

Pour deux graphes  $G$  et  $H$ , le produit cartésien de  $G$  et  $H$ , noté  $G \square H$ , est le graphe ayant pour sommets  $V(G) \times V(H)$  et pour arêtes  $\{(u, u')(v, v') | (u = v \wedge u'v' \in E(H)) \vee (u' = v' \wedge uv \in E(G))\}$ .

**Théorème 2.** *Il existe deux arbres couvrants  $(0, \ell)$ -disjoints dans  $P_n \square C_m$ ; de plus le nombre d'arêtes en commun  $\ell$  est minimum.*

*Idée de preuve:* La Figure 2 décrit ces deux arbres dans  $P_5 \square C_6$ , et permet de déduire un motif récurrent pour couvrir des grilles cylindriques de dimensions quelconques. On peut noter qu'il y a  $nm$  sommets et  $2nm - m$  arêtes dans ce graphe. Un simple argument de comptage permet d'obtenir que deux arbres couvrants doivent avoir au moins  $m - 2$  arêtes en commun (on pose  $\ell = m - 2$ ) dans ce graphe.  $\square$

**Théorème 3.** *Il existe deux arbres couvrants  $(1, *)$ -disjoints (cad. 1-enracinés) dans  $P_n \square P_m$ . De plus il n'existe pas deux arbres couvrants  $(0, *)$ -disjoints dans  $P_n \square P_m$ .*

*Idée de preuve:* La Figure 2 décrit ces deux arbres dans  $P_5 \square P_6$ , et permet de déduire un motif récurrent pour couvrir des grilles carrées de dimensions quelconques. On appelle *coin* de la grille les sommets de degré 2 dans  $P_n \square P_m$ . Si on considère deux coins opposés de la grille on sait qu'un chemin dans  $T_1$  relie ces deux coins. De même, si on considère les deux autres coins opposés de la grille on sait qu'un chemin dans  $T_2$  relie ces deux coins. Il y a donc obligatoirement un sommet interne en commun entre  $T_1$  et  $T_2$ .  $\square$

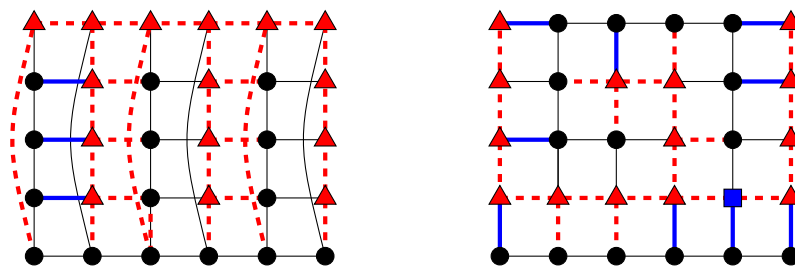


FIGURE 2: Deux arbres couvrants  $(0, 3)$ -disjoints dans  $P_5 \square C_6$  (à gauche) et deux arbres couvrants  $(1, 9)$ -disjoints dans  $P_5 \square P_6$  (à droite), (arêtes de  $T_1$  : liens simples (en noir) et liens en gras (en bleu); arêtes de  $T_2$  : liens tiretés (en rouge) et liens en gras (en bleu)).

En perspective à ce début d'étude, nous pensons étendre certains résultats connus sur les CIST aux arbres  $(i, j)$ -disjoints, notamment ceux portant sur des conditions de degré minimum et également trouver des conditions suffisantes sur la connexité du graphe pour garantir l'existence d'arbres  $(i, j)$ -disjoints.

## Références

- [Ara14] Toru Araki. Dirac's condition for completely independent spanning trees. *Journal of Graph Theory*, 77 :171–179, 2014.
- [FHL14] Genghua Fan, Yanmei Hong, and Qinghai Liu. Ore's condition for completely independent spanning trees. *Discrete Applied Mathematics*, 177 :95–100, 2014.
- [Has01] Toru Hasunuma. Completely independent spanning trees in the underlying graph of line graph. *Discrete Mathematics*, 234 :149–157, 2001.
- [Has02] Toru Hasunuma. Completely independent spanning trees in maximal planar graphs. *Lecture Notes in Computer Science*, 2573 :235–245, 2002.
- [HM12] Toru Hasunuma and Chie Morisaka. Completely independent spanning trees in torus networks. *Networks*, 60 :56–69, 2012.
- [PTCY13] Kung-Jui Pai, Shyue-Ming Tang, Jou-Ming Chang, and Jinn-Shyong Yang. Completely independent spanning trees on complete graphs, complete bipartite graphs and complete tripartite graphs. *Advances in Intelligent Systems and Applications*, 20 :107–113, 2013.
- [Pé12] Ferenc Péterfalvi. Two counterexamples on completely independent spanning trees. *Discrete Mathematics*, 312 :808–810, 2012.