



HAL
open science

LES EQUATIONS DE DIRAC-EINSTEIN

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

Jean Louis Jonot. LES EQUATIONS DE DIRAC-EINSTEIN. [Rapport de recherche] Académie de Versailles. 2015. hal-01147933v3

HAL Id: hal-01147933

<https://hal.science/hal-01147933v3>

Submitted on 21 May 2015 (v3), last revised 23 Jun 2015 (v6)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

LES ÉQUATIONS DE DIRAC-EINSTEIN

JONOT JEAN LOUIS

ABSTRACT. On veut, à partir des équations de Dirac et de Schrödinger, reconstituer les équations d'évolution et d'état de Dirac-Einstein définies sur un fibré des états quelconque. L'équation de Schrödinger est une équation d'évolution de rang 2 sur le fibré trivial d'espace total

$$\Omega \times \mathbb{C},$$

et l'équation de Dirac est une équation d'état de rang 1 sur le complexifié du fibré tangent d'espace total

$$T\Omega \otimes \mathbb{C}.$$

Pour étudier l'équation relativiste d'Einstein sur le fibré des $(2, 0)$ -tenseurs d'espace total

$$\Lambda^2\Omega,$$

on est amené à définir un principe de moindre action sur les fibrés des états de Ω . Cette construction, nous amène à faire l'hypothèse que le complexifié de la connexion d'Einstein est le carré tensoriel de la connexion duale de Dirac, qui peut s'écrire

$$\nabla_{\text{einstein}} \oplus i\nabla_{\text{einstein}} = \nabla_{\text{dirac}}^{*\otimes 2}.$$

On définit les Hamiltoniens H_1 et H_2 des équations d'état et d'évolution du fibré $\Lambda^2\Omega$, la question qui reste ouverte est la suivante: "Peut-on écrire l'équation relativiste d'Einstein à partir de ces deux opérateurs?"

1. INTRODUCTION

Si on veut définir l'espace-temps Ω , on le définit comme une variété réelle de dimension 4, munie d'une métrique Lorentzienne g pour laquelle l'équation relativiste

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta}, \quad (1.1)$$

est vérifiée, avec $T_{\alpha\beta}$ est le tenseur d'énergie-impulsion, $R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci, R est la courbure scalaire, $(g_{\alpha\beta})$ est la matrice de g dans le "local frame" associé à la carte considérée et Λ est la constante cosmologique. En relativité, les points de cette variété Ω décrivent l'univers des événements. En physique quantique, les particules sont définies comme des ondes $\psi(x, t)$. Le principe de quantification de l'univers Ω est de définir une géométrie qui permet de lier les notions d'événements et de particules.

Dans la théorie relativiste, on identifie les particules aux événements de l'univers. Si on oublie ce procédé d'identification comme cela a été développé en théorie des cordes, les principes d'unification se simplifient. On n'identifie plus, l'univers des particules à son support qui est l'univers relativiste d'Einstein Ω . On veut quantifier, non pas l'univers Ω décrit par la physique relativiste d'Einstein, mais

Key words and phrases. Connexion-Section de Dirac-Equation de Dirac-Equation relativiste d'Einstein-Equation de Schrödinger-Fibré des états-Equation d'état-Equation d'évolution-Champ chronologique-Distribution.

géométriser l'univers des états des particules décrit par la mécanique quantique. La description des particules en physique quantique est donnée par une onde

$$\psi = \psi(t, x, y, z), \quad (1.2)$$

où (x, y, z) est un point de l'espace et t représente le temps, telle que

$$\int |\psi(t, x, y, z)|^2 dx dy dz = 1. \quad (1.3)$$

Cette présentation a le désavantage de faire intervenir l'espace-temps dans sa description. On s'intéresse aux relations liant le "contenant" formé par l'univers relativiste d'Einstein Ω au "contenu" formé par l'univers des particules. Comme en gravitation quantique à boucles, on ne veut pas augmenter la dimension de Ω comme cela est fait en théorie des cordes. Pour cela, on remarque que les équations 1.2 et 1.3, ne définissent pas un élément d'un espace de Hilbert, mais une section d'un fibré hiltbertien . On pose

$$\zeta = (E(\zeta), \pi_\zeta, \Omega, \mathcal{H})$$

ce fibré, Ω représente l'univers des événements, \mathcal{H} est un espace hermitien séparable et l'espace total $E = E(\zeta)$ représente l'univers des états des particules, les sections de ce fibré $\Gamma^\infty(\Omega)$ représentent l'univers des particules. On a posé les bases de la théorie pour décrire le couple des états quantiques et des événements de Ω , noté

$$(E, \Omega).$$

2. LA CONNEXION $\nabla_{E, \Omega}$ ET L'ÉQUATION D'ÉVOLUTION

L'idée de cette section est de déterminer les relations qui lient les univers E et Ω et les équations d'évolution et d'état des sections. En physique relativiste, le fibré considéré est le fibré tangent

$$\xi_\Omega = (T\Omega, \pi_\Omega, \Omega, \mathbb{R}^4)$$

en complexifiant ce fibré, on définit une structure de fibré hermitien sur

$$\xi_\Omega \otimes \mathbb{C}$$

lorsque Ω est muni d'une métrique riemannienne g , le produit hermitien est

$$\langle X + iY \mid X' + iY' \rangle = g(X, X') + ig(Y, X') - ig(X, Y') + g(Y, Y') \quad (2.1)$$

quelque soit les champs réels X, Y, X' et Y' . La connexion de Levi-Civita ∇_g complexifiée est définie par

$$\nabla = \nabla_g + i\nabla_g,$$

on va procéder de façon analogue sur le fibré ζ . On admet l'existence d'une connexion généralisée qui permet de définir un lien entre particule et événement. Dans la suite, on note $\nabla = \nabla_{E, \Omega}$, cette connexion généralisée. On rappelle qu'une connexion généralisée est la donnée d'une C^∞ -application τ

$$\tau : p \in E(\zeta) \rightarrow \tau(p) \subset T_p(E(\zeta)),$$

et d'un isomorphisme $\phi(p)$ de $\tau(p)$ sur $T_p(\Omega)$ tels que ϕ est une C^∞ -application. La variété $E(\zeta)$ est hiltbertienne, on peut définir le fibré tangent

$$\xi_{E(\zeta)} = (TE(\zeta), \pi_{E(\zeta)}, E(\zeta), \mathbb{R}^4 \times \mathcal{H}).$$

Cette application ϕ est C^∞ dans le sens suivant, il existe une famille libre $\{X_\mu\}$ de 4 champs de $E(\zeta)$ définis sur un ouvert de trivialisatation de $\xi_{E(\zeta)}$ telle que

$$\tau(p) = \text{Vect} \{X_\mu(p)\}$$

et l'application ϕ est C^∞ si pour tout champ X de $E(\zeta)$

$$\phi \otimes X, \phi \otimes X(p) = \phi(p)(X(p))$$

est une C^∞ -application comme application de variétés de Banach [5]. On peut, ainsi, définir un sous-fibré

$$\xi_\tau(E(\zeta)) = \left(\bigcup_{p \in E(\zeta)} \tau(p), \pi_{E(\zeta)}|_{\bigcup_{p \in E(\zeta)} \tau(p)}, E(\zeta), \mathbb{R}^4 \right)$$

et l'isomorphisme de fibré ϕ ,

$$\phi : \xi_\tau(E(\zeta)) \rightarrow \xi_\Omega.$$

Pour un approfondissement de ces notions, on peut consulter [6]. Comment définir la connexion ∇ ? Le fibré ζ est muni d'un produit hermitien C^∞ , c'est-à-dire, que pour toutes sections s et $t \in \Gamma^\infty(\zeta)$, l'application

$$\omega \in \Omega \rightarrow \langle s(\omega) | t(\omega) \rangle_\omega$$

est C^∞ . On s'intéresse aux produits hermitiens qui sont parallèles aux connexions [2]. Le produit scalaire hermitien $\langle \bullet | \bullet \rangle$ est parallèle à la connexion ∇ si et seulement si pour tout champ X de Ω et pour toutes sections s et t de $\Gamma(\zeta)$

$$X \cdot \langle s | t \rangle = \langle \nabla_X s | t \rangle + \langle s | \nabla_X t \rangle, \quad (2.2)$$

où $X \cdot \langle s | t \rangle$ est la dérivée de Lie le long du champ X de la C^∞ -application

$$\omega \rightarrow \langle s(\omega) | t(\omega) \rangle_\omega.$$

Toutes les connexions considérées sont des connexions parallèles au produit hermitien. En mécanique quantique, l'évolution d'un système est donnée par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi, \quad (2.3)$$

où Δ est le Laplacien et en physique relativiste l'équation d'évolution est décrite par l'équation d'Einstein 1.1. Dans le cas quantique on est sur le fibré trivial

$$\xi = (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}, \pi, \mathbb{R}^4, \mathbb{C})$$

et dans le cas relativiste on est sur le fibré des $(2, 0)$ -tenseurs. On veut définir à partir de la connexion ∇ , une équation d'évolution équivalente à 2.3 et 1.1. L'équation 2.3 est une relation qui lie la dérivée de l'onde par rapport au temps t à un opérateur $H + V$. Peut-on définir un procédé permettant d'écrire ces équations de façon intrinsèque pour des choix convenables de fibré? Pour cela, on doit définir l'opérateur $H + V$, la courbure et la notion de dérivée d'une section par rapport à un champ de Ω . Les deux équations précédentes nous permettent de définir l'équation d'évolution des fibrés hermitiens. Pour la dérivée, l'opérateur ∇_T est un opérateur acceptable, reste à définir le champ local T et l'opérateur H pour lequel

$$Hs = \lambda \nabla_T s.$$

Pour l'opérateur H , l'équation 1.1, nous permet de construire cet opérateur comme suit. On se fixe une section de Dirac γ de E , c'est-à-dire, un élément de

$$\text{Hom}(\Lambda^1 \Omega \otimes E, E) \approx \text{Hom}(\Lambda^1 \Omega, \text{End}(E)),$$

ainsi pour tout $d \in \Lambda^1\Omega$, l'application

$$\gamma^d : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E), \quad \gamma^d(\phi)(\omega) = \gamma(\omega)(d(\omega) \otimes \phi(\omega))$$

est un endomorphisme de $\Gamma(E)$, dit endomorphisme de Dirac. Sur une carte U où le fibré tangent ξ_Ω et le fibré ζ sont trivialisables, on pose $\{\partial_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ le "local frame" associé à la carte U , $\{d^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ le "local frame" dual et $\gamma^\mu = \gamma^{d^\mu}$ les endomorphismes de Dirac associés. Ces endomorphismes sont représentés par des matrices carrées d'ordre m dont les coefficients sont dans $C^\infty(U)$, si la dimension de la fibre est m . Dans le cas de la dimension infinie, on suppose que les endomorphismes de Dirac sont des opérateurs à trace, cela permet de définir le tenseur de Poisson par

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{8} \text{Trace}(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}) = \frac{1}{4} \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu).$$

L'univers Ω est muni d'une métrique de Lorentz g , dont la matrice dans le local frame $\{\partial_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ est $(g_{\mu\nu})$ et $(g^{\mu\nu})$ est sa matrice inverse, on fait l'hypothèse

$$(\gamma^{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}).$$

Cette métrique peut être définie par la matrice de Poisson $(\gamma^{\mu\nu})^{-1}$, en faisant l'hypothèse que localement $(\gamma^{\mu\nu})$ est inversible et que $(\gamma_{\mu\nu}) = (\gamma^{\mu\nu})^{-1}$ est la matrice d'une métrique de Lorentz g_γ sur l'ouvert U , afin de pouvoir définir la notion de champ chronologique local T et d'équation d'évolution le long de ce champ. On rappelle qu'un champ chronologique peut être défini, à partir d'une métrique de Lorentz quelconque. Ensuite, on définit la section H de $\text{End } \Gamma(\zeta)$ par

$$H(s)(\omega) = \gamma_2(\omega)(R^\nabla s(\omega))$$

notée

$$H = \gamma_2 \otimes R^\nabla$$

où R^∇ est la courbure de la connexion ∇ et γ_2 est l'extension de rang 2 de la section de Dirac γ . L'équation d'état est donnée par

$$H(s) = \lambda s,$$

où λ est une fonction propre C^∞ définie sur une carte U de Ω et H est l'opérateur qui correspond à l'Hamiltonien défini dans l'équation de Schrödinger. L'équation d'évolution d'une section locale s définie sur U , le long d'un champ chronologique T , non nécessairement stable, d'un système soumis à aucune observation est

$$Hs = i\lambda \nabla_T s, \tag{2.4}$$

si le fibré est complexe ou

$$Hs = \lambda \nabla_T s, \tag{2.5}$$

si le fibré est réel. Le fibré

$$\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$$

est un fibré vectoriel réel ou complexe, de fibre \mathcal{H} , dont la base est l'univers Ω qui est une C^∞ -variété de dimension 4. On note $\Lambda^n\Omega = \wedge^n T^*\Omega$, le fibré des n -formes différentielles sur Ω . L'espace des (p, q) -tenseurs, p fois covariant et q fois contravariant, est noté

$$T^{p,q}\Omega = (\otimes^p T^*\Omega) \otimes (\otimes^q T\Omega), \tag{2.6}$$

et l'espace total $E(\zeta)$ du fibré est l'espace des états, il est muni d'une connexion

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(\Lambda^1\Omega \otimes E),$$

que l'on peut noter

$$\nabla : \Gamma^\infty(\xi_\Omega) \times \Gamma^\infty(\zeta) \rightarrow \Gamma^\infty(\zeta), \quad \nabla(X, s) = \nabla_X s,$$

où

$$\xi_\Omega = (T\Omega, \pi, \Omega)$$

est le fibré tangent sur Ω . On utilisera l'une ou l'autre des présentations, on peut consulter [1] pour la comparaison entre ces deux définitions.

Definition 1. Une section γ du fibré $L(\Lambda^1\Omega \otimes E, E)$ est une section de Dirac du fibré des états E . Les endomorphismes de Dirac sont définis par,

$$\gamma^d(s) = \gamma(d \otimes s), \quad d \in \Lambda^1\Omega \text{ et } s \in \Gamma(E).$$

Le commutateur d'une famille finie d'endomorphismes de Dirac $\{\gamma^{d^\mu}\}$ est

$$\left[\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n} \right] = \sum_{s \in \text{Perm}\{1, 2, \dots, n\}} \varepsilon(s) \gamma^{d^{s(1)}} \circ \gamma^{d^{s(2)}} \circ \dots \circ \gamma^{d^{s(n-1)}} \circ \gamma^{d^{s(n)}},$$

et l'anticommutateur ou crochet de Poisson est défini par,

$$\left\{ \gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n} \right\} = \sum_{s \in \text{Perm}\{1, 2, \dots, n\}} \gamma^{d^{s(1)}} \circ \gamma^{d^{s(2)}} \circ \dots \circ \gamma^{d^{s(n-1)}} \circ \gamma^{d^{s(n)}}.$$

Le commutateur définit une section de $L(\Lambda^n\Omega \otimes E, E)$. L'extension de rang n d'une section γ est la section γ_n de $\text{Hom}(\Lambda^n(\Omega) \otimes E, E)$ où

$$\gamma_n((d^1 \wedge d^2 \wedge \dots \wedge d^n) \otimes s) = \left[\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n} \right](s),$$

et on prolonge γ_n par $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ -linéarité sur $\Lambda^n(\Omega) \otimes E$. Toute connexion sur ∇ a une extension

$$d_n^\nabla : \Gamma(\Lambda^n(\Omega) \otimes E) \rightarrow \Gamma(\Lambda^{n+1}(\Omega) \otimes E)$$

avec, $d_0^\nabla = \nabla$, $\Lambda^0(\Omega) \otimes E = E$ et

$$d_n^\nabla(\psi \otimes s) = d\psi \otimes s + (-1)^n \psi \wedge \nabla s, \quad \psi \in \Lambda^n(\Omega).$$

L'équation de Dirac-Einstein au rang n est

$$\gamma_n(\nabla_{n-1}s) = \lambda s, \quad \nabla_{n-1} = d_{n-1}^\nabla \circ \dots \circ d_0^\nabla.$$

Remark 1. Pour $n = 2$,

$$\gamma_2((d^1 \wedge d^2) \otimes s) = \left[\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2} \right](s) = \gamma^{d^1} \gamma^{d^2}(s) - \gamma^{d^2} \gamma^{d^1}(s)$$

et

$$\nabla_1 = d_1^\nabla \circ d_0^\nabla = R^\nabla$$

représente la courbure de la connexion ∇ .

Sur un ouvert de trivialisations U de ξ_Ω et ζ , on note $\{\partial_\mu\}$ le "local frame" attaché à cette carte, le "local frame" dual $\{d^\mu\}$ et une famille libre $\{e_\alpha\}$ de sections définies sur U telle que

$$E_\omega(\zeta) = \text{Vect}\{e_\alpha(\omega)\}$$

pour tout $\omega \in U$. Soit $s = s^\alpha e_\alpha$ alors

$$\nabla s = \nabla(s^\alpha e_\alpha) = ds^\alpha \otimes e_\alpha + s^\alpha \nabla e_\alpha = ds^\alpha \otimes e_\alpha + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta d^\nu \otimes e_\beta,$$

sur U la connexion s'écrit

$$\nabla e_\alpha = \Gamma_{\alpha\nu}^\beta d^\nu \otimes e_\beta,$$

avec des C^∞ fonctions $\Gamma_{\alpha\nu}^\beta$ définies sur U à valeurs complexes ou réelles, $\Gamma_{\alpha\nu}^\beta$ sont les symboles de Christoffel associés à la connexion ∇ . On a $ds^\alpha = (\partial_\nu s^\alpha) d^\nu$,

$$\nabla s = (\partial_\nu s^\alpha) d^\nu \otimes e_\alpha + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta d^\nu \otimes e_\beta = (\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu \otimes e_\beta,$$

en prenant pour notation $\partial_\nu s^\beta = ds^\beta(\partial_\nu)$. Pour $s = s^\alpha e_\alpha$

$$\begin{aligned} R^\nabla(s) &= d_1^\nabla(\nabla s) = d_1^\nabla((\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu \otimes e_\beta) \\ &= d((\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu) \otimes e_\beta - ((\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu) \wedge \nabla e_\beta \\ &= (d(\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) \wedge d^\nu) \otimes e_\beta - ((\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu \wedge \Gamma_{\beta\sigma}^\tau d^\sigma) \otimes e_\tau \\ &= (d(\partial_\nu s^j + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^j) \wedge d^\nu) \otimes e_j - ((\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu \wedge \Gamma_{\beta\sigma}^j d^\sigma) \otimes e_j \\ &= \left(\partial_\mu (\partial_\nu s^j + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^j) - (\partial_\mu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\beta) \Gamma_{\beta\nu}^j \right) (d^\mu \wedge d^\nu) \otimes e_j \\ &= \left(\partial_\mu \partial_\nu s^j + \left(\partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^j - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j \right) s^\alpha \right) (d^\mu \wedge d^\nu) \otimes e_j. \end{aligned}$$

La section de Dirac γ de $E(\zeta)$ a pour représentation locale

$$\gamma(d^\nu \otimes e_\beta) = \gamma_\beta^{\nu\sigma} e_\sigma,$$

et si $\gamma^\nu = \gamma(d^\nu)$, on pose $(\gamma^\nu)_\beta = \gamma_\beta^{\nu\alpha}$, alors

$$\gamma_2 \otimes R^\nabla(s) = \left(\partial_\mu \partial_\nu s^j + \left(\partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^j - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j \right) s^\alpha \right) [\gamma^\mu, \gamma^\nu](e_j),$$

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu, \gamma^\nu](e_j) &= \gamma^\mu (\gamma_j^{\nu\sigma} e_\sigma) - \gamma^\nu (\gamma_j^{\mu\sigma} e_\sigma) \\ &= (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) e_k \end{aligned}$$

et

$$\gamma_2 \otimes R^\nabla(s^\alpha e_\alpha) = (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) \left(\partial_\mu \partial_\nu s^j + \left(\partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^j - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j \right) s^\alpha \right) e_k.$$

Si on pose Δ_j^k l'opérateur

$$\Delta_j^k = (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) \partial_\mu \partial_\nu,$$

et

$$\Upsilon_\alpha^k = (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) \left(\partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^j - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j \right)$$

alors

$$\begin{aligned} \gamma_2 \otimes R^\nabla(s^\alpha e_\alpha) &= (\Delta_j^k s^j + \Upsilon_\alpha^k s^\alpha) e_k \\ &= (\Delta_\tau^k s^\tau + \Upsilon_\tau^k s^\tau) e_k \\ &= (\Delta_\tau^k + \Upsilon_\tau^k) s^\tau e_k. \end{aligned}$$

Pour un champ chronologique $T = t^\rho \partial_\rho$, les équations 2.4 et 2.5 s'écrivent localement,

$$\begin{aligned} \nabla_T s^\alpha e_\alpha &= t^\rho \nabla_{\partial_\rho} (s^\alpha e_\alpha) \\ &= t^\rho (\partial_\rho s^\alpha e_\alpha + s^\alpha \Gamma_{\alpha\rho}^\beta e_\beta) \\ &= (t^\rho \partial_\rho s^k + t^\rho s^\alpha \Gamma_{\rho\alpha}^k) e_k, \end{aligned}$$

on obtient le système d'équations

$$(\Delta_\tau^k + \Upsilon_\tau^k) s^\tau = \chi (t^\rho \partial_\rho s^k + t^\rho s^\alpha \Gamma_{\rho\alpha}^k). \quad (2.7)$$

L'équation 2.7 est l'équation locale sur une carte de trivialisaton de ξ_Ω et ζ , cette équation est l'équation d'évolution de Dirac-Einstein de rang 2 développée dans le "local frame" associé à la carte avec la condition

$$\gamma_2 \otimes R^\nabla = \chi \nabla_T \text{ avec } \chi = i\lambda \text{ ou } \chi = \lambda \text{ et } \lambda \in C^\infty(U, \mathbb{R}),$$

respectivement, complexe ou réelle.

Remark 2. Si la connexion est plate, l'équation d'évolution se ramène à l'équation triviale, ce système d'équations est

$$t^\rho \partial_\rho s^\tau = 0, \forall \tau.$$

Dans l'écriture standard, on pose

$$\nabla e_\alpha = \Gamma_{\nu\alpha}^\beta d^\nu \otimes e_\beta$$

à la place de

$$\nabla e_\alpha = \Gamma_{\alpha\nu}^\beta d^\nu \otimes e_\beta,$$

cette présentation est algébriquement plus appropriée.

3. LES CONNEXIONS DE SCHRÖDINGER ET DE DIRAC

Appliquons ce résultat à l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} H\psi + V\psi.$$

On se place sur le fibré trivial

$$(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}, \pi, \Omega, \mathbb{C}),$$

on prend $s = \psi$, $e_\alpha = \mathbf{1}$, $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ et $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}$. Pour le champ chronologique $T = t^\mu \partial_\mu$, on a

$$t^0 = 1, t^1 = 0, t^2 = 0 \text{ et } t^3 = 0,$$

de plus, $\beta = j = \alpha = k = 0$. L'équation 2.7 s'écrit

$$\begin{aligned} & \left(\partial_\mu \partial_\nu s^j + \left(\partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^j - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^j \right) s^\alpha \right) (\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) = i\lambda (t^\rho \partial_\rho s^k + t^\rho s^\alpha \Gamma_{\rho\alpha}^k) \\ & (\partial_\mu \partial_\nu \psi + (\partial_\mu \Gamma_{0\nu}^0 - \Gamma_{0\mu}^0 \Gamma_{0\nu}^0) \psi) (\gamma_0^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu 0} - \gamma_0^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu 0}) = i\lambda (\partial_0 \psi + \psi \Gamma_{00}^0). \end{aligned}$$

Il faut que

$$\gamma_0^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu 0} - \gamma_0^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu 0} = \delta^{\mu\nu},$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \psi + \sum_\mu \left(\partial_\mu \Gamma_{0\mu}^0 - (\Gamma_{0\mu}^0)^2 \right) \psi = i\lambda (\partial_0 \psi + \psi \Gamma_{00}^0), \\ & -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\sum_\mu \left(\partial_\mu \Gamma_{0\mu}^0 - (\Gamma_{0\mu}^0)^2 \right) - i\lambda \Gamma_{00}^0 \right) \psi = -i\lambda \frac{\hbar^2}{2m} \partial_0 \psi, \end{aligned}$$

pour se ramener à l'équation de Schrödinger, il faut que

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\sum_\mu \left(\partial_\mu \Gamma_{0\mu}^0 - (\Gamma_{0\mu}^0)^2 \right) - i\lambda \Gamma_{00}^0 \right) \text{ et } i\hbar = -i\lambda \frac{\hbar^2}{2m}, \\ \lambda &= -\frac{2m}{\hbar}, V = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\sum_\mu \left(\partial_\mu \Gamma_{0\mu}^0 - (\Gamma_{0\mu}^0)^2 \right) + i\frac{2m}{\hbar} \Gamma_{00}^0 \right) \end{aligned}$$

or on veut que $V \in \mathbb{R}$, donc

$$\sum_{\mu} (\partial_{\mu} (\operatorname{Im} \Gamma_{0\mu}^0) - 2 \operatorname{Re} \Gamma_{0\mu}^0 \operatorname{Im} \Gamma_{0\mu}^0) + \frac{2m}{\hbar} \operatorname{Re} \Gamma_{00}^0 = 0.$$

Theorem 1. *La connexion associée à l'équation de Schrödinger est dans la base $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ et $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}$,*

$$\nabla = \Gamma_{0\nu}^0 d^{\nu} \otimes \mathbf{1}_{\mathbb{C}},$$

où $\lambda = -\frac{2m}{\hbar}$ et

$$V = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\sum_{\nu=0}^3 \Gamma_{0\nu,\nu}^0 - (\Gamma_{0\mu}^0)^2 + i \frac{2m}{\hbar} \Gamma_{00}^0 \right),$$

avec

$$\sum_{\mu=0}^3 (\partial_{\mu} (\operatorname{Im} \Gamma_{0\mu}^0) - 2 \operatorname{Re} \Gamma_{0\mu}^0 \operatorname{Im} \Gamma_{0\mu}^0) + \frac{2m}{\hbar} \operatorname{Re} \Gamma_{00}^0 = 0,$$

et pour des sections de Dirac vérifiant

$$\gamma_0^{\nu\sigma} \gamma_{\sigma}^{\mu 0} - \gamma_0^{\mu\sigma} \gamma_{\sigma}^{\nu 0} = \delta^{\mu\nu}.$$

Pour obtenir une connexion de Schrödinger sur l'univers Ω , on prend un recouvrement localement fini de cartes de Ω , noté $\{\varphi_{\nu}\}$ où

$$\varphi_{\nu} : \mathbb{R}^4 \rightarrow U_{\nu}, U_{\nu} \subset \Omega$$

sans passer par les fibrés réciproque, on peut définir une connexion canonique à partir d'une connexion de ξ où

$$\xi = (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}, \pi, \mathbb{R}^4, \mathbb{C})$$

en posant

$$\nabla_{\nu} \psi = T\varphi_{\nu}^{-1} \circ \nabla \psi_{\nu} \circ (\varphi_{\nu}^{-1} \times \mathbf{1}_{\mathbb{C}})$$

et

$$\psi_{\nu} = \varphi_{\nu}^{-1} \circ \psi \circ (\varphi_{\nu} \times \mathbf{1}_{\mathbb{C}}).$$

On définit sur une carte U_{ν} une connexion de Schrödinger induite par φ_{ν} et la connexion de Schrödinger de \mathbb{R}^4 (ou encore la connexion image réciproque de ∇). On prend ensuite une partition de l'unité $\{\lambda^{\nu}\}$ associée au recouvrement localement fini $\{U_{\nu}\}$, on pose

$$\nabla = \lambda^{\nu} \nabla_{\nu}$$

qui est une connexion car $\sum_{\nu} \lambda^{\nu} = 1$. Cette connexion est une connexion définie sur le fibré trivial

$$(\Omega \times \mathbb{C}, \pi, \Omega, \mathbb{C}),$$

une connexion de ce type est une connexion de Schrödinger sur Ω . On a la remarque fondamentale suivante,

Remark 3. *Les équations des états de rang 1 et 2 ne peuvent décrire l'équation de Schrödinger, seule l'équation d'évolution de rang 2 le permet sur le fibré trivial de Ω , de dimension 1.*

Dans le cas de l'équation de Dirac, l'équation d'évolution n'est pas une équation de Dirac-Einstein de rang 2 car l'équation développée de Dirac

$$\begin{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial t} - m & 0 & i\frac{\partial}{\partial z} & i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & i\frac{\partial}{\partial t} - m & i\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} & i\frac{\partial}{\partial z} \\ i\frac{\partial}{\partial z} & i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} & -i\frac{\partial}{\partial t} - m & 0 \\ i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} & i\frac{\partial}{\partial z} & 0 & -i\frac{\partial}{\partial t} - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

où ψ est une section du fibré

$$\xi_D = (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^4, \pi, \mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4),$$

ne fait apparaître que des opérateurs de rang 1. Pour répondre à la question, on passe sur une équation d'état de rang 1, d'opérateur

$$H = \gamma \otimes \nabla.$$

Pour cet opérateur, il n'existe pas d'équation d'évolution, à l'exception des particules de masse nulle. Seule l'équation des états de rang 1, d'opérateur H peuvent décrire l'équation 3.1. On se restreint donc, à l'image d'une carte, où plus précisément à \mathbb{R}^4 et par un recouvrement localement fini, on définit la connexion sur Ω . Dans \mathbb{R}^4 , soit

$$\left\{ \partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

les champs de vecteurs sur \mathbb{R}^4 linéairement indépendants associés et

$$\{d^\nu, \nu = 0, 1, 2, 3\},$$

la base duale. L'équation de Dirac-Einstein au rang 1 est

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma} (\partial_\nu \psi^\beta + \psi^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) = -i\lambda \psi^\sigma \text{ pour tout } \sigma = 0, 1, 2, 3. \quad (3.2)$$

Les matrices de Dirac γ^μ , $0 \leq \mu \leq 3$, sont des matrices carrées d'ordre 4 dont les coefficients sont des applications C^∞ sur \mathbb{R}^4 , à valeurs complexes. On note

$$(D_\nu \psi)^\beta = \partial_\nu \psi^\beta + \psi^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta,$$

D_ν est la section locale de $\text{End}(E)$ définie par, $D_\nu = L_\nu + \Gamma_\nu$, où Γ_ν est la section locale de $\text{End}(E)$ dont la matrice, dans le "local frame", est $(\Gamma_\nu)_\alpha^\beta = \Gamma_{\alpha\nu}^\beta$ et L_ν est l'endomorphisme de Lie le long du champ $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ défini par,

$$L_\nu \psi = (\partial_\nu \psi^0, \partial_\nu \psi^1, \partial_\nu \psi^2, \partial_\nu \psi^3), \quad \psi = (\psi^0, \psi^1, \psi^2, \psi^3)$$

alors

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma} (D_\nu \psi)^\beta = -i\lambda \psi^\sigma,$$

l'équation précédente s'écrit

$$\gamma^\nu D_\nu (\psi) = -i\lambda \psi.$$

Utilisons l'équation 3.2 et comparons à 3.1,

$$\gamma_\beta^{\nu k} (\partial_\nu \psi^\beta + \psi^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) + i\lambda \psi^k = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\gamma_\beta^{\nu k} \partial_\nu \psi^\beta + \psi^\alpha \gamma_\beta^{\nu k} \Gamma_{\alpha\nu}^\beta + i\lambda \psi^k = 0$$

$$\left(\gamma_j^{\nu k} \partial_\nu + \gamma_\beta^{\nu k} \Gamma_{j\nu}^\beta \right) \psi^j + i\lambda \psi^k = 0$$

si on prend pour $(\gamma^\nu)_j^k = \gamma_j^{\nu k}$, on retombe sur l'équation 3.1 pour des coefficients de Christoffel $\Gamma_{j\nu}^\beta$ qui sont calculables comme suit. La matrice associée s'écrit

$$\begin{pmatrix} i\gamma_0^{\nu 0}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 0}\Gamma_{0\nu}^\beta - \lambda & i\gamma_1^{\nu 0}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 0}\Gamma_{11}^\beta & i\gamma_2^{\nu 0}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 0}\Gamma_{2\nu}^\beta & i\gamma_3^{\nu 0}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 0}\Gamma_{3\nu}^\beta \\ i\gamma_0^{\nu 1}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 1}\Gamma_{0\nu}^\beta & i\gamma_1^{\nu 1}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 1}\Gamma_{1\nu}^\beta - \lambda & i\gamma_2^{\nu 1}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 1}\Gamma_{2\nu}^\beta & i\gamma_3^{\nu 1}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 1}\Gamma_{3\nu}^\beta \\ i\gamma_0^{\nu 2}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 2}\Gamma_{0\nu}^\beta & i\gamma_1^{\nu 2}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 2}\Gamma_{1\nu}^\beta & i\gamma_2^{\nu 2}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 2}\Gamma_{2\nu}^\beta - \lambda & i\gamma_3^{\nu 2}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 2}\Gamma_{3\nu}^\beta \\ i\gamma_0^{\nu 3}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 3}\Gamma_{0\nu}^\beta & i\gamma_1^{\nu 3}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 3}\Gamma_{1\nu}^\beta & i\gamma_2^{\nu 3}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 3}\Gamma_{2\nu}^\beta & i\gamma_3^{\nu 3}\partial_\nu + i\gamma_\beta^{\nu 3}\Gamma_{3\nu}^\beta - \lambda \end{pmatrix},$$

on en déduit que $\lambda = m$, et que les matrices γ^ν définies par $(\gamma^\nu)_\beta^\alpha = \gamma_\beta^{\nu\alpha}$ sont les matrices de Dirac. On a

$$\begin{pmatrix} i\partial_0 + i\Gamma_{00}^0 - m & 0 & i\partial_3 - i\Gamma_{23}^2 & i\partial_1 + \partial_2 - i\Gamma_{31}^3 + \Gamma_{32}^3 \\ 0 & i\partial_0 + i\Gamma_{10}^1 - m & i\partial_1 - \partial_2 + i\Gamma_{21}^2 - \Gamma_{22}^2 & -i\partial_3 - i\Gamma_{33}^3 \\ -i\partial_3 - i\Gamma_{03}^0 & -i\partial_1 - \partial_2 - i\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^1 & -i\partial_0 - i\Gamma_{20}^2 - m & 0 \\ -i\partial_1 + \partial_2 - i\Gamma_{01}^0 - \Gamma_{02}^0 & i\partial_3 + \Gamma_{13}^1 & 0 & -i\partial_0 - i\Gamma_{30}^3 - m \end{pmatrix},$$

les relations sur les coefficients de Christoffel de la connexion de Dirac sont

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{03}^0 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{30}^3 = 0 \quad (3.3)$$

et

$$\Gamma_{32}^3 = i\Gamma_{31}^3, \Gamma_{22}^2 = i\Gamma_{21}^2, \Gamma_{12}^1 = -i\Gamma_{11}^1, \Gamma_{02}^0 = -i\Gamma_{01}^0. \quad (3.4)$$

Theorem 2. *Les symboles de Christoffel de la connexion de Dirac sur \mathbb{R}^4 vérifient*

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{03}^0 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{30}^3 = 0,$$

$$\Gamma_{32}^3 = i\Gamma_{31}^3, \Gamma_{22}^2 = i\Gamma_{21}^2, \Gamma_{12}^1 = -i\Gamma_{11}^1, \Gamma_{02}^0 = -i\Gamma_{01}^0,$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\tau = \Gamma_{\nu\mu}^\tau.$$

On peut construire une connexion de Dirac sur l'univers Ω , en prenant un recouvrement localement fini et une partition de l'unité $\{\lambda^U\}$ subordonnée à ce recouvrement. Si ∇_U est une connexion de Dirac induite par la carte alors

$$\nabla = \lambda^U \nabla_U$$

est une connexion définie sur l'univers Ω . Cette connexion est définie sur le fibré tangent de l'univers Ω .

Remark 4. *Contrairement aux connexions de Schrödinger qui dépendent de la masse m et du potentiel V , on peut choisir des connexions de Dirac indépendantes de la masse m de la particule. L'équation de Dirac est une équation d'état de rang 1 et l'équation de Schrödinger est une équation d'évolution de rang 2.*

La connexion de Dirac est indépendante du choix de la particule de masse m , c'est donc, une connexion intrinsèque sur les champs complexes. Les équations 3.3 et 3.4 permettent de définir un grand nombre de choix possibles pour la connexion de Dirac.

4. L'ÉQUATION RELATIVISTE D'EINSTEIN

Si on veut décrire l'équation 1.1, comme une équation d'état ou une équation d'évolution, on est amené à s'intéresser au fibré des $(2, 0)$ -tenseurs. A partir d'une connexion ∇ sur les champs, on peut étendre l'endomorphisme ∇_X aux tenseurs de façon unique avec deux conditions sur ∇_X , ∇_X commute avec les contractions,

$$\nabla_X (c(S)) = c(\nabla_X (S))$$

et

$$\nabla_X (S \otimes T) = \nabla_X (S) \otimes T + S \otimes \nabla_X (T).$$

La connexion sur les $(2, 0)$ -tenseurs est définie à partir de la connexion initiale ∇ sur les champs en posant, si on note encore ∇ cette connexion alors

$$\nabla (d^1 \otimes d^2) = \nabla (d^1) \otimes d^2 + d^1 \otimes \nabla (d^2)$$

et si on se restreint aux sections définies sur une carte U de l'univers, dans la base $\{\partial_\mu\}$, l'isomorphisme local de dualisation,

$$\Theta (d^\mu) = \partial_\mu$$

permet de définir la connexion duale locale, notée encore $\nabla^X (d)$, par

$$\nabla^X (d) = \Theta^{-1} \nabla_X \Theta (d).$$

On peut étendre cette connexion sur l'ensemble de l'univers Ω , en prenant un recouvrement localement fini par des cartes $\{U\}$ et une partition de l'unité $\{\varphi_U\}$ subordonnée à ce recouvrement, $\varphi_U \nabla^U$ est la connexion cherchée, c'est la connexion duale sur U [3]. En particulier,

$$\begin{aligned} \nabla^{\partial_\beta} (d^\sigma) &= \Gamma_{\beta\mu}^{\sigma*} d^\mu = \Theta^{-1} \nabla_{\partial_\beta} \Theta (d^\sigma) \\ &= \Theta^{-1} \nabla_{\partial_\beta} (\partial_\sigma) = \Theta^{-1} \left(\Gamma_{\sigma\beta}^\mu \partial_\mu \right) = \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \delta_i^\mu d^i \text{ et } \Gamma_{\beta i}^{\sigma*} = \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \delta_i^\mu = \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \delta_\mu^i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_\beta} (d^\sigma \otimes d^\tau) &= \nabla (d^\sigma \otimes d^\tau) (\partial_\beta) = \left(\Gamma_{\rho\gamma\delta}^{\sigma\tau} d^\rho \otimes d^\gamma \otimes d^\delta \right) (\partial_\beta) \\ &= \Gamma_{\rho\gamma\delta}^{\sigma\tau} d^\rho (\partial_\beta) d^\gamma \otimes d^\delta = \Gamma_{\beta\gamma\delta}^{\sigma\tau} d^\gamma \otimes d^\delta. \end{aligned}$$

$$\nabla_{\partial_\beta} (d^\sigma \otimes d^\tau) = \Gamma_{\beta i}^{\sigma*} d^i \otimes d^\tau + \Gamma_{\beta j}^{\tau*} d^\sigma \otimes d^j,$$

$$\nabla_{\partial_\beta} (d^\sigma \otimes d^\tau) = \left(\Gamma_{\beta\gamma}^{\sigma*} + \Gamma_{\beta\nu}^{\tau*} \right) d^\gamma \otimes d^\nu,$$

et,

$$\Gamma_{\beta\gamma\nu}^{\sigma\tau} = \Gamma_{\sigma\beta}^\gamma \delta_{\tau\nu} + \Gamma_{\tau\beta}^\nu \delta_{\sigma\gamma}, \quad (4.1)$$

$\delta_{\tau\nu}$ et $\delta_{\sigma\gamma}$ sont les symboles de Kronecker.

Il y a une façon naturelle de décrire les endomorphismes de Dirac sur les $(2, 0)$ -tenseurs, si γ est une section de Dirac du fibré des champs, c'est également une section du fibré dual

$$\gamma \in \Gamma (T\Omega \otimes T^*\Omega \otimes T\Omega) \approx \Gamma (T\Omega \otimes T\Omega \otimes T^*\Omega)$$

et,

$$\gamma \in \Gamma (\mathbb{L} (\Lambda^1\Omega, \text{End} (T\Omega))) \approx \Gamma (\mathbb{L} (\Lambda^1\Omega, \text{End} (\Lambda^1\Omega))).$$

On a

$$(\gamma^d)^* (\zeta) = \zeta \circ \gamma^d, \zeta \text{ et } d \in \Lambda^1\Omega.$$

Ensuite, pour obtenir la section de Dirac sur les $(2, 0)$ -tenseurs, on pose

$$[\gamma^d] = (\gamma^d)^* \otimes (\gamma^d)^*$$

$$[\gamma^\mu] (d^\nu \otimes d^\tau) = \gamma_{\rho\sigma}^{\mu\nu\tau} d^\rho \otimes d^\sigma = (\gamma^\mu)^* (d^\nu) \otimes (\gamma^\mu)^* (d^\tau),$$

$$(\gamma^\mu)^* (d^\nu) (\partial_\rho) = d^\nu \circ \gamma^\mu (\partial_\rho) = d^\nu (\gamma_{\rho\sigma}^{\mu\sigma} \partial_\sigma) = \gamma_\rho^{\mu\nu}$$

et $(\gamma^\mu)^* (d^\nu) = \gamma_\rho^{\mu\nu} d^\rho$,

$$[\gamma^\mu] (d^\nu \otimes d^\tau) = \gamma_\rho^{\mu\nu} \gamma_\sigma^{\mu\tau} d^\rho \otimes d^\sigma,$$

il suit

$$\gamma_{\rho\sigma}^{\mu\nu\tau} = \gamma_\rho^{\mu\nu} \gamma_\sigma^{\mu\tau}. \quad (4.2)$$

La connexion ∇ , étendue aux $(2, 0)$ -tenseurs s'écrit

$$\nabla (g_{\beta\sigma} d^\beta \otimes d^\sigma) = \gamma_{\rho\sigma}^{\mu\nu\tau} (\partial_\mu g_{\nu\tau} + g_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu\tau}^{\alpha\beta}) d^\nu \otimes d^\rho \otimes d^\sigma$$

on obtient pour opérateur de Dirac-Einstein au rang 1, noté H_1

$$H_1 (g_{\beta\sigma} d^\beta \otimes d^\sigma) = \gamma_\rho^{\mu\nu} \gamma_\sigma^{\mu\tau} (\partial_\mu g_{\nu\tau} + g_{\alpha\tau} \Gamma_{\mu\alpha}^\nu + g_{\nu\beta} \Gamma_{\mu\beta}^\tau) d^\rho \otimes d^\sigma.$$

l'équation d'état d'un $(2, 0)$ -tenseur est

$$\gamma_\rho^{\mu\nu} \gamma_\sigma^{\mu\tau} (\partial_\mu g_{\nu\tau} + g_{\alpha\tau} \Gamma_{\mu\alpha}^\nu + g_{\nu\beta} \Gamma_{\mu\beta}^\tau) = \lambda g_{\rho\sigma}, \quad (4.3)$$

où λ est une C^∞ -application à valeurs réelles. L'écriture matricielle de l'équation est

$$\text{tr} \gamma^\mu (\mathbf{L}_\mu A + \Gamma_\mu A + A^{\text{tr}} \Gamma_\mu) \gamma^\mu = \lambda A,$$

$\gamma^\mu = \left((\gamma^\mu)_\rho^\nu \right)$ avec, $(\gamma^\mu)_\rho^\nu = \gamma_\rho^{\mu\nu}$, $(\mathbf{L}_\mu A)_\tau^\nu = \partial_\mu a_{\nu\tau}$, $(A)_\beta^\alpha = a_{\alpha\beta}$, $(\Gamma_\nu)_\alpha^\beta = \Gamma_{\alpha\nu}^\beta$ et $\text{tr} \gamma^\mu$, $\text{tr} \Gamma_\mu$ sont les transposées des matrices γ^μ et Γ_μ .

Theorem 3. *Si une pseudo-métrique riemannienne g suit une équation d'état de Dirac-Einstein de rang 1 alors dans toute carte U sa matrice $G = (g_{ij})$ vérifie l'équation*

$$\text{tr} \gamma^\mu (\mathbf{L}_\mu G + \Gamma_\mu G + \text{tr} (\Gamma_\mu G)) \gamma^\mu = \lambda G,$$

où Γ_μ , avec $(\Gamma_\mu)_\alpha^\beta = \Gamma_{\mu\nu}^\beta$, sont les matrices de Christoffel de la connexion et $\gamma^\mu = \gamma(d^\mu)$ sont les matrices de Dirac associées à l'équation d'état. L'opérateur d'état Δ est

$$\Delta(g)(X, Y) = \text{tr} (\gamma^\mu \mathbf{X}) (\mathbf{L}_\mu G + \Gamma_\mu G + \text{tr} (\Gamma_\mu G)) \gamma^\mu \mathbf{Y},$$

où \mathbf{X} et \mathbf{Y} sont les matrices unicolonnes associées aux champs X et Y dans la base $\{\partial_\mu\}$.

Si on applique l'équation 2.7, pour les $(2, 0)$ -tenseurs on a

$$\Delta_{j_1 j_2}^{k_1 k_2} g_{k_1 k_2} - \lambda t^\rho \partial_\rho g_{j_1 j_2} + \left(\Upsilon_{j_1 j_2}^{k_1 k_2} + t^\rho \Gamma_{\rho j_1 j_2}^{k_1 k_2} \right) g_{k_1 k_2} = 0, \quad \forall (j_1, j_2)$$

où

$$\Delta_{j_1 j_2}^{k_1 k_2} = \left(\gamma_{j_1 j_2}^{\nu\sigma_1\sigma_2} \gamma_{\sigma_1\sigma_2}^{\mu k_1 k_2} - \gamma_{j_1 j_2}^{\mu\sigma_1\sigma_2} \gamma_{\sigma_1\sigma_2}^{\nu k_1 k_2} \right) \partial_\mu \partial_\nu,$$

et

$$\Upsilon_{\alpha_1 \alpha_2}^{k_1 k_2} = \left(\gamma_{j_1 j_2}^{\nu\sigma_1\sigma_2} \gamma_\sigma^{\mu k_1 k_2} - \gamma_{j_1 j_2}^{\mu\sigma_1\sigma_2} \gamma_{\sigma_1\sigma_2}^{\nu k_1 k_2} \right) \left(\partial_\mu \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2 \nu}^{j_1 j_2} - \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2 \mu}^{\beta_1 \beta_2} \Gamma_{\beta_1 \beta_2 \nu}^{j_1 j_2} \right) g_{k_1 k_2},$$

λ est une fonction propre de l'opérateur H_2 défini par

$$H_2 (g_{j_1 j_2} d^{j_1} \otimes d^{j_2}) = \left(\Delta_{j_1 j_2}^{k_1 k_2} + \Upsilon_{j_1 j_2}^{k_1 k_2} \right) g_{k_1 k_2} d^{j_1} \otimes d^{j_2},$$

on en déduit,

Remark 5. *L'équation relativiste d'Einstein n'est pas de même nature que les équations d'évolution ou d'état de rang 1 et 2.*

Pour étudier cette équation il faut procéder de façon différente. Soit

$$\zeta = (E, \pi, \Omega)$$

un fibré hermitien complexe ou réel. On munit ce fibré d'une connexion ∇ et d'une section de Dirac γ , une équation d'état de rang 1 associé à la paire (∇, γ) est de la forme

$$\gamma \otimes \nabla (s) = i\lambda s \text{ ou } \lambda s,$$

si ζ est un fibré hermitien complexe ou réel. Cette équation est l'équation d'état de Dirac et le tenseur de Poisson défini localement dans le "local frame" associé à une carte est

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{8} \text{Trace} (\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}) = \frac{1}{4} \text{Trace} (\gamma^\mu \gamma^\nu),$$

si $(\gamma^{\mu\nu})$ est inversible, sa matrice inverse est $(\gamma_{\mu\nu})$. Si le $(2, 0)$ -tenseur $\gamma_{\mu\nu}$ est un tenseur métrique vérifiant l'équation relativiste d'Einstein on dit que la section est une section de Dirac-Einstein. La métrique associée à γ est notée g_γ .

Remark 6. *L'équation de Dirac permet de définir la connexion et l'équation d'Einstein permet de définir la section de Dirac associée à cette connexion afin de décrire les équations d'état et d'évolution.*

Dans le cas des champs, si on prend une section relativiste

$$\gamma \in \Gamma (\text{Hom} (\wedge^1 \Omega \otimes T\Omega, T\Omega))$$

alors la métrique g_γ permet de définir sa connexion de Levi-Civita ∇_γ , l'équation d'état de Dirac est définie par

$$\gamma \otimes \nabla_\gamma (X) = \lambda X, \quad X \in \Gamma^\infty (\Omega) \tag{4.4}$$

où λ est une fonction propre de $\gamma \otimes \nabla_\gamma$ associée à l'opérateur $\gamma \otimes \nabla_\gamma$.

Remark 7. *Existe-t-il une section de Dirac γ pour laquelle l'équation 1.1 est vérifiée?*

On se place sur une carte de trivialisaton du fibré tangent, pour le "local frame" associé et le "local frame" dual, noté $\{\partial_\mu\}$ et $\{d^\nu\}$

$$\gamma^\nu (\partial_\mu) = \gamma (d^\nu \otimes \partial_\mu) = \gamma_{\beta}^{\nu\sigma} \partial_\sigma,$$

la matrice dans le "local frame" est encore noté γ^ν avec $(\gamma^\nu)_{\beta}^{\sigma} = \gamma_{\beta}^{\nu\sigma}$. Le tenseur de Poisson s'écrit

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \text{Trace} (\gamma^\mu \gamma^\nu) = \frac{1}{4} \gamma_{\beta}^{\mu\sigma} \gamma_{\sigma}^{\nu\beta},$$

si la matrice $(\gamma^{\mu\nu})$ est inversible, on la note $(\gamma_{\mu\nu})$, alors

$$\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \gamma_{\mu i} \gamma_{\nu j} \gamma_{\beta}^{j\sigma} \gamma_{\sigma}^{i\beta} = \frac{1}{4} \gamma_{\mu\sigma}^{\beta} \gamma_{\nu\beta}^{\sigma} = \frac{1}{4} \text{Trace} (\gamma_{\mu} \gamma_{\nu}),$$

avec $\gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} = \gamma_{\alpha\tau} \gamma_{\beta}^{\tau\sigma}$. L'équation d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \left(\frac{1}{2} R + \Lambda \right) \gamma_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu} = 0$$

s'écrit, en posant

$$R_{\mu\nu\beta}^{\alpha} = ([\nabla_{\beta}, \nabla_{\nu}]_{\mu}^{\alpha})$$

$$([\nabla_{\alpha}, \nabla_{\nu}]_{\mu}^{\alpha}) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} R + \Lambda \right) (\gamma_{\mu})_{\tau}^{\alpha} (\gamma_{\nu})_{\alpha}^{\tau} + \kappa T_{\mu\nu} = 0, \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (4.5)$$

ces équations lient la connexion ∇ de la métrique $\gamma_{\mu\nu}$ aux coefficients de γ . On définit les matrices $\mathcal{R}_{\nu\tau}$ et $\mathcal{T}_{\nu\tau}$ par

$$(\mathcal{R}_{\nu\tau})_{\alpha}^{\beta} = R_{\nu\alpha\tau}^{\beta} \text{ et } (\mathcal{T}_{\nu\tau})_{\alpha}^{\beta} = T_{\nu\alpha\tau}^{\beta},$$

où $T_{\nu\alpha\tau}^{\beta}$ est un tenseur de type (3,1) tel que le contracté est le tenseur d'énergie-impulsion

$$T_{\nu\alpha\tau}^{\alpha} = T_{\nu\tau} \quad (4.6)$$

alors l'équation 4.5 s'écrit

$$\text{Trace} \left(\mathcal{R}_{\nu\tau} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} R + \Lambda \right) \gamma_{\nu} \gamma_{\tau} - \kappa \mathcal{T}_{\nu\tau} \right) = 0, \quad (4.7)$$

pour toute matrice $\mathcal{T}_{\nu\tau}$ de trace égale au tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. On a la propriété suivante,

Proposition 1. *La trace de la matrice*

$$\mathcal{R}_{\nu\tau} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} R + \Lambda \right) \gamma_{\nu} \gamma_{\tau} - \kappa \mathcal{T}_{\nu\tau}$$

est nulle, où

$$(\mathcal{R}_{\nu\tau})_{\alpha}^{\beta} = R_{\nu\alpha\tau}^{\beta} \text{ et } (\mathcal{T}_{\nu\tau})_{\alpha}^{\beta} = T_{\nu\alpha\tau}^{\beta} \text{ avec } (\mathcal{T}_{\nu\tau})_{\alpha}^{\alpha} = T_{\nu\tau}.$$

Remark 8. *Si on change la matrice $\mathcal{T}_{\nu\tau}$ en gardant sa trace égale à $T_{\nu\tau}$, l'équation 4.7 reste vraie.*

5. LE PRINCIPE DE MOINDRE ACTION SUR LES FIBRÉS D'ÉTATS

Dans le chapitre précédent on a remarqué que la nature de l'équation relativiste d'Einstein ne pouvait être déduite des équations d'état et d'évolution. On est amené à définir la notion de moindre action sur un fibré d'état réel ou complexe

$$\zeta = (E, \pi, \Omega, \mathcal{H})$$

où ζ est muni d'un produit scalaire hermitien sur chaque fibre $E_{\omega}(\zeta)$, noté

$$\langle \bullet | \bullet \rangle_{\omega}$$

tel que pour toutes sections s et t de $\Gamma(\zeta)$ formé des sections telle que l'application

$$\omega \in \Omega \rightarrow \langle s(\omega) | t(\omega) \rangle_{\omega}$$

est mesurable comme application de Ω à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On note

$$\mathcal{L}^2(\zeta, \mu) = \left\{ s \in \Gamma(\zeta) : \int_{\Omega} \langle s(\omega) | s(\omega) \rangle_{\omega} \mu(\omega) < \infty \right\}$$

et si \mathcal{O} est le sous-espace vectoriel formé par les sections nulles μ presque partout, l'espace $L^2(\zeta, \mu)$ est

$$L^2(\zeta, \mu) = \frac{\mathcal{L}^2(\zeta, \mu)}{\mathcal{O}}.$$

Proposition 2. $L^2(\zeta, \mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit hermitien

$$\langle s | t \rangle = \int_{\Omega} \langle s(\omega) | t(\omega) \rangle \mu(\omega).$$

On introduit l'espace vectoriel des sections test, défini par

$$\mathcal{D}(\zeta) = \{s \in \Gamma(\zeta) : \text{supp}(s) \text{ est compact}\},$$

avec

$$\text{supp}(s) = \text{Adh}\{\omega : s(\omega) \neq 0_{\omega}\}.$$

On rappelle qu'une distribution D est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\zeta)$. L'ensemble des distributions sur ζ est noté $\mathcal{D}'(\zeta)$. Pour une section $s \in \Gamma(\zeta)$, localement intégrable, c'est-à-dire, une section s telle que pour tout compact K de Ω

$$\int_K \langle s(\omega) | s(\omega) \rangle \mu(\omega) < +\infty,$$

la distribution associée à la section s est,

$$D_s(t) = \langle D_s, t \rangle = \int_{\Omega} \langle s | t \rangle \mu. \quad (5.1)$$

Proposition 3. $D_s = 0$ si et seulement si $s = 0$ μ -presque partout.

On a une inclusion naturelle de $\frac{\Gamma_{\text{loc}}(\zeta)}{\mathcal{O}}$ dans $\mathcal{D}'(\zeta)$ où $\Gamma_{\text{loc}}(\zeta)$ est l'ensemble des sections localement intégrables. On a

$$L^2(\zeta, \mu) \subset \frac{\Gamma_{\text{loc}}(\zeta)}{\mathcal{O}},$$

et un plongement naturel de $L^2(\zeta, \mu)$ dans $\mathcal{D}'(\zeta)$. On identifiera $L^2(\zeta, \mu)$ et son image dans $\mathcal{D}'(\zeta)$.

Remark 9. Si 5.1 est vérifiée, on dit que la distribution est régulière et on identifie D_s à s . Dans cette situation, on note $\langle D_s, t \rangle = \langle s | t \rangle_{\Omega}$ et on a $D_{\lambda s} = \lambda D_s$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

On rappelle que pour toutes les connexions choisies, le produit scalaire hermitien $\langle \bullet | \bullet \rangle$ est parallèle à la connexion ∇ , c'est-à-dire, que pour tout champ X de Ω et pour toutes sections s et t de $\Gamma^{\infty}(\zeta)$

$$X \cdot \langle s | t \rangle = \langle \nabla_X s | t \rangle + \langle s | \nabla_X t \rangle,$$

où $X \cdot \langle s | t \rangle$ est la dérivée de Lie le long du champ X de la C^{∞} -application

$$\omega \rightarrow \langle s(\omega) | t(\omega) \rangle_{\omega}.$$

Theorem 4. Si le produit scalaire $\langle \bullet | \bullet \rangle$ est parallèle à la connexion ∇ alors

$$\langle \nabla_X s, t \rangle = - \langle s | \text{div}(X)t + \nabla_X t \rangle_{\mu},$$

pour toute section test t et toute section $s \in \Gamma^{\infty}(\zeta)$.

Proof. On peut consulter [2] pour une preuve. □

Ce théorème permet d'étendre la notion de dérivée covariante d'une section s localement intégrable quelconque, au sens des distributions le long du champ X , notée encore $\nabla_X s$ par

$$\nabla_X s = \nabla_X D_s,$$

où $\nabla_X s \in \mathcal{D}'(\zeta)$. On se donne une famille de champs de Ω

$$\mathcal{F} = \{\partial_j\}_{j \in \{1, \dots, q\}},$$

et pour tout k -uplets tels que

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k \text{ et } \nu = (\nu_1, \dots, \nu_k) \text{ avec } \nu_j \neq \nu_{j+1} \text{ et } \nu_j \in \{1, \dots, q\}$$

on définit les opérateurs

$$\nabla_\nu^\alpha = \nabla_{\nu_1}^{\alpha_1} \circ \dots \circ \nabla_{\nu_k}^{\alpha_k} \text{ où } \nabla_j^\alpha = \nabla_{\partial_j} \circ \dots \circ \nabla_{\partial_j},$$

la composition se fait sur α opérateurs égaux à ∇_{∂_j} , avec $\nabla_\nu^0 = Id$ et les dérivées covariantes sont prises au sens des distributions. L'espace de Sobolev $W_{\mathcal{F}}^{m,2}(\zeta)$ est le complété de

$$\{s \in L^2(\zeta, \mu) : \nabla_\nu^\alpha s \in L^2(\zeta, \mu), |\alpha| \leq m\}$$

pour la norme

$$\|s\|_{\mathcal{F}}^{m,2} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\nabla_\nu^\alpha s\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On définit une densité Lagrangienne de rang $n \geq 1$ par une application au moins de classe C^n

$$\mathcal{L} : L^2(\zeta, \mu)^n \rightarrow \mathbb{R},$$

si $n = \infty$ on pose

$$L^2(\zeta, \mu)^{(\infty)} = \left\{ (s_0, \dots, s_n, \dots) \in L^2(\zeta, \mu)^\infty : \sum_{n=0}^{\infty} \|s_n\|_2^2 < \infty \right\}.$$

On munit ζ d'une connexion ∇ pour laquelle le produit hermitien est parallèle à cette connexion, l'action le long du champ T est l'application

$$\mathcal{S}_T : W_{\{T\}}^{n,2}(\zeta) \rightarrow \mathbb{R}$$

avec

$$\mathcal{S}_T(s) = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\nabla_n^T s(\omega)) \mu(\omega), \quad (5.2)$$

et

$$\nabla^T s = (\nabla_T^0 s, \nabla_T^1 s, \nabla_T^2 s, \dots, \nabla_T^{n-1} s)$$

la dérivée covariante $\nabla_T s$ est définie au sens des distributions pour une section $s \in W_{\{T\}}^{n,2}(\zeta)$ et $\nabla_T^0 s = s$.

L'action est un opérateur sur l'espace vectoriel des sections de ζ , on note $\text{dom}(\mathcal{S}_T)$ son domaine de définition qui est formé des sections s telles que l'intégrale 5.2 est convergente. L'action de rang n est donnée par une densité

$$\mathcal{L} : L^2(\zeta, \mu)^n \rightarrow \mathbb{R},$$

et

$$\mathcal{S}_T(s) = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\nabla_n^T s(\omega)) \mu(\omega),$$

avec

$$\nabla_n^T s = (\nabla_T^0 s, \nabla_T^1 s, \nabla_T^2 s, \dots, \nabla_T^{n-1} s) \in L^2(\zeta, \mu)^n.$$

On peut définir l'action le long d'une famille \mathcal{F} de champs T_ν , en prenant pour action

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}}(s) = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\nabla_{\mathcal{F}} s(\omega)) \mu(\omega)$$

avec

$$\nabla_{\mathcal{F}} s = (\nabla_{\mathcal{F}}^0 s, \nabla_{\mathcal{F}}^{n_1} s, \nabla_{\mathcal{F}}^{n_2} s, \dots, \nabla_{\mathcal{F}}^{n_{k-1}} s) \in L^2(\zeta, \mu)^k,$$

$\{n_j\}$ est une suite croissante d'entiers telle que $n_0 = 0$ et les $\nabla_{\mathcal{F}}^{n_j}$ décrivent des opérateurs de la forme

$$\nabla_{T_{\nu_1}}^{p_1} \circ \cdots \circ \nabla_{T_{\nu_k}}^{p_k}, \quad n = p_1 + \cdots + p_k$$

avec $s = \nabla_{\mathcal{F}}^0 s$.

Comment décrire l'équation de Euler-Lagrange? On cherche l'opérateur \mathcal{L} qui minimise l'action sur $W_{\{T\}}^{n,2}(\zeta)$ muni du produit

$$\langle s | t \rangle = \int_{\Omega} \langle s(\omega) | t(\omega) \rangle_{\omega} \mu(\omega).$$

Les espaces

$$L^2(\zeta, \mu)^{(\infty)} \text{ et } L^2(\zeta, \mu)^n$$

sont des variétés de Banach, et pour ces structures \mathcal{L} est de classe C^∞ . On choisit une carte

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow U \subset \Omega$$

pour laquelle le "local frame", noté $\{\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ vérifie

$$T = \partial_0 = T\varphi^{-1} \left(\frac{d}{dt} \right),$$

le théorème de redressement d'un champ donne l'existence d'une telle carte. Si ζ est de dimension finie, on peut supposer que sur U , il existe une base de sections $\{s_0, \dots, s_m\}$ de

$$L_K^2(\zeta, \mu) = \{s \in L^2(\zeta, \mu) : \text{supp}(s) \subset K \subset U\}$$

où K est un compacte de Ω contenu dans U . On a pour des sections

$$s \in L_K^2(\zeta, \mu) \cap W_{\{T\}}^{n,2}(\zeta) \text{ avec } s = s^\mu e_\mu$$

en utilisant le théorème du redressement d'un champ T ,

$$\nabla_T s = \nabla_0 s = (\partial_0 s^\mu) e_\mu + s^\mu \Gamma_{0\mu}^\nu e_\nu = (\partial_0 s^\nu + s^\mu \Gamma_{0\mu}^\nu) e_\nu$$

$$\begin{aligned} \nabla_0^2 s &= \partial_0 (\partial_0 s^\nu + s^\mu \Gamma_{0\mu}^\nu) e_\nu + (\partial_0 s^\nu + s^\mu \Gamma_{0\mu}^\nu) \Gamma_{0\nu}^\tau e_\tau \\ &= (\partial_0 (\partial_0 s^\tau + s^\mu \Gamma_{0\mu}^\tau) + (\partial_0 s^\nu + s^\mu \Gamma_{0\mu}^\nu) \Gamma_{0\nu}^\tau) e_\tau, \end{aligned}$$

$\Gamma_{0\nu}^\tau$ représente les coefficients de Christoffel de la connexion ∇ donnée sur le fibré ζ . On pose,

$$\nabla_0^k s = \mathbf{S}^{k\nu} (s^0, \dots, s^m) e_\nu$$

on obtient la récurrence

$$\mathbf{S}^{(k+1)\nu} (s^0, \dots, s^m) = \partial_0 \mathbf{S}^{k\nu} (s^0, \dots, s^m) + \mathbf{S}^{k\mu} (s^0, \dots, s^m) \Gamma_{0\mu}^\nu$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{K} (s^0, \dots, s^m) \\ = \mathcal{L} \left(\mathbf{S}^{0\nu} (s^0, \dots, s^m) e_\nu, \mathbf{S}^{1\nu} (s^0, \dots, s^m) e_\nu, \dots, \mathbf{S}^{(n-1)\nu} (s^0, \dots, s^m) e_\nu \right) \end{aligned}$$

\mathcal{K} est une fonction définie sur $V \subset \mathbb{R}^{\dim(\zeta)}$ à valeurs dans \mathbb{R} ,

$$V = (s^0, \dots, s^m)^{-1} (U).$$

On cherche les densités de Lagrange \mathcal{L} pour lesquelles la matrice Hessienne de \mathcal{K} , notée $\text{Hess } \mathcal{K}$, est définie positive sur V . On peut se ramener à une base locale, notée encore $\{e_\nu\}$ pour laquelle

$$\frac{\partial^2 \mathcal{K}(s^0, \dots, s^m)}{\partial s^i \partial s^j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \lambda_i^2 & \text{si } i = j \end{cases},$$

où λ_i est une C^∞ -application sur U , non nulle. On en déduit que, si on pose

$$\mathbf{S}^\alpha = \mathbf{S}^{\alpha\nu}(s^0, \dots, s^m) e_\nu$$

on a

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{S}^0, \mathbf{S}^1, \dots, \mathbf{S}^{n-1})}{\partial s^i \partial s^j} \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{S}^0, \mathbf{S}^1, \dots, \mathbf{S}^{n-1})}{\partial \mathbf{S}^\beta \partial \mathbf{S}^\alpha} \frac{\partial \mathbf{S}^\beta}{\partial s^i} \frac{\partial \mathbf{S}^\alpha}{\partial s^j} + \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{S}^0, \mathbf{S}^1, \dots, \mathbf{S}^{n-1})}{\partial \mathbf{S}^\alpha} \frac{\partial^2 \mathbf{S}^\alpha}{\partial s^i \partial s^j}, \end{aligned}$$

et

Theorem 5. *Il existe une base locale $\{e_\nu\}$ et une famille de C^∞ -applications $\{\lambda_\nu\}$, non nulles sur U , pour lesquelles la densité Lagrangienne \mathcal{L} vérifie le principe de moindre action si*

$$\mathbf{S}^\alpha = \mathbf{S}^{\alpha\nu}(s^0, \dots, s^m) e_\nu$$

alors

$$\mathbf{S}^{(k+1)\nu}(s^0, \dots, s^m) = \partial_0 \mathbf{S}^{k\nu}(s^0, \dots, s^m) + \mathbf{S}^{k\mu}(s^0, \dots, s^m) \Gamma_{0\mu}^\nu,$$

$\Gamma_{0\mu}^\nu$ sont les coefficients de Christoffel de la connexion ∇ dans la base $\{e_\nu\}$ et

$$\sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{S}^0, \mathbf{S}^1, \dots, \mathbf{S}^{n-1})}{\partial \mathbf{S}^\beta \partial \mathbf{S}^\alpha} \frac{\partial \mathbf{S}^\beta}{\partial s^i} \frac{\partial \mathbf{S}^\alpha}{\partial s^j} + \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{S}^0, \mathbf{S}^1, \dots, \mathbf{S}^{n-1})}{\partial \mathbf{S}^\alpha} \frac{\partial^2 \mathbf{S}^\alpha}{\partial s^i \partial s^j} = \lambda_i \lambda_j \delta_{ij}. \quad (5.3)$$

Remark 10.

$$\mathbf{S}^{\alpha+1} = \partial_0 \mathbf{S}^\alpha + \Gamma_0(\mathbf{S}^\alpha), \quad \Gamma_0(\mathbf{S}^\alpha) = \mathbf{S}^{\alpha\mu}(s^0, \dots, s^m) \Gamma_{0\mu}^\nu e_\nu$$

$$\Gamma_0(\mathbf{S}^\alpha) = \Gamma_0^\nu(\mathbf{S}^\alpha) e_\nu$$

où Γ_0^ν est la forme différentielle

$$\Gamma_0^\nu = \Gamma_{0\mu}^\nu d^\mu,$$

pour $\mathbf{S}^0 = \mathbf{S}$ alors

$$\mathbf{S}^1 = \partial_0 \mathbf{S} + \Gamma_0(\mathbf{S})$$

et

$$\mathbf{S}^2 = \partial_0^2 \mathbf{S} + \{\partial_0, \Gamma_0\} \mathbf{S} + \Gamma_0^2 \mathbf{S}.$$

La connexion d'Einstein sur le fibré des $(2,0)$ -tenseurs sur Ω , d'espace total $\Lambda^2(\Omega)$, est une connexion ∇ pour laquelle la C^∞ -application définie pour au moins un champ T , vérifie

$$\mathcal{L} \circ \nabla_2^T(g) = K \sqrt{-\det g} R, \quad (5.4)$$

où R est la courbure scalaire de g , $\det g$ est le déterminant de la métrique Lorentzienne g et K est une constante.

Remark 11. *On est amené à faire une hypothèse plus forte si on veut calculer la connexion d'Einstein, on va supposer que pour tout champ T , l'équation 5.4 est vraie.*

Si le champ T est un champ chronologique de g , on dit que g est munit d'une orientation temporelle. L'équation 5.4 s'écrit

$$\mathcal{L}(g, \nabla_T(g), \nabla_T^2(g)) = K \sqrt{-\det g} R$$

$$\mathcal{L}(g, \partial_T g + \Gamma_0(g), \partial_T^2 g + \{\partial_T, \Gamma_T\}g + \Gamma_T^2(g)) = K \sqrt{-\det g} R$$

l'opérateur ∂_T est défini par

$$\partial_T s = \partial_T (s_{\mu\nu}) d^{\mu\nu}$$

et Γ_T est défini par

$$\Gamma_T(s) = s_{\mu\nu} \nabla_T (d^\mu \otimes d^\nu). \quad (5.5)$$

Si on pose

$$\mathcal{K}(g) = \mathcal{L}(g, \partial_T g + \Gamma_0(g), \partial_T^2 g + \{\partial_T, \Gamma_T\}g + \Gamma_T^2(g))$$

la matrice Hessienne de \mathcal{K} dans la base

$$\{d^\mu \otimes d^\nu\}$$

notée

$$\text{Hess}(\mathcal{K})$$

est définie positive. On regarde l'équation 5.5, on admet que pour tout champ T ,

$$\mathcal{L}(g, \nabla_T(g), \nabla_T^2(g))$$

minimalise l'action, les coefficients de Christoffel de la connexion ∇ dans le "local frame" sont donnés par

$$\nabla_{\partial_\tau} (d^\mu \otimes d^\nu) = \Gamma_{\tau\alpha\beta}^{\mu\nu} d^\alpha \otimes d^\beta,$$

si la connexion ∇ est définie par une connexion initiale sur Ω alors en utilisant 4.1

$$\Gamma_{\beta\gamma\nu}^{\sigma\tau} = \Gamma_{\sigma\beta}^\gamma \delta_{\tau\nu} + \Gamma_{\tau\beta}^\nu \delta_{\sigma\gamma},$$

$\Gamma_{\sigma\beta}^\mu$ représentent les symboles de la connexion initiale ∇_{initial} .

Remark 12. *La connexion de Dirac, notée ∇_{dirac} , est une connexion définie sur le fibré tangent $T\Omega \otimes \mathbb{C}$. On peut faire l'hypothèse suivante, si le complexifié de la connexion ∇ définie sur le fibré d'espace total $\Lambda^2\Omega$ est définie à partir d'une connexion initiale ∇_{initial} qui est une connexion définie sur le fibré tangent complexifié d'espace total $T\Omega \otimes \mathbb{C}$ alors*

$$\nabla_{\text{dirac}} = \nabla_{\text{initial}}.$$

Cette hypothèse, si elle s'avère exacte permet, en "un certain sens", de relier les théories physiques quantique et relativiste. Pour formuler cette hypothèse de façon imagée, on peut dire que le complexifié de la connexion d'Einstein est le carré tensoriel de la connexion duale de Dirac. Symboliquement,

$$\nabla_{\text{einstein}} \oplus i \nabla_{\text{einstein}} = \nabla_{\text{dirac}}^{*\otimes 2}.$$

Une fois que l'on a fait cette hypothèse, on a des sections de Dirac $\{\gamma^\nu\}$ associées à l'équation de Dirac 3.1. On peut étendre ces sections de Dirac sur $\Lambda^2\Omega$, elles vérifient les équations 4.2 et sont de la forme

$$[\gamma^d] = (\gamma^d)^* \otimes (\gamma^d)^*,$$

$[\gamma]$ représente la section de Dirac étendue aux $(2,0)$ -tenseurs de la section de Dirac γ . On a

$$\Gamma_{\beta\gamma\nu}^{\sigma\tau} = \Gamma_{\sigma\beta}^\gamma \delta_{\tau\nu} + \Gamma_{\tau\beta}^\nu \delta_{\sigma\gamma},$$

et

$$\gamma_{\rho\sigma}^{\mu\nu\tau} = \gamma_\rho^{\mu\nu} \gamma_\sigma^{\mu\tau}$$

le Hamiltonien de rang 2 s'écrit

$$H_2 (g_{j_1 j_2} d^{j_1} \otimes d^{j_2}) = \left(\Delta_{j_1 j_2}^{k_1 k_2} + \Upsilon_{j_1 j_2}^{k_1 k_2} \right) g_{k_1 k_2} d^{j_1} \otimes d^{j_2}$$

où

$$\begin{aligned} \Delta_{j_1 j_2}^{k_1 k_2} &= (\gamma_{j_1 j_2}^{\nu\sigma_1\sigma_2} \gamma_{\sigma_1\sigma_2}^{\mu k_1 k_2} - \gamma_{j_1 j_2}^{\mu\sigma_1\sigma_2} \gamma_{\sigma_1\sigma_2}^{\nu k_1 k_2}) \partial_\mu \partial_\nu \\ &= (\gamma_{j_1}^{\nu\sigma_1} \gamma_{j_2}^{\nu\sigma_2} \gamma_{\sigma_1}^{\mu k_1} \gamma_{\sigma_2}^{\mu k_2} - \gamma_{j_1}^{\mu\sigma_1} \gamma_{j_2}^{\mu\sigma_2} \gamma_{\sigma_1}^{\nu k_1} \gamma_{\sigma_2}^{\nu k_2}) \partial_\mu \partial_\nu \\ &= ([\gamma_{j_1}^{\nu\sigma_1} \gamma_{\sigma_1}^{\mu k_1}] [\gamma_{j_2}^{\nu\sigma_2} \gamma_{\sigma_2}^{\mu k_2}] - [\gamma_{j_1}^{\mu\sigma_1} \gamma_{\sigma_1}^{\nu k_1}] [\gamma_{j_2}^{\mu\sigma_2} \gamma_{\sigma_2}^{\nu k_2}]) \partial_\mu \partial_\nu \\ &= \left((\gamma^\nu \gamma^\mu)_{j_1}^{k_1} (\gamma^\nu \gamma^\mu)_{j_2}^{k_2} - (\gamma^\mu \gamma^\nu)_{j_1}^{k_1} (\gamma^\mu \gamma^\nu)_{j_2}^{k_2} \right) \partial_\mu \partial_\nu \\ &= \begin{vmatrix} (\gamma^\nu \gamma^\mu)_{j_1}^{k_1} & (\gamma^\mu \gamma^\nu)_{j_2}^{k_2} \\ (\gamma^\mu \gamma^\nu)_{j_1}^{k_1} & (\gamma^\nu \gamma^\mu)_{j_2}^{k_2} \end{vmatrix} \partial_\mu \partial_\nu \\ &= (\gamma^\nu)_{\beta}^{\alpha} = \gamma_{\beta}^{\nu\alpha} \end{aligned}$$

et

$$\Upsilon_{\alpha_1 \alpha_2}^{k_1 k_2} = (\gamma_{j_1}^{\nu\sigma_1} \gamma_{j_2}^{\nu\sigma_2} \gamma_{\sigma_1}^{\mu k_1} \gamma_{\sigma_2}^{\mu k_2} - \gamma_{j_1}^{\mu\sigma_1} \gamma_{j_2}^{\mu\sigma_2} \gamma_{\sigma_1}^{\nu k_1} \gamma_{\sigma_2}^{\nu k_2}) \left(\partial_\mu \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2 \nu}^{j_1 j_2} - \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2 \mu}^{\beta_1 \beta_2} \Gamma_{\beta_1 \beta_2 \nu}^{j_1 j_2} \right),$$

avec

$$\Gamma_{\alpha_1 \alpha_2 \mu}^{\beta_1 \beta_2} \Gamma_{\beta_1 \beta_2 \nu}^{j_1 j_2} = \left(\Gamma_{\alpha_1 \beta_1}^{\alpha_2} \delta_{\beta_2 \mu} + \Gamma_{\alpha_1 \beta_2}^{\alpha_2} \delta_{\beta_1 \alpha_2} \right) \left(\Gamma_{\beta_1 j_1}^{\beta_2} \delta_{j_2 \nu} + \Gamma_{\beta_1 j_2}^{\beta_2} \delta_{j_1 \beta_2} \right),$$

$$\partial_\mu \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2 \nu}^{j_1 j_2} = \delta_{j_2 \nu} \partial_\mu \Gamma_{\alpha_1 j_1}^{\alpha_2} + \delta_{j_1 \alpha_2} \partial_\mu \Gamma_{\alpha_1 j_2}^{\nu},$$

$$\Upsilon_{\alpha_1 \alpha_2}^{k_1 k_2} = \begin{vmatrix} (\gamma^\nu \gamma^\mu)_{j_1}^{k_1} & (\gamma^\mu \gamma^\nu)_{j_2}^{k_2} \\ (\gamma^\mu \gamma^\nu)_{j_1}^{k_1} & (\gamma^\nu \gamma^\mu)_{j_2}^{k_2} \end{vmatrix} \left(- \left(\Gamma_{\alpha_1 \beta_1}^{\alpha_2} \delta_{\beta_2 \mu} + \Gamma_{\alpha_1 \beta_2}^{\alpha_2} \delta_{\beta_1 \alpha_2} \right) \left(\Gamma_{\beta_1 j_1}^{\beta_2} \delta_{j_2 \nu} + \Gamma_{\beta_1 j_2}^{\beta_2} \delta_{j_1 \beta_2} \right) \right)$$

et

$$\begin{aligned} &H_2 (g_{j_1 j_2} d^{j_1} \otimes d^{j_2}) \\ &= \begin{vmatrix} (\gamma^\nu \gamma^\mu)_{j_1}^{k_1} & (\gamma^\mu \gamma^\nu)_{j_2}^{k_2} \\ (\gamma^\mu \gamma^\nu)_{j_1}^{k_1} & (\gamma^\nu \gamma^\mu)_{j_2}^{k_2} \end{vmatrix} \\ &\times \left(- \left(\Gamma_{\alpha_1 \beta_1}^{\alpha_2} \delta_{\beta_2 \mu} + \Gamma_{\alpha_1 \beta_2}^{\alpha_2} \delta_{\beta_1 \alpha_2} \right) \left(\Gamma_{\beta_1 j_1}^{\beta_2} \delta_{j_2 \nu} + \Gamma_{\beta_1 j_2}^{\beta_2} \delta_{j_1 \beta_2} \right) \right) g_{k_1 k_2} d^{j_1} \otimes d^{j_2} \\ &= H_{j_1 j_2}^{k_1 k_2} g_{k_1 k_2} d^{j_1} \otimes d^{j_2}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Le hamiltonien de rang 1 s'écrit

$$H_1 (g_{\sigma\rho} d^\sigma \otimes d^\rho) = \gamma_\rho^{\mu\nu} \gamma_\sigma^{\mu\tau} (\partial_\mu g_{\nu\tau} + g_{\alpha\tau} \Gamma_{\mu\alpha}^\nu + g_{\nu\beta} \Gamma_{\mu\beta}^\tau) d^\sigma \otimes d^\rho. \quad (5.7)$$

On peut définir à l'aide de ces Hamiltoniens des équations d'état et d'évolution de rang 1 et 2. Peut-on écrire l'équation relativiste d'Einstein avec les opérateurs H_1 et H_2 ? Je n'ai pas de réponse à cette question....

La courbure scalaire R d'une métrique Lorentzienne g est de la forme

$$R = \frac{\mathcal{L}(g, \partial_T g + \Gamma_T(g), \partial_T^2 g + \{\partial_T, \Gamma_T\}g + \Gamma_T^2(g))}{K \sqrt{-\det g}}, K = -\frac{c^3}{4\pi G} \quad (5.8)$$

où \mathcal{L} est une densité Lagrangienne de rang 2 sur le fibré des $(2, 0)$ -tenseurs et T est un champ local sur $U \subset \Omega$. On en déduit que pour une courbure scalaire fixée R localement sur U , l'application de $\Gamma^\infty(U) \times \mathcal{M}_{\text{Lorentz}}$ à valeurs dans $C^\infty(U, \mathbb{R})$

$$(T, g) \rightarrow \mathcal{R}(T, g) = \frac{\mathcal{L}(g, \partial_T g + \Gamma_T(g), \partial_T^2 g + \{\partial_T, \Gamma_T\}g + \Gamma_T^2(g))}{K \sqrt{-\det g}},$$

où $\mathcal{M}_{\text{Lorentz}}$ est l'ensemble des métriques de Lorentz, est constante comme fonction des champs, pour la métrique de Lorentz g fixée qui lui est associée. Les métriques de Lorentz qui vérifie le principe de moindre action, sont les métriques g telles que

$$\frac{\partial \mathcal{R}(T, g)}{\partial T} = 0.$$

Cela permet de définir les métriques de Lorentz g , de courbure scalaire R fixée dont la connexion d'Einstein est le carré tensoriel du dual de la connexion de Dirac. Si on veut que la courbure scalaire R soit constante, on est ramené au problème de Yamabe [4].

6. CONCLUSION

On part d'une idée très simple, sur un fibré réel ou complexe de dimension finie, muni d'un produit scalaire C^∞ , par exemple les fibrés d'espace total $\Omega \times \mathbb{C}$, $T\Omega$ et $\Lambda^2\Omega$, peut-on calculer les connexions et les sections de Dirac permettant d'écrire les équations de Schrödinger, de Dirac et l'équation relativiste d'Einstein comme un équation d'évolution ou d'état de rang 1 ou 2. Sur le fibré $\Omega \times \mathbb{C}$, l'équation de Schrödinger est une équation d'évolution de rang 2. Sur le fibré tangent $T\Omega$, l'équation de Dirac est une équation d'état de rang 1. Comment décrire l'équation relativiste d'Einstein?

Cette équation ne peut être décrite comme les deux équations quantiques, pour construire une connexion d'Einstein on est amené à définir un principe de moindre le long d'un champ sur les fibrés. La relation naturelle est donnée par l'équation

$$\nabla_{\text{einstein}} \oplus i\nabla_{\text{einstein}} = \nabla_{\text{dirac}}^{*\otimes 2}.$$

Cette équation permet de définir à partir d'une connexion de Dirac, une connexion d'Einstein pour laquelle le principe de moindre action relativiste est vrai. Les sections de Dirac γ associées à la connexion ∇_{dirac} s'étendent en des sections de Dirac $[\gamma]$ sur le fibré des $(2, 0)$ -tenseurs d'espace total $\Lambda^2\Omega$, les hamiltoniens de rang 1 et 2 définis par

$$H_1 = [\gamma] \otimes \nabla_{\text{dirac}}^{*\otimes 2} \text{ et } H_2 = [\gamma] \otimes R^{\nabla_{\text{dirac}}^{*\otimes 2}},$$

permettent de définir des équations d'évolution et d'états de rang 1 et 2. Peut-on décrire l'équation 1.1 avec les deux opérateurs H_1 et H_2 ?

REFERENCES

- [1] Dloussky G. "Cours de géométrie complexe" www.latp.univ-mrs.fr, 2008.
- [2] Jonot J.L."Sur la quantification des fibrés des états de l'univers Ω " hal.archives-ouvertes.fr/hal-01114487v2.
- [3] Kobayashi S. and Nomizu K. "Foundations of Differential Geometry", vol. 1 & 2, Wiley-Interscience, 1996.
- [4] Lee J.M and Parker T.H."The Yamabe Problem", Bulletin of A.M.S Volume 17,Number 1, 1987.
- [5] Tumpach A.B."Varieties kähleriennes et hyperkähleriennes de dimension infinie" Thèse HAL [archives-ouvertes](http://archives-ouvertes.fr), 2006.
- [6] Voisin C."Géométrie différentielle" www.math.polytechnique.fr/~voisin/Articlesweb/poly2013chap123.
E-mail address: jean-louis.jonot@ac-versailles.fr