



**HAL**  
open science

## Décrire l'activité géométrique des élèves : instruments, regards, langage

Thomas Barrier, Christophe Hache, Anne-Cécile Mathé, Stéphanie Montigny

### ► To cite this version:

Thomas Barrier, Christophe Hache, Anne-Cécile Mathé, Stéphanie Montigny. Décrire l'activité géométrique des élèves : instruments, regards, langage. COPIRELEM, 2013, Nantes, France. hal-01147477

**HAL Id: hal-01147477**

**<https://hal.science/hal-01147477>**

Submitted on 11 Nov 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# DÉCRIRE L'ACTIVITÉ GÉOMÉTRIQUE DES ÉLÈVES : INSTRUMENTS □ REGARDS □ LANGAGE

**Thomas BARRIER**

IUFM Nord Pas de Calais, Université d'Artois

LML

thomas.barrier@lille.iufm.fr

**Christophe HACHE**

Université Paris Diderot

IREM de Paris, LDAR

christophe.hache@irem.univ-paris-diderot.fr

**Anne-Cécile MATHÉ**

IUFM Nord Pas de Calais, Université d'Artois

LML

acecile.mathe@lille.iufm.fr

**Stéphanie MONTIGNY**

IUFM Nord Pas de Calais, Université d'Artois

stephanie.montigny@lille.iufm.fr

## Résumé

Cet atelier est issu d'un travail collectif réunissant des formatrices et formateurs de l'IUFM Nord Pas de Calais, dont une professeure des écoles à temps partagé, et des enseignants-chercheurs en didactique des mathématiques. Il prend appui sur une expérimentation de plusieurs mois dans une classe de CM2, autour de questions liées à l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie au cycle 3.

Dans le prolongement de travaux menés par un groupe de recherche lillois, dirigé par Marie-Jeanne Perrin depuis plus de dix ans (Duval, Godin & Perrin-Glorian (2005), Duval & Godin (2005)), notre travail vise dans un premier temps à interroger la possibilité d'insertion de problèmes de *restauration de figures* (Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq, 2013) au sein de pratiques déjà existantes.

Par ailleurs, notre travail expérimental vise également à mieux comprendre la manière dont il est possible de saisir et faire évoluer l'activité géométrique des élèves. Les situations de restauration de figures, comme beaucoup de situations proposées en classe de géométrie, reposent sur une réflexion sur la façon dont certaines contraintes sur l'action matérielle des élèves sont susceptibles de faire évoluer les manières de voir les figures géométriques (Duval & al. 2005, Perrin-Glorian & al. 2013)). De façon complémentaire, en appui sur l'observation de classes, nous proposons également dans cet atelier d'interroger la dimension langagière de l'activité géométrique des élèves en situation. Quels liens les pratiques langagières autour des actions matérielles entretiennent-elles avec le regard porté sur les figures, avec les techniques instrumentées de restauration ? Quel rôle les interactions verbales qui se développent dans la classe jouent-elles dans l'évolution de l'activité géométrique des élèves ? Notre positionnement théorique inclut ainsi également une attention particulière à la dimension langagière des pratiques géométriques (Barrier, Hache & Mathé, à paraître, Hache, 2013).

Le travail sur lequel s'appuie cet atelier est à la croisée de différentes recherches. Il est d'une part fortement influencé par les travaux du groupe lillois autour de l'enseignement de la géométrie à l'école,

dirigé par Marie-Jeanne Perrin depuis plus de dix ans<sup>1</sup> (Duval, Godin & Perrin-Glorian (2005), Duval & Godin (2005)), groupe auquel participe Anne-Cécile Mathé depuis six ans maintenant. Une partie des travaux de ce groupe a fait l'objet d'une conférence lors de ce colloque de la COPIRELEM, vous en trouverez le texte dans ces actes. L'expérimentation présentée constitue également un objet de travail du projet LEMME<sup>2</sup>, réuni autour de questions liées aux pratiques langagières en classe de mathématiques. Enfin, ce travail est né d'une rencontre entre collègues de l'IUFM Nord Pas de Calais et, en particulier, d'une collaboration menée dans la classe de CM2 de Stéphanie Montigny, formatrice à l'IUFM Nord Pas de Calais et professeure des écoles à temps partagé. De façon relativement succincte, nous proposons dans une introduction d'explicitier les points de départ et ancrages théoriques de notre travail, fruits de l'articulation des positionnements de ces différents groupes de travail. Nous précisons également les questions que nous avons souhaité explorer à travers cet atelier et les supports proposés. La suite de ce texte est consacrée au compte-rendu des éléments d'analyse dégagés durant l'atelier à propos de deux premières séances d'une progression autour de la notion de droites perpendiculaires, expérimentées en classe.

---

## I. INTRODUCTION

---

### 1 Points de départ et questions initiales

#### 1.1 Regards sur les figures et problèmes de restauration

En premier lieu, notre approche de l'enseignement et de l'apprentissage de la géométrie au cycle 3 repose sur l'idée selon laquelle, spontanément, les élèves entrent dans les problèmes géométriques en adoptant une vision des figures en termes de surfaces – juxtapositions et /ou superpositions de surfaces – comme nous le faisons en dehors du champ des mathématiques. Or, même si cette vision est importante pour l'appréhension globale des figures (lors de la mise en place d'une preuve par exemple), la plupart des concepts géométriques visés au cycle 3 puis au collège reposent sur des relations entre des lignes et /ou des points (droites perpendiculaires, parallèles, égalités de longueur de segments, milieu d'un segment, etc). Percevoir ces concepts et les utiliser dans les diverses tâches géométriques nécessitent donc la capacité à faire émerger des relations entre des sous-éléments des figures, de dimensions 2, 1 voire 0 (*déconstruction dimensionnelle*, Duval & Godin (2005)).

Depuis plus de dix ans, les travaux du groupe de Lille<sup>3</sup> se sont centrés sur l'élaboration de situations pour la classe visant à accompagner les élèves dans cette mobilité du regard sur les figures et la construction d'un regard géométrique mobilisant des propriétés et relations diverses, enjeux d'apprentissage à l'école (perpendicularité, alignement, symétrie axiale, etc). La reproduction de figures est un type de tâches central dans les propositions du groupe de Lille. Le travail de ce groupe repose aussi sur l'idée de qu'il existe un lien direct entre les instruments utilisés pour reproduire une figure et le regard que l'on porte sur cette figure. On peut par exemple utiliser des instruments 2D permettant de tracer ou reproduire des surfaces (gabarits de polygones divers, gabarits d'angles, etc) ou des instruments 1D permettant de tracer des lignes (la règle par exemple). Il existe aussi bien évidemment un lien direct entre les instruments utilisés et les propriétés géométriques identifiées sur la figure et mobilisées pour la tâche de reproduction. L'idée consiste ainsi à faire de l'usage des instruments une variable clé permettant de favoriser l'enrichissement du regard des élèves sur les figures et la

---

<sup>1</sup> Participant ou ont participé à ce groupe Marie-Jeanne Perrin, Marc Godin, Raymond Duval, Jean-Robert Delplace, Claire Godeuil, Bachir Keskessa, Régis Leclercq, Christine Mangiante, Anne-Cécile Mathé, Odile Verbaere.

<sup>2</sup> Langage dans l'Enseignement et l'apprentissage des Mathématiques. Participant à ce groupe Thomas Barrier, Caroline Bulf, Aurélie Chesnais, Christophe Hache, Anne-Cécile Mathé et Joris Mithalal

<sup>3</sup> Pour plus de détails concernant ces travaux, nous vous renvoyons à, Duval, Godin & Perrin-Glorian (2005), Duval et Godin (2006), Offre, B., Perrin-Glorian, M.J. & Verbaere, O. (2007), Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq (2013) ou encore au texte de Perrin-Glorian et Mangiante figurant dans ces actes.

mobilisation de propriétés géométriques visées. Par ailleurs, ce groupe fait l'hypothèse que l'approche des figures en utilisant des grandeurs sans mesure facilite l'entrée des élèves dans une problématique géométrique. Les travaux du groupe privilégient ainsi l'utilisation de règle dite « informable », bandes de papier sur lesquelles on peut inscrire des marques pour reporter des longueurs.

Cette réflexion a donné lieu à la conception de problèmes de reproduction de figure (ou de restauration de figures, c'est-à-dire de reproduction d'une figure modèle à partir d'une amorce de la figure, à la même échelle ou non) en laissant aux élèves un large choix d'instruments mais en intégrant un système de coûts à l'usage de ces instruments. Pour chaque problème de restauration, ce système de coûts est choisi au regard des objectifs d'apprentissage, en fonction des relations entre sous-éléments de la figure que l'on souhaite que les élèves utilisent comme outils pour la restauration.

Dans le prolongement de ces travaux, l'objectif initial de l'expérimentation, support de cet atelier, consistait à explorer les possibilités d'insertion de tels problèmes dans des progressions aux objectifs divers dans une classe de CM2.

### 1.2 Et les pratiques langagières en classe de géométrie ?

Les recherches évoquées ci-dessus s'appuient sur une réflexion concernant les liens qu'entretiennent les actions matérielles (problèmes de restauration, usage des instruments...) et la manière de voir et de penser les figures géométriques. Elles permettent la prise de conscience de la mobilité du regard sur les figures comme condition nécessaire à l'entrée des élèves dans la géométrie et ouvrent de nouvelles perspectives pour penser l'enseignement de la géométrie dans une continuité, du cycle 1 au collège. Cependant, la question de la description de l'activité géométrique des élèves et des conditions susceptibles de la faire évoluer est encore loin d'être résolue. Amener les élèves à modifier leurs manières d'agir suffit-il à la construction des connaissances géométriques ? Comment appréhender la complexité de l'activité géométrique des élèves ? Quels sont les moteurs de la construction de connaissances géométriques lors de la mise en œuvre de situations de reproduction ou de restauration de figures ?

Nos diverses expérimentations en classe, les diverses recherches dans lesquelles nous nous sommes impliqués (Barrier, Hache & Mathé, à paraître ; Bulf, Mathé & Mithalal, 2011; Mathé, 2012 ; Hache, 2013) nous ont amenés à porter une attention particulière au fait qu'il se passe des choses fondamentales, d'un point de vue cognitif, au sein des interactions langagières orales qui se développent autour de la résolution matérielle des problèmes proposés en classe de géométrie. Toutefois, nous ne disposons que de peu d'outils pour comprendre finement ce qui se joue au sein de ces échanges verbaux. La dimension langagière de l'activité géométrique n'est encore qu'insuffisamment prise en compte lors de l'analyse de ces situations, rarement anticipée dans des analyses *a priori* et le plus souvent ignorée en formation.

Initié depuis trois ans maintenant, le projet LEMME tente d'avancer dans l'exploration de la prise en compte de l'activité et des pratiques langagières en classe de mathématiques. Notre approche consiste à penser l'activité géométrique des élèves, à l'instar de toute activité humaine, comme relevant, de façon indissociable, d'une dimension matérielle (*l'agir*) et d'une dimension langagière (*le parler*), inscrites dans une certaine façon de *penser* le monde, un *agir-penser-parler* au sens de Jaubert, Rebière, Bernié (2003). Le langage verbal est donc pour nous partie prenante de l'activité géométrique des élèves, au même titre que leurs actions matérielles, plus classiquement analysées en didactique des mathématiques. De manière complémentaire aux travaux engagés dans le groupe lillois, nous appréhendons le processus d'apprentissage en classe de géométrie comme une *acculturation* vers une pratique géométrique spécifique, admettant une dimension matérielle mais aussi une dimension langagière. Pour nous, cette acculturation s'opère à la fois par interactions des élèves avec une situation problématique mais également au sein des interactions sociales au sein de la classe. Dans ce cadre, lors des analyses *a priori* et *a posteriori* de situations d'apprentissage, nous nous efforçons d'interroger les liens qu'entretiennent activités matérielles et activités langagières des élèves, dans une situation donnée. Nous souhaitons également explorer la manière dont ces deux dimensions de l'activité géométrique des élèves interagissent pour évoluer vers des pratiques géométriques idoines.

L'expérimentation présentée dans cet atelier avait également pour objectif d'avancer dans l'élaboration d'outils permettant de saisir plus finement l'activité géométrique des élèves et les conditions de son évolution. Quels liens les interactions langagières verbales qui se développent autour de la résolution matérielle des problèmes proposés entretiennent-elles avec le regard porté par les élèves sur les figures, avec les techniques instrumentées de restauration ? Comment contribuent-elles à l'émergence des objets géométriques ?

## 2 Présentation globale de l'expérimentation, travail et supports proposés dans cet atelier

Durant les quelques mois d'expérimentation dans la classe de CM2 de Stéphanie Montigny, notre travail a consisté en l'élaboration collective puis la mise en œuvre de séances et de séquences de classe autour de notion diverses : l'alignement, les droites perpendiculaires, les quadrilatères et triangles particuliers à partir de l'étude de polyèdres, les programmes de construction et les caractérisations du cercle. Toutes ces séances ont été observées et filmées. Nos questions de recherche portant essentiellement sur l'activité des élèves, nous nous sommes en particulier efforcés de recueillir le maximum de traces matérielles et vidéos de productions d'élèves au cours de chaque phase de travail, n'hésitant pas parfois à demander à certains élèves d'explicitier la procédure qu'ils venaient de mettre en place. Le corpus ainsi obtenu est constitué de deux films par séance ainsi que des enregistrements audio de l'intégralité du discours de l'enseignante, par micro et dictaphone.

Pour cet atelier, nous avons choisi pour support de travail les deux premières séances d'une séquence de quatre séances portant sur la notion de droites perpendiculaires. D'après les programmes de 2008 (Bulletin Officiel n°3 du 19 juin 2008), la notion d'angle droit est abordée en CE1. Les élèves y apprennent à « décrire, reproduire, tracer un carré, un rectangle, un triangle rectangle ; utiliser des instruments pour réaliser des tracés : règle, équerre ou gabarit de l'angle droit ; percevoir et reconnaître quelques relations et propriétés géométriques : alignement, angle droit, axe de symétrie, égalité de longueurs. » La notion de droites perpendiculaires apparaît dans les programmes du CM1 : « utiliser en situation le vocabulaire géométrique : points alignés, droite, droites perpendiculaires, droites parallèles, segment, milieu, angle, axe de symétrie, centre d'un cercle, rayon, diamètre. » Rien n'est formulé dans les programmes du CM2 à propos des notions de droites perpendiculaires ou d'angle droit. Les enjeux d'apprentissage formulés par ces programmes autour de la notion de droites perpendiculaires au cycle 3 ne sont donc pas très clairs. Le concept de droites perpendiculaires nous semblant toutefois constituer un enjeu d'apprentissage important dans le cadre d'un enseignement de la géométrie, pensé dans une continuité de l'école au collège nous avons tout de même choisi de reprendre en CM2 un travail sur ce thème. Notre séquence articule un premier problème visant à introduire la notion de droites perpendiculaires, à partir des conceptions des élèves sur l'angle droit, puis deux problèmes de restauration de figure. Son objectif est d'amener les élèves à reconnaître et tracer des droites perpendiculaires ou pour être plus précis tracer une droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point, appartenant ou non à cette droite. L'insertion de problèmes de restauration dans la progression nous permet également un travail sur des enjeux d'apprentissage en géométrie un peu plus larges, nous le verrons dans la suite de ce texte.

Après avoir présenté l'expérimentation et nos questions de recherche, l'atelier se déroule en deux temps, correspondant chacun à la présentation, l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori*, en appui sur des extraits vidéos et des transcriptions, des deux premières séances de la séquence. Ce texte suit ce déroulement.

---

## II - UNE PREMIÈRE SÉANCE PROPOSÉE AUTOUR DE LA NOTION DE DROITES PERPENDICULAIRES

---

Cette première partie prend appui sur la première séance de la progression autour de la notion de droite perpendiculaire mise en place par Stéphanie Montigny dans sa classe de CM2, une séance ayant pour finalité de travailler le passage du concept d'angle droit à celui de droites perpendiculaires. Notre objectif est de proposer et mettre à l'épreuve une méthodologie de description de l'activité géométrique

des élèves. Lors de l'atelier, cette méthodologie a été présentée aux participants puis mise à l'épreuve à partir d'un corpus de vidéos, photos, descriptions et transcriptions recueilli lors de cette première séance.. Nous reprenons ici cette organisation.

## 1 Méthodologie d'analyse

Comme nous l'avons signalé en introduction, notre observation de l'activité géométrique repose sur trois dimensions solidaires : une dimension matérielle (ce qui est fait), une dimension visuelle (ce qui est regardé, vu) et une dimension verbale (ce qui est prononcé, dit). La méthodologie que nous allons présenter vise à rechercher la manière dont ces différentes facettes s'organisent au sein d'une même activité. Nous reprenons ici une problématique formulée par Radford autour de la notion de cognition sensible (*sensuous cognition*) :

"D'un point de vue méthodologique, le problème est de comprendre comment les divers canaux sensitifs et signes sémiotiques (linguistique, symboles écrits, diagrammes, etc.) sont mis en relation, coordonnés, et subsumés dans une nouvelle unité de pensée, une nouvelle unité psychologique" (Radford, 2013, p. 65, notre traduction de l'anglais)

Dans ce texte, nous utiliserons le terme *activité* en référence à cette unité de pensée, nous la qualifions d'activité géométrique lorsqu'elle s'inscrit dans le cadre d'une problématique géométrique. Précisons que pour nous, réaliser une action matérielle, éventuellement instrumentée, produire des signes verbaux ou graphiques ou porter un regard particulier sur une figure relèvent d'un acte de pensée générateur de significations. La difficulté que nous proposons d'explorer ici est d'en saisir l'unité. Pour y parvenir, notre principal outil sera une analyse logique élémentaire des concepts mathématiques en jeu (Barrier, Hache & Mathé, à paraître).

A l'école, l'angle droit est le plus souvent introduit comme un secteur angulaire particulier, c'est à dire un élément de surface vérifiant une propriété spécifique. Par exemple, vérifier si un angle est droit consiste dans de nombreuses tâches à vérifier si un gabarit d'angle droit donné (équerre ou autre) se superpose ou non avec le secteur angulaire concerné. En cas de superposition, l'objet secteur angulaire est qualifié d'angle droit. Sur le plan logique, on dira que le prédicat "être droit" s'applique à l'objet considéré, le concept d'angle droit s'analyse comme une *propriété* d'objet. Le concept de droites perpendiculaires met en jeu des objets différents en nature et en nombre. Percevoir une perpendicularité nécessite l'identification d'une relation particulière entre deux objets rectilignes. Le concept de droites perpendiculaires s'analyse donc comme une *relation binaire* entre deux objets. Il s'agit maintenant de montrer comment cette distinction élémentaire, mais pour nous fondamentale, permet de se doter d'un arrière-plan unificateur dans l'analyse des trois dimensions retenues pour la description de l'activité géométrique des élèves dans le contexte du passage du concept d'angle droit à celui de droites perpendiculaires.

### *Les trois dimensions de l'activité géométrique*

Commençons par la dimension matérielle de l'activité géométrique. Nous l'avons dit plus haut, contrôler si un angle est un angle droit consiste, dans une approche instrumentée, à superposer un gabarit d'angle droit avec le secteur angulaire concerné. Le geste associé nécessite la prise en compte d'une double contrainte : il faut superposer un côté et un sommet du gabarit avec les éléments correspondants du secteur angulaire. Nous considérons néanmoins qu'il s'agit d'une unique contrainte, puisque le geste associé de superposition peut le plus souvent être accompli d'un seul mouvement. Du point de vue du tracé, la situation est similaire. Lorsqu'il s'agit par exemple de compléter un carré dont un côté est donné (cf. partie 2), le geste consiste à positionner le gabarit ou l'équerre le long du segment de manière à ce que le sommet de l'angle droit du gabarit coïncide avec l'extrémité du côté. Il s'agit là aussi d'une contrainte (double). Par contre, lors d'un tracé d'une droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point extérieur à cette droite par exemple, le geste du tracé est soumis à *deux* contraintes *successives*. Il est nécessaire dans un premier temps de positionner le côté du gabarit le long de la droite donnée puis d'ajuster le second côté de l'angle droit du gabarit pour qu'il se positionne au niveau du

point extérieur à la droite. Ces deux contraintes sont bien distinctes dans la mesure où elles mettent en jeu deux éléments spatialement différenciés de l'instrument. La distinction logique entre propriété (relation *unaire*) et relation *binaires* s'exprime ici à travers le nombre de contraintes matérielles pesant sur l'utilisation de l'instrument. Sur le plan méthodologique, l'observation de l'activité géométrique passera donc par la recherche du nombre de contraintes prises en considération par les élèves dans leurs actions matérielles.

Nous nous intéressons maintenant à la dimension verbale de l'activité. La verbalisation d'une propriété d'objet nécessite la présence dans le langage d'un nom d'objet, dont la référence pourra ou non être qualifiée d'angle droit. Ce nom d'objet peut être partiellement décontextualisé, si l'on se donne des moyens de désignation par exemple en utilisant un codage ou un vocabulaire spécifique ("les angles d'un carré sont des angles droits", "dans le quadrilatère ABCD, l'angle formé par les côtés [AB] et [BC] est droit"), ou au contraire très fortement lié au contexte spécifique d'énonciation ("cet angle est droit"; "ici, c'est un angle droit"). Le point de vue des droites perpendiculaires nécessite le recours à deux noms d'objet afin de verbaliser une relation distinguant explicitement chacune des droites en jeu. Comme pour la verbalisation des angles droits, les noms d'objets peuvent relever d'unités linguistiques de natures diverses. Dans le contexte de cet atelier, les verbalisations étudiées ont été presque exclusivement orales, résultant le plus souvent d'interpellations spontanées par les expérimentateurs ou par l'enseignante et d'échanges au sein de groupes d'élèves. Nous avons donc proposé aux participants à l'atelier de prendre tout particulièrement en compte les déictiques, c'est à dire les unités linguistiques dont le sens ne peut être saisi qu'en relation avec le contexte d'énonciation (les démonstratifs, les adverbes de lieu, les articles définis etc). Sur le plan méthodologique, cela suppose d'accompagner les transcriptions d'éléments de contexte, notamment de vidéos ou de photos afin d'être en mesure d'en interpréter le sens. De la même manière que les objets mathématiques peuvent être des appuis pour l'action matérielle (générant une ou deux contraintes), ils peuvent aussi être des références pour l'activité verbale des élèves. L'analyse logique précédente nous invite à rechercher la nature et le nombre des objets faisant partie du domaine d'interprétation du langage verbal utilisé par les élèves.

Sur le plan de la dimension visuelle, nous avons réinvesti l'approche du groupe de géométrie de Lille, décrite en introduction. Comme nous l'avons dit plus haut, le concept d'angle droit fait référence à des éléments de surface, qui sont vus comme tels. Le passage aux droites perpendiculaires nécessite une domestication des sens, pour reprendre une expression de Radford (2013), une éducation vers un regard plus théorique consistant à appréhender les formes 2D à partir de sous éléments 1D ou 0D (et réciproquement). Il s'agit cette fois de concevoir la relation des élèves aux objets mathématiques par le canal visuel, en s'interrogeant sur le support du regard géométrique en construction, comme nous proposons de le faire pour les autres dimensions de l'activité géométrique. Les observables associés sont cette fois les mouvements oculaires des élèves, et d'une manière plus générale, l'ensemble des gestes ostensifs par lesquels les élèves montrent, typiquement lorsqu'un élève pointe quelque chose de l'index.

## 2 Description de la séance et analyse *a priori*

Nous poursuivons l'atelier par la présentation de la séance au cours de laquelle le corpus qui a servi de support à la mise à l'épreuve de la méthodologie de description a été recueilli. Il s'agit de la première séance du travail collectif engagé entre collègues de l'IUFM Nord - Pas de Calais, ayant donné lieu à des mises en œuvre dans la classe de CM2. Cette séance vise, entre autres, à travailler avec les élèves le passage des angles droits aux droites perpendiculaires. Il s'agit de la première séance visant cet objectif. Elle est organisée autour d'une tâche générique empruntée au manuel de géométrie ERMEL cycle 3 (« Rectangle à terminer 2 » pp.221-229). Une pièce est découpée dans un rectangle (figure 1).

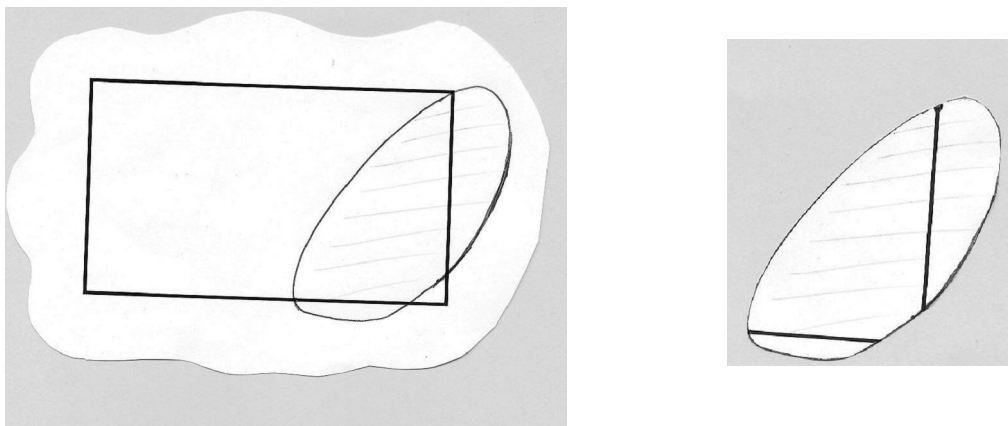


Figure 1

Une version de cette pièce découpée est donnée aux élèves placés en binôme (une pièce découpée par binôme), version dans laquelle un des deux traits présents sur la pièce initiale a été effacé à l'exception de son extrémité correspondant à un sommet d'angle droit du rectangle (figure 2). Le rectangle est affiché au tableau et la tâche générique pour les élèves est de reproduire le trait manquant sur leur pièce de manière à pouvoir, par superposition, "compléter le rectangle".

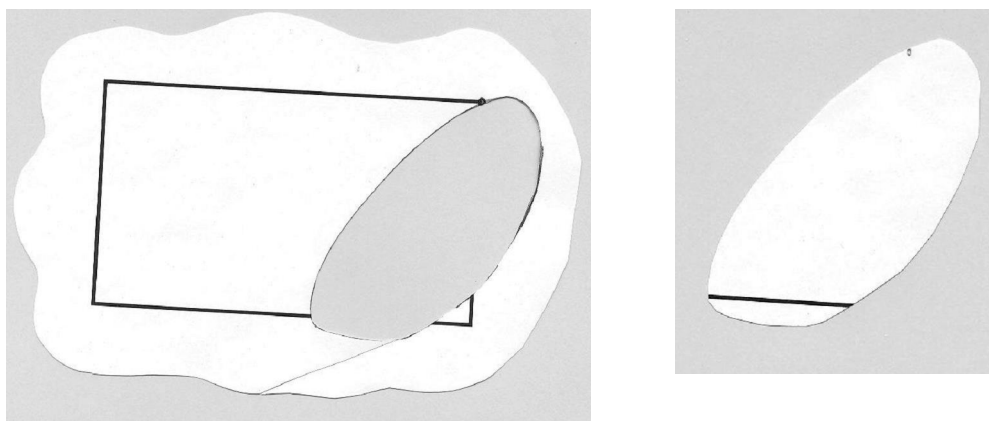


Figure 2

Le travail des élèves est organisé en trois tâches successives par un jeu sur deux variables didactiques de la situation : les instruments à disposition et les positions relatives de l'extrémité restée visible du trait effacé et de l'autre trait. Pour les deux premières tâches, une malle contenant des gabarits d'angles droits de différentes formes et tailles, dont des équerres, est à disposition des élèves. Ils disposent aussi de règles. Pour la troisième tâche, les seuls des gabarits de petite taille sont laissés à disposition, avec des règles. Concernant le positionnement du point et du segment, la situation de la première tâche est celle représentée par la figure 2 (positionner une équerre peut suffire à tracer le segment manquant). Pour les tâches suivantes, le segment est plus éloigné du point (figure 3, les gabarits proposés sont trop petits pour pouvoir être utilisés directement, il est d'abord nécessaire de prolonger un ou plusieurs des traits).



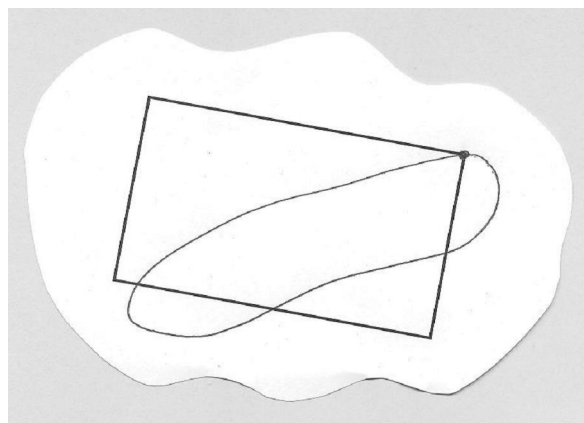


Figure 3

Le jeu sur ces variables didactiques a pour finalité de rendre nécessaires des prolongements du segment donné et/ou des côtés du gabarit utilisé. Chacune de ces tâches donne lieu à une phase de recherche autonome des binômes, suivi d'une phase collective au cours de laquelle les binômes valident leur production au tableau, lesquelles sont ensuite classées en deux colonnes, une pour les productions satisfaisantes et une pour les autres. Cette validation est accompagnée d'une explicitation de la procédure utilisée. La séance se termine par une synthèse pilotée par l'enseignante.

La séance a été filmée à l'aide de deux caméras. Le recueil s'est concentré sur l'activité des élèves, c'est à dire qu'en dehors des phases collectives qui ont bien sûr été filmées, les expérimentateurs ont cherché à recueillir ce que faisaient, disaient, regardaient les élèves en naviguant de binôme en binôme, n'hésitant pas à interpeller les élèves pour qu'ils décrivent leur procédure, quitte à perturber le fonctionnement ordinaire de la classe. Lors de l'atelier, nous avons proposé aux participants une analyse *a priori* succincte en nous concentrant sur les aspects génériques la tâche, c'est à dire sans prendre en compte le jeu sur les variables didactiques présenté plus haut, puisqu'il n'est pas central pour notre propos dans ce texte. Nous présentons ici une synthèse de cette analyse *a priori*, ayant permis aux participants de cerner les enjeux de la situation et qui nous servira de grille d'analyse pour la description de l'activité géométrique effective de quelques élèves.

Une première procédure qu'il est possible d'envisager est une procédure par essai-erreur. On peut envisager des tracés à l'œil, ajustés par validations successives. On peut aussi envisager des stratégies visant à utiliser l'extrémité apparente comme sommet d'un angle droit du rectangle à restaurer. Cette procédure pourrait conduire à positionner le sommet de l'angle droit du gabarit (ou de l'équerre) sur cette extrémité et à produire un tracé sans autre précaution. Il est important de relever qu'en l'absence de côté dont ce point pourrait être une extrémité, seule une contrainte, un seul point d'appui, est disponible pour positionner l'instrument. Le geste associé se rapproche alors de ce que nous avons décrit comme relevant d'un tracé d'angle droit. Notons également que ce point est le seul sommet potentiel d'un angle droit sur la pièce à disposition des élèves. Du côté de la dimension verbale de l'activité, si l'on se positionne dans une telle approche de la tâche par les angles droits, nous pourrions faire l'hypothèse d'une absence de référence au segment dans le discours des élèves, d'une caractérisation du tracé sans relation avec ce deuxième objet, c'est à dire ne mobilisant que les seules propriétés de l'objet construit (par exemple : le trait tracé est trop penché). Sur le plan du rapport à la figure, il se pourrait que la vision des élèves soit focalisée sur cette seule partie de la pièce découpée.

A l'opposé d'une approche relevant strictement des angles droits, il est possible d'envisager une approche par les droites perpendiculaires. Celle-ci consisterait à positionner successivement son gabarit le long du segment donné puis à faire glisser le gabarit jusqu'à atteindre l'extrémité restée visible du segment effacé. Ce tracé serait accompagné d'une verbalisation explicite faisant référence aux deux objets représentés sur la pièce découpée et d'aller-retour du regard entre ces deux éléments.

Cette méthodologie nous livre ainsi une grille d'analyse pour décrire l'activité géométrique supposée des élèves dans la situation, à partir de traces prenant en compte les diverses dimensions de cette activité. Il nous semble néanmoins nécessaire de garder en tête que les trois dimensions de l'activité peuvent ne pas

être nécessairement strictement convergentes, à tout moment dans le travail des binômes. Des procédures intermédiaires pour chacune de ces approches sont susceptibles d'apparaître. Nous pouvons par exemple envisager un tracé que nous rattacherions davantage à une procédure « angle droit » accompagné d'une verbalisation et/ou d'une vision prenant en compte les deux éléments de la pièce à disposition des élèves. Cela pourrait être notamment le cas pour des binômes ne parvenant pas à matérialiser au travers de l'usage des instruments la relation perçue et/ou verbalisée entre le segment donné et le point. Un binôme pourrait également très bien parvenir à une procédure matérielle adéquate, mobilisant la relation binaire entre les deux segments perpendiculaires, sans pour autant parvenir par exemple à verbaliser la relation matérialisée par le tracé.

### 3 Analyse a posteriori : mise à l'épreuve de la méthodologie de description présentée

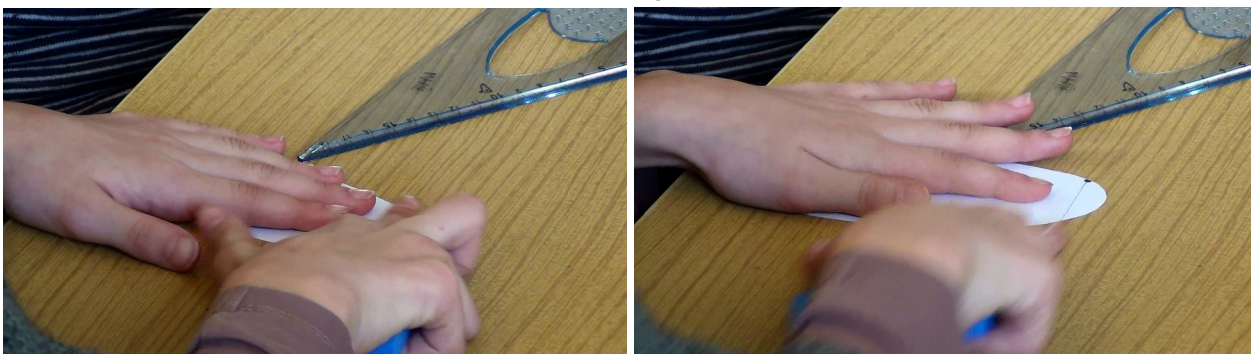
Le document de travail que nous avons proposé aux participants à l'atelier afin de mettre à l'épreuve les outils méthodologiques présentés plus haut consiste en une reconstitution des parcours de plusieurs binômes d'élèves à partir du recueil vidéo réalisé. Les données concernant les trois phases collectives faisant suite à chacune des tâches, disponibles pour presque tous les binômes, ont été complétées par des extraits de phases de recherche et d'interactions avec les expérimentateurs. Le document final est constitué d'une alternance de description, de photographies et de transcription, conformément à notre approche tridimensionnelle de l'activité. Dans ce texte, nous nous concentrons sur le parcours de deux binômes.

Nous commençons par un premier binôme composé de Louise et Benoît. Lors de la première tâche, Louise commence par positionner un des angles droits de son gabarit (de forme carrée) sur le point visible sur la pièce et trace un premier trait (photos 1 et 2).



Photos 1 et 2

Son index pointe ensuite vers le point. Il s'ensuit deux mouvements rectilignes pendant lesquels son autre main maintient la pièce tout en cachant le segment initialement tracé (photos 3 et 4).



Photos 2 et 3

La recherche du binôme se poursuit, le binôme trace alors un nouveau trait selon les mêmes modalités. Les dimensions matérielle et visuelle de l'activité de ce binôme semblent convergentes : Louise ne prend en compte qu'une seule contrainte lors de son tracé et ne tient pas compte du segment lors de l'analyse de son tracé. Pour ce qui est de la verbalisation associée à cette première tâche, nous disposons d'éléments provenant de la phase de mise en commun collective. Benoît se rend au tableau et constate,

par superposition, que leur production ne permet pas de fermer le rectangle. Nous proposons ci-dessous un extrait de transcription des échanges suivant cette validation.

1. Stéphanie : Alors le premier, vous avez fait quoi pour tracer le premier ? Qu'est-ce que vous vous êtes dit pour tracer le premier trait ?
2. Benoît : [silence]
3. Stéphanie : Tu sais pas ? Vous avez juste posé l'équerre comme ça ?
4. Benoît : [silence]
5. Stéphanie : Ben c'est oui ou c'est non ?
6. Benoît : C'est elle [Louise] qui a...
7. Stéphanie : Alors Louise ?
8. Louise : Au début, on a cru qu'il fallait faire tout droit.
9. Stéphanie : D'accord.
10. Louise : Mais après, on s'est dit tout droit ça n'allait pas parce que... Au début, on a voulu faire comme le premier parce qu'au début on a cru que tout était droit et après on a fait l'autre et on a posé l'équerre euh... La pointe vers le point. Et après, on a tracé.
11. S : D'accord. Alors, est-ce que c'est bon ?
12. D'autres élèves : Non.

On peut relever dans cet extrait la référence exclusive au point (10). Le discours concernant le tracé effectué utilise essentiellement le terme « droit » (8 et 10), ce qui peut s'interpréter, d'un point de vue logique, par une caractérisation du tracé par ses propriétés propres, plutôt que par ses relations avec les autres éléments de la figure. Bien sûr, caractériser ce qui ne va pas dans la production par les seules propriétés du segment qui vient d'être tracé est un exercice délicat dans une situation dont les contraintes sont conçues pour rendre nécessaire la prise en compte des relations entre deux côtés consécutifs du rectangle. Cela contribue à expliquer les difficultés rencontrées par ce binôme quant à la verbalisation de leur procédure. On retrouve d'ailleurs le même type de difficultés de verbalisation chez un autre binôme ayant utilisé la même procédure de tracé (angle droit de l'équerre sur le point) :

13. Stéphanie : Alors vas-y remets dedans. Alors à ton avis, qu'est-ce qui ne va pas ?
14. Émile: C'est trop sur le côté
15. Stéphanie : D'accord
16. Émile : Enfin c'est trop...
17. Stéphanie : C'est trop à l'intérieur effectivement. Donc on met dans oui ou dans non ?
18. Émile : Dans non.

Là aussi, l'expression utilisée (« trop sur le côté ») ne tient compte que du tracé qui vient d'être effectué, de manière isolée par rapport à l'autre trait figurant sur la pièce.

Nous poursuivons avec la phase de recherche correspondant à la deuxième tâche proposée aux élèves. Notons qu'une feuille blanche A3 a été distribuée aux élèves afin de permettre de réaliser des prolongements effectifs. Cette décision n'avait pas été anticipée par les expérimentateurs. Elle a eu des conséquences importantes chez d'autres binômes, lesquels se sont servis de l'angle droit de cette feuille comme un (grand) gabarit. Le binôme commence par tâtonner, Benoît pointe le segment donné de l'index, puis Louise pointe sur le point (photos 6 et 7).

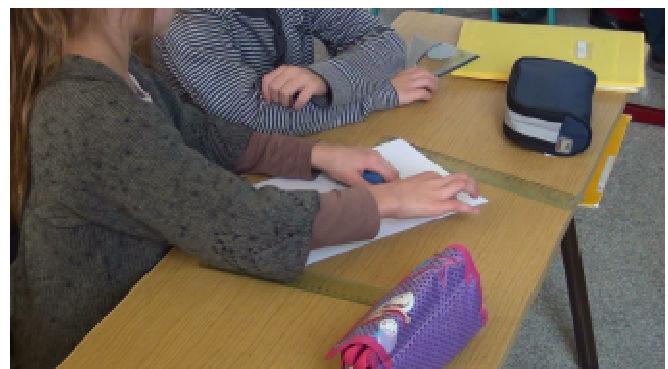
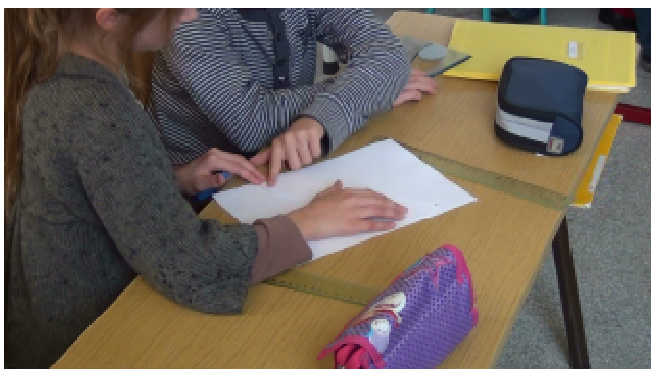


Photo 6 et 7

Il semble donc cette fois que ce binôme ait perçu les deux éléments à mettre en relation. Néanmoins, commence par envisager un tracé à l'œil, à l'aide de la règle, puis un tracé à l'équerre, son angle droit étant positionné sur le point. La recherche se termine par des tracés successifs, suivis de gommage, sans prise en compte d'une éventuelle relation entre les deux éléments préalablement pointés du doigt. Signalons au passage que d'autres binômes ayant également repéré chacun des deux éléments (et par ailleurs verbalisé en faisant référence à chacun des deux éléments) ont aussi rencontré des difficultés à mettre en œuvre sur le plan matériel la relation de perpendicularité par un tracé adéquat. La phase de validation collective de ce binôme a lieu après que plusieurs autres binôme sont allés au tableau et ont présenté une procédure, mathématiquement adéquate, consistant à utiliser la feuille blanche A3 comme un grand gabarit d'angle droit. Le binôme Louise-Benoît réinvestit cette stratégie lors de leur propre passage. Louise ajuste le segment qui vient d'être tracé, puis le segment initialement donné sur la pièce découpée dans le rectangle, son attention étant successivement focalisée sur chacun des deux segments. Le binôme superpose ensuite la pièce dans le rectangle à restaurer, le deuxième tracé est validé. Il n'y a néanmoins pas de verbalisation associée à la procédure lors de ce passage. On peut penser que le binôme procède essentiellement par imitation, sans qu'une conceptualisation avancée de la notion de droites perpendiculaires ne soient mobilisée. Nous passons maintenant à la troisième tâche de cette séance. Cette fois, les binômes ne disposent plus que d'un gabarit d'angle droit de petite taille et de règles, les autres instruments ayant été retirés et l'usage de la feuille A3 ayant été proscrit. Le binôme ne semble pas être en mesure d'utiliser le petit gabarit, lequel reste à distance tout au long de la recherche. Le binôme plie la pièce à restaurer, puis s'appuie sur les traces du pliage pour réaliser un tracé à la règle. Constatant l'impasse dans laquelle se trouvent les élèves, un expérimentateur intervient et demande au binôme : « il est où le rectangle ? ». Louise pointe alors le point de l'index puis décrit une forme dont le bord passe nettement en dessous du segment initialement donné, qui ne semble pas pris en considération (photos 8, 9 et 10).



Photos 8, 9 et 10

Ce passage nous paraît significatif d'une perception visuelle ne mettant pas en relation les deux éléments constitutifs de la pièce découpée. Les compétences mises en œuvre lors de la deuxième tâche n'ont pas pu être réinvesties dans ce nouveau contexte instrumental. L'absence de verbalisation aura peut-être été un signe d'une conceptualisation de la notion de droites perpendiculaires incomplète ou tout du moins insuffisante pour cette nouvelle tâche.

Nous terminons cette analyse *a posteriori* avec un autre binôme composé de Joseph et Emma<sup>4</sup>. Ce binôme a été choisi de manière à contraster avec le précédent. La première tâche ne lui a pas posé de problème. Il utilise l'équerre de manière adéquate et verbalise en faisant référence aux deux éléments :

Joseph : En fait, j'ai mis mon équerre face au trait, et ensuite je me suis aidé du trait pour tracer là.

<sup>4</sup> Cette dernière n'ayant pas rendu le document concernant le droit à l'image n'a pas été filmée. Elle est par ailleurs plutôt en retrait dans le travail du binôme.

La phase de recherche de la deuxième tâche a donné lieu à un tracé apparemment correct (les données recueillies ne permettent pas d'en connaître l'origine). Le binôme est alors sollicité par une expérimentatrice pour qu'il explicite sa stratégie :

Joseph : On a pris une équerre, on l'a mis là [photo 11]. Comme on savait ben que c'était perpendiculaire ben, on a continué avec ça... et... on était allé jusque là-bas mais je sais plus... On avait réussi à aller jusque-là et on avait tracé mais je sais plus comment on avait fait [photo 12].

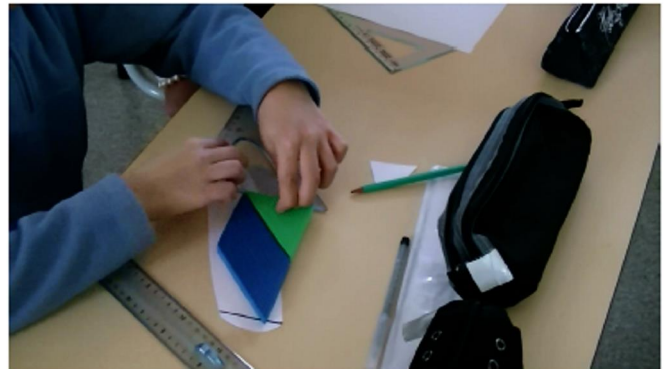
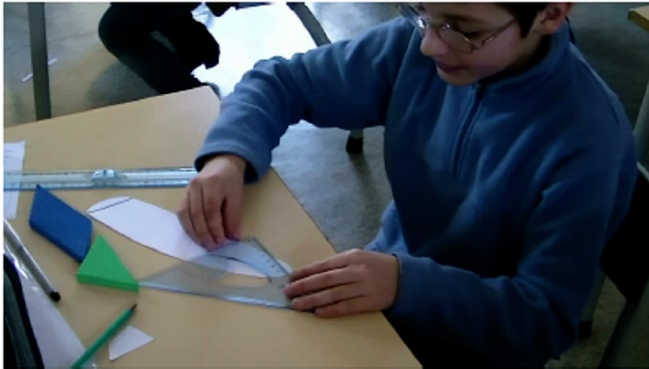
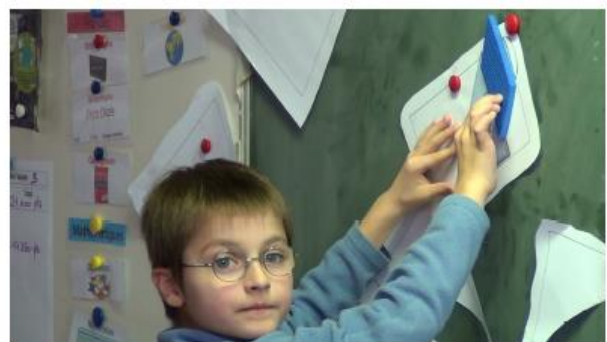


Photo 11 et 12

Ce qui nous semble intéressant ici est que bien que Joseph ne retrouve pas sa technique de tracé, celui-ci soit en mesure de verbaliser des contraintes qu'il perçoit bien (« on l'a mis là », « on était allé jusque là-bas », ...), ce qui suppose une forme de conceptualisation avancée. Plus tard, lors de la phase de validation et de mise en commun, une forme de reprise publique de cette épisode, Joseph commence par positionner son équerre « à l'envers », c'est à dire avec l'angle droit du « mauvais côté » (photo 13). On peut alors observer un jeu de regards entre le segment initialement donné et le segment tracé par le binôme significatif de la prise en compte perceptive progressive de la deuxième contrainte. Joseph repositionne ensuite son équerre et parvient à retrouver la technique de tracé utilisée. Cette technique est originale, elle consiste à agrandir l'équerre en utilisant implicitement le parallélisme des côtés opposés d'un parallélogramme (photo 14).



Photos 13 et 14

L'analyse de la transcription montre, à l'image des extraits proposés plus haut, une verbalisation complète faisant référence aux deux objets en jeu. Ce même binôme sera un des quelques binômes à être parvenu à réussir la dernière tâche : il a commencé par prolonger le segment donné en positionnant une première règle le long de ce segment, il a ensuite positionné le petit gabarit d'angle droit sur cette règle pour enfin contrôler son positionnement en prolongeant un côté jusqu'au point à l'aide d'une deuxième règle et tracer le deuxième segment. Bien sûr, aucune de deux techniques « opératoires » utilisées lors des deuxième et troisième tâches n'est la technique experte visée par l'institution. De la même manière, certains binômes n'ont pas utilisé le vocabulaire géométrique de manière suffisamment précise. Signalons, pour éviter tout malentendu, que ce n'était pas l'objectif principal de cette séance. La réduction de l'enseignement de la géométrie à ces aspects dans de nombreuses classes, au détriment de la conceptualisation, a été l'un des points particulièrement discutés lors du colloque. Nous espérons

avoir contribué à montrer au travers ces analyses que les enjeux langagiers et matériels dépassent de loin la question du vocabulaire et de l'enseignement de techniques opératoires de tracé.

#### 4 Conclusion

Il est évident que l'intérêt que l'on pourrait trouver à ces outils méthodologiques visant la description de l'activité géométrique des élèves dépend des questions que chacun se pose. Pour notre part, il nous semble que cette démarche permet une approche relativement fine de l'activité des élèves, ce qui est certainement nécessaire si l'on souhaite être en mesure de saisir son évolution, de saisir les conditions de possibilité d'une éventuelle acculturation vers des pratiques géométriques stabilisées porteuses de savoirs. Au fondement de ce travail à dimension méthodologique, nous nous sommes aidés d'une analyse logique des concepts en jeu. Cette analyse logique a fonctionné comme un élément unificateur pour penser la conceptualisation de la notion de droites perpendiculaires et la distinguer de celle de l'angle droit. Nos analyses nous ont alors permis de décrire l'activité géométrique de quelques élèves, dans une dialectique entre les concepts d'angle droit et de droites perpendiculaires, selon trois dimensions - un faire, un voir et un dire - en nous aidant de l'analyse logique des concepts comme arrière-plan structurant.

Nous poursuivons l'exploration de ce corpus par une présentation et une analyse de la deuxième séance de cette séquence. Notre attention est cette fois davantage tournée vers la situation, son potentiel didactique, plutôt que sur la méthodologie elle-même.

### III - DEUXIÈME SÉANCE : UNE ACTIVITÉ DE RESTAURATION DE FIGURE

La séance est basée sur une activité de restauration de figure (fiche réduite ci-contre)<sup>5</sup>. La fiche est distribuée aux élèves et la consigne est donnée oralement. En voici un extrait : « Vous avez ici une figure, vous allez devoir reproduire cette figure à partir des deux côtés du carré tracés en dessous. Mais il y a une règle du jeu particulière. Aujourd'hui, il va y avoir un coût sur l'utilisation des instruments. C'est-à-dire que ça va vous coûter des points. Le but du jeu c'est d'avoir le moins de points possible. (...) ». Le coût de l'utilisation des instruments est ensuite expliqué. Les élèves ont à leur disposition une règle informable (bande de papier plastifiée avec laquelle on peut tracer des lignes, et sur laquelle on peut reporter une longueur et que l'on peut plier), une équerre, une règle graduée. Le système de coût est le suivant.

Sur la figure modèle :

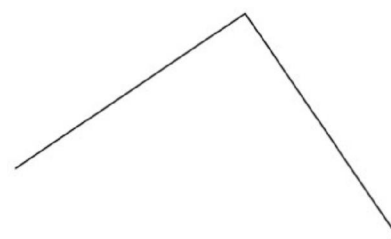
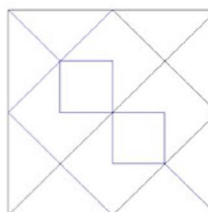
- Utiliser un instrument, quel qu'il soit, est gratuit.

Sur la figure à compléter :

- Tracer un trait avec la règle informable est gratuit,
- Utiliser l'équerre coûte un point,
- Reporter une longueur à l'aide de la règle informable coûte 5 points,
- Mesurer une longueur à la règle graduée coûte 10

Nom, Prénom : ..... Classe : .....  
Date : .....

Figure 1



Action	Comptes
Tracer un trait (règle) – 0 point	
Utiliser l'équerre – 1 point	
Reporter une longueur (règle informable) – 5 points	
Mesurer une longueur (règle graduée) – 10 points	
<b>Total des points :</b>	

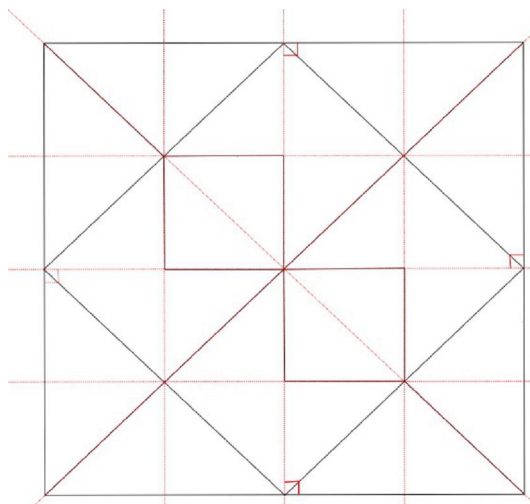
<sup>5</sup> Ce problème de restauration reprend une figure extraite de IREM de Lille (2000)

points.

La validation des productions des élèves s'effectue à la fois par superposition avec la figure attendue tracée au préalable sur un papier calque, par les échanges avec l'enseignante et par un comptage du nombre de points utilisés pour la restauration.

Lors de l'atelier nous avons d'abord invité les participants de l'atelier à résoudre le problème soumis aux élèves. Un échange autour des procédures mises en place par les participants et l'identification de stratégies que des élèves de CM2 sont susceptibles de mettre en œuvre nous a permis de dégager des éléments d'analyse a priori du problème. Comme pour la partie précédente, la présentation de cette analyse a priori nous livre une grille d'analyse pour l'étude du déroulement effectif que nous proposerons ensuite.

## 1 Analyse a priori, enjeux du problème



La figure à reproduire est construite sur un réseau de droites.

La procédure attendue à ce niveau nécessite quatre points. Il s'agit d'utiliser deux fois l'équerre pour fermer le carré puis de construire le milieu de deux côtés consécutifs du grand carré en traçant, à l'aide de l'équerre, la perpendiculaire à chacun de ces côtés passant par le centre du carré. Le reste de la construction se fait à l'aide de la règle non graduée uniquement, en utilisant des propriétés d'alignement.

La tâche de restauration de cette figure a donc pour objectif principal d'amener les élèves à identifier des propriétés de perpendicularité sous-jacentes à la construction de la figure modèle et de les utiliser pour la tâche de restauration. L'utilisation de ces propriétés est guidée par une « analyse de la figure ».

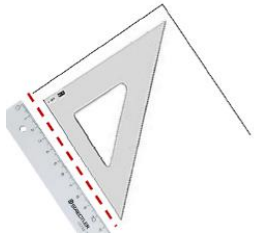
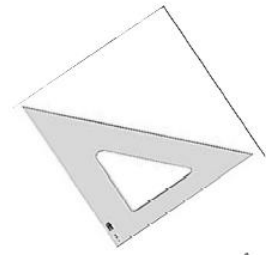
Les élèves devront en effet identifier des réseaux (ou une partie de ces réseaux) de segments, points, droites sous-jacents, identifier les relations entre ces sous-éléments de dimension 1 ou 0 (notamment la perpendicularité), ainsi que les relations entre ces sous-éléments et les surfaces 2D qui « composent » la figure. Les contraintes sur les instruments, via le système de coûts, visent à accompagner les élèves d'un regard premier sur la figure en termes de carrés superposés et juxtaposés, vers un regard prenant en compte un réseau de lignes et de points. Ces deux regards doivent coexister, les élèves devant ensuite être capables de passer de l'un à l'autre pour reconstituer la figure.

Nous restreignons ici l'analyse a priori à trois moments clés de la restauration : la fermeture du grand carré, le tracé des sommets du carré « moyen » et, plus globalement, la décomposition de la figure. Ces trois points ne correspondent pas à des étapes à effectuer dans un ordre chronologique mais à des moments qui nous semblent particulièrement intéressants en termes d'enjeux d'apprentissage.

### 1.1 Fermer le carré

Dès le début de la séance, le quadrilatère extérieur de la figure est présenté comme un carré, les deux segments de l'amorce étant donnés comme deux côtés du grand carré. Soulignons que le moment où l'élève complète l'amorce pour tracer le « grand carré » n'est pas nécessairement premier. On peut imaginer un élève complétant la moitié amorcée de la figure et traçant ensuite l'autre moitié. Pour accomplir la tâche demandée, il sera cependant nécessaire de tracer les deux côtés manquant du grand carré de l'amorce.

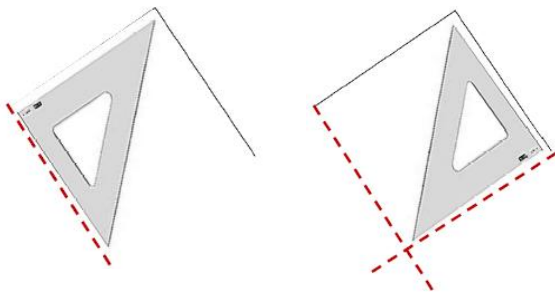
Une vision de la figure en termes de surfaces peut amener les élèves à vouloir tracer l'angle droit manquant, vu comme un coin du quadrilatère à compléter, en positionnant l'équerre une seule fois, de façon perceptive, à l'endroit supposé de ce coin. Il est probable que cette construction soit invalidée par l'utilisation du calque ou de l'équerre placée sur un des angles problématiques du carré ainsi tracé.



Il est aussi possible de fermer le carré en traçant un segment perpendiculaire à un des côtés déjà tracés et en faisant en sorte, à l'aide de la règle graduée, que le segment tracé ait même longueur que les côtés du carré donnés. Il suffit alors de relier les deux sommets libres (on peut imaginer un élève traçant le quatrième côté avec le bord de l'équerre, en vérifiant au passage, inutilement, le fait que le dernier angle est droit). La nécessité ressentie du recours à la mesure, pour savoir « où s'arrête » le trait que l'on trace, peut être rattachée à une vision en

termes de surface et de coins. On peut penser qu'il s'agit encore une fois, pour l'élève, de fermer la surface « carré » en reconstituant ses bords. Ce procédé de construction pourra être remis en question pour son coût.

Pour fermer le carré, une procédure économique consiste à utiliser deux fois l'équerre (on peut penser que c'est la procédure la plus économique accessible aux élèves de CM2).



Il s'agit alors de tracer deux droites perpendiculaires aux deux côtés manquants, passant par les extrémités « libres », à l'aide de l'équerre. Le quatrième sommet du carré est alors construit comme une intersection de droites, au sens de traits dont on ne se préoccupe pas de « où ils s'arrêtent ». La surface « carré » n'est pas vue seulement comme une forme globale ayant des angles droits, mais aussi comme un réseau de droites perpendiculaires.

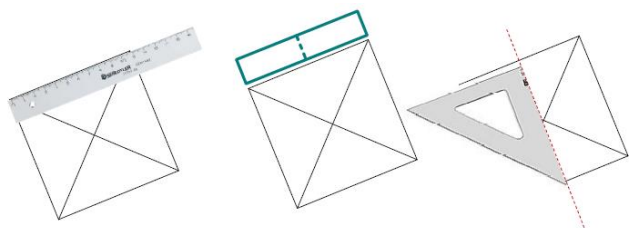
Différents regards (au sens de Duval & Godin (2005)) sur le carré, en termes de surface ou de réseau de droites, peuvent donc être mobilisés par les élèves et peuvent donner lieu à différentes procédures de construction. Cette rapide analyse montre dans quelle mesure le système de coûts sur l'usage des instruments incite les élèves à se dégager du recours à la mesure, les accompagnant ainsi vers une première modification, un enrichissement de leur regard sur l'objet géométrique « carré » en jeu, premier enjeu d'apprentissage de la situation. En lien avec l'analyse de la séance précédente, un premier objectif de l'analyse du déroulement effectif de la séance consistera donc, pour nous, à décrire l'activité géométrique effective des élèves lors de la fermeture de ce grand carré, en identifiant des indices sur le rapport spontané des élèves à cette figure et sur la manière dont celui-ci évolue lors de la tâche de restauration. Pour ce faire, comme précédemment, il nous semble important d'avoir en tête que des procédures intermédiaires peuvent émerger et que l'interprétation de l'activité géométrique des élèves à partir de leurs seules actions matérielles peut être restrictive. Un tracé proche de la procédure attendu, en termes de droites perpendiculaires, pourrait par exemple se faire avec un regard plus englobant : on place le coin de l'équerre dans les coins non tracés du carré pour les matérialiser, on les trace, dans un second temps on relie les amorces de côté tracées pour dessiner le dernier coin du carré manquant. Ainsi, la description de l'activité géométrique des élèves devra non seulement s'appuyer sur une analyse des actions matérielles effectuées mais aussi sur une analyse des dimensions verbales et gestuelles (visuelles, ostensives...) de cette activité. Nous veillerons ainsi également à saisir la nature des objets convoqués par les élèves à travers l'analyse des discours, lors de la formulation de leurs procédures, au sein des groupes, à l'initiative d'un expérimentateur ou lors de la mise en commun en classe entière. Nous reprendrons pour cette analyse les indices identifiés dans la première partie de ce texte, en



s'attachant en particulier à saisir la référence des unités linguistiques, déictiques ou expressions, avec lesquels les élèves désignent l'objet à construire pour fermer le carré, de coin d'un quadrilatère à point obtenu par intersection de droites perpendiculaires.

### 1.2 Tracer « les quatre sommets du carré moyen »

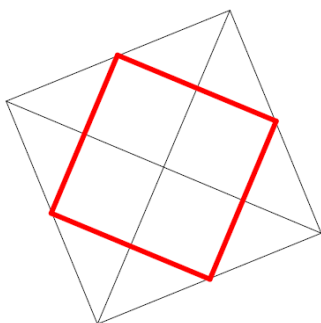
Là aussi, ce tracé n'est pas nécessairement premier. Construire le « carré moyen » nécessite d'identifier les positions relatives du carré moyen et du grand carré. Les élèves visualiseront vraisemblablement les sommets du carré moyen comme les milieux des côtés du grand carré. Rien n'est dit à ce sujet dans l'énoncé, on peut penser que les élèves percevront visuellement cette propriété. Une vérification sur la figure modèle par la mesure ou le pliage est possible.



Compte tenu des instruments à disposition, les milieux peuvent ensuite être construits, classiquement, avec la règle graduée (mesure, calcul de la moitié et report de cette nouvelle longueur). De façon moins coûteuse, on peut également envisager de construire ces milieux avec la règle informable (sans mesure, par report de la longueur du côté sur la règle informable puis par pliage).

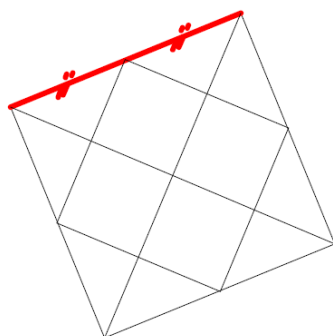
Une procédure plus économique encore consiste, une fois les deux diagonales tracées, à construire les milieux des côtés du grand carré avec l'équerre, comme intersections des côtés du grand carré avec la droite perpendiculaire au côté passant par le centre du carré (cette droite est la médiane du carré).

Encore une fois, on peut supposer que les contraintes posées sur l'action matérielle des élèves et l'usage des instruments sont susceptibles d'amener les élèves à progressivement enrichir leur regard sur ces sommets à construire. L'enjeu d'apprentissage consiste ici à les conduire à identifier la propriété de perpendicularité liant un côté du carré et sa médiane et à articuler trois regards sur ces points pour restaurer la figure en un coût minimum :



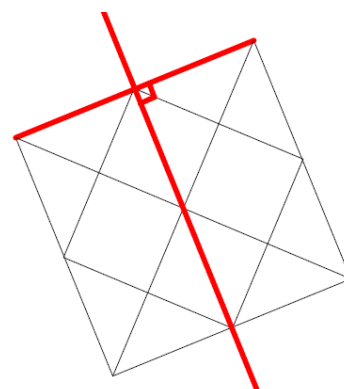
Les « sommets du carré moyen »

L'idée de point, les relations entre ces points et les lignes de la figure etc. ne sont pas considérées.



Les milieux des « côtés du grand carré »

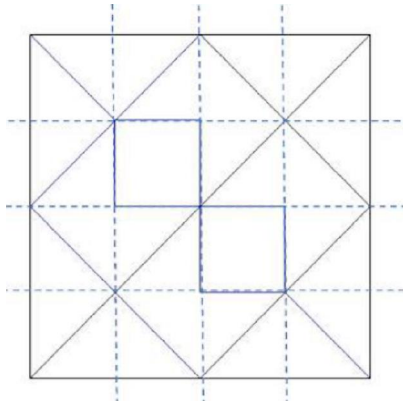
On perd de vue la vision en termes de carrés-surfaces pour voir des relations entre des points et des lignes (segments).



Le projeté orthogonal du centre du grand carré sur le côté

La situation est plus complexe : plusieurs points comme intersection de lignes, perpendicularité. La construction est proche de celle de la première séance (cf. ci-dessus).

### 1.3 Analyse de la figure

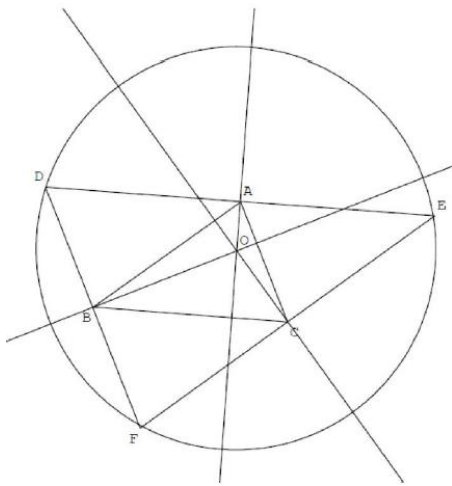


On l'a vu, le tracé du grand carré ou des milieux de ses côtés peuvent mettre en jeu plusieurs regards sur la figure, mobilisant alternativement une vision en termes de carrés juxtaposés ou superposés ou une vision en termes de réseaux de segments, de droites, de points. Le tracé des diagonales demande également en lui-même une analyse de la figure : une des deux diagonales relie effectivement deux sommets opposés du grand carré sur la figure modèle, mais l'autre n'est présente que sous forme de deux segments disjoints. Voir la diagonale (sous forme de segment joignant les sommets ou sous forme d'une droite portant les deux segments) nécessite la perception d'une relation d'alignement entre ces deux segments.

De même, le tracé des deux « petits carrés » à moindre coût demande d'identifier que leurs côtés sont portés par des droites à tracer. Cette construction nécessite le prolongement de segment et la mobilisation de propriétés d'alignement entre des points, des points et des segments.

Globalement, la restauration attendue repose donc dans un premier temps sur une déconstruction dimensionnelle de la figure modèle (passage d'un regard sur les objets 2D, aux objets 1D ou 0D et à leurs relations). Dans un second temps, cette tâche nécessite des allers et retours entre les différents regards, dans un mouvement de déconstruction-reconstruction dimensionnelle de la figure.

Cet aspect nous paraît fondamental, à la fois dans cette situation mais aussi, de façon plus générale, pour penser les enjeux d'apprentissage de la géométrie à la fin de l'école primaire, dans une continuité, de l'école au collège (Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq, 2013). La conférence de Marie-Jeanne Perrin et de Christine Mangiante montrent des exemples d'exercices classiques de collège où l'analyse de la figure et les changements de regards sont au cœur d'activités traditionnelles de preuve. Prenons un autre exemple de ce que pourrait être l'énoncé d'un exercice de fin de collège.



Soit  $ABC$  un triangle quelconque.

On place les points  $D$ ,  $E$ , et  $F$  tels que  $CABF$ ,  $ABCE$  et  $ACBD$  soient des parallélogrammes. Montrer que les médiatrices du triangle  $DEF$  sont les hauteurs du triangle  $ABC$ .

En déduire que les hauteurs du triangle  $ABC$  sont concourantes.

Si l'apprentissage de la démonstration en géométrie ne se limite sans doute pas à ce point, il nous semble essentiel de prendre conscience que l'élaboration de la preuve demandée nécessite une capacité à mettre en relation des sous-éléments 2D, 1D et 0D de cette figure et à jouer sur les figures englobant chacun des sous-éléments considérés. La droite  $(OA)$  est à la fois médiatrice du triangle  $DEF$  et hauteur du triangle  $ABC$ . Le point  $A$  est à la fois un sommet du triangle  $ABC$ , le milieu d'un côté du triangle  $DEF$ , le milieu du segment  $[DE]$  et sommet du parallélogramme  $ABCE$  ou  $ACBD$ .

Ces regards sont mathématiquement en partie redondants, ils sont complémentaires et tous nécessaires pour travailler sur cet exercice. Cette capacité à une mobilité du regard sur les figures géométriques nous semble également au cœur des enjeux d'apprentissage de cette situation de restauration. Par la nature de la tâche et les contraintes sur les instruments (qui poussent à utiliser l'équerre), on amène les élèves non seulement à une déconstruction dimensionnelle, mais aussi à un jeu de regard entre le réseau de droites et de points et les figures englobantes.

## 2 Déroulement effectif

Comme pour la séance 1, cette séance est filmée par deux caméras. Nous disposons aussi d'un enregistrement audio de l'enseignante. Dans les phases de travail individuelles les deux observateurs filment le travail des élèves et, éventuellement, les interrogent sur les procédures utilisées.

A l'instar de l'approche qui était la nôtre pour l'analyse de la première séance, l'objectif de notre analyse *a posteriori* consiste à décrire l'activité géométrique effective des élèves, en appui sur la grille d'analyse fournie par les éléments d'analyse *a priori* précédents. L'objet de notre travail vise, en appui sur une analyse des dimensions matérielle, verbale et gestuelle de l'activité des élèves, à identifier leurs manières d'*agir-penser-parler* spontanées, en lien avec les possibles dégagés dans l'analyse *a priori*, ainsi que leur évolution, en interaction avec la situation et l'enseignante.

Pour cet atelier, nous nous sommes restreints à quelques épisodes nous semblant significatifs du déroulement effectif de la séance : une procédure spontanée d'élève, la phase de mise en commun intermédiaire puis une seconde procédure d'élève, postérieure à cette mise en commun intermédiaire. Les participants à l'atelier ont d'abord été invités à visionner des extraits vidéo de chacun de ces épisodes puis à interroger l'activité des élèves durant ces phases, en appui sur des extraits de transcriptions et photos extraites des vidéos.

Nous présentons dans la suite de ce texte les éléments d'analyse explicités lors de l'atelier.

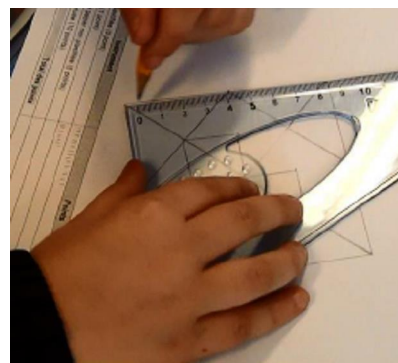
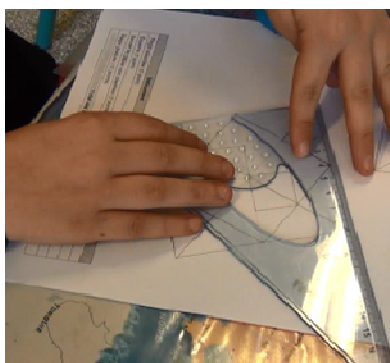
### 2.1 Une première procédure d'élève (avant mise en commun)

Un élève vient de terminer une première restauration de la figure. Un expérimentateur vient lui demander d'expliquer sa démarche. L'extrait vidéo support de cette première analyse correspond à la formulation par l'élève de sa procédure.

L'élève dit d'abord avoir « pris l'équerre pour faire un angle droit dans le coin ». Il positionne l'équerre à l'endroit supposé du coin du carré manquant. Cette tendance première à vouloir d'abord construire le coin du carré manquant, en utilisant l'équerre comme un gabarit d'angle droit permettant de fermer la surface, est prégnante dans la classe. Cet angle droit est spontanément perçu comme un coin de la surface à fermer, comme le confirme l'expression employée par l'élève.



Mais l'élève se corrige et explique avoir tracé successivement deux angles droits, d'abord en partant d'une extrémité d'un des côtés du grand carré donné puis en partant de l'extrémité du côté nouvellement tracé.



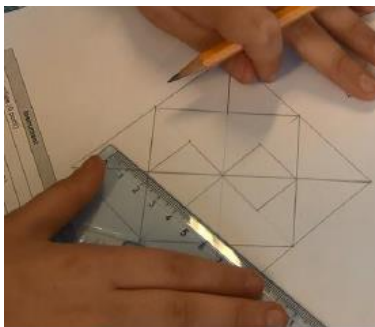
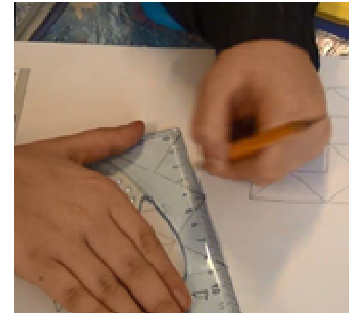
Dans son explication l'élève n'évoque pas la nécessité de vérifier la longueur du premier côté tracé (ou que le côté tracé doit « fermer » le carré). Son discours est celui d'une description de procédure, les mots utilisés sont essentiellement centrés sur le matériel, « équerre », « j'ai assemblé », il utilise beaucoup de

déictiques « là », « ça », « le coin » (en le montrant), « comme ça » et parle essentiellement en termes de figure globale : « coin », « angle droit » (cf. analyse de la séance 1). Il ne voit pas le sommet manquant comme l'intersection de deux droites (sans prise en compte de la longueur).

L'élève précise qu'il a tracé ensuite une première diagonale, visible sur la figure modèle (lui parle de « trait »), puis la seconde diagonale « pour s'aider » (puis il précise « pour m'aider à faire les carrés »). On peut donc supposer qu'il a perçu le fait que deux des segments à tracer appartiennent tous deux à cette diagonale, voire que deux sommets de chaque petit carré appartiennent également à cette diagonale. Il trace des « traits » sous-jacents à la figure, il fait donc apparaître des sous-éléments de la figure, pas toujours apparents sur la figure modèle, et les relations entre des sous-éléments 1D et 0D de la figure (ici : alignement).

L'élève repère ensuite, de façon perceptive, que les sommets du carré « moyen » sont les milieux des côtés du grand carré. Il place ces points en mesurant (« j'ai pris l'équerre quatre fois pour mesurer la moitié là »), puis trace le carré « j'ai mis des points [il pointe le milieu d'un autre côté du grand carré] et je les ai assemblés ». On retrouve donc ici la trace d'un jeu sur ces objets et leurs figures englobantes, entre sommets d'une surface et points définis comme milieux de segments.

Pour tracer les « petits carrés » l'élève a, à nouveau, utilisé la mesure (« j'ai réutilisé l'équerre pour faire la moitié comme ça »). Il positionne alors son équerre, utilisée comme une règle graduée, de façon perceptive, sans s'assurer des angles droits.



On peut remarquer, par ce placement de l'équerre, que l'élève ne prend pas en compte le fait que le point obtenu comme intersection d'une diagonale du grand carré avec un côté du carré moyen, appartient à la droite portant le côté du petit carré qu'il est en train de tracer. Cette propriété d'alignement / d'appartenance n'est pas utilisée pour la construction et n'est donc sans doute pas perçue.

De façon spontanée, la procédure de fermeture du grand carré développée par cet élève repose donc sur une vision de cette figure en termes de surface. Celui-ci s'est ensuite montré capable d'une première analyse de la figure modèle lui ayant permis d'identifier que les sommets du carré « moyen » sont les milieux des côtés du grand carré, mais, sans doute de façon cohérente à ses habitudes, les manières de faire de l'élève se sont principalement centrées sur un recours à la mesure. Plus généralement, comme beaucoup d'autres élèves, les premières constructions mises en place sont fortement ancrées dans des procédures de mesurage. Ce faisant, les élèves ne mobilisent pas les propriétés d'alignement, d'appartenance, d'incidence et n'utilisent pas les propriétés de perpendicularité sous-jacentes à cette figure comme un outil (économique) pour cette restauration. Ce premier extrait témoigne cependant du fait que cette situation, en laissant aux élèves un large panel d'instruments à disposition, permet aux élèves d'entrer librement dans la tâche, donnant ainsi à l'enseignant comme à l'observateur la possibilité de prendre en compte des procédures et visions spontanées des élèves. Les contraintes posées sur l'action matérielle et le coût des instruments doivent ensuite permettre à l'élève de dépasser ces procédures et d'enrichir son regard sur la figure modèle...

## 2.2 Mise en commun intermédiaire

Après un premier temps de travail individuel, l'enseignante organise un temps collectif de mise en commun intermédiaire : « allez, vous regardez tous au tableau même si vous n'avez pas terminé ». Cet épisode dure une dizaine de minutes. L'analyse de la vidéo ainsi que de sa transcription nous a conduits

à nous centrer plus particulièrement sur trois moments de cette mise en commun, nous semblant décisifs du point de vue du travail collectif autour de la tâche de restauration.

### **L'analyse de la figure modèle**

Cet épisode est rythmé par des questions de l'enseignante du type « qu'est-ce qu'il était important de voir dans la figure pour nous aider ? », « est-ce qu'il y avait d'autres choses sur votre figure qu'il était important de voir qui pourraient nous aider ? » Les élèves répondent de leur place ou sont invités (parfois rapidement) à venir au tableau.

Les premières expressions de cet échange (de 2 à 16) concernent « tous les carrés », « un grand carré », « un moyen carré », « deux petits » :

2. Stéphanie : Ensuite qu'est-ce qu'il était important... Ouh ouh, Émilie. Euh, Joseph. On discute ensemble là. Qu'est-ce qu'il était important de voir dans la figure pour nous aider ? Oscar.
3. Émile : Tous les carrés. [inaudible] carré.
4. Stéphanie : Alors, tu veux bien venir au tableau. Alors montre.
5. Émile : Alors, y avait un grand carré là...
6. Stéphanie : Oui.
7. Émile : Un moyen carré là, et puis deux petits.
8. Stéphanie : D'accord. Et est-ce que ça t'aidait à tracer ta figure ?

Ces objets 2D sont aussi désignés, par Émile, par des déictiques (« là », « ce », « ça », « celle-là » notamment) accompagnés de gestes larges désignant chacune de ces figures. L'appréhension première de la figure s'opère donc en termes de surfaces juxtaposées et superposées, dans une perception globale de la figure et des sous-éléments 2D la constituant. Mais l'intervention de l'enseignante « est-ce que cela t'aidait à tracer la figure ? » connote négativement la décomposition de la figure en carrés juxtaposés et superposés. Elle laisse entendre que ce regard n'est pas opératoire pour la tâche de restauration, dans la perspective de l'analyse de la figure. La restauration de la figure, sans recours à des gabarits de carré, nécessite d'aller plus en avant dans l'identification de sous-éléments de la figure et de leurs positions relatives. L'analyse de la figure se poursuit par l'évocation des diagonales du grand carré :

10. Stéphanie : D'accord. Donc tu as tracé quoi en premier ? Une fois que tu as fait ton carré, tu as tracé quoi en premier ?
11. Émile : Celle-là
12. Stéphanie : Ça s'appelle comment ?
13. Ensemble : La diagonale
14. Émile : Euh la diagonale.
15. Stéphanie : D'accord. Tu n'en as tracé qu'une ?
16. Émile : Oui et après j'ai fait ceux-là [les côtés manquants du carré] et après j'ai fait celle-ci [la deuxième diagonale]

Ce court passage témoigne de l'immédiateté de la perception de la première diagonale, apparente sur la figure modèle, et de la plus grande difficulté à visualiser la seconde diagonale, dont l'identification nécessite la perception et la mobilisation de propriétés d'alignement / appartenance. Notons que la diagonale a un statut intermédiaire : elle est un objet 1D (ligne, trait, segment, droite) défini en relation avec une figure 2D, à la fois partie du réseau de ligne et de points perçus en déconstruisant la figure et élément d'une figure englobante (le grand carré ici). L'ensemble des deux diagonales est aussi passagèrement désigné par « la croix », expression correspondant à un regard plus englobant.

Enfin, cette première analyse collective de la figure se termine par l'évocation de la position des sommets du carré moyen :

29. Stéphanie : (...) Est-ce qu'il y pas autre chose dans votre figure qu'il était important de voir ? Pierre.
30. Pierre : La moitié des traits du carré.
31. Stéphanie : Ah, ben viens là. [Pierre montre successivement les quatre milieux des côtés du carré]
32. Stéphanie : Alors. C'est quoi ça ? Ce que Pierre nous a montré.
33. Es : ... Carré.
34. Stéphanie : Ici, ici/
35. E ? : Les sommets/ Les points

36. Stéphanie : Ici, ici [Stéphanie montre successivement les quatre milieux des côtés du carré]. Donc il dit que c'est le deuxième carré. A partir de ces points-là je suis d'accord qu'on trace le deuxième carré. Regarde où se situent ces points-là.
37. Pierre : Au milieu des...
38. E ? : Au centre
39. Pierre : Côtés [?] du carré.
40. Stéphanie : Oui. Au milieu. Comment vous avez fait pour trouver ces points-là ? Pour ceux qui l'ont fait. Laurent.

L'analyse du discours des élèves témoigne de façon intéressante de ce jeu de regard sur la figure et ses sous-éléments, la nature de ces objets (de sommet d'un quadrilatère à point) et sur les figures englobant ces objets (du carré moyen à milieu d'un segment). Que ce soit dans les mots et expressions de l'enseignante (« c'est le deuxième carré » ou « ces points-là ») ou dans ceux des élèves (« sommets », « milieux », « centre », « moitié »), divers regards se juxtaposent progressivement, accompagnés de l'explicitation progressive des liens entre ces différentes lectures de la figure. Montré en termes de surfaces au début par Émile, le carré moyen devient caractérisé par un réseau de points : placer ces 4 points suffit pour construire ce carré.

L'expression « la moitié des traits du carré » (30) est par exemple significative de ce jeu entre regards portés sur des figures englobantes et visions de points et de lignes et de leurs relations. L'élève veut en effet désigner un point, le milieu du segment. Comme dans un passage intermédiaire entre la vision en termes de surfaces convoquée précédemment et la vision en termes de point nécessaire, il évoque un trait, la notion de longueur (moitié), mais aussi le carré. Le mot « moitié » a un double statut : à la fois, dans le contexte de la mesure, il désigne plutôt un segment (et sa longueur), mais aussi, comme dans l'expression « être à la moitié », le milieu du segment (et, implicitement, la relation entre ce milieu et le segment).

Tout au long de cet épisode, l'enseignante accompagne ainsi les élèves, au fil de l'échange, dans une première analyse de la figure, dans un mouvement de déconstruction et de reconstruction dimensionnelles. On le voit nettement dans cet extrait, cette analyse est avant tout motivée pour son aspect opératoire pour la tâche de restauration de l'amorce à laquelle les élèves sont confrontés.

### **Autour de procédures de construction des milieux des côtés du grand carré**

40. Stéphanie : Comment vous avez fait pour trouver ces points-là ? Pour ceux qui l'ont fait. Laurent.
41. Laurent : On devait prendre la règle. On devait faire [inaudible] la moitié. Ou prendre ça, on le plie en deux pour faire euh [la bande de papier non plastifiée]
42. Stéphanie : Alors viens au tableau. Tiens, tiens, tiens, je vais t'en donner une grande.  
[Laurent juxtapose la grande bande de papier avec le côté du carré, mais ne vois pas comment s'en servir ensuite]

Jusqu'alors porté sur le *voir*, les échanges verbaux basculent ici sur le *faire*, sous l'impulsion de l'enseignante (« Comment vous avez fait pour trouver ces points-là ? »). Pour restaurer la figure, il fallait « voir » que les sommets du carré moyen sont les milieux des côtés du grand carré, comment maintenant les construire sur la figure à restaurer ?

En cohérence avec les premières procédures observées, comme le montrait l'analyse précédente, et avec les techniques classiques de construction de milieux rencontrées par les élèves jusque-là, la première procédure évoquée est celle d'un recours à la mesure, avec la règle graduée. Cependant, ces interactions montrent rapidement que, prenant sans doute en compte le système de coûts sur l'usage des instruments, l'élève a été amené à questionner cette procédure, dans une recherche de procédures moins coûteuses. La possibilité de placer le milieu d'un segment sans mesure, via le partage d'une bande de papier de la longueur du côté en deux, par pliage et superposition, émerge. Les élèves tâtonnent alors un peu mais une élève parvient à utiliser correctement la bande de papier et à placer un des milieux recherchés sur la figure affichée au tableau.

62. Stéphanie : Ah. Regardez bien ce qu'elle fait.  
[Émilie effectue un report de la longueur du côté du grand carré à l'aide d'une bande de papier, puis plie la bande obtenu en deux]

63. Stéphanie : Tu peux expliquer avec des mots pour tout le monde. [Émilie déplie la bande]
64. Stéphanie : La première phase.
65. Émilie : On prend la bande de papier...
66. Stéphanie : Tu la plies pour que ça se superpose au segment, au côté du carré, on est d'accord.
67. Émilie : Et voilà [elle plie la bande en deux]
68. Stéphanie : Et pourquoi tu la plies en deux ?
69. Émilie : Euh [inaudible, elle pointe le milieu du doigt]
70. E ? : Le milieu.
71. Stéphanie : Oui donc le milieu du segment ça veut dire quoi, cette partie-là et cette partie-là elles sont comment ?
72. E ? : Égaux
73. Émilie : Oui c'est, oui tout à fait. Elles sont...
74. Es : Égaux.
75. Stéphanie : Elles sont la moitié plus la moitié donc ça fait un segment de même...
76. Es : Longueur. Ils sont égaux.
77. Stéphanie : Oui, donc déjà est-ce que ça coûtait beaucoup de points ça ?
78. Es : Non-oui

Si Émilie se situe plutôt dans le domaine du *faire* (« on prend la bande de papier ») et verbalise assez peu les actions matérielles qu'elle montre, l'enseignante accompagne les élèves, par le biais de questions portant sur le pourquoi, à mettre en lien technique de construction et définition géométrique du milieu d'un segment (« Tu la plies pour que ça se superpose au segment, au côté du carré... », « ... donc le milieu du segment ça veut dire quoi, cette partie-là et cette partie-là, elles sont comment ? »). L'instrument devient alors outil de matérialisation de propriétés géométriques du milieu, que l'on cherche à expliciter. Nous le voyons ici, les contraintes sur l'usage des instruments amènent les élèves et l'enseignante à réfléchir aux modalités possibles de construction d'un milieu d'un segment avec une bande et donne lieu à une réflexion sur l'objet géométrique « milieu ». Ces propriétés géométriques sont en général très largement portées par la règle graduée lors d'un recours automatisé à des procédures de mesurage. En changeant d'instrument, ces propriétés sont réinterrogées de manière tout à fait riche du point de vue des connaissances géométriques à mobiliser. Si nous prêtons une attention particulière au discours qui se construit, de façon collective, autour de ces actions matérielles, la référence des déictiques « cette partie-là, cette partie-là » (71), l'emploi de l'expression « la moitié » (76) pour désigner la moitié du segment accompagnés de gestes désignant les segments, nous permet d'ailleurs de noter que la réflexion se fait ici en termes de lignes. Le milieu d'un segment est en effet vu comme le point qui partage le segment en deux segments égaux. Le concept de milieu mobilisé repose donc sur une relation binaire entre un point et un segment et non une relation ternaire entre trois points, comme nous pouvons le rencontrer dans d'autres contextes (Barrier, Hache & Mathé, à paraître).

Notons enfin que, bien que motivé par les contraintes de coûts sur les instruments, ce travail collectif ne permet pas à la classe d'aboutir à la procédure la plus économique. L'enseignante, qui a ainsi permis à l'ensemble de la classe de concevoir que d'autres procédures que le mesurage étaient possibles, en appui sur une réflexion riche sur le concept de milieu d'un segment, laisse cette question en suspens, laissant à la charge des élèves l'identification des propriétés de perpendicularité visées.

### **Du prolongement de segments en droites**

Un troisième épisode nous semble particulièrement important du point de vue de ce travail collectif sur la figure, premier pas vers le partage de manières de voir et d'agir dans la situation. En voici un extrait de transcription.

79. Stéphanie : Y en a... Est-ce qu'il y en a qui ont tracé des droites sur la figure qui auraient pu les aider ? Est-ce qu'il y en a qui l'ont fait ? Kamila.
80. Kamila : Oui
81. Stéphanie : Tu as fait quoi ?
82. Kamila : J'ai tracé [inaudible] et l'autre je l'ai continué
83. Stéphanie : Ben vas-y. Viens nous montrer.
84. Kamila : Ben ici, j'ai démarré d'ici et j'ai continué [la diagonale incomplète du grand carré].

85. Stéphanie : Donc, ici c'est quoi ? [elle montre un segment de la diagonale]  
 86. E ? : L'angle.  
 87. Stéphanie : Est-ce que ça c'est une droite ?  
 88. Es : non un segment !  
 89. Stéphanie : Ici [elle pointe l'autre portion de diagonale] ?  
 90. Es : Un segment.  
 91. Stéphanie : Et Kamila elle a tracé ici [elle pointe la diagonale complète]. Donc elle a fait quoi ?  
 92. Es : elle a / elle a fait une ligne / droite  
 93. Stéphanie : oui, j'ai entendu la réponse.  
 94. Es : elle a fait une droite  
 [Stéphanie trace une ligne qui dépasse les extrémités de la diagonale]  
 95. Stéphanie : Donc le segment on l'a prolongé en quoi ?  
 96. E ? : Une droite.  
 97. Stéphanie : En une droite. On est tous d'accord ?  
 98. Es : oui.  
 (...)

103. Stéphanie : ça, vous auriez très bien pu le tracer sur votre figure, ça vous permet de comprendre ensuite rien en vous empêche de gommer.

En introduisant dans le milieu des élèves l'objet géométrique « droite », dont la référence se construit en lien avec l'action matérielle « prolonger des segments », l'enseignante ouvre une nouvelle fois les champs du *voir* et du *faire* des élèves. On peut penser que les élèves, collectivement, construisent en effet dans ce passage, sous l'impulsion progressive de l'enseignante, un agir-penser-parler spécifique à la géométrie et opératoire dans cette tâche de restauration. A l'issue de cet échange, ils peuvent entrevoir la possibilité de percevoir des propriétés d'alignement, d'appartenance voire d'incidence et de matérialiser ces propriétés en traçant les droites sous-jacentes utiles à la construction de la figure mais non apparentes sur la figure.

Cette phase de mise en commun se poursuit par un échange autour de l'utilisation de l'équerre. L'enseignante convient avec les élèves de règles d'usage des instruments : l'équerre ne doit servir que pour vérifier ou tracer des angles droits (ou droites perpendiculaires), il n'est pas permis d'utiliser les graduations de l'équerre, seule la règle graduée peut servir à mesurer des longueurs.

S'ensuit un rapide débat autour du nombre de points nécessaires à la restauration de la figure. Les élèves, qui ont en grand majorité utilisé quasi-exclusivement la mesure, disent avoir utilisé 176 points, 103 points, 180 points etc. Cette mise en commun intermédiaire se termine sur l'idée que la restauration peut se faire en 4 points, nouveau défi donné aux élèves, et que l'instrument le plus économique est l'équerre.

Une nouvelle fiche vierge du même problème est alors distribuée aux élèves qui se remettent individuellement au travail.

### 2.3 Une seconde procédure d'élève, après la mise en commun intermédiaire

Un élève a reconstruit une partie de la figure lors de la seconde phase de construction (après la mise en commun intermédiaire). Un expérimentateur lui demande comment il a effectué cette première partie, l'échange dure une minute. Nous le retranscrivons ici en en proposant une analyse.

Il est important de noter que la succession de l'analyse de l'échange avec un premier élève avant la mise en commun à propos de son travail, puis de l'analyse de la mise en commun, et enfin l'analyse de l'échange avec un (autre) élève à propos de son travail après la mise en commun ne peut bien sûr que nous livrer quelques indices quant à l'évolution de l'activité de quelques élèves, et ne permet pas de conclure sur l'influence de la mise en commun ou de l'ensemble de la séance sur l'activité des élèves ou d'un élève en particulier. La méthodologie employée pour cette séance ne permet pas une analyse plus fine.

Ces trois extraits nous semblent cependant significatifs du travail des élèves observés durant cette séance. En effet, d'un point de vue plus subjectif issu de l'impression globale après l'observation de ces séances en classe, les premières constructions mises en place par la plupart des élèves reposaient sur une



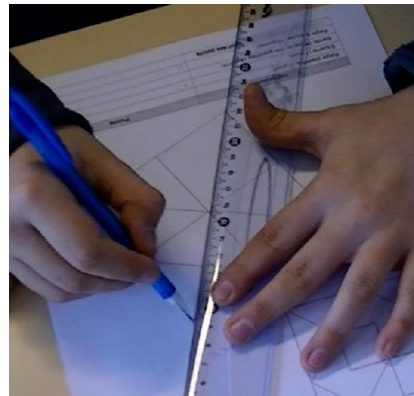
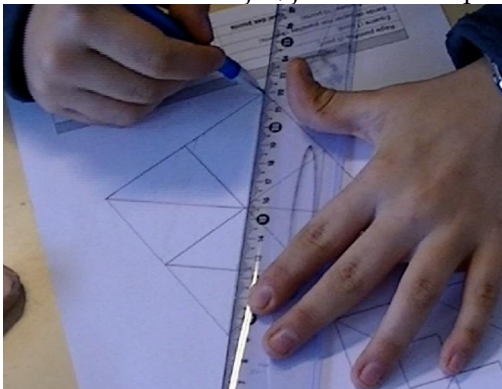
articulation entre différents regards sur la figure, de carrés juxtaposés et superposés à un jeu sur les sommets du carré moyen, aussi vus comme milieux des côtés du grand carré. Ces premières stratégies étaient largement ancrées dans des procédures de mesurage et les élèves ne mobilisaient pas les propriétés d'alignement, d'appartenance, d'incidence et les propriétés de perpendicularité sous-jacentes à cette figure comme un outil pour la restauration. En fin de séance, la possibilité de tracer des segments et des droites non apparentes sur la figure modèle est plus exploitée, le rôle de l'équerre et des propriétés de perpendicularité de la figure sont plus présentes, la notion de perpendicularité devient un outil. Ce sont ces constatations *in situ* qui ont guidé le choix des élèves dont on analyse le travail dans l'atelier.

Nous explicitons ici les analyses faites pendant l'atelier et celles pouvant être conduites dans le contexte théorique et méthodologique proposé.

01. Thomas : Est-ce que tu m'expliques comment tu as fait ?

La question de l'expérimentateur porte sur le « faire ». Les réponses vont amener l'élève à désigner des objets et s'exprimer par gestes. On verra que l'expérimentateur sera aussi amené à poser des questions sur le « dire » (comment nommer un objet).

02. Mathis : Bin j'ai, j'ai tracé de ce point-là à ce point-là, après...



[La règle est positionnée comme pour un tracé. L'élève désigne successivement les deux extrémités de l'amorce, puis revient à la première extrémité en suivant la diagonale<sup>6</sup>.

Que ce soit dans les mots ou dans les gestes, la diagonale est présentée comme une ligne (droite, le positionnement de la règle est systématique dans les explications de l'élève) joignant deux points, un segment. Le mot segment n'est pas prononcé. La présence des extrémités pour l'élève marque un regard sur la figure mettant en relation points et lignes.

03. Thomas : Comment ça s'appelle ça ?

La question porte sur le « dire ». La diagonale est désignée comme un objet (« ça »), alors que l'élève était resté dans la description de l'action. L'expérimentateur signifie, en quelque sorte, qu'il veut parler des objets géométriques.

04. Mathis : Bin... une ligne [écarte ses deux mains, le crayon et la règle pour regarder], après...

05. Thomas : Une diagonale, d'accord ?

06. Mathis : Une diagonale, après j'ai fait cette diagonale-là [parcourt la seconde diagonale d'une extrémité à l'autre, petits arrêts aux extrémités, puis parcourt dans l'autre sens]

07. Thomas : Oui

Le changement de mot semble laisser indifférent l'élève, il souhaite visiblement surtout raconter sa construction. On peut cependant penser (voir paragraphe précédent) que le mot « diagonale », désignant une ligne droite (ici segment), porte aussi en lui un certain nombre de relations géométriques entre les composants de la figure que ne porte pas le mot « ligne », il a un statut intermédiaire, entre l'objet 1D et partie d'une figure englobante 2D. En utilisant ce mot, l'élève intègre ces nuances dans son discours. Cette intégration se fait peut être à son insu, en tout cas pas de sa propre initiative, mais la construction du langage est d'abord sociale, au sein de l'apprentissage des pratiques mathématiques par exemple :

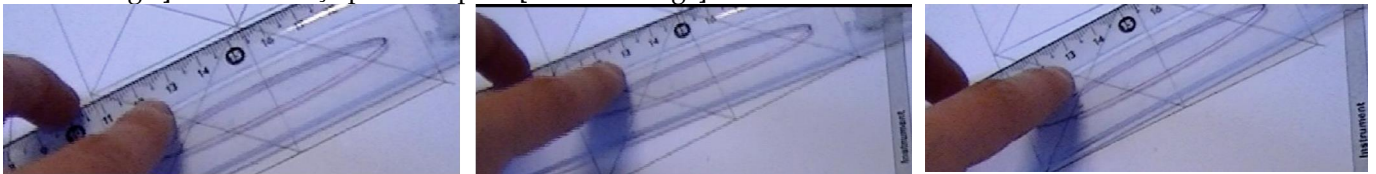
<sup>6</sup> De façon générale, dans la suite, il place toujours la feuille sous la règle pour que le tracé désigné soit à peu près « vertical », la règle est positionnée comme pour le tracé dont il parle, il montre les objets avec la pointe du crayon.

c'est aussi (en plus de l'apprentissage explicite fait sur le mot et le concept) en utilisant ce mot, en constatant les réactions de ses interlocuteurs ou leurs usages, que l'élève apprend à en cerner les contours, les sens, les règles d'utilisation. L'élève a d'ailleurs juste après un retour dans l'action sur l'usage de ce mot.

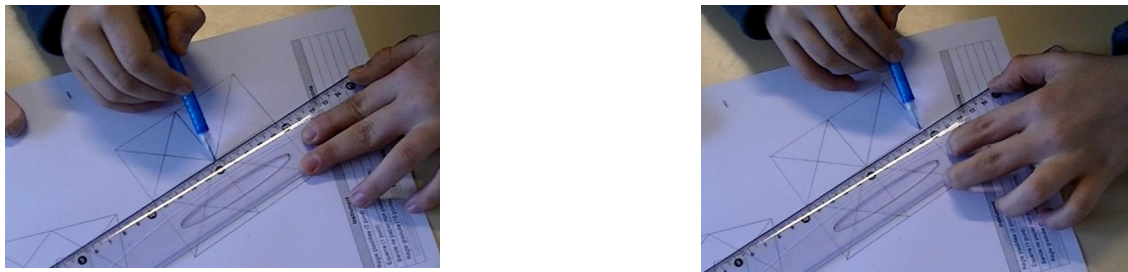
08. Mathis : Et après j'ai... J'ai fait cette diagonale-là [une médiane du grand carré<sup>7</sup>, parcourue une fois]
09. Thomas : Alors ça c'est pas tout à fait, c'est pas une diagonale, hein, les diagonales c'est d'un coin à un autre [parcourt la médiane avec le doigt en marquant un petit arrêt aux extrémités], d'un angle à un autre
10. Mathis : Cette ligne [parcourt à nouveau la médiane]
11. Thomas : Oui d'accord, elle n'a pas de nom celle-ci, une ligne, d'accord ?
12. Mathis : Et celle-là [rapidement parcourt la 2ème médiane]

Les extrémités des segments sont moins présentes, que ce soit dans les mots (absentes) ou dans le geste (moins marquées). À ce moment de l'échange, elles n'ont pas encore de statut géométrique (compte tenu de la suite de l'échange on peut penser qu'avant de tracer les médianes, l'élève avait placé les milieux des côtés du grand carré, il n'en a pas encore parlé ici). Ces segments ne sont, en quelque sorte, à ce moment-là de l'échange, que des lignes, ils n'ont pas de nom permettant de les distinguer ou de mettre en valeur telle ou telle de leurs propriétés. Leurs extrémités ont un statut flou, on peut même dire que, comme on ne parle pas des extrémités, le fait qu'il y ait des extrémités (ou que l'on ait à faire à un segment) n'est pas clair (« diagonale » et « ligne » qui désignent l'objet tracé peuvent aussi bien renvoyer à une droite ou un segment dans l'usage). On peut noter cependant que l'élève désigne les objets (« diagonales », et « lignes » ensuite), et non simplement le tracé comme au début de l'échange.

13. Thomas : Comment tu les as mises ? Pourquoi tu l'as mise, par exemple [prend la règle] tu me dis que tu l'as mise comme ça [sur la médiane] mais pourquoi tu ne l'as pas mise un petit peu comme ça ? [petit angle] Ou comme ça par exemple ? [autre décalage]



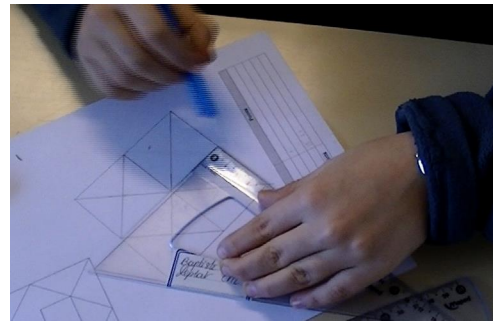
14. Mathis : Bin parce que j'ai suivi le point [montre le centre du carré] et après [montre le milieu d'un des côtés]



L'élève est à nouveau dans la description du faire. Cependant, si « j'ai suivi le point » donne une information sur l'action matérielle effectuée, cette expression exprime aussi des relations sous-jacentes entre points et droites de la figure tracée, à l'image de « j'ai tracé de ce point-là à ce point-là » (2).

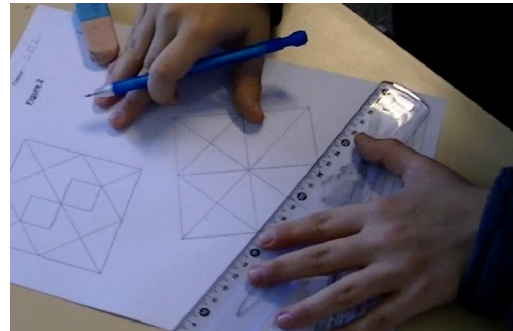
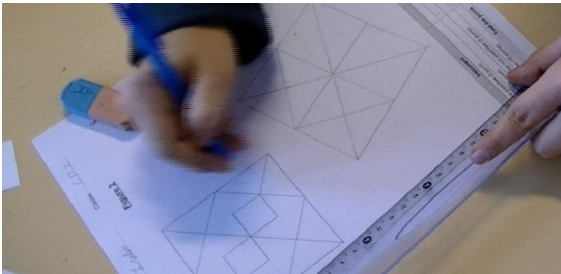
<sup>7</sup> On pourrait aussi remarquer que la médiane du grand carré est aussi la diagonale du carré moyen, peut-être l'élève pensait-il « carré moyen » en parlant de « diagonale » ici.

14. (suite) j'ai pris ma règle [écarte sa règle et prend son équerre, on peut penser qu'il s'agit d'un lapsus] et [désigne le milieu du côté] après j'ai, mon équerre,
15. Thomas : Oui
16. Mathis : Et j'ai mis le [désigne par de petits cercles la zone du milieu du grand côté, ne s'arrête pas sur le point]... Ça c'était droit, un angle droit, [l'angle droit de l'équerre est positionné le long de la médiane et du côté, l'élève parcourt du doigt l'angle droit de l'équerre]
17. Thomas : Tu as essayé de faire un angle droit



En faisant un lien avec l'analyse de la première séance, nous pouvons dégager ici la coexistence entre un regard centré sur l'angle droit conçu comme secteur angulaire (dans les mots « ça c'était droit, un angle droit » et dans le geste circulaire englobant une zone ou le coin de l'équerre) et un regard sur la double contrainte de la perpendicularité (dans le dire : séparation de « suivre un point » et de « ça c'était droit », et dans le faire, la façon de poser les instruments).

18. Mathis : et après, et après j'ai voulu faire le carré [pose son équerre, reprend sa règle, montre le contour du carré moyen sur la figure modèle]
19. Thomas : d'accord, ok, bon, ça marche [l'élève s'apprête à poursuivre son dessin en traçant un côté du carré moyen]



On voit dans cette dernière intervention (18) que l'élève peut parler de points et de lignes pour décrire ses actions, comme précédemment. Il a par ailleurs un regard global sur la figure et il a conscience de l'objectif de l'exercice : il est en train de faire en sorte de tracer le carré moyen (vision 2D plus globale). Cette analyse des interactions entre l'élève et l'expérimentateur donne ainsi des indices assez précis sur la nature de l'activité géométrique de l'élève et met en évidence différents regards de l'élève sur la figure. On voit que l'échange permet un travail sur les mots utilisés (exemple de diagonale / ligne), et donc sur les concepts sous-jacents, mais aussi sur le positionnement de l'élève (entre récit de gestes et construction géométrique). A l'instar des analyses précédentes, cette analyse nous laisse percevoir ici aussi les liens forts et complexes qui relient l'agir, le parler et le penser dans l'activité.

## 2.4 Conclusion de l'analyse de la deuxième séance

Pendant l'atelier, dans le bilan de l'analyse de cette seconde séance, l'accent est mis sur « l'analyse de la figure » et sur le langage dans les échanges entre un ou plusieurs élèves et un adulte (l'expérimentateur ou l'enseignante).

En appui sur l'analyse *a priori* du problème de restauration de figure, avec coût sur l'usage des instruments, les analyses *a posteriori* des trois moments choisis du déroulement effectif de cette séance s'attachent à décrire l'activité géométrique effective de quelques élèves. Ce travail illustre en particulier la manière dont on peut analyser l'agir-penser-parler des élèves à la fois sous la contrainte posée par le problème et dans des échanges verbaux au sein de la classe. La prise en compte simultanée d'une analyse en termes de déconstruction dimensionnelle, d'une analyse logique des concepts en jeu, d'une analyse des jeux de regards possibles (ici les navettes entre regards sur les figures englobantes, regards sur un réseau de lignes et de points, et les propriétés géométriques sous-jacentes) permet en particulier d'appréhender l'activité consistant à « analyser une figure géométrique », et ce aussi bien dans l'analyse *a priori* que lors du déroulement de la séance. Cette activité est centrale mais très naturalisée (et donc

difficile à expliciter, à expliquer) dans la pratique experte. Il est donc particulièrement intéressant d'avoir ici une proposition d'entrée dans cette activité (pour la décomposer, pour (se) l'expliquer, éventuellement l'enseigner etc.).

Les analyses des échanges lors des interactions élève - expérimentateur pendant les phases de travail individuel ou de ceux entre les élèves et l'enseignante lors de la mise en commun montrent également à quel point le langage verbal ne constitue pas seulement un média d'une pensée déjà là, mais est constitutif d'un agir - parler - penser qui se construit. On perçoit également bien que cette construction, autour de la confrontation à la tâche, est ici à la fois individuelle et fondamentalement sociale, collective. On constate aussi que, que ce soit concernant le parler ou l'agir, la compréhension qu'a chacun de la situation, de ce qu'expriment les autres, et le fait que chacun se fasse comprendre passe par des mots ou des gestes parfois approximatifs (et parfois non concordants entre eux au sein du collectif ou pour un même individu) mais souvent porteurs d'évolution. Cette évolution de l'agir - parler - penser correspondant, si on se réfère à nos hypothèses théoriques, est inhérent au processus d'apprentissage. Le protocole mis en place permet de décrire ces phénomènes.

---

## IV - CONCLUSION

---

Un premier objectif de notre expérimentation consistait à explorer les possibilités d'insertion de problèmes de restauration dans une progression autour de la notion de droites perpendiculaires. Que pouvons-nous retenir des analyses précédentes concernant l'articulation entre les deux séances présentées ?

L'enjeu du problème précédent (séance 1) était d'introduire le concept de droites perpendiculaires, à partir de la notion d'angle droit. La tâche consistait à construire des segments ou droites perpendiculaires pour compléter un rectangle tronqué. Les « traits » à tracer sur la pièce découpée et partiellement effacée étaient apparents sur la figure modèle du rectangle. Par l'intermédiaire d'un jeu sur les variables didactiques, ce problème visait à amener les élèves à modifier leur regard sur la figure rectangle, d'une vision en termes d'angle droit, vu comme propriété d'une figure (surface), à une vision en termes de droites perpendiculaires, relation entre deux objets de dimension 1. Le problème de restauration qui vient d'être analysée conduit les élèves à mobiliser ce concept pour la résolution d'un problème géométrique plus complexe. La notion de perpendicularité et les pratiques associées deviennent un outil au service de la résolution de la restauration d'une figure complexe, avec des contraintes posées sur l'usage des instruments. Ici, les traits, segments, droites à reproduire ne sont pas directement donnés sur la figure modèle. La tâche de restauration de cette figure va donc amener les élèves à analyser la figure, c'est-à-dire à identifier des réseaux de segments, points, droites sous-jacents à la construction de cette figure, à identifier les relations entre ces sous-éléments de dimension un ou zéro (notamment la perpendicularité) et à les utiliser pour reproduire un agrandissement de cette figure, à partir d'une amorce, via l'usage des instruments. La situation de restauration repose donc sur une capacité à une mobilité du regard sur les figures non seulement en termes de passage d'une vision en termes de surfaces (carrés superposés et juxtaposés) à une vision en termes de réseaux de lignes et de points, mais aussi en termes de jeu entre ces différentes manières de voir les sous-éléments 2D, 1D ou 0D identifiés de cette figure et sur les figures qui englobent ces sous-éléments. Pensée dans le cadre d'une progression, ce problème nous livre ainsi des pistes pour penser des sources de problèmes riches en géométrie permettant non seulement la mise en fonctionnement de la notion de droites perpendiculaires comme outil de résolution mais aussi un travail autour de l'analyse de figures complexes, activité centrale en géométrie, même après le primaire, dans des activités de preuve au collège par exemple.

L'expérimentation présentée dans cet atelier avait également pour objectif d'avancer dans l'élaboration d'outils permettant de saisir plus finement l'activité géométrique des élèves et les conditions de son évolution. L'approche que nous proposons consiste à penser le processus d'apprentissage en géométrie comme une acculturation vers un *agir-penser-parler* opératoire pour la résolution du problème posé,

partagé et spécifique à la géométrie. Dans le prolongement de travaux précédents (Bulf, Mathé & Mithalal, 2011 ; Barrier, Hache & Mathé, à paraître), ce point de départ nous a conduit à penser et mettre à l'épreuve une méthodologie d'analyse prenant en compte trois dimensions qui nous semblent à la fois consubstantielles et indissociables de l'activité géométrique : le *faire*, le *dire* et le *voir*. Nos analyses *a priori* consistent alors à mettre en lien une analyse logique des concepts d'angle droit et de droites perpendiculaires en jeu, articulée avec une analyse *a priori* des enjeux d'apprentissage des tâches proposées, notamment en termes de déconstruction et reconstruction dimensionnelles, et des manières de faire, de dire et de voir possibles. La grille d'analyse ainsi fournie nous livre un outil permettant de décrire et d'interpréter, de manière assez fine, l'activité géométrique effective des élèves, à un moment donné de la résolution des tâches proposées. Elle nous permet également de d'identifier des moments nous semblant décisifs dans l'évolution de ces activités d'élèves, vers le partage d'une pratique géométrique partagée et opératoire. Ce travail nous paraît avant tout mettre en évidence le rôle déterminant du langage à la fois dans les modalités d'interaction des élèves à la situation et dans les processus d'apprentissage inhérent à la résolution des tâches proposées. D'une part, le langage verbal est partie prenante de l'activité géométrique des élèves. Ainsi, l'insertion d'analyses de discours d'élèves, en articulation avec une analyse de leurs gestes et une analyse plus classique de leurs actions matérielles, nous permet une appréhension plus fine de l'activité géométrique des élèves en situation. D'autre part, les interactions verbales qui se développent autour de la résolution des problèmes géométriques constituent un lieu central de négociation vers des manières de faire, de dire et de voir conformes aux pratiques géométriques visées. L'analyse de la mise en commun intermédiaire de la seconde séance nous a en effet permis de saisir dans quelle mesure l'enrichissement du regard des élèves sur la figure, leur capacité à avancer dans l'analyse de la figure, à identifier de premiers sous-éléments de la figure et leurs relations s'opèrent non seulement par interaction des élèves avec la tâche et les contraintes posées sur actions matérielles des élèves, mais aussi dans les interactions langagières autour de ces actions matérielles réalisées. Articulée avec les réflexions menées sur les situations de restauration et le rôle d'un travail sur l'usage des instruments, cette démarche nous semble ainsi fournir des pistes vers des méthodologies d'analyse permettant de rendre compte solidairement des dimensions individuelle et sociale de l'apprentissage.

Ce travail est issu d'une réflexion très locale issue pour l'essentiel d'un besoin ressenti lors de l'analyse de quelques séances de classe portant pour l'essentiel sur le thème des droites perpendiculaires. Il est possible de s'interroger sur l'intérêt de ce type d'analyses dans d'autres contextes, en géométrie en particulier mais pourquoi pas dans d'autres domaines des mathématiques. Nous ne sommes bien sûr pas en mesure de répondre de manière définitive à cette question. Nous avons néanmoins déjà utilisé le même type d'analyses, reposant sur des analyses logiques des concepts dans d'autres circonstances. Barrier, Hache & Mathé (à paraître) s'intéresse par exemple à la description de l'activité d'élèves au cours d'une tâche dans laquelle ils sont amenés à construire un milieu, puis à tracer un cercle. Par ailleurs, ce colloque a donné une place centrale à la réflexion sur la déconstruction dimensionnelle des figures et sur la nécessité de maîtriser un jeu d'allers et de retours entre différentes figures englobantes pour un même objet géométrique dans la perspective notamment de la construction de raisonnement déductif (Perrin-Glorian, Mathé & Leclerc 2013). Il s'agit pour nous d'un indice favorable puisque la problématique du nombre et la nature des objets pris en compte par les élèves est centrale dans cette l'approche, comme souvent dans l'analyse logique des concepts mathématiques.

Enfin, ce travail constitue pour nous un point d'appui pour mettre en évidence la nécessité d'un enseignement de la géométrie à l'école qui dépasse la question récurrente dans les classes du vocabulaire et des techniques de tracé. La prise en compte de la nécessité de travailler la conceptualisation des notions géométriques est un enjeu de formation pour les professeurs des écoles.

---

**V - BIBLIOGRAPHIE**

---

BARRIER T., HACHE C. & MATHÉ A.C. (à paraître) Seeing - acting - speaking in geometry: a case study, in *Proceedings of CERME 8*, 2013, Antalya, Turkey.

BULF C., MATHÉ A.C, MITHALAL J. (2011) Language in geometry classroom, in *Proceeding of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7, 2011, Rzeszow, Poland)*.

CHARNAY R., DOUAIRE J. & AL. (2006) Apprentissages géométriques et résolution de problèmes, cycle 3, Ermel, Hatier.

DUVAL R., GODIN M., PERRIN-GLORIAN M.-J. (2005) Reproduction de figures à l'école élémentaire, 5-89, *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques 2004*, IREM de Paris.

DUVAL R. & GODIN M. (2005) Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N*, **76**, 7-27.

HACHE C. (2013) Langage mathématique à la transition primaire-collège, in *Actes du colloque COPIRELEM 2012*, Quimper.

IREM DE LILLE (2000) Travaux géométriques - Apprendre à résoudre des problèmes au cycle 3, CRPD Nord Pas-de-Calais.

JAUBERT M., REBIÈRE M., BERNIÉ J.P. (2003) L'hypothèse «communauté discursive» : d'où vient-elle ? Où va-t-elle ? *Cahiers Théodile*, **4**, 51-80.

MATHÉ A.C. (2012) Jeux et enjeux de langage dans la construction de références partagées en classe de géométrie, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **32.2**, La Pensée Sauvage édition.

OFFRE B., PERRIN-GLORIAN M.J. & VERBAERE O. (2007) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2, *Grand N*, **77**, 7-34.

PERRIN-GLORIAN M.J., MATHÉ A.C., LECLERC R. (2013) Comment penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères-IREM*, **90**, 7-41.

RADFORD L. (2013) Perceiving with the eyes and with the hands. *REPIME*, **3(1)**, 56-77.