



HAL
open science

Graphes p-dynamiques

Ahmed Mouhamadou Wade, Bertrand Ducourthial

► **To cite this version:**

Ahmed Mouhamadou Wade, Bertrand Ducourthial. Graphes p-dynamiques. ALGOTEL - 17èmes Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques des Télécommunications, Jun 2015, Beaune, France. hal-01147181

HAL Id: hal-01147181

<https://hal.science/hal-01147181v1>

Submitted on 29 Apr 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Graphes p -dynamiques

Ahmed Mouhamadou Wade¹ and Bertrand Ducourthial^{1 †}

¹*Sorbonnes Universités, Université de Technologie de Compiègne,
CNRS, Heudiasyc, Centre de Recherche Royallieu, CS 60319, 60203 Compiègne Cedex, France*

La dynamique d'un réseau dépend à la fois de la mobilité de ses nœuds et de la capacité de son protocole de communication. Nous proposons de modéliser les réseaux dynamiques avec des graphes p -dynamiques, qui sont définis par une séquence de graphes dont les arêtes permettent de transférer p -messages successifs. Nous montrons que chaque réseau dynamique définit une unique famille finie de graphes p -dynamiques pour différentes valeurs de p . Cette modélisation permet de caractériser et de comparer les réseaux dynamiques de nature très différente.

Keywords: système distribué, réseaux dynamiques, routage, VANET

1 Introduction

Problème. Un réseau mobile dynamique est caractérisé par i) la mobilité de ses nœuds et ii) leur moyen de communication. D'un point de vue algorithmique, les deux critères sont importants. En effet, ce n'est pas parce que les nœuds d'un réseau se déplacent très vite que l'algorithme réparti échouera : tout dépend de la quantité de données échangées entre deux voisins avant qu'ils ne s'éloignent l'un de l'autre. Inversement, dans un réseau présentant une faible mobilité des nœuds mais utilisant un moyen de communication de faible capacité, un algorithme distribué pourrait avoir des difficultés à atteindre son objectif parce que très peu de données sont échangées entre chaque changement de voisinage.

Cela pourrait se résumer comme suit : exécuter un algorithme réparti dans un réseau d'escargots qui utilisent leurs antennes pour communiquer est-il plus « facile » qu'exécuter le même algorithme dans un réseau de véhicules à très grande vitesse qui utilisent le protocole IEEE 802.11p pour communiquer ?

Contribution. Pour aborder ce problème, nous introduisons la notion de *graphe p -dynamique*, qui est une séquence de graphes successivement observés durant l'exécution, telle que la durée de chaque arête est suffisante pour envoyer p messages successifs. Nous montrons que chaque réseau dynamique définit une unique famille finie de graphes p -dynamiques pour différentes valeurs de p . Cette modélisation prend en compte à la fois la mobilité et la performance du moyen de communication. Elle permet d'établir des conditions sur la dynamique pour assurer le succès d'un algorithme donné. Ce faisant, elle permet de comparer la faculté de deux systèmes (de nature différente) à assurer le succès d'un algorithme donné.

État de l'art. Les réseaux dynamiques ont d'abord été étudié pour leurs propriétés structurelles [1, 6]. La notion de *evolving graph* proposée par [2, 5] permet d'étudier les évolutions dans le temps de la topologie. Par exemple, la *journey* est un chemin dans la séquence de topologies successives. Les *temporal reachability graphs* sont définis dans [11] en considérant une arête dès lors qu'une *journey* existe entre les extrémités. Par comparaison, notre modèle repose sur une famille de graphes dynamiques, chacun d'eux permettant d'envoyer un nombre donné de messages par arête.

Un certain nombre de travaux se sont penchés sur la relation entre l'algorithmique répartie et la dynamique. Dans [3], des calculs répartis locaux basés sur des renumérotations de graphes et des *evolving graphs* sont utilisés pour analyser et comparer des algorithmes répartis. Dans [4], une synthèse est proposée avec un modèle unifié dénommé *Time-Varying Graph* (TVG). Plusieurs classes de TVG sont identifiées et l'impact de leurs propriétés sur les algorithmes répartis est étudié. Dans [10], les TVG sont modélisés avec

[†]Ce travail est en parti supporté par le projet Celtic Plus CoMoSeF (Cooperative Mobility Services of the Future).

un quadruplet $G_d = (V, E, T, \Phi)$, incluant l'ensemble des dates T et considérant les dates de début et de fin de chaque arête. Par comparaison, notre modèle s'abstrait de la notion de temps et s'avère plus approprié pour les preuves d'algorithmes réparties.

2 Graphes temporels

Nous définissons les graphes temporels pour ensuite définir les graphes p -dynamiques. Dans un réseau dynamique, deux nœuds peuvent être proches sans pour autant avoir le temps nécessaire pour échanger un seul message avant de s'éloigner. Nous définissons alors le temps nécessaire pour échanger des messages.

Définition 1 *La durée de transfert est une fonction $\delta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\delta(p)$ est égal au temps nécessaire pour transférer p messages successifs entre deux nœuds.*

Cette fonction dépend de la technologie de communication utilisée. Nous avons la proposition suivante.

Proposition 1 *Soit $\delta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de durée de transfert. Alors nous avons $\delta(p) \leq p \times \delta(1)$.*

Preuve Pour envoyer p messages successifs, nous pouvons les envoyer un par un sur le même lien. D'après la déf. 1, envoyer un message prend au plus $\delta(1)$ unités de temps. Alors pour envoyer p messages un par un, nous avons besoin d'au plus $p \times \delta(1)$ unités de temps. \square

En utilisant la fonction de durée de transfert, nous introduisons l'*arête p -temporelle* pour modéliser le fait qu'à une date donnée, il était possible de transférer p messages entre deux nœuds. Pour cela, nous introduisons un observateur imaginaire externe qui est en mesure de noter tous les événements dans le réseau dynamique. L'observateur utilise sa propre horloge pour dater les événements (les nœuds n'ont pas d'horloge globale et restent asynchrones). En consignait l'apparition et la disparition des arêtes à la date t_i ($i \in \mathbb{N}, t_i \in \mathbb{R}^+$), il produit une *observation* constituée par une séquence de graphes $(G_{t_0}, G_{t_1}, G_{t_2}, \dots)$. Pour simplifier, nous notons l'observation (G_0, G_1, G_2, \dots) avec G_i le graphe observé à la date t_i , de sorte que chaque arête consignée dans l'un de ces graphes a durée au moins $\delta(1)$ unités de temps.

Définition 2 *Considérons un réseau dynamique et sa fonction de durée de transfert δ . Une arête p -temporelle notée $(u, v)^{t_i, p}$ est observée entre les nœuds u et v au temps $t_i \geq \delta(p)$ si et seulement si l'arête (u, v) est présente durant tout l'intervalle de temps $[t_i - \delta(p), t_i]$.*

Notons que même s'il existe une arête p -temporelle $(u, v)^{t_i, p}$ au temps t_i , une communication pourrait échouer entre les nœuds u et v parce que d'autres conditions de communication ne sont pas remplies. La durée est seulement l'une des conditions nécessaires à l'établissement d'une communication.

Dans un réseau dynamique, si p est trop grand, aucune arête p -temporelle ne sera observée. Cela veut dire qu'aucun lien de communication ne dure assez longtemps pour envoyer p messages successifs. De même, si $\delta(1)$ est très grand (protocole de transfert de données peu efficace), alors aucune arête 1-temporelle ne sera observée. Cela signifie que toute tentative de communication serait un échec dans le réseau dynamique. Par conséquent, à partir d'un moyen de communication donné, nous pouvons calculer la vitesse maximale des nœuds permettant de communiquer. Réciproquement, à partir d'une vitesse des nœuds donnée, nous pouvons calculer la fonction de la durée maximale de transfert, puis en déduire le type de moyen de communication possible. À partir des arêtes p -temporelles, nous introduisons les *graphes p -temporels*.

Définition 3 *Le graphe p -temporel à la date t_i noté G_i^p est défini par la paire $(V, E^{t_i, p})$, où V est un ensemble fixe de nœuds et $E^{t_i, p}$ est l'ensemble des arêtes p -temporelles observées entre les nœuds à la date $t_i \geq \delta(p)$. Notons par $\mathcal{G}^p = (G_0^p, G_1^p, G_2^p, \dots)$, $p \in \mathbb{N}^*$ la séquence de tous les graphes p -temporels observés.*

Remarquons que chaque graphe p -temporel est obtenu par l'intersection[‡] de p graphes successifs de l'observation : $G_i^p = G_i \cap G_{i+1} \cap \dots \cap G_{i+p}$, $\forall i \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}^*$. Par ailleurs, si une arête permet d'envoyer p messages, elle permet aussi d'envoyer $p' < p$ messages. Nous avons donc la proposition suivante :

Proposition 2 *Pour tout observation et pour tout $t_i \in \mathbb{R}^+$, $p, p' \in \mathbb{N}^*$ donnés, nous avons $G_i^p \subseteq G_i^{p'}$ si $p' < p$.*

La proposition suivante donne une condition pour avoir des arêtes statiques dans un réseau dynamique.

‡. Par la suite, l'intersection \cap et l'inclusion \subseteq de graphes portent sur les ensembles d'arêtes, non de sommets.

Proposition 3 *S'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{G}^p = \mathcal{G}^{p+1}$ alors, $\forall q \in \mathbb{N}^*, q > p \Rightarrow \mathcal{G}^q = \mathcal{G}^p$.*

Preuve Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{G}^p = \mathcal{G}^{p+1}$. Cela signifie que $\forall i \in \mathbb{N}, G_i^p = G_i^{p+1}$. Par définition nous avons, $G_i^p = G_i \cap \dots \cap G_{i+p}$. De même, nous avons $G_{i+1}^p = G_{i+1} \cap \dots \cap G_{i+p+1}$ et $G_i^{p+1} = G_i \cap G_{i+1} \cap \dots \cap G_{i+p+1}$. Donc $G_i^p \cap G_{i+1}^p = G_i \cap G_{i+1} \cap \dots \cap G_{i+p} \cap G_{i+p+1}$. On en déduit que $G_i^p \cap G_{i+1}^p = G_i^{p+1}$ et donc $G_i^p \subseteq G_{i+1}^p, \forall i \in \mathbb{N}$.

Remarquons que $\mathcal{G}^p = \mathcal{G}^q$ signifie que, pour tout entier $i, G_i^p = G_i^q$. Toujours d'après la définition 3, nous avons : $G_i^q = G_i \cap G_{i+1} \cap \dots \cap G_{i+p} \cap G_{i+p+1} \cap \dots \cap G_{i+q}$, ce qui conduit à $G_i^q = G_i^p \cap G_{i+1}^p \cap \dots \cap G_{i+q-p}^p$. En utilisant le résultat précédent ($G_i^p \subseteq G_{i+1}^p, \forall i \in \mathbb{N}$), on obtient $G_i^q = G_i^p, \forall i \in \mathbb{N}$. D'où $\mathcal{G}^p = \mathcal{G}^q$, ce qui conclut la preuve. \square

3 Graphes p -dynamiques

Définition. Partant de la définition des graphes p -temporels, nous définissons les *graphes p -dynamiques*. Leur définition ne repose pas sur le temps, ce qui s'avère plus pratique pour l'étude des propriétés des algorithmes répartis. Rappelons qu'un *graphe dynamique* sur un ensemble de sommets V noté par $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est défini par la séquence infinie de graphes « statiques » $G_k(V, E_k)$ avec $E_k \subset V \times V$. Cette modélisation est bien adaptée à l'étude des propriétés structurelles d'un réseau dynamique [5] mais admet des limitations pour les propriétés des algorithmes répartis. Pour définir les graphes p -dynamiques à partir des graphes p -temporels sans les temps de référence, nous introduisons les *intervalles de stabilité*.

Définition 4 *Considérons la séquence de graphes p -temporels $(G_i^p)_{i \in \mathbb{N}}$ provenant d'une observation. L'intervalle de stabilité I^p de $(G_i^p)_{i \in \mathbb{N}}$ est la séquence d'intervalles de temps $I^p = [t_0, t_1[, [t_1, t_2[, \dots$ définie par :*

- $t_0 = 0$;
- pour chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$ de I^p et pour chaque date $t_j \in [t_i, t_{i+1}[$, le graphe p -temporel à la date t_j est égal au graphe p -temporel à la date t_i : $G_j^p = G_i^p$;
- $G_{i+1}^p \neq G_i^p$.

En utilisant les intervalles de stabilité, nous définissons le graphe p -dynamique de l'observation. C'est un graphe dynamique (une séquence de graphe) tel que chaque arête permet d'envoyer p messages successifs.

Définition 5 *Considérons une séquence de graphes p -temporels $(G_i^p)_{i \in \mathbb{N}}$ provenant d'une observation et ses intervalles de stabilité $I^p = [t_0, t_1[, [t_1, t_2[, \dots$. Le graphe p -dynamique est défini par la séquence $\overline{\mathcal{G}}^p = (G_i^p)_{i \in \mathbb{N}}$ tel que chaque graphe G_i^p est le graphe observé au temps t_i .*

Notons que par définition, le graphe p -dynamique $\overline{\mathcal{G}}^p$ est égal au graphe p -temporel \mathcal{G}^p sans qu'il y ait deux graphes identiques consécutifs dans la suite de graphes statiques qui composent \mathcal{G}^p . Le graphe p -dynamique permet de capturer à la fois le mouvement des nœuds et les performances du moyen de communication.

Famille de graphes p -dynamiques. D'après la définition des graphes p -dynamiques, un réseau dynamique admet, pour tout entier $p > 0$, un unique graphe p -dynamique $\overline{\mathcal{G}}^p$. Dans la définition suivante, nous allons introduire la famille des graphes p -dynamiques en considérant tous les entiers possibles.

Définition 6 *La famille des graphes p -dynamiques \mathcal{F} d'un réseau dynamique est la séquence de graphes p -dynamiques $\mathcal{F} = ((\overline{\mathcal{G}}^p)_{p \in \mathbb{N}^*})$ tel que $\mathcal{G}^p \neq \mathcal{G}^{p+1}, \forall p \in \mathbb{N}^*$.*

Proposition 4 *Pour tout réseau dynamique donné, la famille des graphes p -dynamiques est finie.*

Preuve Tout d'abord, notons que pour toute observation donnée et pour tout entier p , le graphe p -dynamique $\overline{\mathcal{G}}^p$ est égal au graphe p -temporel \mathcal{G}^p sans répétition successive de graphes statiques qui composent \mathcal{G}^p . Donc pour prouver que la famille \mathcal{F} des graphes p -dynamiques d'une observation donnée est finie, nous allons prouver que l'ensemble des graphes p -temporels de l'observation $\{\mathcal{G}^p\}_{p \in \mathbb{N}^*}$ est fini.

De la proposition 2, nous déduisons que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \mathcal{G}^{p+1} \subseteq \mathcal{G}^p$.

1. Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{G}^{p+1} = \mathcal{G}^p$.

Dans ce cas, d'après la prop. 3 ; nous avons $\forall q \in \mathbb{N}^*, q > p \Rightarrow \mathcal{G}^q = \mathcal{G}^p$. La famille est donc finie et $\overline{\mathcal{G}}^p$ en est le dernier élément (les arêtes de $\overline{\mathcal{G}}^p$ permettent l'envoi d'un nombre infini de messages).

2. Supposons qu'il n'existe pas $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{G}^{p+1} = \mathcal{G}^p$. Nous avons alors : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \mathcal{G}^{p+1} \subset \mathcal{G}^p$. Rappelons que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, le graphe dynamique \mathcal{G}^p est défini par une suite de graphes (statiques) $\mathcal{G}^p = (G_0^p, G_1^p, \dots)$ tel que chacun d'eux est défini sur un ensemble fixe de sommets. Donc chaque graphe statique a un nombre fini d'arêtes. Si $\forall p \in \mathbb{N}^* \mathcal{G}^{p+1} \subset \mathcal{G}^p$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $G_i^{p+1} \subset G_i^p$. Il existe donc un entier p tel que : \mathcal{G}^q est vide si $q > p$. Le graphe p -dynamique $\overline{\mathcal{G}}^p$ est donc le dernier élément de la famille, qui est donc finie. \square

Ainsi, tout réseau dynamique, quel que soit la mobilité de ses nœuds et les performances de sa technologie de communication, peut se modéliser par une famille finie de graphes p -dynamiques, qui est la séquence des graphes p -dynamiques non vides ordonnée selon les entiers p croissants.

Application. Faute de place, nous donnons l'intuition uniquement. Considérons deux réseaux dynamiques R_1 et R_2 ne donnant pas les mêmes familles \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 . Alors il existe des algorithmes répartis qui fonctionneront dans R_1 mais pas dans R_2 . En effet, il suffit de considérer le protocole qui envoie un acquittement après la réception de p messages successifs sur un lien. Si l'un des graphes p -dynamiques diffère entre \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 , alors au moins une arête n'aura pas la même durée de vie, mettant alors en défaut le protocole.

À l'inverse, considérons un algorithme réparti qui n'atteint pas ses spécifications dans R_2 alors qu'il les atteint dans R_1 . En l'absence de toute panne et toute chose égale par ailleurs, une communication réalisée dans R_1 n'a pu se faire dans R_2 . Donc une arête n'existait pas ou n'a pas permis d'échanger le même nombre de messages avant sa disparition. Les familles \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont donc différentes.

Outre ces comparaisons, nous pouvons montrer qu'aucun algorithme ne peut donner une description valide de la topologie à q sauts d'un réseau dynamique si $\mathcal{G}^q \neq \mathcal{G}^{q-1}$.

4 Conclusion

Nous avons proposé de modéliser les réseaux dynamiques par une unique famille finie de graphes p -dynamiques. Cette modélisation prend en compte la mobilité des nœuds et le moyen de communication. Elle permet d'inférer des propriétés des algorithmes en fonction de la dynamique, et de comparer des systèmes de nature différente.

Références

- [1] P. Borgnat, E. Fleury, J.-L. Guillaume, and C. Robardet. Characteristics of the dynamic of mobile networks. In *Proc. BIONETICS 2009*, vol. 6811, pages 130–139.
- [2] B.-M. Bui-Xuan, A. Ferreira, and A. Jarry. Computing shortest, fastest, and foremost journeys in dynamic networks. In *journal IJFCS*, 14(2) :267–285, 2003.
- [3] A. Casteigts, S. Chaumette, and A. Ferreira. Distributed computing in dynamic networks : Towards a framework for automated analysis of algorithms. *CoRR*, abs/1102.5529, 2012.
- [4] A. Casteigts, P. Flocchini, W. Quattrociocchi, and N. Santoro. Time-varying graphs and dynamic networks. In *Proc. ADHOC-NOW 2011*, pp. 346–359.
- [5] A. Ferreira. Building a reference combinatorial model for MANETs. *IEEE Network*, 18(5) :24–29, 2004.
- [6] F. Harary and G. Gupta. Dynamic graph models. *Mathematical and Computer Modelling*, 25(7) :79 – 87, 1997.
- [7] F. Kuhn, N. Lynch, and R. Oshman. Distributed computation in dynamic networks. In *Proceedings of the 42nd ACM symposium on Theory of computing*, STOC '10, pages 513–522, New York, NY, USA, 2010. ACM.
- [8] Julian Monteiro, Alfredo Goldman, and Afonso Ferreira. Performance evaluation of dynamic networks using an evolving graph combinatorial model. *WiMob*, 2006.
- [9] R. O Dell and R. Wattenhofer. Information dissemination in highly dynamic graphs. *DIALM-POMC 2005*.
- [10] Klaus Wehmuth, Eric Fleury, and Artur Ziviani. A New Model for Time-Varying Graphs. In *Temporal and Dynamic Networks : From Data to Models*, , March 2013.
- [11] J. Whitbeck, M. Dias de Amorim, V. Conan, and J.-L. Guillaume. Temporal reachability graphs. *Mobicom 2012*.