



**HAL**  
open science

## Travaux de Husain et al. sur la continuité automatique des caractères

Mohammed El Azhari

► **To cite this version:**

Mohammed El Azhari. Travaux de Husain et al. sur la continuité automatique des caractères. *Matem-  
atychni Studii*, 2016, 45 (2), pp.205-212. hal-01144875v3

**HAL Id: hal-01144875**

**<https://hal.science/hal-01144875v3>**

Submitted on 22 Jan 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Travaux de Husain et al. sur la continuité automatique des caractères

M. El Azhari

**Abstract.** We give a survey of Husain, Ng and Liang's results concerning the automatic continuity of algebra homomorphisms. We also give the improvements obtained by Joseph, Akkar, Oudadess, Zelazko and ourselves.

*Mathematics Subject Classification 2010:* 46H40.

*Key words:* automatic continuity of algebra homomorphisms.

## I. Introduction

Nous donnons un aperçu des résultats de T. Husain, S. B. Ng et J. Liang concernant la continuité ou la bornitude des homomorphismes d'algèbres. Nous donnons aussi les améliorations apportées par G. A. Joseph, M. Akkar, M. Oudadess, W. Zelazko et nous mêmes (cf. [2], [3], [15], [18] et [20]).

Nous obtenons d'abord un théorème (théorème III.1.6) de continuité séquentielle des homomorphismes sur les algèbres séquentielles. Ce théorème recouvre et généralise les résultats de T. Husain et S. B. Ng ([12, théorème 1]), G. A. Joseph ([15, théorème 2.1]), M. Oudadess ([18, théorème 5.2]), et T. Husain ([6, théorème 2]).

Ensuite, Nous obtenons un théorème (théorème III.3.3) de continuité automatique sur les algèbres réelles. Comme conséquence, on a deux résultats de T. Husain et S. B. Ng ([11, théorème 1] et [10, théorème 1]).

Dans la dernière partie consacrée aux algèbres à bases, nous donnons deux nouvelles preuves du résultat de T. Husain et J. Liang affirmant que si  $A$  est une algèbre de Fréchet à base orthogonale et inconditionnelle, alors tout caractère de  $A$  est continu.

## II. Préliminaires

### II.1. Algèbres topologiques

Une algèbre topologique est une algèbre (sur  $K = R$  ou  $C$ ) munie d'une topologie séparée, compatible avec sa structure d'espace vectoriel et pour laquelle la multiplication est séparément continue. Une algèbre topologique est dite localement convexe (en abrégé a.l.c.) si elle munie d'une topologie d'espace localement convexe (en abrégé e.l.c.). Si elle métrisable et complète, on dit que c'est une  $B_0$ -algèbre. Une algèbre topologique  $A$  est dite localement multiplicativement convexe (en abrégé a.l.m.c.) si  $A$  est munie d'une topologie définie

par une famille  $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  de semi-normes d'espace vectoriel vérifiant en outre  $p_\lambda(xy) \leq p_\lambda(x)p_\lambda(y)$  pour tout  $\lambda \in \Lambda$  et tous  $x, y$  in  $A$ . Une a.l.m.c complète métrisable est dite une algèbre de Fréchet. Soit  $A$  une algèbre topologique, on note par  $M(A)$  l'ensemble des caractères continus (non nuls) de  $A$ .

Soient  $A$  une a.l.c. et  $\beta_A$  l'ensemble des bornés, absolument convexes, fermés, idempotents de  $A$ . Pour chaque  $B \in \beta_A$ , on note par  $A_B$  le sous espace vectoriel engendré par  $B$ ,  $A_B$  munie de la jauge  $\|\cdot\|_B$  est une algèbre normée. Si  $(A_B, \|\cdot\|_B)$  est complète pour tout  $B \in \beta_A$ , on dit que  $A$  est pseudocomplète.

## II.2. Algèbres infraséquentielles et rayon de régularité

Soit  $A$  une algèbre topologique.

- (i)  $A$  est fortement séquentielle s'il existe un voisinage  $U$  de 0 tel que, pour tout  $x \in U$ ,  $x^k \rightarrow_k 0$ .
- (ii)  $A$  est séquentielle si pour toute suite  $(x_n)_n, x_n \rightarrow_n 0$ , il existe un  $x_m$  tel que  $x_m^k \rightarrow_k 0$ .
- (iii)  $A$  est infraséquentielle si, pour tout borné  $B$  de  $A$ , il existe  $\lambda > 0$  tel que, pour tout  $x$  de  $B$ ,  $(\lambda x)^k \rightarrow_k 0$

On a (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii).

Soit  $A$  une a.l.c. Pour  $x \in A$ , on pose:

$$\beta(x) = \inf\{r > 0 : ((r^{-1}x)^n)_n \text{ est bornée}\}, \text{ où } \inf \emptyset = \infty.$$

$\beta(x)$  est la régularité de  $x$  et  $\beta$  le rayon de régularité. Un élément  $x$  est régulier si, et seulement si,  $\beta(x) < \infty$ . D'après [4], on a:

- (1)  $\beta(\lambda x) = |\lambda|\beta(x)$  pour tous  $x \in A$  and  $\lambda \in K$ ;
- (2)  $\infty > |\lambda| > \beta(x)$  entraîne  $(\lambda^{-1}x)^n \rightarrow_n 0$ .

Soit  $A$  une a.l.c. D'après [18], on a:

- (i)  $A$  est infraséquentielle si, et seulement si,  $\beta$  est borné;
- (ii)  $A$  est séquentielle si, et seulement si, pour toute suite  $(x_n)_n$  convergeant vers 0, il existe un certain  $m$  tel que  $\beta(x_m) < 1$ .
- (iii)  $A$  est fortement séquentielle si, et seulement si,  $\beta$  est continue.

## II.3. Algèbres topologiques à bases

Soit  $E$  un espace vectoriel topologique (en abrégé e.v.t.).  $E$  est dit à base s'il existe une suite  $(x_i)_{i \geq 1}$  d'éléments de  $E$  telle que pour tout  $x$  de  $E$  il existe une

suite complexe unique  $(\alpha_i)_{i \geq 1}$  tel que  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ . Pour chaque  $i \geq 1$ , l'application linéaire  $c_i : E \rightarrow C$ ,  $c_i(x) = \alpha_i$ , est appelée fonction coordonnée.  $(x_i)_{i \geq 1}$  est dite une base inconditionnelle de  $E$  si  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha_i x_i \in E$  dès que  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in E$  et  $|a_i| \leq 1$ .

Soit  $A$  une algèbre topologique à base  $(x_i)_{i \geq 1}$ , on dit que la base  $(x_i)_{i \geq 1}$  est orthogonale si  $x_i x_j = \delta_{ij} x_i$  pour tous  $i \geq 1$  et  $j \geq 1$ , où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.

Soit  $E$  un espace de Fréchet dont la topologie est définie par la famille  $\{\|\cdot\|_r : r \in N\}$  de seminormes et soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une base inconditionnelle de  $E$ . Soient  $f \in E'$  (le dual topologique de  $E$ ) et  $x \in E$ ,  $\sup_{f \in \Lambda_r} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)| |f(x_n)| < \infty$ , où  $\Lambda_r = \{f \in E' : \sup_{\|x\|_r \leq 1} |f(x)| \leq 1\}$ . Posons  $\|x\|'_r = \sup_{f \in \Lambda_r} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(x)| |f(x_n)|$ , alors  $\{\|\cdot\|'_r : r \in N\}$  est une famille de seminormes définissant la topologie originale de  $E$ .

### III. Sur les travaux de Husain, Ng et Liang

#### III.1. Algèbres séquentielles

Dans [12], T. Husain et S. B. Ng considèrent les algèbres séquentielles et donnent les résultats suivants:

**Théorème III.1.1([12]).** Soit  $A$  une a.l.c. séquentiellement complète. Si  $A$  est séquentielle, alors tout caractère de  $A$  est borné.

**Corollaire III.1.2([12]).** Soit  $A$  une  $B_0$ -algèbre séquentielle, alors tout caractère de  $A$  est continu.

La démonstration du théorème III.1.1 est assez longue, elle repose sur le fait suivant: étant donné  $z \in A$  tel que  $z^k \rightarrow_k 0$ , on construit une algèbre de Banach commutative  $(B, \|\cdot\|)$  telle que  $B \subset A$ ,  $z \in B$  et  $\|z\| \leq 1$ .

Dans [15], G. A. Joseph donne une démonstration courte du théorème III.1.1 en utilisant quelques notions bornologiques dues à G. R. Allan. Le résultat de G. A. Joseph est le suivant:

**Théorème III.1.3([15]).** Soit  $A$  une a.l.c. pseudocomplète. Si  $A$  est séquentielle, alors tout caractère de  $A$  est borné.

Le théorème III.1.3 constitue une amélioration du théorème III.1.1.

**Remarque.** Etant donné  $z \in A$  tel que  $z^k \rightarrow_k 0$ . Soit  $C_z = \{z, z^2, \dots, z^n, \dots\}$ ,  $C_z$  est un borné idempotent. On considère  $F$  la fermeture de l'enveloppe disquée de  $C_z$ , alors  $(A_F, \|\cdot\|_F)$  est une algèbre de Banach commutative telle que  $A_F \subset A$ ,  $z \in A_F$  et  $\|z\|_F \leq 1$ , ainsi une bonne partie de la démonstration de Husain et Ng est simplifiée.

Dans [18], M. Oudadess caractérise les algèbres séquentielles à l'aide du rayon de régularité. Comme conséquence, il obtient le résultat suivant:

**Théorème III.1.4([18]).** Soit  $A$  une a.l.c. séquentielle et pseudocomplète. Alors tout caractère de  $A$  est séquentiellement continu.

Le théorème III.1.4 recouvre et généralise les théorèmes III.1.1 et III.1.3. Dans [6], T. Husain donne le résultat suivant:

**Théorème III.1.5([6]).** Soient  $A, B$  deux a.l.c. séquentiellement complètes,  $A$  étant séquentielle et  $B$  satisfait à la condition suivante:

(C): Pour toute suite  $(y_n)_n$  dans  $B$ ,  $y_n \neq 0$ ,  $y_n \rightarrow 0$ , il existe une suite  $(f_m)_m$  de caractères de  $B$  tel que  $\inf_{n,m} |f_m(y_n)| = \epsilon > 0$ .

Alors tout homomorphisme  $T : A \rightarrow B$  est séquentiellement continu.

Le théorème III.1.4 ne peut pas se déduire du théorème III.1.5 car le corps des complexes  $C$  ne satisfait pas à la condition (C), en effet soit  $(y_n)_n$  la suite de  $C$  définie par  $y_n = \frac{1}{n}$  si  $n$  est pair et  $y_n = 1$  si  $n$  est impair. Il est clair que  $y_n \neq 0$  et  $y_n \rightarrow 0$ . Pour toute suite de caractères de  $C$ , on a  $\inf_{n,m} |f_m(y_n)| = 0$  car pour tout  $m$ ,  $f_m$  est ou bien l'application nulle ou bien l'application identique.

En modifiant la condition (C) par la condition (D), on obtient un théorème qui recouvre et généralise les théorèmes III.1.1, III.1.3, III.1.4 et III.1.5.

**Théorème III.1.6.** Soient  $A, B$  deux a.l.c.,  $A$  étant séquentielle et pseudocomplète et  $B$  satisfait à la condition suivante:

(D): Pour toute suite  $(y_n)_n$  dans  $B$ ,  $y_n \neq 0$ ,  $y_n \rightarrow 0$ , il existe un caractère  $f$  de  $B$  tel que  $f(y_n) \rightarrow 0$ .

Alors tout homomorphisme  $T : A \rightarrow B$  est séquentiellement continu.

**Preuve.** Supposons que  $T$  n'est pas séquentiellement continu. Alors il existe une suite  $(x_n)_n$  dans  $A$ ,  $x_n \rightarrow 0$  mais  $Tx_n \not\rightarrow 0$ . Posons  $y_n = \frac{1}{2}Tx_n$ , on peut supposer que  $y_n \neq 0$  pour tout  $n$ . D'après (D), il existe un caractère  $f$  de  $B$  tel que  $f(y_n) \rightarrow 0$ . On peut trouver une sous suite  $(y_{n_k})_k$  de  $(y_n)_n$  telle que  $\inf_k |f(y_{n_k})| = \epsilon > 0$ . Posons  $z_{n_k} = \epsilon^{-1}y_{n_k}$ ,  $z_{n_k} \rightarrow_k 0$ . Comme  $A$  est séquentielle, il existe  $z \in \{z_{n_k}\}_k$ ,  $z = z_{n_{k_0}}$  pour un certain  $k_0$ , tel que  $z^i \rightarrow_i 0$ . Il est clair que  $f \circ T$  est un caractère de  $A$ . Soit  $F$  la fermeture de l'enveloppe disquée de  $\{z, z^2, \dots, z^n, \dots\}$ .  $(A_F, \|\cdot\|_F)$  est une algèbre de Banach commutative telle que  $A_F \subset A$ ,  $z \in A_F$  et  $\|z\|_F \leq 1$ . On a  $|f \circ T(x)| \leq \|x\|_F$  pour tout  $x \in A_F$ , en particulier  $|f \circ T(z)| \leq \|z\|_F \leq 1$ . Par construction,  $|f \circ T(z)| = |f(\epsilon^{-1}Tx_{n_{k_0}})| = 2\epsilon^{-1}|f(y_{n_{k_0}})| \geq 2$ , ce qui est impossible.

**Remarque.** Toute algèbre vérifiant la condition (C) satisfait à la condition (D) et de même le corps des complexes satisfait à la condition (D).

### III.2. Algèbres infraséquentielles

Dans [6], T. Husain considère les algèbres infraséquentielles et donne le résultat suivant:

**Théorème III.2.1([6]).** Soit  $A$  une a.l.c. séquentiellement complète. Si  $A$  est infraséquentielle, alors tout caractère de  $A$  est borné.

La démonstration du théorème III.2.1 repose sur le fait déjà cité: étant donné  $z \in A$  tel que  $z^k \rightarrow_k 0$ , on construit une algèbre de Banach commutative  $(B, \|\cdot\|)$  telle que  $B \subset A$ ,  $z \in B$  et  $\|z\| \leq 1$ .

Dans [18], M. Oudadess caractérise les algèbres infraséquentielles à l'aide du rayon de régularité  $\beta$ . Comme conséquence, il obtient le résultat suivant:

**Théorème III.2.2([18]).** Soit  $A$  une a.l.c.  $\beta$ -régulière pseudocomplète. Alors l'ensemble  $M^*$  des caractères de  $A$  est equiborné, i.e., pour tout borné  $B$  de  $A$ ,  $\bigcup\{f(B) : f \in M^*\}$  est borné. En particulier, tout caractère de  $A$  est borné.

Le théorème III.2.2 généralise le théorème III.2.1.

### III.3. Algèbres réelles

L'outil fondamental dans cette partie est la technique de Do. Sin. Sya ([19]) et sa généralisation. Dans [17], S. B. Ng et S. Warner généralisent la technique de Do. Sin. Sya de la façon suivante:

**Théorème III.3.1([17]).** Soit  $K$  un corps archimédien. Soit  $(H, +)$  un groupe topologique abélien, métrisable et complet. Soit  $s : H \rightarrow H$  une application continue telle que  $s(0) = 0$ . Si  $f$  est un homomorphisme de  $(H, +)$  dans  $(K, +)$  tel qu'il existe  $v \in N$ ,  $f(x)^2 \leq v.f(s(x))$  pour tout  $x$  de  $H$ , alors  $f$  est continu.

Dans [17], l'énoncé du théorème III.3.1 est donné lorsque  $K = R$ , mais le résultat reste vrai lorsque on remplace  $R$  par un corps archimédien. Comme conséquence du théorème III.3.1, on a:

**Théorème III.3.2(Lemme de Do. Sin. Sya).** Soit  $A$  une algèbre topologique métrisable complète. Soit  $B$  un  $R$ -sous espace vectoriel de  $A$ . On suppose que  $B$  est fermé et  $\{x^2 : x \in B\} \subset B$ . Soit  $f$  une forme linéaire sur  $B$  telle que  $f(x)^2 \leq f(x^2)$  pour tout  $x$  de  $B$ , alors  $f$  est continue.

Nous donnons un théorème dont la démonstration repose essentiellement sur la généralisation de la technique de Do. Sin. Sya. Comme conséquence, nous obtenons deux théorèmes de T. Husain et S. B. Ng (théorème 1 de [11] et théorème 1 de [10]).

**Théorème III.3.3.**  $A$  et  $B$  étant deux  $R$ -e.v.t. métrisables complets. Soient  $s : A \rightarrow A$ ,  $h : B \rightarrow B$  deux applications,  $s$  étant continue et  $s(0) = 0$ . Considérons  $I_h = \{g \in B^* : g(h(x)) = g(x)^2 \text{ pour tout } x \text{ de } B\}$  ( $B^*$  dual

algébrique de  $B$ ) et supposons que  $I_h$  est non vide. Si  $B$  satisfait à la condition: (P) pour toute suite  $(y_n)_n$  dans  $B$ ,  $y_n \neq 0$ ,  $y_n \rightarrow 0$ , il existe  $f \in I_h$  tel que  $f(y_n) \rightarrow 0$ ; alors toute application linéaire  $T$  de  $A$  dans  $B$  telle que  $T(s(x)) = h(Tx)$  pour tout  $x$  de  $A$ , est continue.

**Preuve.** Supposons que  $T$  n'est pas continue. Il existe une suite  $(x_n)_n$  dans  $A$ ,  $x_n \rightarrow 0$  mais  $Tx_n \not\rightarrow 0$ . On peut supposer que  $x_n \neq 0$  et  $Tx_n \neq 0$  pour tout  $n \geq 1$ . Par hypothèse, il existe  $f \in I_h$  tel que  $f(Tx_n) \rightarrow 0$ . On peut construire à partir de la suite  $(x_n)_n$ , une suite  $(a_m)_m$  telle que  $a_m \rightarrow 0$  et  $\inf_m f(Ta_m) = \epsilon > 0$ . On a  $\epsilon^{-1}a_m \rightarrow 0$ , ainsi  $s(\epsilon^{-1}a_m) \rightarrow 0$  car  $s$  est continue. Posons  $y_m = s(\epsilon^{-1}a_m)$  pour tout  $m \geq 1$ . Alors  $f(Ty_m) = f(T(s(\epsilon^{-1}a_m))) = f(h(T(\epsilon^{-1}a_m))) = f(T(\epsilon^{-1}a_m))^2 \geq 1$  pour tout  $m \geq 1$ .

On définit  $g_k : A^{k+1} \rightarrow A$  pour  $k \geq 0$  :

$$g_0(y_1) = y_1$$

$$g_1(y_1, y_2) = y_1 + s(y_2)$$

...

$$g_k(y_1, \dots, y_{k+1}) = g_1(y_1, g_{k-1}(y_2, \dots, y_{k+1})).$$

En utilisant la même construction faite dans [17], on peut définir une sous suite  $(z_k)_{k \geq 0}$  de  $(y_m)_{m \geq 1}$  telle que pour tout  $k \geq 0$ ,  $(g_{p-k}(z_k, \dots, z_p))_{p \geq k}$  est une suite de Cauchy. Soit  $c_k = \lim_{p \rightarrow \infty} g_{p-k}(z_k, \dots, z_p)$ . Par définition

$g_{p-k}(z_k, \dots, z_p) = z_k + s(g_{p-(k+1)}(z_{k+1}, \dots, z_p))$ , on obtient  $c_k = z_k + s(c_{k+1})$ , ainsi  $Tc_k = Tz_k + T(s(c_{k+1}))$ . On a  $f(Tc_k) = f(Tz_k) + f(T(s(c_{k+1}))) = f(Tz_k) + f(h(Tc_{k+1})) = f(Tz_k) + f(Tc_{k+1})^2 \geq 1 + f(Tc_{k+1})^2$  pour tout  $k \geq 0$ . D'où  $f(Tc_0) \geq 1 + f(Tc_1)^2 \geq 2 + f(Tc_2)^2 \geq k + f(Tc_k)^2$ , i.e.  $f(Tc_0) \geq k$  pour tout  $k \geq 0$ , ce qui est absurde.

Comme conséquence, on a:

**Théorème III.3.4.** Soient  $A, B$  deux  $R$ -algèbres topologiques métrisables et complètes. On suppose que  $B$  satisfait à la condition:

(D): Pour toute suite  $(y_n)_n$  dans  $B$ ,  $y_n \neq 0$ ,  $y_n \rightarrow 0$ , il existe un caractère  $f$  de  $B$  tel que  $f(y_n) \rightarrow 0$ .

Alors toute application linéaire  $T : A \rightarrow B$  vérifiant  $T(x^2) = (Tx)^2$  pour tout  $x$  de  $A$ , est continue.

**Preuve.** On considère  $s : A \rightarrow A$ ,  $s(x) = x^2$  et  $h : B \rightarrow B$ ,  $h(x) = x^2$ . Remarquons que  $f$  de la condition (D) est dans  $I_h$ . On applique alors le théorème III.3.3.

**Théorème III.3.5.** Soit  $A$  une  $R$ -a.l.m.c. séquentiellement complète. Soit  $B$  une  $R$ -algèbre topologique métrisable complète satisfaisant à la condition (D) du théorème III.3.4. Alors toute application linéaire  $T$  de  $A$  dans  $B$  vérifiant  $T(x^2) = (Tx)^2$ ,  $x \in A$ , est bornée.

**Preuve.** On applique le théorème III.3.3 et le théorème de structure de M. Akkar ([1]) affirmant que si  $A$  est une a.l.m.c. séquentiellement complète, alors  $A$  est bornologiquement limite inductive d'algèbres de Fréchet.

**Remarques.**

1. Les théorèmes III.3.4 et III.3.5 sont des améliorations des théorèmes 1 de [11] et 1 de [10].
2. Dans l'énoncé du théorème III.3.3, on peut remplacer  $R$  par un corps archimédien.
3.  $C$  est une  $R$ -algèbre de Banach, mais  $C$  ne satisfait pas à la condition (D) car le seul caractère réel de  $C$  est l'application nulle de  $C$  dans  $R$ .
4. On peut remplacer  $B$  dans les théorèmes III.3.4 et III.3.5 par  $R$ ; c'est une  $R$ -algèbre de Banach qui satisfait à la condition (D).

Comme application du théorème III.3.3, on a:

**Corollaire III.3.6.** Soit  $A$  un  $R$ -e.v.t. métrisable et complet. Soit  $s : A \rightarrow A$  une application continue avec  $s(0) = 0$ . Considérons  $I_s = \{g \in A^* : g(s(x)) = g(x)^2 \text{ pour tout } x \text{ de } A\}$  et supposons que  $I_s$  est non vide. Si  $A$  satisfait à la condition: (P): Pour toute suite  $(y_n)_n$  dans  $A$ ,  $y_n \neq 0$ ,  $y_n \rightarrow 0$ , il existe  $f \in I_s$  tel que  $f(y_n) \rightarrow 0$ ; alors  $A$  possède une unique topologie d'e.v.t. métrisable complet.

**Corollaire III.3.7.** Soit  $A$  une  $R$ -algèbre topologique métrisable complète satisfaisant à la condition:

(D): Pour toute suite  $(y_n)_n$  dans  $A$ ,  $y_n \neq 0$ ,  $y_n \rightarrow 0$ , il existe un caractère  $f$  de  $A$  tel que  $f(y_n) \rightarrow 0$ .

Alors  $A$  possède une unique topologie d'algèbre métrisable complète.

**Preuve.** On considère l'application  $s : A \rightarrow A$ ,  $s(x) = x^2$  et on applique le corollaire III.3.6.

**Remarque.** Le corollaire III.3.7 est une amélioration du corollaire 2 de [11].

### III.4. Algèbres à bases

Dans [8] et [9], T. Husain et J. Liang considèrent les algèbres à bases et donnent les résultats suivants:

**Théorème III.4.1([9]).** Soit  $(A, (p_i)_{i \geq 1})$  une algèbre de Fréchet à base  $(x_i)_{i \geq 1}$  vérifiant:

- (1)  $x_i x_j = x_j x_i = x_j$ ,  $i \leq j$ ;



(2)  $p_i(x_i) \neq 0, p_i(x_{i+1}) = 0$ .  
Alors tout caractère de  $A$  est continu.

**Théorème III.4.2([8]).** Soit  $A$  une algèbre de Fréchet à base orthogonale et inconditionnelle. Alors tout caractère de  $A$  est continu.

Les démonstrations de ces deux théorèmes sont longues, calculatoires et n'utilisent aucun résultat de la théorie spectrale des a.l.m.c. Dans [3], nous avons donné des démonstrations courtes des deux théorèmes III.4.1 et III.4.2 en utilisant une caractérisation du spectre ponctuel ([16, corollaire 5.6]) dans les a.l.m.c. commutatives et complètes.

**Remarque.** Dans [2], on a montré que toute algèbre à base  $(x_i)_{i \geq 1}$  vérifiant les conditions (1) et (2) du théorème III.4.1 est isomorphe algébriquement et topologiquement à l'algèbre  $C^N$ .

Nous donnons deux nouvelles preuves, également courtes, du Théorème III.4.2 en utilisant le lemme de Do. Sin. Sya (théorème III.3.2).

**1ère preuve du Théorème III.4.2.** On pose  $B = \{x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \in A : \alpha_k \in R \text{ pour tout } k \geq 1\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} c_n^{-1}(R)$ .  $B$  vérifie les conditions du théorème III.3.2. Soit  $f$  un caractère de  $A$ . S'il existe  $k \geq 1$  tel que  $f(x_k) \neq 0$ , alors  $f$  est continu ([8]). Supposons que  $f(x_k) = 0$  pour tout  $k \geq 1$ . Soit  $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \in A$ . On considère les suites complexes  $(a_k)_{k \geq 1}$  et  $(b_k)_{k \geq 1}$  définies par:  
 $a_k = 0$  si  $\alpha_k = 0$ ,  $a_k = \alpha_k^{-1} Re(\alpha_k)$  si  $\alpha_k \neq 0$ ;  
 $b_k = 0$  si  $\alpha_k = 0$ ,  $b_k = \alpha_k^{-1} Im(\alpha_k)$  si  $\alpha_k \neq 0$ .  
 $|a_k| \leq 1$  et  $|b_k| \leq 1$  entraînent que  $x_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \alpha_k x_k \in A$  et  $x_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \alpha_k x_k \in A$ . On remarque que  $x_1$  et  $x_2$  sont des éléments de  $B$ . On a  $x = x_1 + x_2$  et  $f(x) = f(x_1) + f(x_2)$ . Le théorème III.3.2 entraîne que la restriction de  $f$  à  $B$  est nulle, d'où  $f$  est nul.

La deuxième preuve du théorème III.4.2 consiste à montrer que toute algèbre  $A$ , de Fréchet à base orthogonale et inconditionnelle, peut être munie d'une involution continue et que tout caractère de  $A$  est hermitien. Avant de donner la deuxième preuve, nous avons les résultats suivants:

**Proposition III.4.3.** Soit  $A$  une a.l.m.c. complète involutive à base orthogonale et hermitienne, alors tout caractère de  $A$  est hermitien.

**Preuve.** D'après la proposition 8 de [7], chaque fonction coordonnée est hermitienne. Soit  $H$  le sous-espace vectoriel réel de  $A$  formé par les éléments hermitiens de  $A$ . On a  $H = \{x \in A : x^* = x\} = \{x \in A : c_n(x^*) = c_n(x) \text{ pour tout } n \geq 1\} = \{x \in A : \overline{c_n(x)} = c_n(x) \text{ pour tout } n \geq 1\} = \{x \in A : c_n(x) \in R \text{ pour tout } n \geq 1\}$ . Soit  $f$  un caractère de  $A$  et  $x \in H$ . Si  $f(x) \neq 0$ , il existe  $c_k \in \{c_n : n \geq 1\}$  ([13]) tel que  $f(x) = c_k(x) \in R$ . Il s'ensuit que la restriction

de  $f$  à  $H$  est à valeurs réelles. Soit  $x \in A$ , en utilisant le fait que  $A = H + iH$ , on obtient que  $f(x^*) = \overline{f(x)}$ .

**Théorème III.4.4.** Soit  $A$  une algèbre de Fréchet involutive à base orthogonale et hermitienne, alors tout caractère de  $A$  est continu.

**Preuve.** Soit  $f$  un caractère de  $A$ . D'après la proposition III.4.3,  $f$  est hermitien.  $f$  se prolonge à  $A^+$  (algèbre obtenue par adjonction de l'unité) en une forme positive, alors  $f$  est continu (théorème 4 de [17]).

**2ème preuve du Théorème III.4.2.** Si  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in A$ , alors  $\bar{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_n x_n$  converge dans  $A$ , ceci provient du fait que la base  $(x_n)_{n \geq 1}$  est inconditionnelle ([14]). On considère l'application  $v : A \rightarrow A$ ,  $v(x) = \bar{x}$ ,  $v$  est une involution sur  $A$ . On remarque que  $\|x\|_r' = \|\bar{x}\|_r'$  pour tous  $r \in N$  et  $x \in A$ , ainsi  $v$  est continue. On a  $\bar{x}_n = x_n$  pour tout  $n \geq 1$ , d'où la base  $(x_n)_{n \geq 1}$  est hermitienne. Il s'ensuit d'après le théorème III.4.4 que tout caractère de  $A$  est continu.

Dans [20], en utilisant un résultat de R. Arens ([5, théorème 6.3]), W. Zelazko obtient le théorème suivant:

**Théorème III.4.5([20]).** Soit  $A$  une algèbre de Fréchet commutative. Si  $M(A)$  est au plus dénombrable, alors tout caractère de  $A$  est continu.

Comme conséquence, on a:

**Corollaire III.4.6([20]).** Soit  $A$  une algèbre de Fréchet à base orthogonale, alors tout caractère de  $A$  est continu.

**Remarque.** Le corollaire III.4.6 est une bonne amélioration du théorème III.4.2 car la base de  $A$  n'est pas nécessairement inconditionnelle.

L'auteur remercie Messieurs les Professeurs M. Akkar et M. Oudadess dont les remarques et suggestions ont contribué à l'amélioration du manuscrit.

## Références

- [1] M. Akkar, Sur la structure des algèbres topologiques localement multiplicativement convexes, C. R. Acad. Sc. Paris, 279 (1974), Série A, 941–944.
- [2] M. Akkar, M. El Azhari et M. Oudadess, Théorèmes de structure sur certaines algèbres de Fréchet, Ann. Sc. Math. Quebec, 11 (1987), 245–252.
- [3] M. Akkar, M. El Azhari et M. Oudadess, Continuité des caractères dans les algèbres de Fréchet à bases, Canad. Math. Bull., 31 (1988), 168–174.
- [4] G. R. Allan, A spectral theory for locally convex algebras, Proc. London Math. Soc., 15 (1965), 399–421.

- [5] R. Arens, Dense inverse limit rings, *Michigan Math. J.*, 5 (1958), 169–182.
- [6] T. Husain, Infrasequential topological algebras, *Canad. Math. Bull.*, 22 (1979), 413–418.
- [7] T. Husain, Positive functionals on topological algebras with bases, *Math. Japonica*, 28 (1983), 683–687.
- [8] T. Husain and J. Liang, Multiplicative functionals on Fréchet algebras with bases, *Canad. J. Math.*, 29 (1977), 270–276.
- [9] T. Husain and J. Liang, Continuity of multiplicative linear functionals on Fréchet algebras with bases, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, 46 (1977), 8–11.
- [10] T. Husain and S. B. Ng, Boundedness of multiplicative linear functionals, *Canad. Math. Bull.*, 17 (1974), 213–215.
- [11] T. Husain and S. B. Ng, On continuity of algebra homomorphism and uniqueness of metric topology, *Math. Zeit.*, 139 (1974), 1–4.
- [12] T. Husain and S. B. Ng, On the boundedness of multiplicative and positive functionals, *J. Austral. Math. Soc.*, 21 (1976), 498–503.
- [13] T. Husain and S. Watson, Topological algebras with orthogonal Schauder bases, *Pacific J. Math.*, 91 (1980), 339–347.
- [14] T. Husain and S. Watson, Algebras with unconditional orthogonal bases, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 79 (1980), 539–545.
- [15] G. A. Joseph, Multiplicative functionals and a class of topological algebras, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 17 (1977), 391–399.
- [16] E. A. Michael, Locally multiplicatively convex topological algebras, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 11 (1952).
- [17] S. B. Ng and S. Warner, Continuity of positive and multiplicative functionals, *Duke Math. J.*, 39 (1972), 281–284.
- [18] M. Oudadess, Rayon de régularité dans les algèbres infrasequentielles, *Canad. J. Math.*, 36 (1984), 84–94.
- [19] Do. Sin. Sya, On semi normed rings with an involution, *Izv. Akad. Nauk. SSSR*, 23 (1959), 509–528.
- [20] W. Zelazko, Functional continuity of commutative  $m$ -convex  $B_0$ -algebras with countable maximal ideal spaces, *Colloq. Math.*, 51 (1987), 395–399.

Ecole Normale Supérieure  
Avenue Oued Akreuch  
Takaddoum, BP 5118, Rabat  
Morocco

E-mail: mohammed.elazhari@yahoo.fr