



HAL
open science

Travaux de Husain et al. sur la continuité automatique des caractères

Mohammed El Azhari

► **To cite this version:**

Mohammed El Azhari. Travaux de Husain et al. sur la continuité automatique des caractères. 2015.
hal-01144875v1

HAL Id: hal-01144875

<https://hal.science/hal-01144875v1>

Preprint submitted on 22 Apr 2015 (v1), last revised 22 Jan 2017 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Travaux de Husain et al sur la continuité automatique des caractères

M. El Azhari

Abstract. We give a survey of Husain, Ng and Liang's results concerning the automatic continuity of algebra homomorphisms. We also give the improvements obtained by Joseph, Akkar, Oudadess, Zelazko and ourselves.

Keywords. automatic continuity of algebra homomorphisms.

Mathematics Subject Classification 2010. 46H40.

Introduction

Nous donnons un aperçu des résultats de T. Husain, S. B. Ng et J. Liang concernant la continuité ou la bornitude des homomorphismes d'algèbres. Nous donnons aussi les améliorations apportées par G. A. Joseph, M. Akkar, M. Oudadess, W. Zelazko et nous mêmes (cf. [2], [3], [16], [19] et [21]).

Nous obtenons d'abord un théorème (théorème 1.6) de continuité séquentielle des homomorphismes sur les algèbres séquentielles. Ce théorème recouvre et généralise les résultats de T. Husain et S. B. Ng ([13, théorème 1]), G. A. Joseph ([16, théorème 2.1]), M. Oudadess ([19, théorème 5.2]), et T. Husain ([7, théorème 2]).

Ensuite, Nous obtenons un théorème (théorème 3.3) de continuité automatique sur les algèbres réelles. Comme conséquence, on a deux résultats de T. Husain et S. B. Ng ([12, théorème 1] et [11, théorème 1]).

Dans la dernière partie consacrée aux algèbres à bases, nous donnons deux nouvelles preuves du résultat de T. Husain et J. Liang affirmant que si A est une algèbre de Fréchet à base orthogonale et inconditionnelle, alors tout caractère de A est continu.

Préliminaires

1. Algèbres topologiques

Une algèbre topologique est une algèbre (sur $K = R$ ou C) munie d'une topologie séparée, compatible avec sa structure d'espace vectoriel et pour laquelle la multiplication est séparément continue. Une algèbre topologique est dite localement convexe (en abrégé a.l.c) si elle munie d'une topologie d'espace localement convexe (en abrégé e.l.c). Si elle métrisable et complète, on dit que c'est une B_0 -algèbre. Une algèbre topologique A est dite localement multiplicativement convexe (en abrégé a.l.m.c) si A est munie d'une topologie définie

par une famille $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de semi-normes d'espace vectoriel vérifiant en outre $p_\lambda(xy) \leq p_\lambda(x)p_\lambda(y)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tous x, y in A . Une a.l.m.c complète métrisable est dite une algèbre de Fréchet. Soit A une algèbre topologique, on note par $M(A)$ l'ensemble des caractères continus (non nuls) de A .

2. Algèbres infraséquentielles et rayon de régularité

Soit A une algèbre topologique.

- (i) A est fortement séquentielle s'il existe un voisinage U de 0 tel que, pour tout $x \in E, x^k \rightarrow_k 0$.
- (ii) A est séquentielle si pour toute suite $(x_n)_n, x_n \rightarrow_n 0$, il existe un x_m tel que $x_m^k \rightarrow_k 0$.
- (iii) A est infraséquentielle si, pour tout borné B de A , il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout x de $B, (\lambda x)^k \rightarrow_k 0$

On a $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.

Soit A une a.l.c. Pour $x \in A$, on pose:

$$\beta(x) = \inf\{r > 0 : ((r^{-1}x)^n)_n \text{ est bornée}\}, \text{ où } \inf \emptyset = \infty.$$

$\beta(x)$ est la régularité de x et β le rayon de régularité. Un élément x est régulier si, et seulement si, $\beta(x) < \infty$. D'après [5], on a:

- (1) $\beta(\lambda x) = |\lambda|\beta(x)$ pour tous $x \in A$ and $\lambda \in K$;
- (2) $\infty > |\lambda| > \beta(x)$ entraîne $(\lambda^{-1}x)^n \rightarrow_n 0$.

Soit A une a.l.c. D'après [19], on a:

- (i) A est infraséquentielle si, et seulement si, β est borné;
- (ii) A est séquentielle si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers 0, il existe un certain m tel que $\beta(x_m) < 1$.
- (iii) A est fortement séquentielle si, et seulement si, β est continue.

3. Algèbres topologiques à bases

soit E un espace vectoriel topologique (en abrégé e.v.t). E est dit à base s'il existe une suite $(x_i)_{i \geq 1}$ d'éléments de E telle que pour tout x de E il existe une suite complexe unique $(\alpha_i)_{i \geq 1}$ tel que : $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$

Pour chaque $i \geq 1$ l'application linéaire $C_i (C_i(x) = \alpha_i)$ est appelée fonction coordonnée . $(x_i)_{i \geq 1}$ est dite une base inconditionnelle de E si $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \alpha_i x_i \in E$ dès que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot x_i \in E$ et $|\alpha_i| \leq 1$

Soit A une algèbre topologique à base $(x_i)_{i \geq 1}, (x_i)_{i \geq 1}$ est dite orthogonale si $x_i x_j = S_{ij} x_i, i, j = 1, 2, \dots$ S_{ij} désigne le symbole de Kronecker .

Soit E un espace de Fréchet dont la topologie est définie par la famille $\{\|\cdot\|_r : r \in \mathbb{N}\}$ de seminormes et soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une base inconditionnelle de E . Soient $f \in E'$ (le dual topologique de E) et $x \in E$,

$$\sup_{f \in \Lambda_r} \sum_{n=1}^{\infty} |C_n(x)| |f(x_n)| < \infty, \quad \Lambda_r = \{f \in E' : \sup_{\|x\|_r \leq 1} |f(x)| \leq 1\}$$

Posons $\|x\|'_r = \sup_{f \in \Lambda_r} \sum_{n=1}^{\infty} |C_n(x)| |f(x_n)|$, alors $\{\|\cdot\|'_r : r \in \mathbb{N}\}$ est une famille de seminormes définissant la topologie originale de E .

Sur les travaux de Husain, Ng et Liang

1. Algèbres séquentielles

Dans [13] , T. Husain et S.B.Ng considèrent les algèbres séquentielles et donnent les résultats suivants :

Théorème 1.1 ([13]). Soit A une a.l.c séquentiellement complète. Si A est séquentielle, alors tout caractère de A est borné.

Corollaire 1.2 ([13]). Soit A une B_0 -algèbre séquentielle. Alors tout caractère de A est continu.

La démonstration du théorème 1.1 est assez longue, elle repose sur le fait suivant : étant donné $z \in A$ tel que $z^k \xrightarrow{k} 0$ on construit une algèbre de Banach commutative $(B, \| \cdot \|)$ telle que $B \subset A$, $z \in B$ et $\|z\| < 1$.

Dans [16], G.A. Joseph donne une démonstration courte du théorème 1.1 en utilisant quelques notions bornologiques dues à G.R. Allan. Le résultat de G.A. Joseph est le suivant :

Théorème 1.3 ([16]). Soit A une a.l.c pseudocomplète. Si A est séquentielle, alors tout caractère de A est borné.

Le théorème 1.3 constitue une amélioration du théorème 1.1.

Remarque. Étant donné $z \in A$ tel que $z^k \xrightarrow{k} 0$. Soit $C = \{z, z^2, \dots, z^n, \dots\}$, C est un borné idempotent. On considère F la fermeture de l'enveloppe disquée de C , alors $(A_F, \| \cdot \|_F)$ est une algèbre de Banach commutative telle que $A_F \subset A$, $z \in A_F$ et $\|z\|_F < 1$. Ainsi une bonne partie de la démonstration de Husain et Ng est simplifiée.

Dans [19], M. Oudadess caractérise les algèbres séquentielles à l'aide du rayon de régularité. Comme conséquence il obtient le résultat suivant :

Théorème 1.4 ([19]). Soit A une a.l.c séquentielle et pseudo-complète . Alors tout caractère de A est séquentiellement continu .

Le théorème 1.4 recouvre et généralise les théorèmes 1.1 et 1.3.

Dans [7] , T. Husain donne le résultat suivant:

Théorème 1.5([7]). Soient A,B deux a.l.c séquentiellement complètes tel que A est séquentielle et B satisfait à la condition suivante : (C) : Pour toute suite $\{y_n\} \subset B$, $y_n \neq 0$, $y_n \not\rightarrow 0$, il existe une suite $\{f_m\}$ de caractères tel que $\inf_{m,n} |f_m(y_n)| = \varepsilon > 0$. Alors tout homomorphisme $T: A \rightarrow B$ est séquentiellement continu .

Le théorème 1.4 ne peut pas se déduire du théorème 1.5 car le corps des complexes \mathbb{C} ne satisfait pas à la condition (C) , en effet soit $\{y_n\}_{n \geq 1}$ la suite de \mathbb{C} définie par $y_n = \frac{1}{n}$ si n est pair et $y_n = 1$ si n impair . Il est clair que $y_n \neq 0$ et $y_n \not\rightarrow 0$. Pour toute suite $\{f_m\}$ de caractère de \mathbb{C} on a $\inf_{m,n} |f_m(y_n)| = 0$ car pour tout m , f_m est ou bien l'application nulle ou bien l'application identique .

En modifiant la condition (C) par la condition (D) on obtient un théorème qui recouvre et généralise les théorèmes 1.1, 1.3 et 1.4 et 1.5.

Théorème 1.6. Soient A,B deux a.l.c tel que A est séquentielle et pseudocomplète et B satisfait à la condition suivante :

(D) : Pour toute suite $\{y_n\} \subset B$, $y_n \neq 0$, $y_n \not\rightarrow 0$, il existe un caractère f de B tel que $f(y_n) \not\rightarrow 0$.

Alors tout homomorphisme $T : A \longrightarrow B$ est séquentiellement continu.

Preuve : Supposons que T n'est pas séquentiellement continu.

Alors il existe une suite $\{x_n\}$ de A , $x_n \longrightarrow 0$ mais $Tx_n \not\longrightarrow 0$.

Posons $y_n = \frac{1}{2} Tx_n$. On peut supposer que $y_n \neq 0$ pour tout n .

D'après (D), il existe un caractère f de B tel que $f(y_n) \not\longrightarrow 0$.

On peut trouver une sous suite $\{y_{n_k}\}_k$ de $\{y_n\}$ telle que

$$\inf_k |f(y_{n_k})| = \varepsilon > 0.$$

Posons $Z_{n_k} = \varepsilon^{-1} x_{n_k}$, $Z_{n_k} \xrightarrow{k} 0$. Comme A est séquentielle,

il existe $Z \in \{Z_{n_k}\}_k$ $Z = Z_{n_{k_0}}$ pour un certain k_0 tel que

$$Z^i \xrightarrow{i} 0$$

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{T} & B & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ & & \vdots & \text{-----} & \uparrow \\ & & & f \circ T & \end{array}$$

Il est clair que $f \circ T$ est un caractère de A . Soit F la fermeture de l'enveloppe disquée de $\{Z, Z^2, \dots, Z^n, \dots\}$.

$(A_F, \|\cdot\|_F)$ est une algèbre de Banach commutative telle que

$A_F \subset A$, $Z \in A_F$ et $\|Z\|_F \leq 1$. On a $|f \circ T(x)| \leq \|x\|_F$ pour

tout $x \in A_F$, en particulier $|f \circ T(Z)| \leq \|Z\|_F \leq 1$. Par

construction

$$|f \circ T(Z)| = |f(\varepsilon^{-1} Tx_{n_{k_0}})| = 2\varepsilon^{-1} |f(y_{n_{k_0}})| \geq 2$$

ce qui est impossible.

Remarque. Toute algèbre vérifiant la condition (C) satisfait à la condition (D) et de même \mathbb{C} satisfait à la condition (D).

2. Algèbres infraséquentielles

Dans [7], T. Husain considère les algèbres infraséquentielles et donne le résultat suivant :

Théorème 2.1 ([7]). Soit A une a.l.c séquentiellement complète. Si A est infraséquentielle, alors tout caractère de A est borné.

La démonstration du théorème 2.1 repose sur le fait déjà cité: Etant donné $Z \in A$ tel que $Z^k \rightarrow 0$ on construit une algèbre de Banach commutative $(B, \| \cdot \|)$ telle que $B \subset A$, $Z \in B$ et $\| Z \| \leq 1$.

Dans [19], M. Oudadess caractérise les algèbres infraséquentielles à l'aide du rayon de régularité β . Comme conséquence il obtient le résultat suivant :

Théorème 2.2 ([19]). Soit A une a.l.c. β -régulière pseudo-complète. Alors l'ensemble M^* des caractères de A est équi-borné, i.e., pour tout borné B de A , $\bigcup \{ f(B) : f \in M^* \}$ est borné. En particulier tout caractère de A est borné.

Le théorème 2.2 généralise le théorème 2.1

3. Algèbres réelles

L'outil fondamental dans cette partie est la technique de Do.Sin.Sya et sa généralisation. Dans [18], S.B.Ng et S.Warner généralisent la technique de Do.Sin.Sya de la façon suivante:

Théorème 3.1 ([18]). Soit K un corps archimédien. Soit $(H,+)$ un groupe topologique abélien métrisable et complet. Soit $S: H \longrightarrow H$ continue telle que $S(0)=0$. Si f est un morphisme de $(H,+)$ dans $(K,+)$ tel qu'il existe $V \in \mathbb{N}$, $f(x)^2 \leq V.f(S(x))$ pour tout x de H , alors f est continu.

Dans [18], l'énoncé du théorème 3.1 est donné lorsque $K=\mathbb{R}$ mais le résultat reste vrai lorsque on remplace \mathbb{R} par un corps archimédien. Comme conséquence du théorème 3.1 on a :

Théorème 3.2 (Lemme de Do.Sin.Sya)

Soit A une algèbre topologique métrisable complète. Soit B un \mathbb{R} -sous espace vectoriel de A . On suppose que B est fermé et $B' = \{x^2 : x \in B\} \subset B$. Soit f une forme linéaire sur B telle que $f(x)^2 \leq f(x^2)$ pour tout x de B , alors f est continue.

Nous donnons un théorème dont la démonstration repose essentiellement sur la généralisation de la technique de Do.Sin.Sya. Comme conséquence, nous obtenons deux théorèmes de T.Husain et S.B.Ng (théorème 1 de [12] et théorème 1 de [11]).

Théorème 3.3. A, B étant deux \mathbb{R} -e.v.t. métrisables complets. Soient $s: A \longrightarrow A$, $h: B \longrightarrow B$ deux fonctions continues tel que $s(0)=h(0)=0$.

Considérons $I_h = \{g \in B^* : g(h(x)) = g(x)^2 \text{ pour tout } x \text{ de } B\}$ (B^* dual algébrique de B) et supposons que I_h est non vide. On suppose que B satisfait à la condition.

(P) pour toute suite $\{y_n\} \subset B$, $y_n \neq 0$, $y_n \not\rightarrow 0$ il existe $f \in I_h$ tel que $f(y_n) \not\rightarrow 0$.

alors toute application linéaire T de A dans B telle que $T(S(x)) = h(Tx)$ pour tout x de A , est continue.

Preuve : Supposons que T n'est pas continue . Il existe une suite $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset A$, $x_n \rightarrow 0$ mais $Tx_n \not\rightarrow 0$. On peut supposer que $x_n \neq 0$ et $Tx_n \neq 0$ pour tout $n \geq 1$. Par hypothèse, il existe $f \in I_h$ tel que $f(Tx_n) \not\rightarrow 0$. On peut trouver une sous-suite $(a_m)_m$ de $(x_n)_n$ tel que $\inf_m f(Ta_m) = \epsilon > 0$. On a $\epsilon^{-1}a_m \rightarrow 0$ ainsi $S(\epsilon^{-1}a_m) \rightarrow 0$ car S est continue. Posons $y_m = S(\epsilon^{-1}a_m)$ pour tout $m \geq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Alors} \quad f(T_m) &= f(T(S(\epsilon^{-1} a_m))) \\ &= f(h(T\epsilon^{-1}a_m)) \\ &= f(T\epsilon^{-1}a_m)^2 \geq 1 \text{ pour tout } m \geq 1 \end{aligned}$$

On définit $g_k : A^{k+1} \rightarrow A$ pour $k \geq 0$

$$g_0(y_1) = y_1$$

$$g_1(y_1, y_2) = y_1 + S(y_2)$$

$$g_k(y_1, \dots, y_{k+1}) = g_1(y_1, g_{k-1}(y_2, \dots, y_{k+1}))$$

En utilisant la même construction faite dans [18] , on peut définir une sous suite $(z_k)_{k \geq 0}$ de $(y_m)_{m \geq 1}$ tel que pour tout $k \geq 0$ $(g_{p-k}(z_k, \dots, z_p))_{p \geq k}$ est une suite de Cauchy.

$$\text{Soit } C_k = \lim_{p \rightarrow \infty} g_{p-k}(z_k, \dots, z_p)$$

$$\text{par définition } g_{p-k}(z_k, \dots, z_p) = z_k + S(g_{p-(k+1)}(z_{k+1}, \dots, z_p))$$

$$\text{on obtient } C_k = z_k + S(C_{k+1})$$

$$\text{ainsi } TC_k = TZ_k = T(S(C_{k+1}))$$

$$\begin{aligned}
 \text{On a} \quad f(\text{TC}_k) &= f(\text{TZ}_k) + f(\text{TS}(C_{k+1})) \\
 &= f(\text{TZ}_k) + f(h(\text{TC}_{k+1})) \\
 &= f(\text{TZ}_k) + (f(\text{TC}_{k+1}))^2 \\
 &\geq 1 + f(\text{TC}_{k+1})^2 \text{ pour tout } k \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d'ou} \quad f(\text{TC}_0) &\geq 1 + f(\text{TC}_1)^2 \\
 &\geq 2 + f(\text{TC}_2)^2 \\
 &\geq k + f(\text{TC}_k)^2
 \end{aligned}$$

i.e $f(\text{TC}_0) \geq k$ pour tout $k \geq 0$

ce qui est absurde .

Comme conséquence on a :

Théorème 3.4

Soient A, B deux R-algèbres topologiques metrisables et complètes.

On suppose que B satisfait à la condition

(D) pour toute suite $\{y_n\} \subset B$, $y_n \neq 0$, $y_n \not\rightarrow 0$ il existe un caractère f de B tel que $f(y_n) \not\rightarrow 0$.

Alors toute application lineaire $T:A \rightarrow B$ verifiant $T(x^2) = (Tx)^2$ pour tout x de A, est continue .

Preuve : On considère $s : A \rightarrow A$ et $h : B \rightarrow B$

$$\begin{array}{ccc}
 x & \mapsto & x^2 \\
 x & \dashrightarrow & x^2
 \end{array}$$

Remarquons que f de la condition (D) est dans I_h . On applique alors le théorème 3.3

Théorème 3.5. Soit A une R -a.l.m.c. séquentiellement complète
Soit B une R -algèbre topologique métrisable et complète satisfaisant à la condition (D) du théorème 3.4. Alors toute application linéaire T de A dans B vérifiant $T(x^2) = (Tx)^2$, $x \in A$, est bornée .

Preuve: On applique le théorème 3.3 et le théorème de structure de M.Akkar ([1]) affirmant que si A est une a.l.m.c séquentiellement complète, alors A est bornologiquement limite inductive d'algèbres de Fréchet .

Remarques .1. Les théorèmes 3.4 et 3.5 sont des améliorations des théorèmes 1 de [12] et 1 de [11] .

2. Dans l'énoncé du théorème 3.3 , on peut remplacer R par un corps archimédien .

3. \mathbb{C} est une R -algèbre de Banach, mais \mathbb{C} ne satisfait pas à la condition (D) car le seul caractère réel de \mathbb{C} est l'application nulle de \mathbb{C} dans R .

4. On peut remplacer B dans les théorèmes 3.4 et 3.5 par R ; c'est une R -algèbre de Banach qui satisfait à la condition (D) .

Comme application du théorème 3.3 on a :

Corollaire 3.6. Soit A un R -e.v.t métrisable et complet .

Soit $S: A \rightarrow A$ une fonction continue. Considérons

$I_S = \{g \in A^* : g(s(x)) = g(x)^2, \text{ pour tout } x \text{ de } A\}$ et supposons

que I_S est non vide . On suppose que A satisfait à la condition

(P) : pour toute suite $\{y_n\} \subset A$, $y_n \neq 0$, $y_n \not\rightarrow 0$,

il existe $f \in I_S$ tel que $f(y_n) \not\rightarrow 0$.

Alors A possède une unique topologie d'e.v.t métrisable complet.

Corollaire.3.7.

Soit A une R-algèbre topologique métrisable complète satisfaisant à la condition (D) : pour toute suite $\{y_n\} \subset A$, $y_n \neq 0$, $y_n \not\rightarrow 0$, il existe un caractère de A tel que $f(y_n) \not\rightarrow 0$

Alors A possède une unique topologie d'algèbre métrisable complète .

Preuve : On considère $s: A \rightarrow A$ et on applique le corollaire 3.6.
 $x \mapsto x^2$

Remarque : Le corollaire 3.7 est une amélioration du corollaire 2 de [12] .

4. Algèbres à bases

Dans [9] et [10] , T.Husain et J. Liang considèrent les algèbres à bases et donnent les résultats suivants

Théorème 4.1 ([10]) . Soit $(A, (P_i)_{i \geq 1})$ une algèbre de Fréchet à base $(x_i)_{i \geq 1}$ vérifiant (1) $x_i x_j = x_j x_i = x_j$ $i \leq j$
et (2) $p_i(x_i) \neq 0, p_i(x_{i+1}) = 0$

Alors tout caractère de A est continu .

Théorème 4.2([9]). Soit A une algèbre de Fréchet à base orthogonale et inconditionnelle. Alors tout caractère de A est continu.

Les démonstrations de ces deux théorèmes sont longues, calculatoires et n'utilisent aucun résultat de la théorie spectrale des a.l.m.c. Dans [3], nous avons donné des démonstrations

courtes des deux théorèmes 4.1 et 4.2 en utilisant le fait que dans une a.l.m.c. A , commutative et complète, λ est dans le spectre de x s'il existe un caractère f continu de A tel que λ est l'image de x par f .

Remarque : Dans [2], on a montré que toute algèbre à base $(x_i)_{i \geq 1}$ vérifiant les conditions (1) et (2) du théorème 4.1 est isomorphe algébriquement et topologiquement à l'algèbre $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Nous donnons deux nouvelles preuves, également courtes, du théorème 4.2 en utilisant le lemme de Do.Sin.Sya (théorème 3.2).

1ère preuve du théorème 4.2 : On pose

$$B = \{x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \in A : \alpha_k \in \mathbb{R} \text{ pour tout } k \geq 1\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n^{-1}(\mathbb{R})$$

B vérifie les conditions du théorème 3.2. Soit f un caractère de A . S'il existe $k \geq 1$ tel que $f(x_k) \neq 0$, alors f est continu (cf: [9]). Supposons que $f(x_k) = 0$ pour tout $k \geq 1$. Soit

$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \in A$. On considère les suites $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$ définies par

$$\begin{aligned} a_k &= 0 \quad \text{si } \alpha_k = 0 & b_k &= 0 \quad \text{si } \alpha_k = 0 \\ a_k &= \frac{\operatorname{Re} \alpha_k}{|\alpha_k|} & b_k &= \frac{\operatorname{Im} \alpha_k}{|\alpha_k|} \quad \text{si } \alpha_k \neq 0 \end{aligned}$$

$|a_k| \leq 1$ et $|b_k| \leq 1$ entraînent que $x_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \alpha_k x_k \in A$ et

$x_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \alpha_k x_k \in A$. On remarque que x_1 et $x_2 \in B$. On a

$x = x_1 + ix_2$ et $f(x) = f(x_1) + if(x_2)$.

Le théorème 3.2 entraîne que la restriction de f à B est nulle, d'où f est nul.

La deuxième preuve du théorème 4.2 Consiste à montrer que toute algèbre A , de Fréchet à base orthogonale et inconditionnelle, peut être munie d'une involution continue et que tout caractère de A est hermitien. Avant de donner la deuxième preuve, nous avons les résultats suivants

proposition 4.3. Soit A une a.l.m.c. Complète involutive à base orthogonale et hermitienne, alors tout caractère de A est hermitien .

Preuve :D'après la proposition 8 de [8] , chaque fonction coordonnée est hermitienne. Soit H le sous espace vectoriel réel de A formé par les éléments hermitiens de A . On a

$$\begin{aligned} H &= \{x \in A : x^* = x\} = \{x \in A : C_n(x^*) = C_n(x) \text{ pour tout } n \geq 1\} \\ &= \{x \in A : \overline{C_n(x)} = C_n(x) \text{ pour tout } n \geq 1\} \\ &= \{x \in A : C_n(x) \in \mathbb{R} \text{ pour tout } n \geq 1\} \end{aligned}$$

Soit f un caractère de A et $x \in A$. Si $f(x) \neq 0$ il existe $C_k \in M(A) = \{C_n : n \geq 1\}$ (cf: [14]) tel que $f(x) = C_k(x) \in \mathbb{R}$.

Il s'ensuit que la restriction de f à H est à valeurs réels. Soit $x \in A$, en utilisant le fait que $A = H + iH$, on obtient que $f(x^*) = \overline{f(x)}$.

Théorème 4.4. Soit A une algèbre de Fréchet involutive à base orthogonale et hermitienne, alors tout caractère de A est continu.

Preuve : Soit f un caractère de A . D'après la proposition 4.3, f est hermitien . f se prolonge à A^+ (algèbre obtenue par adjonction de l'unité) en une forme positive, alors f est continu (cf théorème 4 de [18]).

2ème preuve du théorème 4.2 : Si $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in A$ alors $\bar{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_n x_n$ converge dans A , ceci provient du fait que la base (x_n) est inconditionnelle (cf: [15]).

On considère l'application $V : x \rightarrow \bar{x}$ de A dans A , v est une involution sur A . On remarque que $\|x\|'_r = \|\bar{x}\|'_r$ pour tout $r \in \mathbb{N}$ et $x \in A$, ainsi V est continue . On a $\bar{x}_n = x_n$ pour tout $n \geq 1$, d'où la base (x_n) est hermitienne. Il s'ensuit d'après le théorème 4.4 que tout caractère de A est continu.

Dans [21], en utilisant un résultat de R. Arens ([6, théorème 6.3]), W. Zelazko obtient le théorème suivant:

Théorème 4.5 ([21]) Soit A une algèbre de Fréchet commutative. Si $M(A)$ est au plus dénombrable, alors tout caractère de A est continu.

Comme conséquence, on a:

Corollaire 4.6 ([21]) Soit A une algèbre de Fréchet à base orthogonale, alors tout caractère de A est continu.

Remarque: Le corollaire 4.6 est une bonne amélioration du théorème 4.2 car la base de A n'est pas nécessairement inconditionnelle

L'auteur remercie Messieurs les Professeurs M. Akkar et M. Oudadess dont les remarques et suggestions ont contribué à l'amélioration du manuscrit.

Références

- [1] M. Akkar, Sur la structure des algèbres topologiques localement multiplicativement convexes, C. R. Acad. Sc. Paris 279 (1974), Série A, 941-944.
- [2] M. Akkar, M. El Azhari et M. Oudadess, Théorèmes de structure sur certaines algèbres de Fréchet, Ann. Sc. Math. Québec, 11 (1987), 245-252.
- [3] M. Akkar, M. El Azhari et M. Oudadess, Continuité des caractères dans les algèbres de Fréchet à bases, Canad. Math. Bull. 31 (1988), 168-174.
- [4] M. Akkar, M. El Azhari et M. Oudadess, On a theorem of Husain and Liang, Pub. Math. ENS Takaddoum-Rabat(Maroc), 6 (1990), 43-46.
- [5] G. R. Allan, A spectral theory for locally convex algebras, Proc. London Math. Soc. 15 (1965), 399-421.
- [6] R. Arens, Dense inverse limit rings, Michigan Math. J. 5 (1958), 169-182.
- [7] T. Husain, Infrasequential topological algebras, Canad. Math. Bull. 22 (1979), 413-418.
- [8] T. Husain, Positive functionals on topological algebras with bases, Math. Japonica, 28 (1983), 683-687.
- [9] T. Husain and J. Liang, Multiplicative functionals on Fréchet algebras with bases, Canad. J. Math., XXIX (1977), 270-276.
- [10] T. Husain and J. Liang, Continuity of multiplicative linear functionals on Fréchet algebras with bases, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, 46 (1977), 8-11.
- [11] T. Husain and S. B. Ng, Boundedness of multiplicative linear functionals, Canad. Math. Bull. 17 (1974), 213-215.
- [12] T. Husain and S. B. Ng, On continuity of algebra homomorphism and uniqueness of metric topology, Math. Zeit, 139 (1974), 1-4.
- [13] T. Husain and S. B. Ng, On the boundedness of multiplicative and positive functionals, J. Austral. Math. Soc., 21 (1976), 498-503.
- [14] T. Husain and S. Watson, Topological algebras with orthogonal Schauder bases, Pacific J. Math., 91 (1980), 339-347.
- [15] T. Husain and S. Watson, Algebras with unconditional orthogonal bases, Proc. Amer. Math. Soc., 79 (1980), 539-545.

- [16] G. A. Joseph, Multiplicative functionals and a class of topological algebras, Bull. Austral. Math. Soc. 17 (1977), 391-399.
- [17] E. A. Michael, Locally multiplicatively convex topological algebras, Mem. Amer. Math. Soc., 11 (1952).
- [18] S. B. Ng and S. Warner, Continuity of positive and multiplicative functionals, Duke Math. J. 39 (1972), 281-284.
- [19] M. Oudadess, Rayon de régularité dans les algèbres infraséquentielles, Canad. J. Math., XXXVI (1984), 84-94.
- [20] Do. Sin. Sya, On semi normed rings with an involution, Izv. Akad. Nauk. SSSR, 23 (1959), 509-528.
- [21] W. Zelazko, Functional continuity of commutative m -convex B_0 -algebras with countable maximal ideal spaces, Colloq. Math., 51 (1987), 395-399.

Ecole Normale Supérieure
Avenue Oued Akreuch
Takaddoum, BP 5118, Rabat
Morocco

E-mail: mohammed.elazhari@yahoo.fr